КВАНТ
ЖУРНАЛ

1979

1 - 12

НОМЕР
1

Основан в 1970 году

КВАНТ

1
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

2 *Д. Фукс.* Лента Мёбиуса. Вариации на старую тему

10 *Ю. Соколовский.* Сожжем энергию!

Лаборатория «Кванта»

16 *О. Кабардин, Н. Шефер.* Зонные пластинки

Математический кружок

20 *С. Ащеулов, В. Барышев.* Погоня, столкновение, поимка

Задачник «Кванта»

28 Задачи М541—М545; Ф553—Ф557

30 Решения задач М494, М496—М499; Ф508—Ф511

По страницам школьных учебников

36 *В. Вавилов.* Сечения многогранников

«Квант» для младших школьников

41 Задачи

42 *А. Савин.* Кое-что о выпуклости

Практикум абитуриента

45 *И. Габович.* Векторы помогают на экзамене

50 *Л. Баканина.* КПД тепловых и холодильных машин

53 *А. Александров, А. Забоев, Н. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт

Информация

55 *В. Вавилов, А. Колмогоров, И. Тропин.* ФМШ при МГУ — 15 лет

58 *Ж. Раббот.* Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

59 *В. Асланян, С. Коршунов, Т. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа

◆

62 *В. Фабрикант.* Исаак Ньютон и яблоко

64 **Ответы, указания, решения**

Наша обложка (*с. 26, 27*)

Смесь (*с. 44, 64*)

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

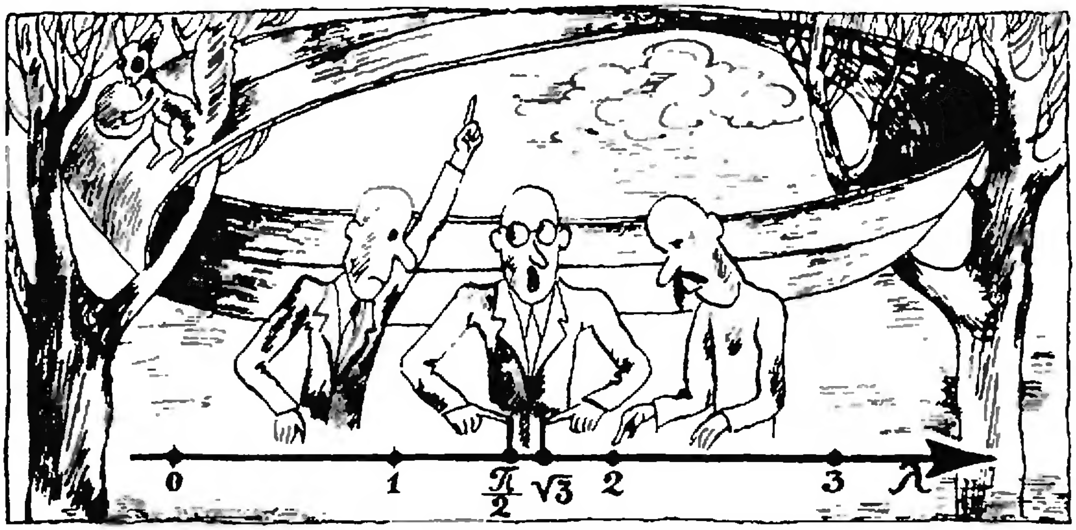
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой странице обложки — модель однополостного гиперболоида. Подробности см. на с. 26.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979



Д. Фукс

Лента Мёбиуса.

Вариации на старую тему

Эта статья вновь возвращает нас к замечательной представительнице односторонних поверхностей — ленте Мёбиуса (см. также «Квант»: 1974, № 3; 1975, № 7; 1978, № 5 и № 6). Получается она из перекрученной на 180° длинной узкой бумажной полоски, склеенной в кольцо. Здесь обсуждается вопрос, какая именно полоска подойдет для изготовления модели ленты Мёбиуса.

Я не буду предлагать вам водить по ленте Мёбиуса пальцем или разрезать ее по средней линии. Речь пойдет о вещах, менее известных. Начну с вопроса:

1. Какой формы бумажную полоску следует взять, чтобы склеить ленту Мёбиуса?

Ожидаемый ответ: полоска должна быть узкой и длинной, с возможно бóльшим отношением длины к ширине. Скажем, из квадратного листа ленты Мёбиуса не сделаешь.

Это верно, но с одной оговоркой, которую легко недооценить: ограничения на размер имеют значение лишь в том случае, когда бумагу запрещается мять. Если же мять бумагу не запрещается, то ленту Мёбиуса можно склеить не только из квадрата, но из прямоугольника любых размеров — склеиваемые стороны могут быть даже во сколько угодно раз длиннее несклеиваемых.

Сделать это можно так (рис. 1). Сложим прямоугольный лист в гармошку, перегнув его четное число раз. Затем из этой гармошки, как из толстой бумажной полоски, склеим ленту Мёбиуса, вставляя соответствующие части гармошки друг в друга. Из рисунка 1 видно, что лист бумаги, из которого склеена лента Мёбиуса, оказался смятым.

Предположим теперь, что бумажную полоску можно изгибать, но не мять. Примем ширину полоски за единицу. Ясно, что чем длиннее полоска, тем легче склеить из нее ленту Мёбиуса. Таким образом, *существует такое число λ, что из полоски длины больше λ ленту Мёбиуса склеить можно, а из полоски длины меньше λ — нельзя* (что будет для полоски, длина которой в точности равна λ, нас не интересует). Очень хотелось бы найти это λ.

Удивительно, но *решение этой задачи до сих пор не известно.*

Здесь я докажу для λ неравенства

$$1{,}57\ldots\approx\frac{\pi}{2}\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3}\approx1{,}73\ldots$$

(при этом наличием склеиваемых участков полоски мы пренебрегаем: предполагается, что края полоски

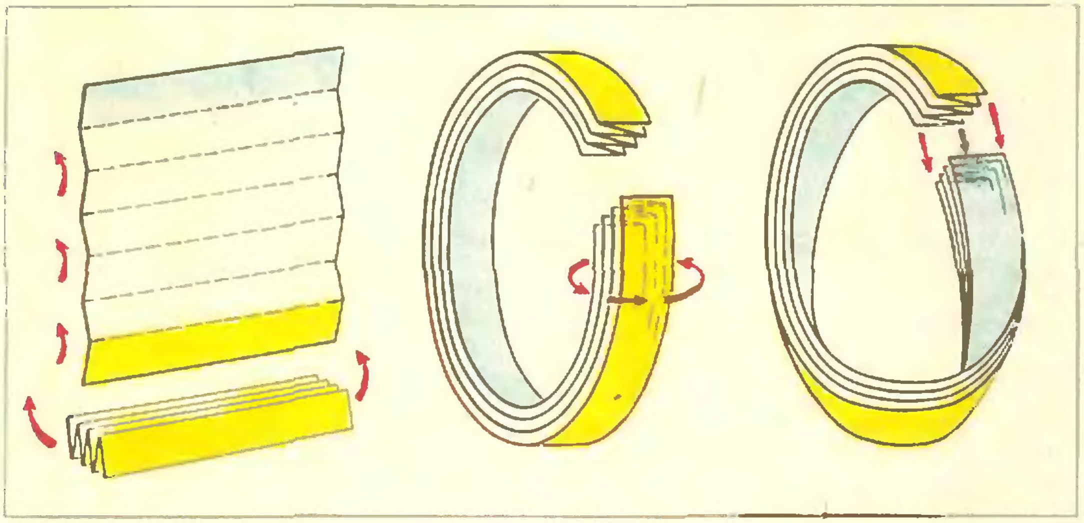


Рис. 1.

склеиваются встык) и постараюсь объяснить, почему не удается вычислить λ точнее.

2. Несмятый лист бумаги — «развертывающаяся поверхность»

Раз требование *не мять бумагу* так важно, посмотрим, каков его математический смысл.

Легко понять, что запрещение мять бумагу значительно ограничивает возможность манипулировать бумажным листом. Например, лист бумаги, не помяв, можно свернуть в трубку или сложить без складки пополам, но нельзя сложить вчетверо (рис. 2). Из листа бумаги, не смяв его, можно сделать конус («фунтик»), но нельзя сделать сферу или даже ее кусочек (рис. 3): прижмите лист бумаги к глобусу, и обязательно появятся складки. Как видно, листу бумаги можно придать далеко не всякую форму.

Поверхности, которые можно сделать из листа бумаги, изгибая, но не сминая его, математики называют *развертывающимися*. (Примеры развертывающихся поверхностей показаны на рисунке 4.) Конечно, в математике развертывающиеся поверхности определяются не так: в математическом языке отсутствуют слова «бумага», «сминать», «сделать». Существует целая теория развертывающихся поверхностей, среди достижений которой — удовлетворительный ответ на вопрос, какими они

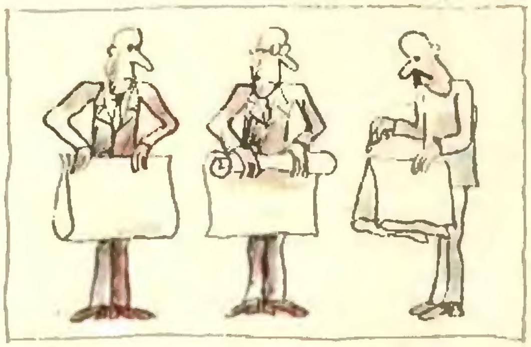


Рис. 2.

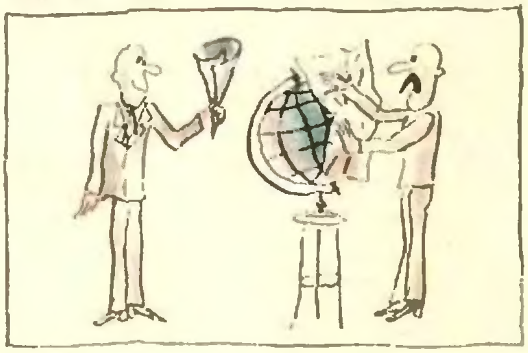


Рис. 3.

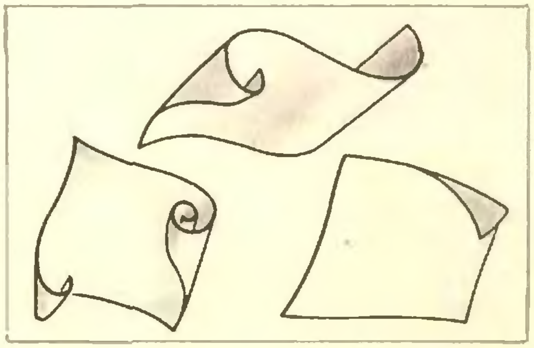


Рис. 4.

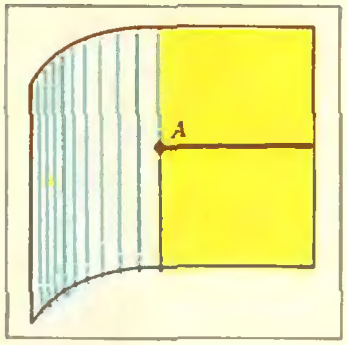


Рис. 5.

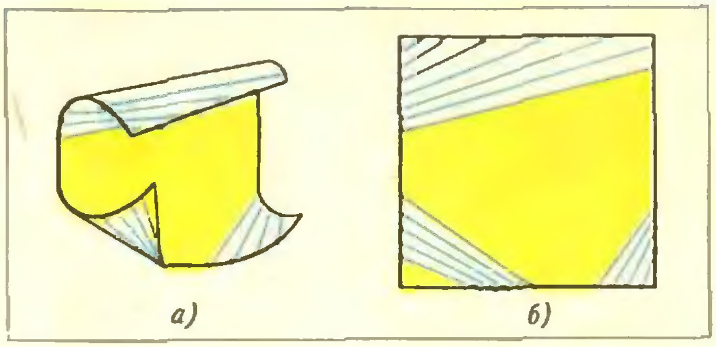

а) б)

Рис. 6.

могут быть; математики называют это «классификацией» (ответ принадлежит Леонарду Эйлеру). Я не собираюсь здесь излагать общую теорию развертывающихся поверхностей: всякая общая теория скучновата. Я приведу только некоторые свойства развертывающихся поверхностей, нужные для дальнейшего. Наше наглядное определение не позволяет их доказать, так что придется рассматривать эти свойства как экспериментальные факты (возьмите лист бумаги и убедитесь в их справедливости).

1. *Через каждую точку A развертывающейся поверхности, не лежащую на ее границе, проходит лежащий на поверхности отрезок, не кончающийся в A.* Иначе говоря, в каждой точке к развертывающейся поверхности (изогнутому, но не смятому листу бумаги) можно приложить спицу так, чтобы она прилегала к поверхности на некотором протяжении по обе стороны от взятой точки. Такой отрезок называется *образующей* поверхности (условимся, что это название относится только к отрезкам максимальной длины, целиком лежащим на поверхности, то есть, к отрезкам, не содержащимся в бóльших отрезках с этим свойством).

2. *Если через точку A, не лежащую на границе поверхности, проходят две различные образующие, причем A не является концом ни одной из них, то достаточно маленький кусок поверхности, окружающий A, является плоским.* В таком случае точку A мы будем называть *плоской*.

3. *Если точка A, не лежащая на границе поверхности, является концом какой-нибудь образующей, скажем, a, то окрестность точки A устроена так. Через точку A проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, скажем, b (рис. 5). Образующая разделяет поверхность на две части. С той стороны от образующей b, с которой находится образующая a, к образующей b прилегает плоский кусок, с другой стороны от b, сколь угодно близко от точки A, имеются не плоские точки.* Точку A в этой ситуации мы будем называть *полуплоской*.

Подчеркнем, что если точка поверхности не является ни граничной, ни плоской, то через нее проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, причем концы этой образующей лежат на границе поверхности.

Примеры. Лист бумаги, свернутый в трубочку или в фунтик, плоских (и полуплоских) точек не имеет. У трубочки образующие составляют семейство параллельных отрезков, у фунтика — семейство отрезков, веером расходящихся из одной точки. Возможны более сложные расположения образующих. Например, образующие и плоские точки развертывающейся поверхности, изображенной на рисунке 6 *а*, показаны на рисунке 6 *б* (на нем поверхность *развернута* в плоский лист бумаги): тонкие синие линии — образующие, а закрашенные области состоят из плоских точек.

Точки, лежащие на границе области плоских точек, являются либо граничными для всей поверхности, либо полуплоскими. Если поверхность сделана из бумажного многоугольника (скажем, из прямоугольника), то плоские точки составляют один или несколько плоских многоугольников, причем у каждого из этих многоугольников вершины лежат на границе поверхности, а стороны либо лежат на границе, либо состоят из полуплоских точек (см. еще раз рисунок 6*б*).

Упражнение 1. Развертывающаяся поверхность сделана из а) квадратного листа со стороной 1; б) круга диаметра 1. Докажите, что хотя бы одна из ее образующих имеет длину не меньше а) 1; б) $\sqrt{3}/2$.

Вернемся к нашему основному сюжету: вычислению λ — *нижней грани* длин бумажных полосок ширины 1, из которых можно склеить несмятую ленту Мёбиуса.

3. Теорема 1: $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2}$

Доказательство. Пусть лента Мёбиуса сделана из бумажной полоски длины l. Намотаем на нее длинную бумажную ленту. Эта лента (толщиной бумаги пренебрегаем) будет составлена из прямоугольников одинаковой длины, каждый из которых принимает форму нашей ленты Мёбиуса. Отметим на длинной ленте прямолинейные образующие и плоские точки (как на рисунке 6*б*). Получится что-то вроде рисунка 7. Картина периодична: все повторяется с периодом, равным $2l$. Можно сказать больше: при сдвиге влево или вправо на l картинка меняется, но строго определенным образом; именно, она переворачивается (т. е. зеркально отражается в средней линии полоски). Области плоских точек представляют собой четырехугольники (которые могут вырождаться в треугольники), ограниченные двумя отрезками противоположных краев ленты и двумя отрезками, проходящими по ленте. Части ленты, не попавшие в эти области, вымощены образующими, концы которых лежат на краях ленты. (Все это следует из свойств 1—3 развертывающихся поверхностей, приведенных в п. 2.) Плоские участки также можно вымостить образующими, так что вся лента будет покрыта непрерывным семейством образующих (рис. 8). Образующие в одинаковых четырехугольниках можно выбирать одинаковым образом, так что описанная выше периодичность сохранится.

Возьмем любую образующую из нашего семейства, скажем, $[AB]$. Если симметрично отразить ее в средней линии полоски и затем перенести в любую сторону (скажем, вправо) на l, то получится отрезок CD, который тоже является образующей из нашего семейства (рис. 9). Заметим (это важно), что $|AC|+|BD|=2l$. При наматывании нашей длинной ленты на ленту Мёбиуса образующие $[AB]$ и $[CD]$ займут одинаковое положение, причем точка A совместится с D, а точка B — с C; другими словами, отрезки AB и CD составят в пространстве угол в 180°. Между $[AB]$ и $[CD]$ располагается непрерывное семейство образующих. При движении от $[AB]$ к $[CD]$ величина угла, который эти образующие составляют в пространстве с $[AB]$, непрерывно изменяется от 0° до 180°. (Напомним, что величина угла между отрезками KL и MP в пространстве определяется как $\widehat{KLQ}$, где Q — такая точка, что отрезки LQ и MP рав-

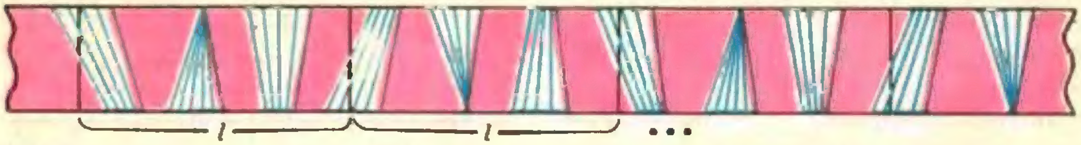


Рис. 7.

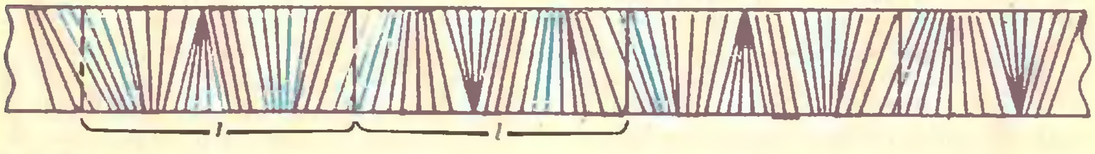


Рис. 8.

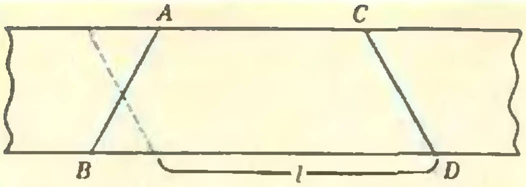


Рис. 9.

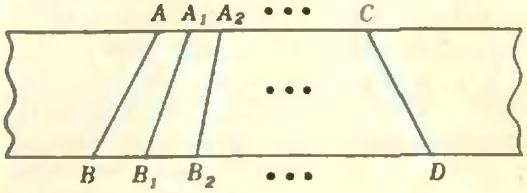


Рис. 10.

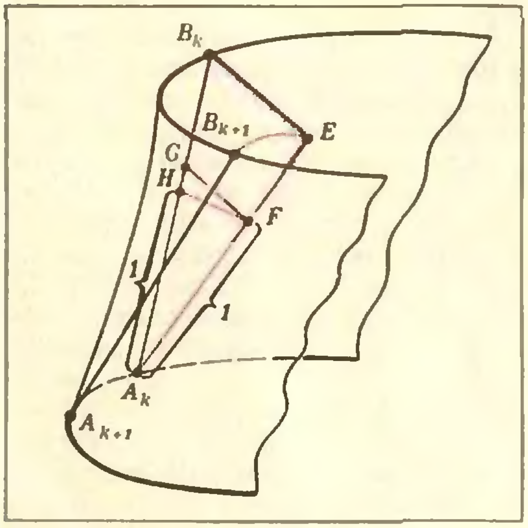


Рис. 11.

ны по длине, параллельны и направлены в одну сторону.)

Возьмем любое n и найдем между $[AB]$ и $[CD]$ такие образующие $[A_1B_1], \ldots, [A_{n-1}B_{n-1}]$, что величина угла между $[AB]$ и $[A_kB_k]$ равна $k\,\frac{180^\circ}{n}$ (точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$ в этом порядке лежат между A и C, а точки $B_1, \ldots, B_{n-1}$ в этом порядке лежат между B и D; см. рис. 10). Длина каждой из образующих больше или равна 1, а величина угла между пространственными положениями двух соседних образующих не меньше $\frac{180^\circ}{n}$. Покажем, что каждая из сумм $|AA_1|+|BB_1|$, $|A_1A_2|+|B_1B_2|$, …, $|A_{n-1}C|+|B_{n-1}D|$ не меньше длины a_{2n} стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Это видно из рисунка 11. На этом рисунке отрезки A_kE и $A_{k+1}B_{k+1}$ равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону, $|A_kF|=|A_kH|=1$ и $[FG] \parallel [EB_k]$ (рисунок 11 сделан в предположении, что $|A_{k+1}B_{k+1}| < |A_kB_k|$; изменения, необходимые в случаях $|A_{k+1}B_{k+1}|=|A_kB_k|$ и $|A_{k+1}B_{k+1}|>|A_kB_k|$, очевидны). Мы видим, что $|A_kA_{k+1}|+|B_kB_{k+1}| = |EB_{k+1}| + |B_kB_{k+1}| \geqslant |EB_k| \geqslant |FG| \geqslant |FH| \geqslant a_{2n}$ (здесь $|A_kA_{k+1}|$, $|B_kB_{k+1}|$, $|EB_{k+1}|$ — длины изображенных на рисунке 11 криволинейных отрезков; эти длины совпадают с длинами отрезков $[A_kA_{k+1}]$, $[B_kB_{k+1}]$ рисунка 10; предпоследнее неравенство следует из того, что $\widehat{FHG}>90^\circ$, а последнее — из того, что $\widehat{FA_kH} \geqslant \frac{180^\circ}{n}$).

Итак, $2l=|AC|+|BD|=(|AA_1|+|BB_1|)+(|A_1A_2|+|B_1B_2|)+\ldots+(|A_{n-1}C|+|B_{n-1}D|) \geqslant na_{2n}$, т. е. $2l$ при любом n не меньше половины периметра правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Значит, $2l$ не меньше половины длины самой этой окружности, то есть π, и $l \geqslant \pi/2$. Теорема доказана.

4. Теорема 2: $\lambda \leqslant \sqrt{3}$

Эта теорема проще предыдущей: для ее доказательства достаточно объяснить, как склеить ленту Мёбиуса из полоски, длина которой больше $\sqrt{3}$. Предположим сначала, что ее длина в точности равна $\sqrt{3}$. Тогда на этой полоске можно расположить два правильных треугольника (рис. 12). Перегнем полоску по боковым сторонам этих треугольников, чередуя направления сгиба (рис. 13; возьмите ножницы и бумагу и проделайте это). Края AB и CD полоски совместятся, причем точка A совместится с точкой D, а точка B — с точкой C. Получится лента Мёбиуса.

При этом построении было нарушено главное правило — не мять бумагу. Но легко понять, что если длина полоски хоть немного больше $\sqrt{3}$, то излом по образующей можно заменить изгибанием,

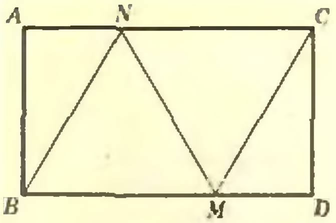


Рис. 12.

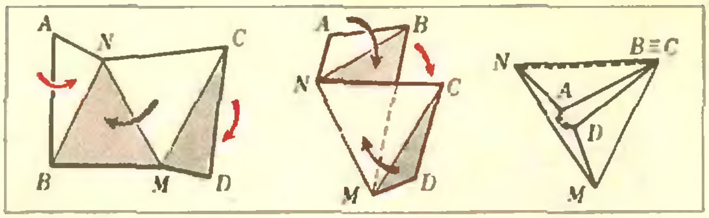


Рис. 13.

Рис. 14.

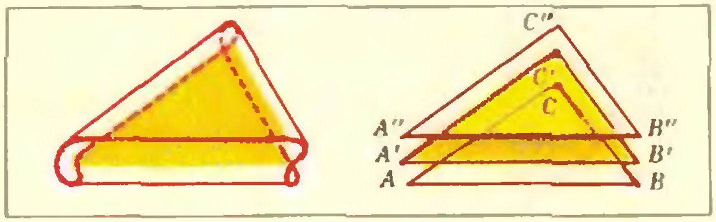


Рис. 15.

производимым на узком участке (рис. 14). Короче говоря, излом вдоль прямолинейного отрезка нам не страшен: его можно заменить близким к нему изгибанием. (Непоправимое сминание бумаги происходит, когда две линии перегиба пересекаются, т. е. когда лист складывается наподобие носового платка — все это известно нам из повседневного опыта.)

Как выглядит получившаяся лента Мёбиуса, показано на рисунке 15. Ее устройство можно представить себе так: три одинаковых правильных треугольника ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ лежат параллельно друг другу, соответствующие вершины над соответствующими вершинами; стороны AB и $A'B'$, $B'C'$ и $B''C''$, $C''A''$ и CA соединены перемычками. Линия склейки проходит по медиане одного из треугольников.

Упражнение 2. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, построенной в доказательстве теоремы 2, схему прямолинейных образующих и плоских точек (подобно рисунку 7).

5. Почему не удается найти λ точнее?

Пока задача не решена, трудно сказать, почему она не решена. Все же иногда в разных нерешенных задачах удается проследить общие трудности, отметить, так сказать, на математической карте труднопроходимые места, что позволяет подчас предсказать успех или неудачу при решении той или иной задачи.

В предыдущем параграфе мы доказали, что λ есть одна из точек отрезка $[\pi/2;\ \sqrt{3}]$. Какая же? Может быть, на этот счет можно высказать хотя бы правдоподобную гипотезу? Я думаю, что $\lambda = \sqrt{3}$, и меня не удивляет, что доказать этого не удается.

Дело вот в чем. Доказательство теоремы 1 оставляет неиспользованным одно важное свойство нашей ленты Мёбиуса — отсутствие у нее *самопересечений*. Самопересекающуюся ленту нельзя сделать из бумаги, но представить себе ее можно: подобно самопересекающейся линии на плоскости она «проходит сквозь себя», причем можно разделить ее на части, каждая из которых самопересечений не имеет.

Допустим, что, говоря о бумажных лентах Мёбиуса, мы с самого начала разрешили им иметь самопересечения. Тогда λ приобретает новый смысл, — новое значение λ будет меньше прежнего или равно ему. При этом *теорема 1 останется верной, и в ее доказательстве не придется менять ни одного слова:* отсутствие самопересечений в этом доказательстве нигде не используется. Что же касается теоремы 2, то, если разрешены самопересечения, ее можно *значительно улучшить. Именно:*

Теорема 3. *Ленту Мёбиуса с самопересечениями можно склеить из полоски любой длины, большей $\pi/2$.*

*Делается это так. Возьмем доста*точно большое нечетное n и построим

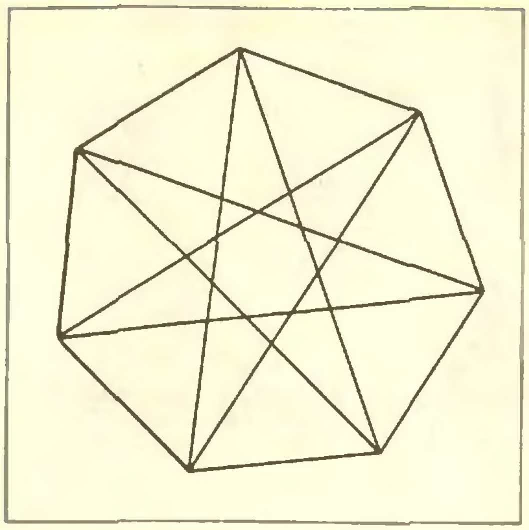


Рис. 16.

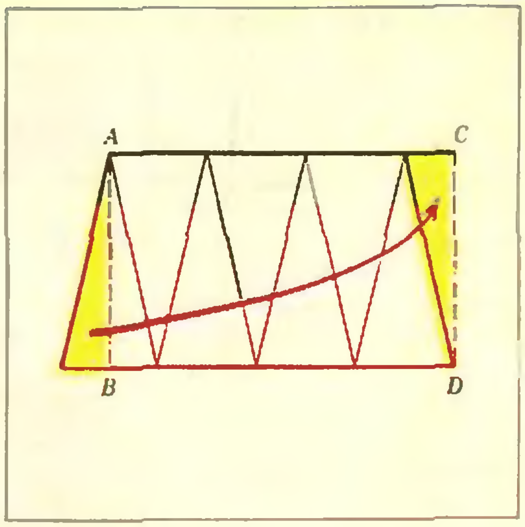


Рис. 17.

правильный n-угольник, вписанный в окружность диаметра 1. Рассмотрим, далее, n содержащих центр окружности треугольников, каждый из которых ограничен стороной и двумя диагоналями n-угольника (рис. 16; здесь $n=7$). Эти треугольники покрывают наш n-угольник, некоторые его места — по нескольку раз. Приложим теперь эти n треугольников друг к другу так, как показано на рисунке 17, после чего отрежем по длинной медиане половину самого левого треугольника и приложим ее к самому правому треугольнику (рис. 17). Получится прямоугольная полоска с отношением длины к ширине, бо́льшим $\pi/2$ и стремящимся к $\pi/2$ при n, стремящимся к ∞ (ширина полоски стремится к 1, а длина — к $\pi/2$). Если последовательно перегнуть эту полоску по всем проведенным на ней линиям, чередуя направления сгиба (рис. 18), то треугольники расположатся как на рисунке 16 (возьмите еще раз ножницы и бумагу и проделайте это). Отрезки AB и CD при этом почти совместятся — между ними окажется только несколько слоев сложенной бумаги. При этом «почти совмещении» точка A совместится с D, а точка B — с C, так что если бы мы смогли «пропустить ленту сквозь себя» и склеить $|AB|$ с $|CD|$, то получилась бы лента Мёбиуса. Если ленту взять чуть более длинной, можно избежать складок, подобно тому как мы это сделали в доказательстве теоремы 2. Что получится, я попробовал изобразить на рисунке 19.

Упражнение 3. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, изображенной на рисунке 19, диаграмму плоских точек и прямолинейных образующих.

Таким образом, если бы мы захотели (для лент без самопересечений) доказать, что $\lambda \geqslant \mu$, где $\mu > \sqrt{3}$, нам пришлось бы в доказательстве обязательно учитывать отсутствие самопересечений. Наличие или отсутствие самопересечений у той или иной фигуры в трехмерном пространстве — это задача «трехмерной геометрии расположения». Весь опыт математики показывает, что задачи о расположении в трехмерном пространстве очень трудны. Ведь эта геометрия включает в себя, скажем, теорию узлов и зацеплений, известную своей неприступностью («Квант», 1975, № 7, с. 6); в ней возможны такие феномены как «рогатая сфера Александера» («Квант», 1977, № 7, с. 22); простейшие ее вопросы, например, можно ли через маленькую дырку вывернуть наизнанку тор, — ставят в тупик нашу интуицию. И вот что удивительно. Казалось бы, в пространствах размерности больше трех проблемы расположения должны стоять еще более остро. Но нет: с ростом размерности эти трудности сглаживаются. Впрочем, «сглаживание» начинается с размерности 5; четырехмерное пространство в из-

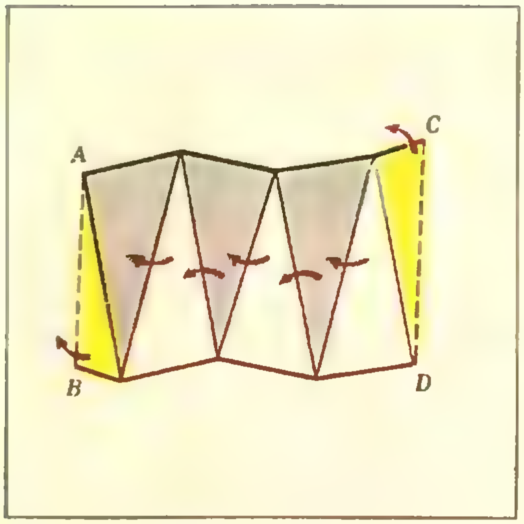


Рис. 18.

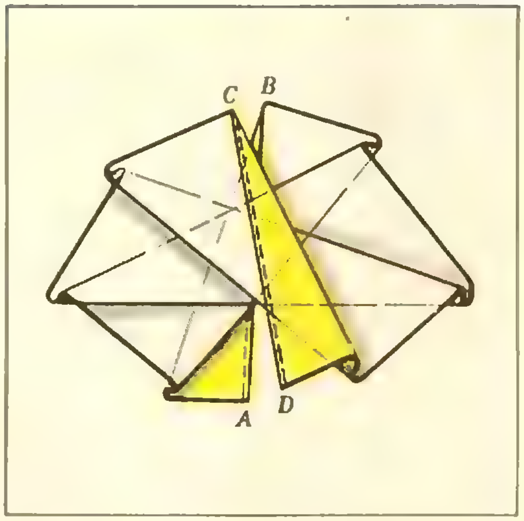


Рис. 19.

вестном смысле не проще трехмерного. К сожалению, здесь я не могу аргументировать только что сказанное, так что прошу поверить мне на слово.

Но вернемся к ленте Мёбиуса. Теорема 1, как мы видели, в действительности относится к самопересекающимся лентам. Маловероятно, чтобы условие отсутствия самопересечений не воздействовало на λ; однако учесть это воздействие не удается, поскольку математика не обладает достаточными техническими средствами для изучения самопересечений в трехмерном пространстве. Напротив, вполне вероятно, что теорема 2 неулучшаема. Ведь улучшить ее — значит придумать новую конструкцию ленты. Опыт показывает, что оптимальные конструкции бывают простыми и гармоничными, каковой и является конструкция из доказательства теоремы 2. Естественно предположить, что если бы лучшая конструкция существовала, она была бы найдена — за столько лет!

Вот почему можно ожидать, что $\lambda = \sqrt{3}$.

6. Заключение: об одной аналогичной задаче

Склеим из бумажной полоски не ленту Мёбиуса, а цилиндр (размеры полоски — любые). Можно ли, не сминая бумаги, вывернуть цилиндр наизнанку? Если цилиндр широк и низок, то, конечно, можно, а если он узок и высок — то нельзя. Обозначим через σ такое число, что если отношение длины полоски к ширине больше σ, то цилиндр вывернуть можно, а если меньше — то нельзя. Доказательства трех следующих теорем (более трудных, чем теоремы 1, 2, 3) я оставляю вам в качестве задачи:

Теорема 1′. $\sigma \geqslant \pi$.

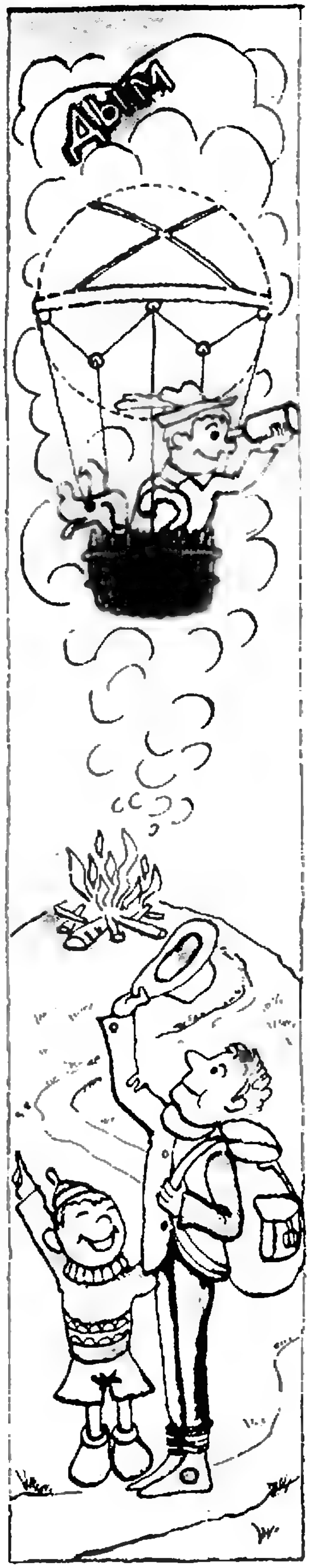
Теорема 2′. $\sigma \leqslant \pi + 2$.

Теорема 3′. *Предположим, что в процессе выворачивания допускаются самопересечения. Тогда любой цилиндр, сделанный из полоски, у которой отношение длины к ширине больше π, можно вывернуть наизнанку (не сминая бумаги).*

Больше ничего об этом не известно.

⁂

В заключение я хочу сказать, что мысль написать эту статью возникла у меня при чтении статьи Б. Гальперина и К. Уивера в журнале «Transactions of the American Mathematical Society» (1977, т. 230), из которой я узнал о современном положении дел с обсуждавшимися проблемами.



Ю. Соколовский

Сожжем энергию!

Беседа любителей физики

Юра. Давайте обсудим такую задачу:

Альпинист и турист запаслись одинаковыми вязанками хвороста. Турист разложил свой костер у подножия холма, альпинист — на его вершине. Последний, признаться, здорово попотел, пока втаскивал вязанку на холм. Говоря языком физики, альпинист совершил механическую работу, сообщив своим дровам потенциальную энергию. Так куда же эта энергия подевалась, когда хворост сгорел?

Коля. Сгореть энергия не могла. Сгорели одни дрова, а их потенциальная энергия обязательно превратилась в какую-нибудь другую.

Юра. В какую же именно?

Коля. Очевидно, в энергию продуктов сгорания — золы и дыма. Они ведь, находясь наверху, тоже обладают потенциальной энергией относительно подножия холма.

Таня. Золу-то действительно можно потом сбросить вниз и заставить совершить механическую работу. А вот дым...

Коля. Ну, а дым устремляется ввысь и способен при этом что-нибудь поднять. Вот наполним этим дымом большой шар, прикрепим корзину...

Таня. Все это мог бы с тем же успехом совершить и дым от костра туриста — он рвется вверх ничуть не хуже. В чем же проявляется тогда дополнительная энергия той вязанки, что пылает на вершине холма? О золе говорить не стоит: ее масса ничтожна по сравнению с массой сгоревших дров. А если вязанку хвороста заменить канистрой керосина, то золы вообще не будет.

Коля. Видно, я поторопился. Почему устремляется вверх горячий дым? Потому что он легче воздуха. На его место опускается более тяжелый холодный воздух. Из-за этого могут возникать разные осложнения. Чтобы в них не запутаться, давайте вообразим, что все происходит не на Земле, а на Луне...

Таня. Как же могут костры гореть на Луне, где нет воздуха?

Коля. Пусть горят не костры, а особые горелки: в одном баллоне — ацетилен, в другом — кислород, оба сжиженные. Где встречаются обе струи — горит огонь. Продукты сгорания, даже газообразные, падают вниз, на лунную почву. При падении они способны совершить такую же по величине работу, какая была затрачена на подъем горючего и окислителя.

Таня. Ты прав, в отсутствие атмосферы все действительно очень просто.

Коля. Но на Земле «всплывание» горячего дыма в холодном воздухе переворачивает все вверх ногами!

Таня. Попробуем разобраться. Вспомните, ведь всплывание мяча в воде вовсе не нарушает закона сохранения энергии. Правда, потенциальная энергия мяча при всплывании растет. Но растет за счет уменьшения потенциальной энергии той воды, которая опускается на место поднимающегося мяча. Так как масса опускающейся воды больше, ее потенциальной энергии хватает еще и на увеличение кинетической энергии мяча, и на совершение работы против сил жидкого трения (с соответствующим нагревом мяча и воды). Одним словом, за счет потенциальной энергии опускающейся воды пополняются и потенциальная, и кинетическая, и внутренняя энергии мяча, а также внутренняя энергия окружающей мяч воды. Здесь все понятно до конца.

Коля. Наш случай не так прост: до сгорания было полено, которое «тонуло» в воздухе, а продукты сгорания в нем «всплывают»! Как понять энергетически превращение «тонущего» во «всплывающее»?

Таня. Не поможет ли нам механическая модель в виде погруженного в воду цилиндра (трубы) с двумя поршнями (рис. 1)? Когда поршни раздвинуты, цилиндр всплывает, когда сближены — тонет. И в обоих случаях он способен производить работу — например, поднимать грузы (рис. 2). Когда цилиндр находится вблизи дна, раздвигаем поршни, а когда он всплывет, сближаем. Так цилиндр и движется периодически вверх-вниз...

Коля. Получается «вечный двигатель»!?

Таня. Вовсе нет: чтобы глубоко под водой раздвигать поршни, надо совершать работу против сил гидростатического давления. А для этого нужен источник энергии.

Коля. Кажется, я уловил сходство с нашими вязанками. Дрова в воздухе «тонут», а дым «всплывает» потому, что объем дыма гораздо больше. Значит, образующийся при горении дым оттесняет во все стороны окружающий воздух, совершая при этом работу против сил атмосферного давления. Совершаться эта работа может не иначе, как за счет части химической энергии сгорающего топлива. И только остальная часть этой энергии идет на повышение температуры.

Таня. Раз подмечена аналогия, доведем ее до логического конца. Мы одну вязанку сжигаем внизу, и дым сам поднимается до вершины — как всплывает цилиндр, когда поршни раздвинуты

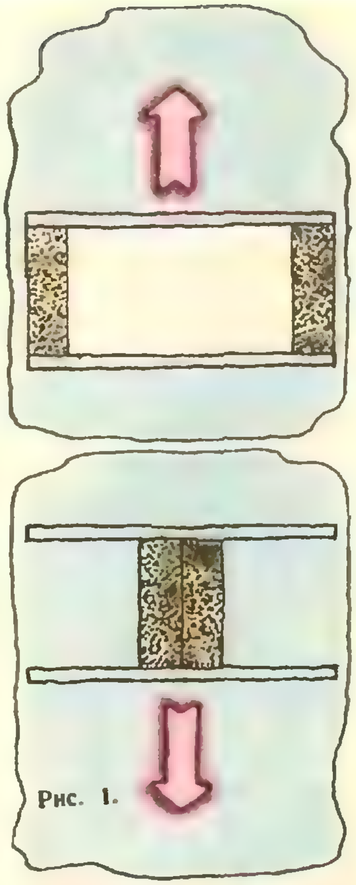


Рис. 1.

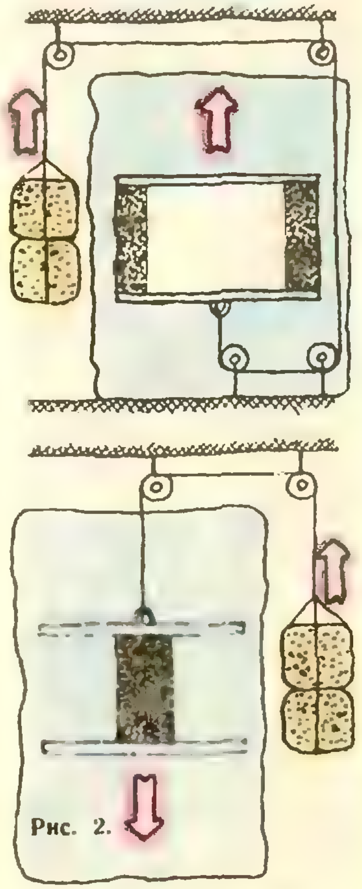
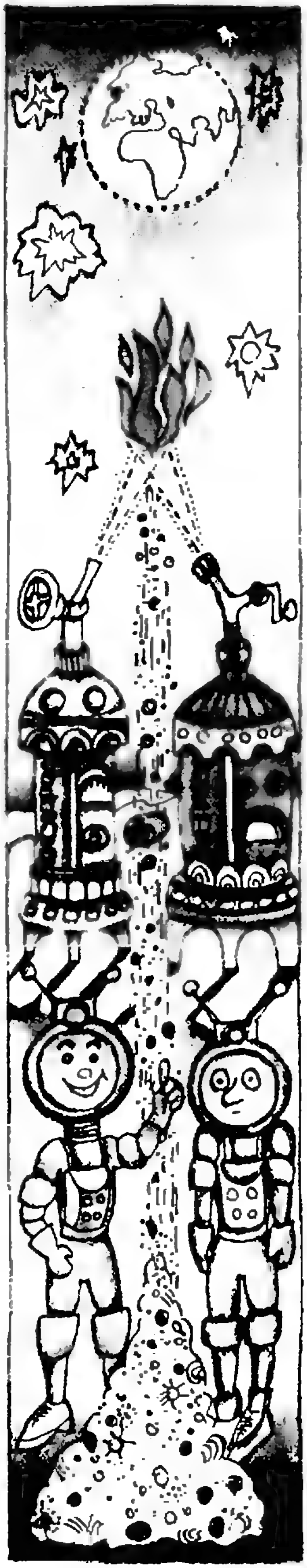


Рис. 2.



близ дна. А другую вязанку мы втаскиваем наверх и сжигаем лишь там, как могли бы поднять цилиндр при сближенных поршнях, а затем их раздвинуть. Совершив работу по поднятию цилиндра, мы облегчаем потом раздвижение поршней: вода у поверхности давит слабее, чем у дна. Точно так же и с вязанками: при горении на высоте, где давление атмосферы меньше, образующемуся дыму гораздо легче раздвигать окружающий воздух, чем при горении внизу. Поэтому меньшая доля химической энергии топлива затрачивается на эту работу и, соответственно, бо́льшая доля ее идет на нагрев.

Коля. Выходит, что костер на вершине дает больше тепла, чем костер внизу? Это и есть разгадка! Работа по подъему дров не пропадает, она возвращается в виде добавочного тепла.

Юра. Не зря ли мы поверили в эту разницу работ по оттеснению дымом окружающего воздуха внизу и на высоте? Работа зависит не только от силы, но и от пути. Когда мы раздвигаем поршни в цилиндре — один раз внизу, а другой вверху — перемещение их одно и то же. Работы при этом, действительно, пропорциональны силам. Здесь Таня была права. Когда же речь пошла о кострах, она ошиблась. Попробую объяснить.

Продукты сгорания вязанок внизу и вверху равны по массе, но вовсе не одинаковы по объему. Вверху давление меньше, там та же масса газа займет значительно больший объем, оттесняя для этого окружающий воздух гораздо дальше. Значит, больше будет и путь, на котором совершается работа против сил атмосферного давления. Как известно, работа при расширении определяется произведением $p\Delta V$ — величины преодолеваемого давления на изменение объема. Начальный объем — объем дров — по сравнению с окончательным объемом продуктов сгорания несоизмеримо мал, так что изменение объема ΔV и окончательный объем V практически равны: $p\Delta V \approx pV$. Но по закону Бойля — Мариотта для равных масс определенного газа произведение pV от давления не зависит, оно одинаково и на вершине, и у подножия холма. Не отличаются, следовательно, и работы оттеснения окружающего воздуха.

Коля. Мне не совсем ясно, как ты здесь применил закон Бойля — Мариотта, не сказав ни слова о температурах.

Юра. При сгорании вязанки дров — все равно, у подножия холма или же на вершине — образуется определенное количество углекислого газа, паров воды и других продуктов сгорания. Эта порция раскаленных газов расширяется до тех пор, пока давление и температура ее не сравняются с давлением и температурой окружающего воздуха. К таким конечным состояниям одинаковых порций газов — с одинаковыми температурами (будем считать, что температуры воздуха у подножия и на вершине одинаковы), но при разных давлениях (из-за разности высот) — можно применить закон Бойля — Мариотта. Тогда получается, что конечные объемы (а значит, и увеличения объемов) пропорциональны давлениям окружающей атмосферы. Следовательно, работы по расширению газов на любых высотах одинаковы.

К о л я. Если работа по расширению газа не зависит от давления, то в чем *причина различия* между теплоемкостями газа C_V при постоянном объеме и C_p при постоянном давлении, о котором нам говорили на факультативных занятиях *)? Как известно, чтобы повысить на один градус температуру данной порции газа в цилиндре с поршнем, где давление постоянно, нужно больше тепла, чем в запаянном сосуде, то есть при неизменном объеме (рис. 3). Добавочное тепло идет на совершение работы: расширяющийся газ поднимает тяжелый поршень.

Т а н я. Да, но это добавочное тепло, как нам только что доказал Юра, не зависит от величины давления. При удвоенном весе поршня та же порция газа займет вдвое меньший объем, приращение этого объема в результате нагрева тоже будет вдвое меньше (рис. 4). Работа останется той же самой.

К о л я. Ты меня убедила. Но теперь я — увы! — перестал понимать, почему *газ не совершает вообще никакой работы*, когда его нагревают в запаянном сосуде. Постоянство его объема обеспечивается не чем иным, как прочностью стенок, то есть оказываемым ими давлением на газ. Чем жестче сосуд, тем слабее меняется объем, но тем *мощнее давление стенок. Работа* по расширению, если она от давления не зависит, не может стремиться к нулю с упрочнением сосуда.

Ю р а. Противодействие стенок нельзя отождествлять с давлением поршня, хотя бы и очень тяжелого. Давление поршня постоянно, а силы реакции стенок растут вместе с деформациями стенок. По мере утяжеления поршня объем газа стремится к нулю, а при увеличении жесткости стенок — к объему недеформированного сосуда... Слишком много существенных различий!

Т а н я. Для наглядности предположим, что один цилиндр с газом закрыт сверху резиновой перепонкой, а другой — поршнем (рис. 5). Дефор-

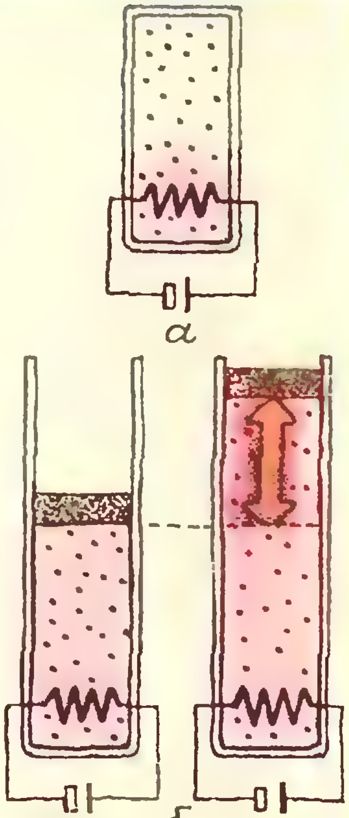


Рис. 3.

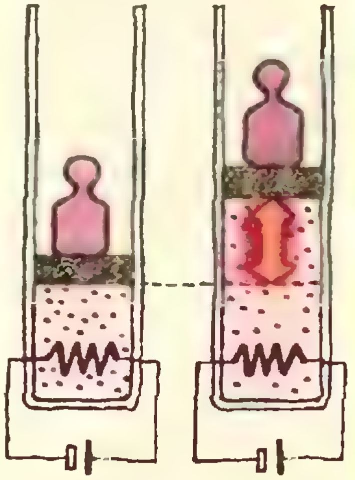


Рис. 4.

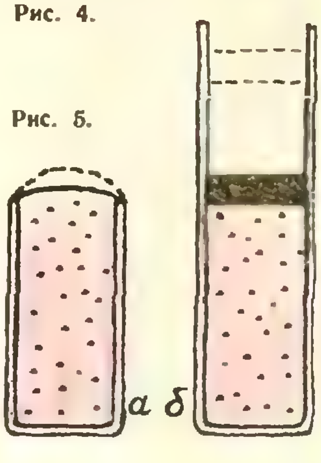


Рис. 5.

---

*) О. Ф. Кабардин, С. И. Кабардина, Н. И. Шефер. Факультативный курс физики. 9 класс. Пособие для учащихся. (М., «Просвещение», 1978.) С. 53—57.

А. П. Кирьянов, С. М. Коршунов. Термодинамика и молекулярная физика. Пособие для учащихся. (М., «Просвещение», 1977.) С. 91—92.

Л. П. Свитков. Термодинамика и молекулярная физика. Факультативный курс. (М., «Просвещение», 1971.) С. 40—41.

Б. М. Яворский, А. А. Пинский. Основы физики. Т. I. (М., «Наука», 1974.) С. 241—243.

мированная перепонка давит на газ точно так же, как и поршень. Если поршень поднимется вдвое выше, объем под ним увеличится в два раза, а давление останется прежним. А когда перепонка прогнется в два раза больше (пунктир), она станет давить вдвое сильней, но объем увеличится чуть-чуть. К чему же приведет повышение температуры газа, скажем, в два раза? В правом цилиндре — к удвоению объема под поршнем с сохранением давления, а в левом — к увеличению деформации перепонки, а значит, и давления, практически вдвое при совсем незначительном увеличении объема. В обоих случаях соблюдается постоянство отношения $\frac{pV}{T}$, но работа по расширению в левом сосуде пренебрежима мала (из-за ничтожности самого расширения), тогда как в правом она существенна и совсем не зависит от веса поршня.

Коля. Я снимаю мое возражение относительно равенства работ против сил атмосферного давления внизу и на вершине холма. Таинственному «превращению в ничто» потенциальной энергии доставленных на вершину дров придется искать новое объяснение.

Таня. Давайте еще раз — и как можно четче! — сформулируем суть проблемы. Мы рассматриваем два опыта с одинаковыми начальными условиями: две тождественные вязанки лежат у подножия холма. Одинаковы и конечные результаты: дрова сгорели, выделены равные количества теплоты, клубы дыма ушли в небо. Но в одном случае была совершена работа по поднятию вязанки дров, а в другом — нет.

Юра. Мне почувствовалась в твоем рассуждении некоторая нечеткость. «Клубы дыма, — говоришь ты, — ушли в небо»?

Таня. Я имела в виду: поднялись вверх — в те разреженные слои атмосферы, где холодный воздух по плотности не отличается от горячего дыма.

Коля. Но такого не может быть: давление дыма всегда равно давлению окружающего воздуха, при поднятии дым расширяется, как и воздух. При разных температурах им ни на какой высоте не сравняться по плотности. Кроме того, температура дыма в процессе подъема его вверх не остается неизменной: дым остывает, отдавая тепло окружающему воздуху. Так что сразу и не сообразишь, до какой высоты поднимаются столбы дыма от обоих костров.

Юра. Не к чему утруждать себя рассмотрением излишних сложностей. За «конечное состояние» лучше принять дым не «в небе», а непосредственно над вершиной холма. Если речь идет о костре альпиниста, это — дым, только что образовавшийся в результате сгорания дров. Он имеет какую-то температуру. С такой же точно температурой возникает дым и от костра туриста. Но пока он поднимется до вершины холма, температура его уменьшится. И не только из-за неизбежного рассеяния тепла в окружающем воздухе. Существует еще и другая, более принципиальная причина охлаждения дыма в процессе его подъема.

Таня. Какая именно?

Юра. Поднимаясь, дым расширяется — в соответствии с уменьшением атмосферного давления — и при этом совершает уже знакомую нам работу «расталкивания» окружающего воздуха. Это происходит за счет внутренней энергии дыма. Уменьшение ее означает понижение температуры.

Таня. Теперь мне все понятно: дым от нижнего костра достигает вершины холма, значительно охладившись. Этим он и отличается от дыма, порождаемого верхним костром.

Юра. Как видим, конечный итог сгорания вязанок у подножия и на вершине вовсе не одинаков: на одной и той же высоте над уровнем моря (чуть выше вершины холма) дым верхнего костра горячее, иными словами, конечная внутренняя энергия у него больше. Этот избыток энергии и получен за счет той механической работы, которую совершил альпинист, доставив свою вязанку к вершине холма.

Коля. Вот теперь мы действительно разгадали тайну «сожженной» энергии.

Юра. Справедливости ради надо сказать, что придуманная тобой аналогия с цилиндрами тоже правильно отражает нашу «проблему костров», но в ином варианте. Надо только предположить, что сгорание происходит не в открытых кострах, а внутри герметических оболочек из какого-нибудь негорючего, весьма гибкого, но почти совсем нерастяжимого материала. (И достаточно легкого для того, чтобы наполненная горячим дымом оболочка могла взлететь в воздух и достигнуть вершины холма без затрат энергии.) В этом случае работа по подъему топлива на вершину вознаграждается потом бо́льшим выделением тепла при его сгорании.

Таня. Фактически мы разобрались в трех различных процессах горения: при отсутствии воздуха (на Луне), внутри замкнутых оболочек и в земной атмосфере. Оказалось, что сообщенная топливу при подъеме его наверх энергия всякий раз находит определенное применение. В первом случае она пополняет потенциальную энергию продуктов сгорания, а во втором — обеспечивает дополнительное выделение тепла при сгорании, а в третьем — идет на увеличение внутренней энергии поднявшегося ввысь дыма.

Возможны, пожалуй, и другие случаи, а значит,—и новые загадки. Но с сегодняшней задачей мы справились!

О. Кабардин, Н. Шефер

Зонные пластинки

Интересные явления, связанные с интерференцией и дифракцией волн различной физической природы, можно наблюдать, если воспользоваться зонными пластинками. Что это такое?

Зоны Френеля

Представим себе, что посередине между точечными источником волн A и приемником волн B находится непрозрачный экран с круглым отверстием (рис. 1). Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждая точка в отверстии экрана является вторичным источником волн, и от каждой из них волны приходят к приемнику. Колебания всех вторичных источников когерентны, поэтому волны, приходящие к приемнику, будут интерферировать. От чего зависит результат интерференции? Воспользуемся методом, предложенным Френелем.

Длина пути от источника до приемника зависит от места прохождения волны через отверстие в экране. Сначала при увеличении радиуса отверстия, начиная с совсем малого, интерференция волн будет приводить к увеличению амплитуды колебаний у приемника B. Так будет до тех пор, пока разность хода Δl по путям AO_1B и AOB не достигнет половины длины волны $\lambda/2$:

$$\Delta l = (|AO_1| + |O_1B|) - (|AO| + |OB|) = \lambda/2.$$

Колебания от точек O и O_1 приходят в точку B в противоположных фазах, поэтому они будут ослаблять друг друга, а не усиливать, как было раньше.

Отверстие, удовлетворяющее этому условию, называется первой *зоной Френеля*. Обозначив через a расстояния от точечного источника до экрана и от приемника до экрана ($|AO| = |OB| = a$), найдем выражение для радиуса r_1 первой зоны Френеля:

$$r_1 = \sqrt{|AO_1|^2 - |AO|^2} = \sqrt{\left(a + \frac{\lambda}{4}\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{16}}.$$

Если выполняется условие $a \gg \lambda$, то

$$r_1 \approx \sqrt{a\lambda/2}.$$

Увеличим радиус отверстия до такого значения r_2, при котором разность хода по путям AO_2B и AOB равна длине волны λ:

$$\Delta l = (|AO_2| + |O_2B|) - (|AO| + |OB|) = \lambda.$$

Кольцевую зону с внутренним радиусом $r_1 = |OO_1|$ и внешним $r_2 = |OO_2|$ называют второй зоной Френеля. Внешний радиус r_2 второй зоны Френеля в рассматриваемом случае равен

$$r_2 = \sqrt{|AO_2|^2 - |AO|^2} = \sqrt{(a + \lambda/2)^2 - a^2} = \sqrt{2(a\lambda/2) + \lambda^2/4} \approx \sqrt{2a\lambda/2} \approx \sqrt{2}\, r_1.$$

Аналогично можно определить внешний радиус третьей, четвертой

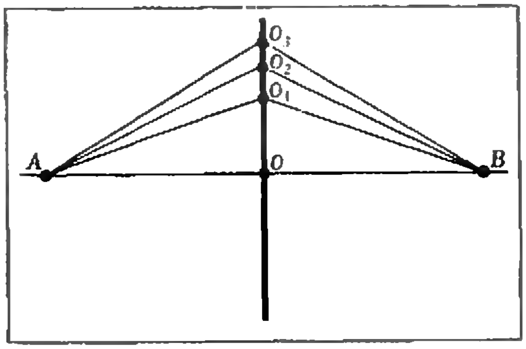


Рис. 1.

и т. д. зон Френеля:

$$r_3 \approx \sqrt{3}\, r_1,\ r_4 \approx \sqrt{4}\, r_1, \ldots, r_n \approx \sqrt{n}\ r_1.$$

Можно доказать, что площади всех зон равны между собой; следовательно, на каждой зоне имеется одинаковое количество вторичных источников волн. От источников, находящихся в соответствующих точках двух соседних зон (например, на внешних краях), волны приходят к приемнику с разностью хода $\lambda/2$, то есть выполняется условие минимума интерференции волн. Значит, при двух открытых зонах Френеля амплитуда колебаний у приемника в точке B в результате интерференции волн должна быть равной нулю!

При более строгом рассмотрении учитывается зависимость амплитуды колебаний от направления распространения волн, вследствие чего амплитуда колебаний при интерференции волн двух соседних зон Френеля оказывается отличной от нуля, хотя и очень малой.

Если в отверстии, содержащем несколько зон Френеля, закрыть, например, все четные зоны и оставить открытыми нечетные зоны, то амплитуда результирующих колебаний должна быть значительно больше, чем при полностью открытом отверстии. Этот вывод кажется противоречащим здравому смыслу: площадь отверстия уменьшается, а амплитуда колебаний увеличивается! Не нарушается ли при этом закон сохранения энергии?

Нарушения закона сохранения энергии в этом случае, разумеется, нет. Мы проанализировали результат интерференции волн лишь в точке B около приемника и не интересовались, к каким результатам приводит интерференция волн в других точках пространства. Оказывается, условие максимума интерференции волн выполняется лишь для точки B, а в окрестностях ее интерференция приводит к уменьшению амплитуды колебаний. Таким образом, происходит лишь перераспределение энергии волн в пространстве.

Экран, состоящий из последовательно чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, соответствующих зонам Френеля, называют *зонной пластинкой*. Как мы уже видели, зонная пластинка по своему действию подобна собирающей линзе. Особенно наглядно это сходство можно продемонстрировать в опытах со световыми волнами.

Зонная пластинка — линза

Малая длина световой волны требует изготовления зонной пластинки с очень малыми радиусами зон. Поэтому способы нанесения темных колец на стекло или процарапывания прозрачных колец на непрозрачной основе не позволяют при самодельном изготовлении получить зонные пластинки высокого качества. Более удобным является фотографический метод изготовления зонной пластинки: сначала изготовляется чертеж зон Френеля в большом масштабе, а затем фотографируется на пленку. Как это можно сделать?

Воспользуемся аналогией между зонной пластинкой и собирающей линзой. Как известно, если на линзу падает параллельный световой пучок, она его фокусирует в точку, называемую фокусом линзы; расстояние от фокуса до линзы называется фокусным расстоянием линзы. Аналогично ведет себя и зонная пластинка.

Параллельный пучок света с длиной волны λ зонная пластинка с радиусом первой зоны Френеля r_1 фокусирует в точке на расстоянии f от пластинки, определяемом из выражения

$$r_1 = \sqrt{f\lambda}\,.$$

Если $f = 1$ м и $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, радиус первой зоны на фотопленке должен быть равен

$$r_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}75\ \text{мм}.$$

Радиус R_1 первой зоны на чертеже можно выбрать в 20 раз большим: $R_1 = 1{,}5$ см; радиусы границ последующих зон тогда будут равны, соответственно,

$$1{,}5\sqrt{2}\ \text{см},\ 1{,}5\sqrt{3}\ \text{см}, \ldots,\ 1{,}5\sqrt{n}\ \text{см}.$$

Для получения пластинки удовлетво-

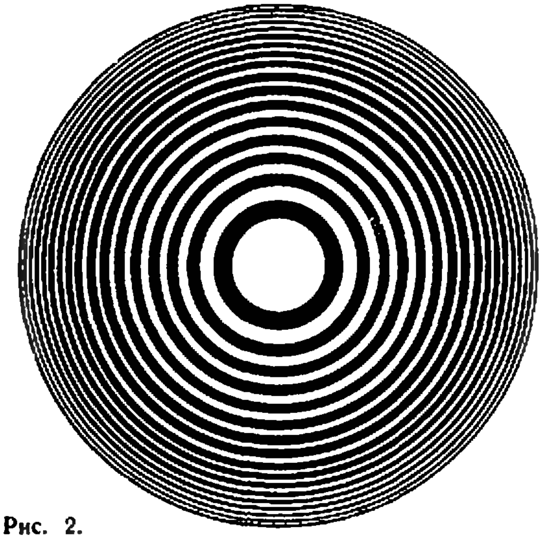


Рис. 2.

рительного качества чертеж должен содержать 25—100 зон.

Приготовив таблицу радиусов границ зон, приступайте к изготовлению чертежа. Для этого лист ватмана укрепите кнопками на листе фанеры или на чертежной доске. С помощью циркуля и рейсфедера нанесите черной тушью систему концентрических окружностей. Затем зоны через одну зачерните тушью (рис. 2).

Фотографируя чертеж с различных расстояний, можно получить зонные пластинки с различными фокусными расстояниями.

Фотографирование следует проводить при хорошем солнечном освещении, тщательно наводя на резкость и выбирая правильную экспозицию.

После проявления, закрепления и просушки выберите наиболее удачные негативы и вставьте их в рамки для диапозитивов. Теперь можно приступить к опытам с зонными пластинками.

В затемненном помещении расположите настольную лампу напротив белого экрана на расстоянии 2—3 м. Перемещая зонную пластинку между лампой и экраном, найдите такое их взаимное расположение, при котором на экране получится четкое изображение нити лампы. Изменяя положение зонной пластинки относительно экрана, получите увеличенное или уменьшенное изображения нити лампы. Измерив расстояния от лампы до зонной пластинки и от зонной пластинки до экрана, по формуле линзы вычислите фокусное расстояние зонной пластинки.

Опыты со звуковыми волнами

Для опытов со звуковыми волнами зонные пластинки можно изготовить из тонкого пенопласта или нескольких слоев картона.

Радиус r_1 первой зоны Френеля для звуковой волны длиной 3,2 см при удалении источника звука и приемника от экрана на расстояние $a = 10$ см равен

$$r_1 \approx \sqrt{a\lambda/2} = 4 \text{ см}.$$

Внешние радиусы двух следующих зон тогда равны, соответственно,

$$r_2 \approx \sqrt{2}\, r_1 \approx 5{,}67 \text{ см},$$

$$r_3 \approx \sqrt{3}\, r_1 \approx 6{,}93 \text{ см}.$$

На квадратном листе картона или пенопласта нанесите с помощью циркуля окружности радиусов r_1, r_2, r_3, и затем вырежьте три зоны Френеля — вы получите зонную пластинку. Для проведения опытов нужно сделать специальные перемычки, позволяющие закрепить вторую зону при удалении из экрана первой и третьей зон.

Опыты с зонной пластинкой можно проводить в школьном кабинете физики. Установите на столе звуковой генератор и подключите к его выходу громкоговоритель. Чтобы источник звуковых волн был по своим свойствам близок к точечному, перед самым динамиком поставьте толстый экран из звукопоглощающего материала (например, пенопласта или картона), с круглым отверстием диаметром 2—3 см. Напротив этого отверстия поставьте электродинамический микрофон и соедините его выводы со входом усилителя низкой частоты (УНЧ). К выходу УНЧ подключите демонстрационный амперметр или электронный осциллограф (рис. 3 и 4).

Установив микрофон на расстоянии 20 см от источника звука, включите звуковой генератор. Ручками управления на передней панели генератора установите частоту электрических колебаний на его выходе,

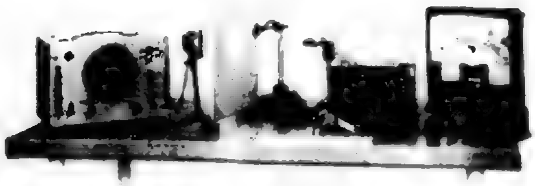


Рис. 3.

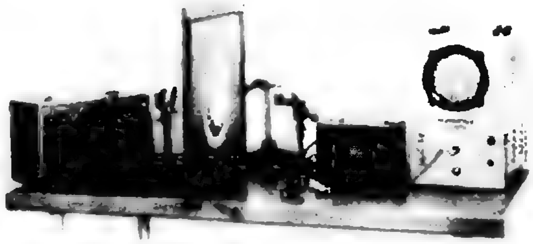


Рис. 4.

соответствующую длине звуковой волны в воздухе 3,2 см:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ м/с}}{3{,}2 \text{ см}} = 10{,}6 \text{ кГц}.$$

Регулировкой напряжения на выходе звукового генератора и усиления УНЧ добейтесь отклонения стрелки демонстрационного амперметра примерно на половину шкалы.

Поместите между источником звука и микрофоном экран с закрытыми отверстиями и убедитесь, что звуковые волны частично поглощаются экраном — отклонение стрелки амперметра уменьшается.

Теперь откройте первую зону Френеля. При правильном расположении источника звука и микрофона относительно экрана с отверстием амплитуда звуковых колебаний при одной открытой зоне Френеля оказывается почти в два раза большей амплитуды колебаний при отсутствии экрана!

Еще более удивительный результат получается при открывании двух зон Френеля — первой и второй. Хотя диаметр отверстия в экране увеличивается, амплитуда звуковых колебаний, регистрируемых микрофоном, существенно уменьшается! Открывание третьей зоны вновь приводит к увеличению амплитуды звуковых колебаний.

Самое большое возрастание амплитуды звуковых колебаний обнаруживается при помещении между источником звука и микрофоном зонной пластинки, в которой открыты первая и третья зоны Френеля, но закрыта вторая зона.

Зонная пластинка для сантиметровых электромагнитных волн

Все опыты, выполненные со звуковыми волнами, можно проделать и с электромагнитными волнами сантиметрового диапазона, используя тот же самый экран с вырезанными в нем кольцевыми зонами. Чтобы экран был непрозрачным для электромагнитных волн, его необходимо оклеить металлической фольгой.

В расчетах размеров зон Френеля для опытов со звуковыми волнами не случайно была выбрана длина волны 3,2 см, так как именно такова длина электромагнитных волн, излучаемых школьным СВЧ-генератором электромагнитных волн.

Для того чтобы источник и приемник электромагнитных волн были по своим свойствам близкими к точечным, нужно изготовить металлические экраны с круглыми отверстиями диаметром 2—3 см в центре и укрепить их на рупорах антенн генератора и приемника.

С. Ащеулов, В. Барышев

Погоня, столкновение, поимка

Ровно в полдень часовая и минутная стрелки часов совпадают. Когда они совпадут в следующий раз? Несмотря на простоту, эта старая задача весьма поучительна. Решим ее.

Пусть ν_1 и ν_2 — частоты вращения часовой и минутной стрелок. Очевидно, $\nu_1 = \frac{1}{12}\ \text{ч}^{-1}$, $\nu_2 = 1\ \text{ч}^{-1}$. Если t — момент времени следующего после полудня совпадения стрелок, то $\nu_2 t = \nu_1 t + 1$, ибо к моменту t минутная стрелка совершит на один оборот больше часовой. Следовательно,

$$t = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \approx 1\ \text{ч}\ 5\ \text{мин}\ 27\ \text{с}.$$

Мы видим, что величина t зависит лишь от разности частот $\nu_2 - \nu_1$. Это наводит на мысль, что решение можно получить, рассуждая по-другому. За время между двумя последовательными совпадениями минутная стрелка совершает один оборот *относительно* часовой. Поскольку частота вращения минутной стрелки относительно часовой равна $\nu_{21} = \nu_2 - \nu_1$, можем сразу заключить, что

$$t = \frac{1}{\nu_{21}} = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}.$$

Эта задача относится к задачам следующего типа. В некоторой системе отсчета заданы характеристики движения нескольких тел. Требуется найти, как положения тел меняются друг относительно друга с течением времени. На этом занятии математического кружка мы познакомимся с несколькими такими задачами. Все они будут решены с помощью одного и того же примера: выбора подходящей системы координат.

1. Автомобили у перекрестка

Автомобили A и B движутся равномерно с одинаковыми скоростями по прямым дорогам 1 и 2, пересекающимся в точке O. Нужно определить кратчайшее расстояние между автомобилями, если известны их начальные положения ($|AO| = a$, $|BO| = b$) *и угол* α *между дорогами (рис. 1 а).*

Рассмотрим движение автомобиля B с точки зрения наблюдателя, находящегося в автомобиле A. Как известно, скорость такого движения равна разности $\vec{V}_B - \vec{V}_A$ и постоянна по величине и направлению *). Это значит, что автомобиль B движется относительно автомобиля A по некоторой прямой *3*. (На рисунке 1 *б* прямая *3* изображена пунктиром; она нарисована в системе отсчета, связанной с автомобилем A.) Следовательно, автомобили находятся ближе всего друг к другу в тот момент, когда автомобиль B оказывается в точке B', являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую *3*. Длина отрезка AB' равна искомому кратчайшему расстоянию между автомобилями.

Чтобы изобразить положение отрезка AB' в неподвижной системе отсчета, сместим его конец B' параллельно дороге *1* так, чтобы он попал в точку B_1 на дороге *2*, и проведем $[B_1A_1] \parallel [B'A]$. Точки A_1 и B_1 являются искомыми положениями автомобилей (рис. 1 *б*).

Очевидно, прямая *3* параллельна биссектрисе угла между дорогами. Нетрудно подсчитать, что $|A_1B_1| = |AB'| = |a-b|\sin\frac{\alpha}{2}$.

2. Охотник и лиса

Лиса бежит с постоянной скоростью $\vec{V}_1$ *по прямой* l. *Неподвижный охотник замечает лису, когда она находится в ближайшей от него точке прямой* l *(на расстоянии* a*). Как должен двигаться охотник, чтобы произвести выстрел с кратчайшего расстояния, если он может бежать со скоростью, равной по величине* $|\vec{V}_2|$? *Каково это кратчайшее расстояние?*

Нетрудно сообразить, что при условии $|\vec{V}_2| \leqslant |\vec{V}_1|$ охотник должен бежать прямолинейно. Рассмотрим движение охотника в системе отсчета, связанной с лисой, т. е. движущейся со скоростью $\vec{V}_1$ (рис. 2 *а*). Скорость $\vec{V}_{21}$ охотника в этой системе равна $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построим вектор $\vec{V}_{21}$. Начало вектора $(-\vec{V}_1)$ поместим в точку B (исходное положение охотника). Начало вектора $\vec{V}_2$ — в конец O вектора $(-\vec{V}_1)$. Если начала всех векторов $\vec{V}_{21}$ находятся в точке B, то их концы при всевозможных направлениях движения охотника ле-

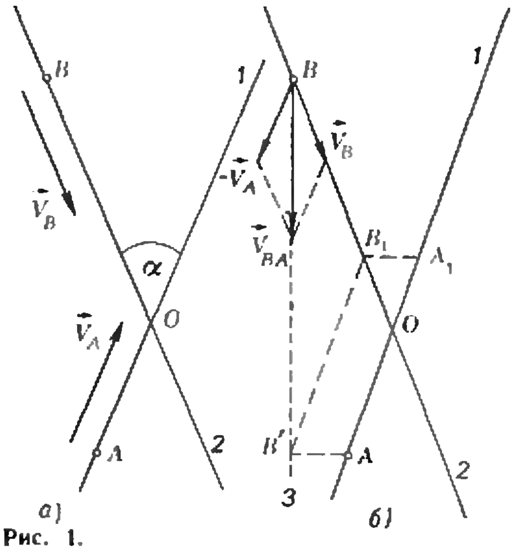


Рис. 1.

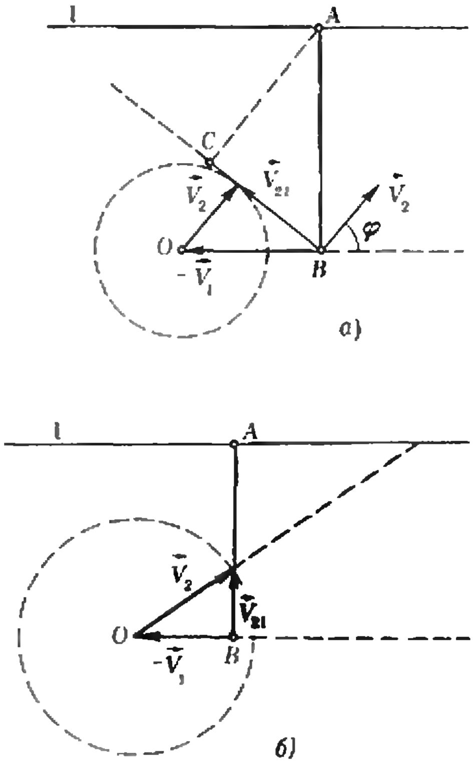


Рис. 2.

---

*) «Физика 8», п. 8.

жат на окружности радиуса $|\vec{V}_2|$ с центром в точке O.

Во введенной системе отсчета прямая, по которой будет бежать охотник, должна иметь общие точки с этой окружностью и проходить как можно ближе к точке A.

Если $|\vec{V}_2| < |\vec{V}_1|$, то этим условиям удовлетворяет касательная, проведенная из точки B к окружности. В этом случае искомое направление движения охотника (угол φ; см. рис. 2 *а*) и кратчайшее расстояние до лисы $R_{\min}$ таковы ($[AC) \perp [BC]$):

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1|}, \quad R_{\min} = |AC| = a\sin\varphi.$$

Если $|\vec{V}_2| > |\vec{V}_1|$, то охотник может бежать в пределах заштрихованного сектора в любом направлении, если движется прямолинейно (рис. 2 *б*): условия задачи не запрещают охотнику достичь какой-то точки лисьей тропы раньше, чем через эту точку пробежит лиса, и в этом месте спокойно подождать лису *).

Наконец, при условии $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$, человек может сколь угодно близко подбежать к лисе, выбрав соответствующий малый угол φ.

Читателю предлагается самому доказать эти утверждения и нарисовать нужные рисунки.

3. Пароход и катер

*Перпендикулярно к прямолинейному берегу моря проходит канал. Вдоль берега с постоянной скоростью $\vec{V}$ плывет пароход. Катер начинает движение по каналу из точки B, когда пароход находится в точке A — у устья канала. С какой постоянной скоростью $\vec{u}$ должен двигаться катер, чтобы на максимальное сближение с пароходом (до того, как катер вышел в море) потребовалось максимальное время**)?

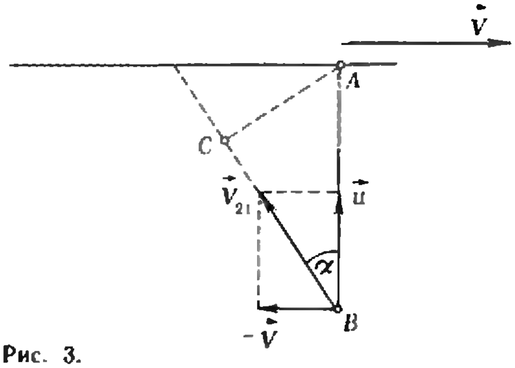


Рис. 3.

Обозначим скорость катера в системе отсчета, в которой пароход неподвижен, через $\vec{V}_{21}$: $\vec{V}_{21} = \vec{u} - \vec{V}$ (рис. 3). В этой системе отсчета траектория катера до максимального сближения есть отрезок BC : $[AC] \perp [BC]$; расстояние $|AC|$ — кратчайшее расстояние между судами. Время, за которое катер достигнет точки C,

$$t = \frac{|BC|}{|\vec{V}_{21}|} = \frac{|AB|\cos\alpha}{|\vec{V}_{21}|} = \frac{|AB|\sin 2\alpha}{2|\vec{V}|}.$$

Величина t принимает максимальное значение при $\alpha = \pi/4$, т. е. когда $|\vec{u}| = |\vec{V}|$.

4. Корабли в тумане

Четыре корабля A, $Б$, $В$ и $Г$ плывут в тумане с постоянными скоростями прямолинейными курсами. Корабли A и $Б$ чуть не столкнулись; назовем это событие «столкновением». Известно, что произошли следующие столкновения: A и $Б$, A и $В$, A и $Г$, $Б$ и $В$, $Б$ и $Г$, причем в одном месте и одно и то же время сталкивалось не больше двух кораблей. Докажите, что если

---

*) При условии $|\vec{V}_2| > |\vec{V}_1|$ возможны и криволинейные траектории движения охотника. Семейство этих траекторий можно описать, например, следующим способом. Пусть наперед задано любое положительное число t. Тогда в течение интервала времени от начала движения до момента t охотник может бежать по любой траектории; начиная с момента t охотник может двигаться по любой из бесчисленного множества прямолинейных траекторий, удовлетворяющих условиям задачи.

*) Несколько лет назад эта задача предлагалась на вступительных экзаменах по математике (письменно) на естественные факультеты Ленинградского университета. Составители вариантов предполагали, что задача будет решаться алгебраически. Решение при этом оказывается громоздким. Попробуйте провести его сами.

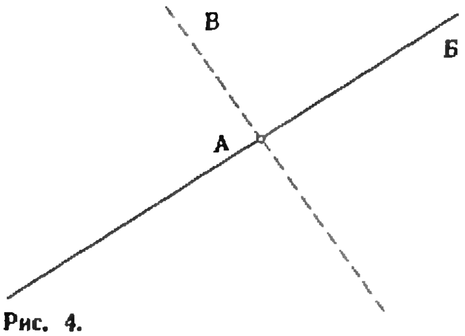


Рис. 4.

скорости кораблей В и Г различны по величине, то они также сталкиваются.

Рассмотрим перечисленные события с точки зрения наблюдателя, находящегося на корабле A. В этой системе отсчета траектория корабля $Б$ — прямая, проходящая через точку A (сам корабль A в этой системе отсчета неподвижен). Траектория корабля $В$ также есть прямая, проходящая через точку A. Допустим, что траектории кораблей $Б$ и $В$ не совпадают (изобразим траекторию корабля $В$ пунктиром; см. рис. 4). В этом случае в точке A происходит столкновение сразу трех кораблей: A, $Б$ и $В$ (иначе корабли $Б$ и $В$ не столкнутся), что противоречит условию задачи. Следовательно, в нашей системе отсчета траектории кораблей $Б$ и $В$ совпадают, и столкновение $Б$ и $В$ происходит не в точке A, а где-то в другом месте. Точно так же можно убедиться, что траектория корабля $Г$ совпадает с траекториями кораблей $Б$ и $В$. Поскольку у кораблей $В$ и $Г$ величины скоростей по условию различны, различны и величины их скоростей в выбранной системе отсчета. Таким образом, в этой системе отсчета корабли $В$ и $Г$ движутся по одной прямой с разными скоростями и, следовательно, неизбежно сталкиваются *).

5. Осторожный охотник и лиса

*Лиса бежит с постоянной скоростью по прямой l. Охотник замечает лису, когда она находится на расстоянии a от него в направлении, составляющем угол α с прямой l (рис. 5 а), и начинает преследование, двигаясь с той же по величине скоростью, что и лиса. Поскольку «тактика» лисы охотнику неизвестна, он бежит все время прямо за лисой. Как близко охотнику удастся подбежать к лисе *)?.*

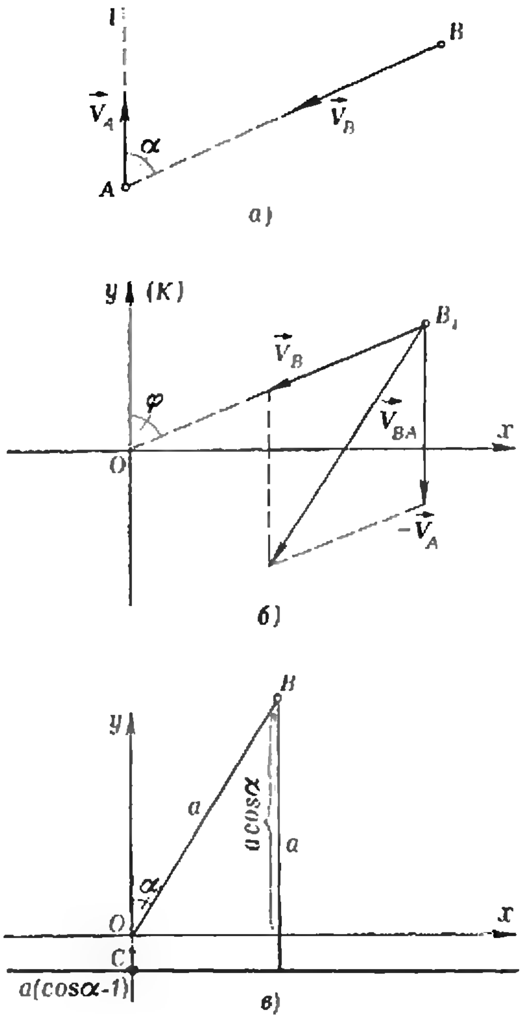


Рис. 5.

Рассмотрим события в системе Oxy, где лиса неподвижна и находится в начале координат O (ось Oy направлена вдоль лисьей тропы в сторону движения лисы). Скорость охотника в этой системе $\vec V_{BA} = \vec V_B - \vec V_A$, где $\vec V_A$ и $\vec V_B$ — скорости лисы и охотника в неподвижной системе отсчета. Пусть в некоторый момент времени охотник находится в точке B_1 (рис. 5 б). Обозначим проекции ско-

---

*) Другой способ решения см. в книге Дж. Литлвуда «Математическая смесь» (М., «Наука», 1965), с. 10.

*) Эта интересная задача однажды подробно обсуждалась в «Кванте» (1973, № 2, с. 39).

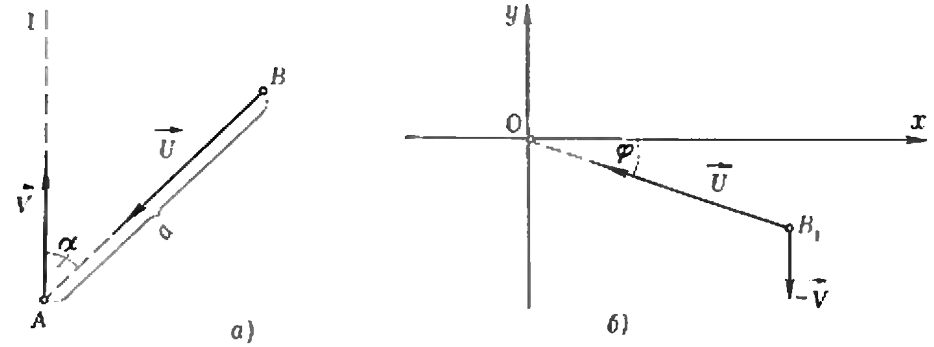


Рис. 6.

рости $\vec V_{BA}$ охотника на направления $\vec{OB_1}$ и $\vec{Oy}$ (см. рис. 5 б) через V_1 и V_2. Если $\vec{OB_1}$ составляет с направлением $\vec{Oy}$ угол φ, то

$$V_1 = -|\vec V_{BA}|(1+\cos\varphi)$$

и

$$V_2 = -|\vec V_{BA}|(1+\cos\varphi),$$

то есть $V_1 = V_2$ в любой момент времени. Следовательно, в любой момент времени охотник равноудален от начала координат O системы координат Oxy и некоторой прямой, параллельной оси Ox. Найдем уравнение этой прямой. В начальный момент времени охотник удален от лисы (т. е. от начала координат) на расстояние a, поэтому искомая прямая отстоит от точки B на расстоянии a (рис. 5 в). Таким образом, уравнение этой прямой в системе координат Oxy имеет вид $y = -(a - a\cos\alpha) = a(\cos\alpha - 1)$, прямая находится на расстоянии $a(1-\cos\alpha)$ от начала координат. Поэтому ближайшее к лисе положение охотника — это точка C, расположенная на оси Oy на одинаковом расстоянии $a(1-\cos\alpha)/2$ от O и от найденной прямой: $R_{\min} = a(1-\cos\alpha)/2$; оно достигается, когда охотник находится на прямой l.

6. Грустная история зайца

По прямой с постоянной скоростью $\vec V$ *бежит заяц. В тот момент, когда заяц находится в точке A, волк начинает погоню из точки B с координатами (a; α) (рис. 6 а), двигаясь с постоянной по величине скоростью* $|\vec U| = n|\vec V|$ $(n>1)$, *направленной все время к зайцу. Будет ли заяц пойман, и если да, то когда и где* *)?

Перейдем в систему отсчета, где заяц неподвижен и находится в начале координат O. (Наверное, в этой системе отсчета зайцу очень страшно — ведь он бездействует!). Пусть ось Oy направлена вдоль заячьей тропы в сторону движения зайца. Скорость волка в этой системе $\vec U' = \vec U - \vec V$. Докажем прежде всего, что заяц будет пойман.

Пусть точка B_1 есть положение волка в какой-то момент времени и пусть $\vec{OB_1}$ составляет с осью Oy угол φ (рис. 6 б). Проекция скорости $\vec U'$ на направление $\vec{OB_1}$

$$U'_{\vec{OB_1}} = |\vec V|(\sin\varphi - n). \qquad (1)$$

По условию $n>1$; значит, для любых φ величина $U'_{\vec{OB_1}}$ отрицательна, причем $|U'_{\vec{OB_1}}| \geqslant |\vec V|(n-1)$. Поэтому волк обязательно догонит зайца за время, не большее $\frac{a}{n-1}$ (в начальный момент он находится от зайца на расстоянии a).

Найдем теперь время, за которое волк догонит зайца. Для этого запишем проекцию скорости $\vec U'$ на направление оси Oy выбранной системы координат. Имеем (см. рис. 6 б):

$$U'_{\vec{Oy}} = -|\vec V| + n|\vec V|\sin\varphi. \qquad (2)$$

Пусть $(x;\ y)$ — координаты волка в системе Oxy. В момент времени T, когда заяц пойман, $x_T=y_T=0$. В начальный момент времени $y_0=a\cos\alpha$. Таким образом, проекция на ось Oy перемещения волка за время T, необходимое для поимки зайца, равна $y_0=a\cos\alpha$. Поэтому среднее значение проекции скорости волка на ось Oy за время T

---

*) Решение этой задачи, использующее приемы высшей математики, приведено в книге «Избранные задачи» (М., «Мир», 1977) — см. задачу 154.

$$\overline{U'}_{\vec{Oy}} = -y_0/T = -a(\cos\alpha)/T.$$

Найдем теперь из (1) и (2) соотношение между $U'_{\vec{OB_1}}$ и $U'_{\vec{Oy}}$. Имеем:

$$U'_{\vec{OB_1}} = U'_{\vec{Oy}}/n + |\vec{V}|/n - n|\vec{V}|.$$

Поскольку слагаемые $|\vec{V}|/n$ и $n|\vec{V}|$ от времени не зависят, такое же соотношение справедливо и для средних значений рассматриваемых проекций, то есть

$$\overline{U'}_{\vec{OB_1}} = \overline{U'}_{\vec{Oy}}/n + |\vec{V}|/n - n|\vec{V}| =$$

$$= -a(\cos\alpha)/nT + |\vec{V}|/n - n|\vec{V}|. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$\overline{U'}_{\vec{OB_1}} = -a/T. \quad (4)$$

Из (3) и (4) находим искомое время поимки:

$$T = \frac{a}{|\vec{V}|}\cdot\frac{n}{n^2-1}\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\right). \quad (5)$$

Проверим этот ответ для очевидных частных случаев.

1°) $\alpha=0$: волк бежит навстречу зайцу. В этом случае величина относительной скорости движения волка равна $|\vec{V}|(n+1)$, так что он догонит зайца за время

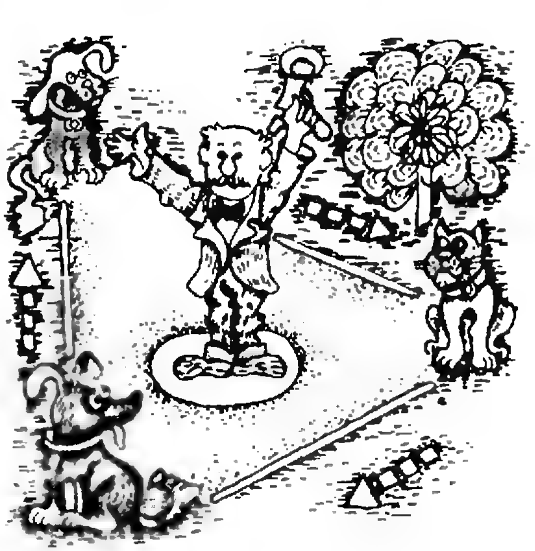
$$T_1 = \frac{a}{|\vec{V}|(n+1)}.$$

Этот же результат получается из (5) при подстановке $\alpha=0$.

2°) $\alpha=\pi$: волк бежит за зайцем. При этом величина его относительной скорости равна $|\vec{V}|(n-1)$ $(n>1)$, и он догоняет зайца за время

$$T_2 = \frac{a}{|\vec{V}|(n-1)}.$$

Подставляя $\alpha=\pi$ в выражение (5), получаем тот же ответ.



За время T заяц пробегает расстояние

$$S_з = |\vec{V}|T = \frac{an}{n^2-1}\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\right),$$

так что волк ловит зайца в точке на прямой l, отстоящей от точки A на этом расстоянии $S_з$.

Задачи

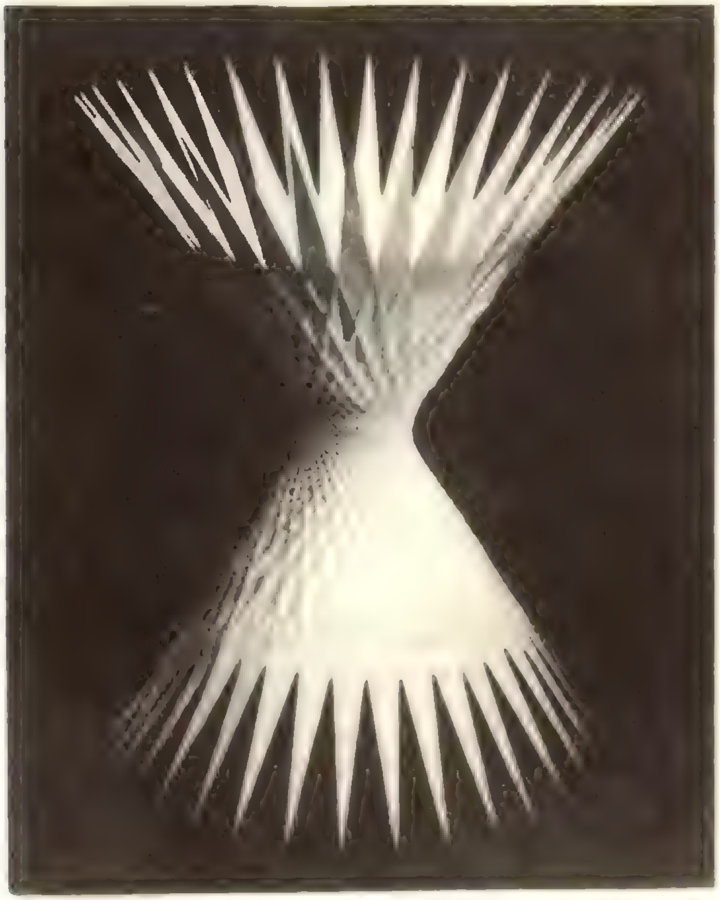
1. На луг перпендикулярно к опушке леса выходит прямолинейное шоссе. Из леса со скоростью $\vec{V}$ выезжает автобус. Из какой части луга имеет смысл бежать, чтобы догнать автобус, если вы можете двигаться со скоростью $\vec{U}$ $(|\vec{U}|<|\vec{V}|)$?

2. Докажите, что все четыре корабля *А*, *Б*, *В* и *Г* из задачи 5 в любой момент времени находятся на одной прямой.

3. В каждой вершине правильного n-угольника находится по собаке. По команде все собаки одновременно начинают движение, причем каждая преследует свою ближайшую по часовой стрелке соседку. Какое время проходит до встречи собак и какое расстояние пробегает каждая из них, если они бегут со скоростью $|\vec{V}|$?

4. Квадратный огород окружен забором. В вершине *А* забора сидит собака-сторож. В противоположной вершине *В* — дырка, достаточная для зайцев, но слишком узкая для собаки. Пробравшийся в огород воришка-заяц, заметив собаку, бежит к дырке по прямой со скоростью $|\vec{V}|$; собака преследует его со скоростью $n|\vec{V}|$, $n>1$, причем всегда бежит прямо за зайцем. Определите (приблизительно), в какой части огорода заяц может чувствовать себя в безопасности.

5. Несколько собак окружили зайца. Скорости собак не превышают скорости зайца. Все собаки зайцу видны. Может ли заяц вырваться из окружения, и если да, то как, если собаки при преследовании бегут так, что скорость каждой из них всегда направлена к той точке, где в данный момент находится заяц?



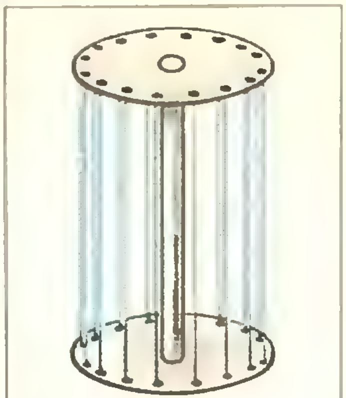


Рис. 1.

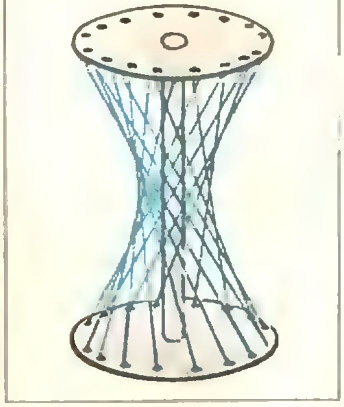


Рис. 2.

Однополостный гиперболоид

На первой странице обложки вы видите бумажную модель однополостного гиперболоида. Так называется поверхность, задаваемая в пространстве уравнением

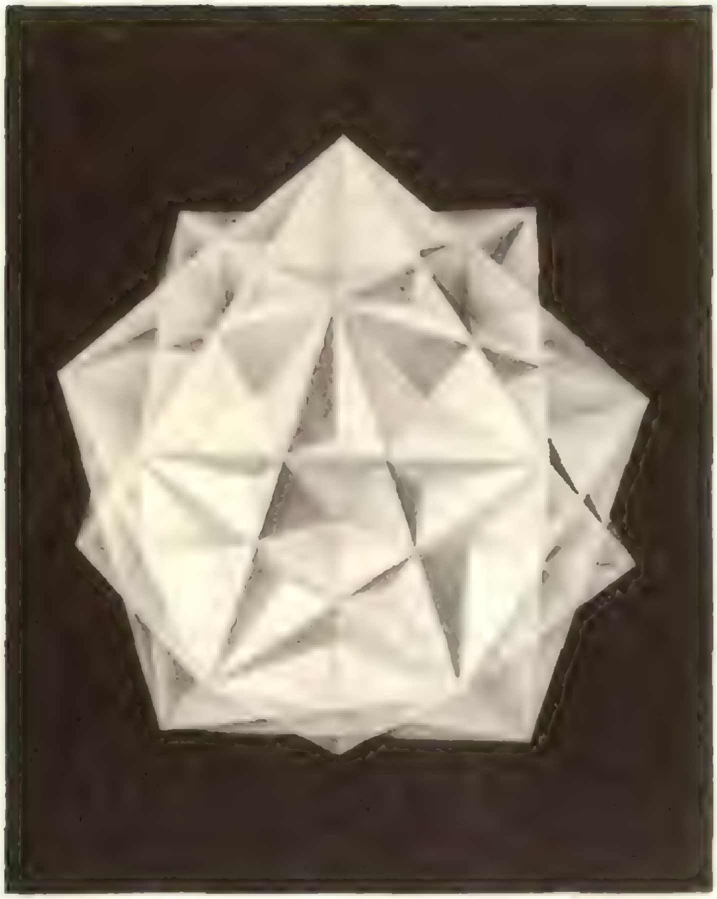
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

У гиперболоида на обложке параметры a и b совпадают ($a = b$), и он является телом вращения с осью Oz (обоснуйте это). Проще всего изготовить модель однополостного гиперболоида вращения следующим образом. Возьмем два колеса одинакового диаметра с равномерно расположенными вдоль обода отверстиями. Посадим колеса на общую ось и проденем в отверстия тонкие резинки параллельно оси (см. рис. 1). Если теперь закрепить эти резинки в отверстиях, и повернуть верхнее колесо на угол α, меньший 180°, то резинки расположатся на поверхности однополостного гиперболоида. Докажите, что при повороте на угол $-\alpha$ резинки расположатся вдоль той же поверхности.

Из нашей резиновой модели видно, что на поверхности гиперболоида имеются два семейства скрещивающихся прямых линий. Выведите это строго из уравнения поверхности.

Первая московская телевышка, сконструированная архитектором Шуховым, изготовлена из таких «моделей» (вместо резинок там использованы стальные тросы).

Однополостный гиперболоид вращения можно получить, вращая кривую $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Oz. Эта кривая является гиперболой. Именно поэтому поверхность называется гиперболоидом. Однополостным он называется потому, что есть еще и двухполостный, получаемый вращением гиперболы относительно оси Ox. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ отличается от привычного вам уравнения гиперболы $xy=1$. Но это не должно вас смущать — отличие не является принципиальным. Почему это действительно так, вы поймете, прочитав в «Кванте» № 3 за 1975 год статью о гиперболе. На первой странице обложки хорошо видны и оба семейства скрещивающихся прямых и гипербола. На четвертой странице обложки даны некоторые указания о склейке бумажной модели, подобной приведенной на первой странице.



Сложный многогранник

Сложный многогранник, показанный на второй странице обложки — не что иное, как объединение десяти кубов с общим центром.

Расскажем сначала о «родственнике» этого многогранника многограннике, составленном из пяти кубов. Он строится на основе додекаэдра. Оказывается, в додекаэдр можно пятью различными способами вписать куб. Один из таких кубов показан на рисунке 1 зеленым цветом. На фотографии вы видите модель этого многогранника.

Семейство из 10 кубов тоже строится на основе додекаэдра. Берется пара противоположных вершин T, T' (рис. 1) и рассматриваются три (красных) отрезка A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (как нетрудно заметить, при поворотах около оси OT на углы, кратные $2\pi/3$, они переходят друг в друга). Через эти отрезки проводятся три попарно перпендикулярные плоскости, пересекающиеся в точке V на оси OT (рис. 2) и рассматриваются еще три плоскости, им симметричные относительно центра O додекаэдра. Эти шесть плоскостей и ограничивают наш куб.

Такой куб можно построить для каждой пары противоположных вершин додэкаэдра, и так как вершин у него 20, как раз получится 10 кубов. Их объединение и изображено на обложке.

Попробуйте на обложке «увидеть целиком» один из этих кубов. Если сумеете, вам будет легко выделять и остальные; вы заметите, что у каждого куба две вершины — «изолированные» (они лежат на оси, отправляясь от которой стро*ился этот куб), а каждая из* шести остальных вершин имеет «соседа» (вершину другого куба). Эти пары «соседей» красиво группируются вокруг десятиконечных звезд, образованных объединением пересекающихся ребер пяти кубов.

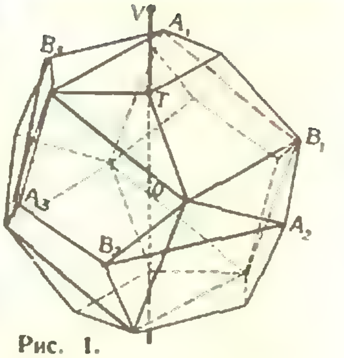


Рис. 1.

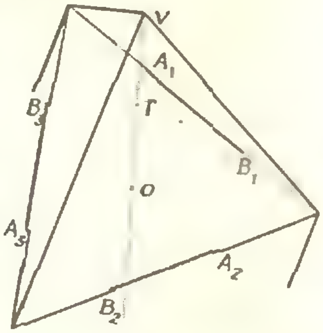


Рис. 2.

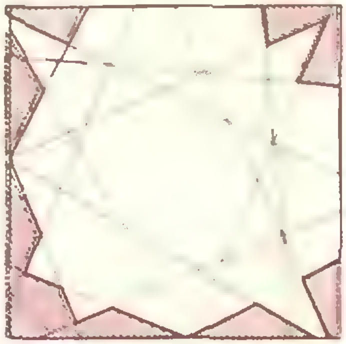


Рис. 3.

Если вы захотите построить модель *изображен*ного на обложке многогранника, то можете воспользоваться рисунком 3: на нем показана штриховкой, с достаточной точностью, выходящая наружу часть каждой грани каждого куба. Таких «шаблонов» нужно изготовить 60 штук; затем их нужно правильно склеить, исходя из рисунка на обложке*). Но это не просто! Красиво склеить такой многогранник сумеет только *трудолюбивый и* квалифицированный любитель моделирования.

---

*) Более подробно об этом рассказано в книге В. Гамаюнова «Проектирография», М., 1976, МГПИ им. Ленина.

задачник кванта

Задачи

M541—M545; Ф553—Ф557

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются *впервые*.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 марта 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35 Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M541, M543» или «Ф555». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M541. В компании из N человек у каждого ровно трое друзей.

а) Докажите, что N четно.

б) Всегда ли такую компанию можно разбить на $N/2$ пар так, чтобы люди в каждой паре были друзьями?

Д. Бернштейн

M542. Дан прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с катетами $|A_0A_2|=a$ и $|A_1A_2|=b$. Муравей ползет по бесконечной ломаной $A_2A_3A_4A_5\ldots$, где A_nA_{n+1} — высота треугольника $A_{n-2}A_{n-1}A_n$.

а) Найдите длину его пути (из бесконечного числа отрезков).

б) Постройте предельную точку L, к которой приближается муравей. На каких расстояниях от катетов она находится?

П. Емельянов

M543*. Пусть

$$\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c).$$

Andzei Paszkiewicz (Варшава)

M544*. Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали (лежащей целиком внутри многоугольника) может иметь невыпуклый n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n=4$, 5, 6, 7.

С. Бычков

M545. На плоскости задано n точек. Нужно разместить в этих точках n прожекторов, каждый из которых освещает угол величины $360°/n$ так, чтобы осветить всю плоскость. Докажите, что это возможно при любом расположении данных точек, если

а) $n=3$; б) $n=4$; в) n — любое натуральное число.

г) Пусть теперь прожекторы освещают углы α_1, α_2, …, α_n ($\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=360°$) и составлены в одну точку так, что они освещают плоскость. Докажите, что можно перенести в каждую из данных точек по одному из n прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.

Г. и В. Гальперины

Ф553. Тяжелая доска массы M лежит на двух тонкостенных катках радиусов r и R и равных масс m. Расстояние между центрами катков l. С каким ускорением начнет двигаться доска, если ее отпустить? Трение между всеми поверхностями таково, что проскальзывания нет.

Ф554*. Брусок массы m_1 лежит на доске массы m_2, которая находится на гладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и доской равен μ. На доску действует сила $\vec{F}$, изменяющаяся со временем по закону $|\vec{F}|=bt$, где b — постоянная величина. Нарисовать графики зависимости ускорений бруска и доски от времени t.

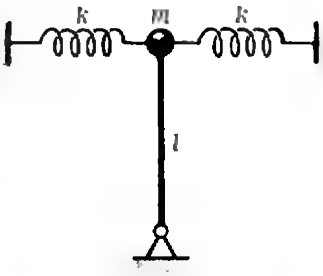


Рис. 1.

Ф555. а) Легкий жесткий стержень длины l с грузом массы m наверху закреплен шарнирно в нижней точке и удерживается в вертикальном положении двумя горизонтальными пружинами жесткости k, скрепленными с его верхним концом (рис. 1). В направлении, перпендикулярном к пружинам, стержень двигаться не может. При какой массе груза вертикальное положение стержня перестанет быть устойчивым?

б) Стальная спица длины l заделана в пол так, что стоит вертикально. Если к ее верхнему концу приложить небольшую горизонтальную силу $\vec{F}$, верхний конец спицы отклонится на величину $a \ll l$. Оценить, груз какой массы может выдержать, не согнувшись, спица на своем верхнем конце. Различием формы, которую принимает спица под действием на нее горизонтальной или вертикальной сил, пренебречь.

Г. Коткин

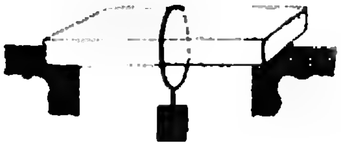


Рис. 2.

Ф556. Если на ледяной брусок надеть проволочную петлю, к которой подвешен груз (рис. 2), проволока начинает резать лед. Это объясняется тем, что при повышении давления температура плавления льда понижается, лед под проволокой начинает таять, а над проволокой — вновь смерзаться.

Однако, если петлю сделать не из проволоки, а из капроновой нити такого же или даже меньшего диаметра, лед практически не режется. Почему? Попробуйте провести описанный опыт.

Г. Косоуров

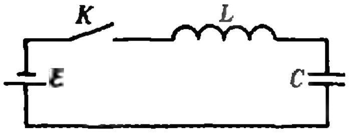


Рис. 3.

Ф557. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K замыкают. Найти максимальный ток в цепи и максимальное напряжение на конденсаторе.

П. Зубков

Решения задач

М494, М496—М499; Ф508—Ф511

М494. *Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая эти точки, длина которой меньше а) $3n$; б) $2n$.*

Идея построения ломаной ясна из рисунка 1: мы делим квадрат на n вертикальных полосок и затем обходим все точки «змейкой»: первую слева полоску проходим сверху вниз, следующую — снизу вверх и т. д. Сумма длин звеньев ломаной не больше суммы длин их проекций на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата. Сумма вертикальных проекций, как легко видеть, не превосходит n, а сумму горизонтальных проекций можно оценить так. Горизонтальная проекция звена, не пересекающего границ полосок, не превосходит $1/n$, а проекция звена, пересекающего k вертикальных отрезков границ полосок, не превосходит $(k+1)/n = k/n + 1/n$. Общее число вертикальных границ полосок равно $n-1$, поэтому сумма всех n^2-1 горизонтальных проекций не больше

$$(n^2-1)/n + (n-1)/n = n + 1 - 2/n \leqslant n + 1.$$

Таким образом, для длины всей ломаной мы получаем оценку $2n+1$.

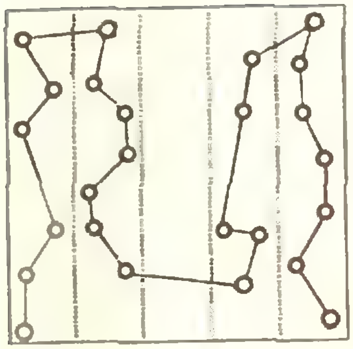


Рис. 1.

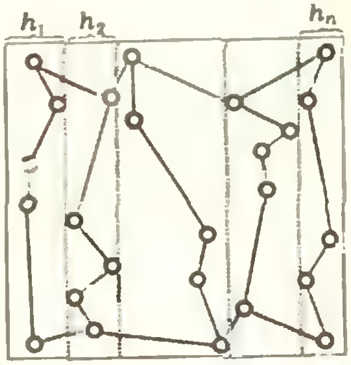


Рис. 2.

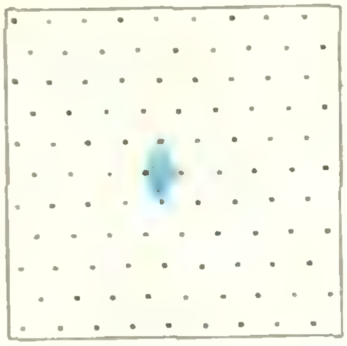


Рис. 3.

Задача а) решена, а чтобы доказать б), надо улучшить *оценку на 1.*

Для этого слегка изменим нашу конструкцию. Разделим квадрат на n полос разной ширины (h_1, h_2, …, h_n) так, чтобы в каждой полосе было ровно по n точек («граничные» точки можно относить и влево, и вправо). Соединим все верхние точки полос и все нижние точки отрезками попеременно красного и синего цветов (рис. 2). Мы можем выбрать начало ломаной-змейки так, чтобы она прошла либо по всем синим отрезкам, либо по всем красным. Сумма горизонтальных проекций $2(n-1)$ красных и синих отрезков ломаной вместе не больше 2; если мы выберем тот цвет, для которого эта сумма меньше 1, то получим для суммы всех горизонтальных проекций оценку

$$(n-1)(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) + 1 \leqslant n.$$

Сумма вертикальных проекций, как и прежде, не больше n.

Итак, мы построили ломаную длины не больше $2n$, — решили б).

Пример «плотного» расположения точек в вершинах треугольной решетки (рис. 3; при большом n, чтобы уместить в *квадрате 1×1 n^2 точек, нужно взять длину стороны треугольничка* равной примерно $\sqrt{2/\sqrt{3}}/n$) показывает, что константу 2 в условии задачи заведомо нельзя (даже для больших n) заменить числом, меньшим $\sqrt{2/\sqrt{3}}$.

Н. Васильев, А. Тартаковский

M496. *Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных чисел или не представимых?*

Трехзначных чисел (от 100 до 999) существует всего 900. Следовательно, пар (не обязательно различных) трехзначных чисел существует всего $\frac{900\cdot899}{2}+900=\frac{900\cdot901}{2}=405450$

Поэтому шестизначных чисел, представимых в виде произведения двух трехзначных, заведомо не больше этого количества. А всего шестизначных чисел 900 000. Значит, больше половины из них *не* представимы в виде произведения двух трехзначных.

Н. Васильев

◆

M497. *На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1; на отрезках AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.*

Решение этой задачи использует следующую хорошо известную теорему:

Если три окружности попарно пересекаются, то три общие хорды каждой пары окружностей (или их продолжения) проходят через одну точку или параллельны (рис. 4).

Сначала мы решим задачу, а затем дадим набросок доказательства теоремы.

Построим на отрезках AB, AA_1 и BB_1 как на диаметрах окружности O_{AB}, O_{AA_1} и O_{BB_1} соответственно. Общей хордой окружностей O_{AB} и O_{AA_1} является, очевидно, высота AH_A треугольника ABC (поскольку $\widehat{AH_AB}=\widehat{AH_AA_1}=90^\circ$; рис. 5). Точно так же общей хордой окружностей O_{AB} и O_{BB_1} является высота BH_B треугольника. Из сформулированной выше теоремы следует, что общая хорда окружностей O_{AA_1} и O_{BB_1} проходит через точку пересечения высот AH_A и BH_B треугольника ABC.

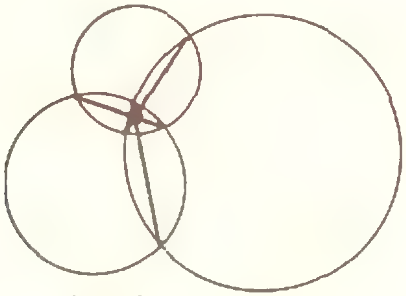


Рис. 4.

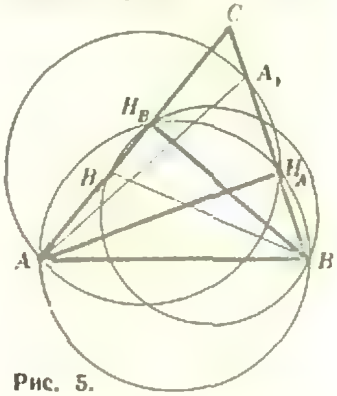


Рис. 5.

Аналогично доказывается, что общие хорды двух других пар окружностей: O_{AA_1} и O_{CC_1}, O_{CC_1} и O_{BB_1} проходят через точку пересечения высот треугольника ABC. Задача решена.

Осталось доказать теорему.

Построим на данных окружностях (лежащих в горизонтальной плоскости) три сферы с центрами в плоскости окружностей и посмотрим на них сверху. Мы увидим три окружности, по которым пересекаются сферы (их проекции на горизонтальную плоскость — наши три хорды), и точку их пересечения (ее проекция — нужная точка пересечения хорд).

В. Гутенмахер

◆

M498. *Для каждого натурального $n\geqslant3$ укажите наименьшее k такое, что любые n точек плоскости, никакие три из которых не лежат на данной прямой, можно разделить k прямыми.*

Многие из приславших нам решение этой задачи вспомнили такой факт (его нетрудно доказать с помощью индукции): k прямых разбивают плоскость не более, чем на $\frac{k(k+1)}{2}+1$ частей (для k прямых общего положения будет ровно $\frac{k(k+1)}{2}+1$).

(Прямые разделяют данные точки, если для любых двух из этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны.)

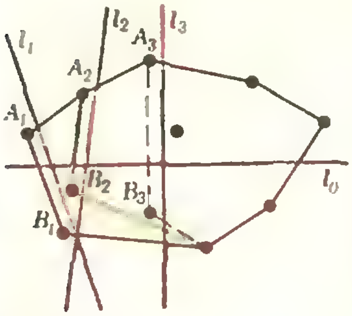


Рис. 6.

Отсюда следует, что k прямых не смогут разделить более чем $\frac{k(k+1)}{2} + 1 - n$ точек. Другими словами, даже при самом удачном расположении n точек, нужно не менее $k = (\sqrt{8n-7}-1)/2 \approx \sqrt{2n}$ прямых, чтобы их разделить.

Поэтому можно ожидать, что при любом расположении n точек их можно разделить $c\sqrt{n}$ прямыми, где c — некоторая постоянная. Но, оказывается, это вовсе не так.

Докажем, что наименьшее значение k равно $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, то есть $k = n/2$ при n четном и $k = (n+1)/2$ при n нечетном.

Сначала построим пример, показывающий, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. Расположим n точек на окружности (или на границе любой выпуклой фигуры). Если k прямых разделяют эти n точек, то они делят окружность по крайней мере на n дуг, то есть пересекают ее не менее чем в n точках. Но каждая прямая пересекает окружность не более чем в двух точках, поэтому $2k \geqslant n$, то есть $k \geqslant n/2$.

Докажем теперь, что для любых n точек можно построить систему не более чем из $(n+1)/2$ разделяющих их прямых. Ясно, что можно провести одну прямую l_0 так, чтобы количество точек по одну и другую сторону от нее было одинаковым (или отличалось на единицу). Покажем, как провести еще не более $(n-1)/2$ прямых, чтобы разделить все точки.

Возьмем наименьший выпуклый многоугольник, содержащий наши n точек, и рассмотрим отрезок A_1B_1 его границы, пересекающий прямую l_0 (рис. 6). Проведем параллельно $[A_1B_1]$ прямую l_1, отделяющую точки A_1, B_1 от остальных $n-2$ точек (друг от друга точки A_1 и B_1 отделены прямой l_0). Ту же процедуру применим к оставшимся $n-2$ точкам — возьмем наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти $n-2$ точки, и вновь рассмотрим отрезок A_2B_2 его границы, пересекающий l_0. Проведя прямую $l_2 \parallel [A_2B_2]$, отделим точки A_2, B_2 от остальных точек. Затем отделим от остальных еще две точки A_3, B_3 прямой $l_3 \parallel [A_3B_3]$ ($[A_3B_3]$ пересекает l_0) и т. д., до тех пор, пока не останутся две (в случае четного n) или одна (в случае нечетного n) точки. Ясно, что вместе с прямой l_0 построенные прямые l_1, l_2, l_3,… уже разделяют все n точек. Число прямых l_i, $i = 1,2,3,\ldots$, равно $\frac{n-2}{2}$, если n четно, и $\frac{n-1}{2}$, если n нечетно, то есть это число не превосходит $\frac{n-1}{2}$, так что для разделения всех точек требуется не более чем $\frac{n+1}{2}$ прямых.

Н. Васильев

◆

М499. *Назовем число уравновешенным, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1971, 19219 уравновешены, а число 1415145 — нет). Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему справа любой из десяти цифр становится уравновешенным.*

Возьмем число $a_0 = 0$; припишем к нему слева и справа по единице — получим число $a_1 = 101$. К каждой цифре числа 101 справа припишем цифру 2, после чего к числу 120212 припишем двойку слева; получим число $a_2 = 2120212$. С этим числом проделаем ту же операцию, приписывая к каждой его цифре тройку справа и затем тройку в начало; получим число $a_3 = 323132303231323$. Продолжая указанным способом последовательно приписывать цифры 4,5,…, 9, получим в результате число $a_9 = 9897989 \ldots 909 \ldots 9897989$, состоящее из $2^{10}-1=1023$ цифр, которое и является искомым.

В самом деле, нетрудно (индукцией по k) доказать, что число a_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, 9$) обладает тем свойством, что после приписывания к нему справа любой из цифр $0, 1, \ldots, k$ некоторое его начало совпадает с концом; а именно, если приписать к нему цифру $m \leqslant k$, то первые 2^{k-m} цифр — такие же, как последние 2^{k-m} цифр (рис. 7).

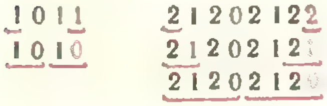


Рис. 7.

Наша конструкция позволяет построить «слово», становящееся уравновешенным после приписывания любой буквы, для алфавита из произвольного количества N букв (в исходной задаче алфавит состоит из 10 «букв» $\{0, 1, \ldots, 9\}$).

Г. Гуревич

Ф508. *Период обращения Меркурия вокруг Солнца составляет 88 земных суток, а вокруг своей оси — 59 земных суток. Какова продолжительность дня и ночи на Меркурии?*

Обозначим продолжительность суток на Меркурии через x (земных суток). За одни земные сутки Меркурий повернется вокруг своей оси на угол $\frac{360^\circ}{59}$ и сместится по своей орбите (в ту же сторону) на угол $\frac{360^\circ}{88}$. Разность $\frac{360^\circ}{59}-\frac{360^\circ}{88}$ представляет собой угол, на который Меркурий в течение одних земных суток повернется по отношению к Солнцу:

$$\frac{360^\circ}{59}-\frac{360^\circ}{88}=\frac{360^\circ}{x}.$$

Отсюда

$$x\approx 179$$

— сутки на Меркурии приблизительно равны двум меркурианским годам.

Следовательно, меркурианские день и ночь приблизительно равны по продолжительности его году.

Е. Левитан

◆

Ф509. *В океане имеется течение, захватывающее лишь верхний слой воды. По течению плывет плот со звукоулавливающей аппаратурой. На дне, впереди по течению, расположен неподвижный источник звука. Наблюдатель на плоту обнаружил, что звук достигает плота в направлении, составляющем угол β с вертикалью. Какой угол с вертикалью составляет истинное направление на источник звука? Скорость течения $\vec{u}$, скорость звука в воде $\vec{v}$. Толщина движущегося слоя много меньше глубины океана.*

На границе AB движущегося слоя звук каким-то образом изменяет свое направление — преломляется (рис. 8). Звук достигает плота P под углом β, равным углу преломления. Поскольку слой тонкий, можно принять интересующий нас угол $\widehat{CPS}$ равным углу падения α. Таким образом, задача сводится к выводу закона преломления звуковой волны на границе неподвижной и движущейся сред.

Пусть CO — направление распространения звука в неподвижной среде и KO — положение волновой поверхности (волнового фронта) в некоторый момент t (рис. 9). Спустя промежуток времени Δt волновой фронт займет положение $K'O'$. Подобным же образом обозначим через OD направление распространения звука в верхнем слое воды (с точки зрения наблюдателя на плоту), а через OL и $O'L'$ — положения фронта волны в моменты t и $t+\Delta t$.

За время Δt фронт волны KO перемещается на расстояние $|MO'|=|\vec{v}|\Delta t$ ($MO'\perp KO$), а точка пересечения фронта с поверхностью раздела сред перемещается на расстояние $|OO'|=\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\alpha}$. Аналогично, перемещение точки пересечения волнового фронта OL с границей раздела относительно наблюдателя на плоту равно $\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\beta}$ и отличается от $|OO'|$ на величину смещения слоя $|\vec{u}|\Delta t$:

$$\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\alpha}=\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\beta}-|\vec{u}|\Delta t.$$

Отсюда

$$\sin\alpha=\frac{\sin\beta}{1-|\vec{u}|\sin\beta/|\vec{v}|}$$

Это и есть искомый закон преломления звуковой волны на границе неподвижной и движущейся сред. Заметим, что даже при скользящем падении волны ($\alpha\to\pi/2$, $\sin\alpha\to 1$) угол преломления не превосходит значения

$$\beta\to\arcsin\frac{1}{1+|\vec{u}|/|\vec{v}|}$$

Оказывается, тот же закон преломления справедлив и тогда, когда плот уже проплыл над источником звука. Правда, в этом случае угол преломления β больше угла падения α, следовательно, преломление возможно лишь при углах па-

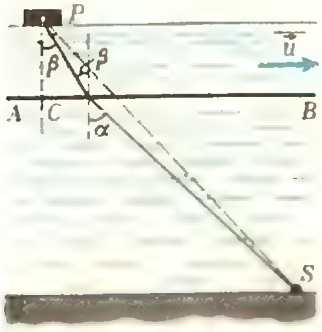


Рис. 8.

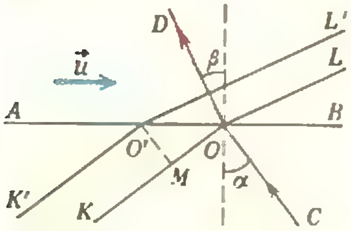


Рис. 9.

дения

$$\alpha<\alpha_{\text{пр}}=\arcsin\frac{1}{1+|\vec{u}|/|\vec{v}|}.$$

При больших углах происходит полное отражение звука от движущегося слоя.

Г. Коткин

◆

Ф510. *На резиновый шар натянута прочная резиновая сетка, нити которой идут по меридианам шара. Какую форму примет шар, если повысить в нем давление?*

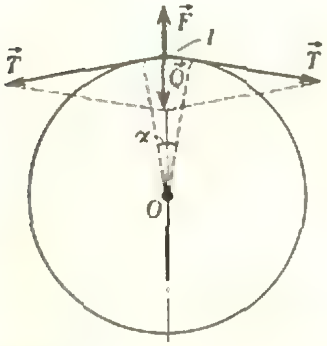


Рис. 10.

Рис. 11.

Рассмотрим одну из нитей и выберем на ней малый участок длины l (рис. 10). Обозначим силу натяжения нити через $\vec{T}$. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил натяжения, действующих на выбранный участок, равна по абсолютной величине $2|\vec{T}|\sin\frac{\alpha}{2}$. При $l \ll R$ (R — радиус кривизны нити в данном месте) $\alpha=\frac{l}{R}\ll 1$, поэтому можно считать, что

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}, \quad \text{и} \quad |\vec{Q}|=\frac{l}{R}|\vec{T}|.$$

Так как выделенный участок нити находится в равновесии, сумма всех действующих на него сил равна нулю. Это означает, что со стороны шара на нить действует сила

$$\vec{F}=-\vec{Q}.$$

По третьему закону Ньютона на шар со стороны нити действует сила

$$-\vec{F}=-(-\vec{Q})=\vec{Q},$$

направленная к центру шара.

Через любую параллель шара проходит одно и то же число нитей N. Длина параллели радиуса $r=R\cos\varphi$ (φ — угол, образованный радиусом шара, проведенным к параллели, с плоскостью экватора) равна $2\pi r=2\pi R\cos\varphi$. Следовательно, через участок оболочки шара площадью $l\times l$ проходит число нитей

$$n=\frac{N}{2\pi R\cos\varphi}l.$$

Тогда давление, оказываемое на оболочку, равно

$$p=n\frac{|\vec{Q}|}{l^2}=\frac{N|\vec{T}|}{2\pi R^2\cos\varphi}.$$

Если бы оболочка *шара осталась сферической*, давление с увеличением угла φ возрастало бы. На самом деле согласно закону Паскаля давление везде должно быть одним и тем же. Значит, оболочка шара — не сферическая. Она шире по экватору, чем по вертикальному диаметру; радиус кривизны меридиана уменьшается к экватору и увеличивается к полюсу так, что $R^2\cos\varphi=\text{const}$.

Форма оболочки напоминает собой тыкву (рис. 11). Может быть, форма тыквы как раз и объясняется наличием «подкрепляющих нитей», идущих по ее меридианам?

◆

Ф511. *Пластины плоского конденсатора площадью S образуют малый угол α ($\alpha\ll 1$) друг с другом. Среднее расстояние между пластинами равно b. Нарисовать примерную картину силовых линий электростатического поля конденсатора и найти емкость конденсатора.*

Примерная картина силовых линий электростатического поля данного конденсатора показана на рисунке 12.

Все силовые линии — это дуги концентрических окружностей с центром в точке O. Действительно, силовые линии всегда перпендикулярны к поверхности проводника, значит, они перпендикулярны к пластинам конденсатора. Из соображений симметрии очевидно, что они перпендикулярны и к биссектрисе угла, образованного пластинами. Если бы на месте биссектрисы оказалась тонкая металлическая пластина, картина силовых линий никак бы не изменилась. Рассуждая аналогично, мы придем к выводу, что силовые линии должны быть перпендикулярны к любому лучу, выходящему из точки O и находящемуся внутри угла α. Это и означает, что силовые линии представляют собой дуги концентрических окружностей.

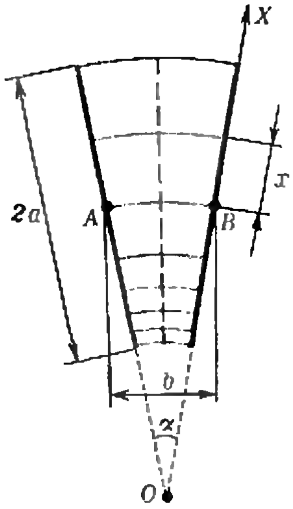


Рис. 12.

Густота силовых линий не везде одна и та же, она уменьшается вдоль оси X. Это объяснить нетрудно. Как известно, густота силовых линий пропорциональна напряженности электрического поля. Найдем, как изменяется напряженность по мере увеличения координаты x (начало координат находится в точке B). Работа по перемещению единичного заряда с одной пластины конденсатора на другую вдоль любой силовой линии должна быть одной и той же (эта работа равна разности потенциалов между пластинами). Следовательно, чем длиннее силовая линия, тем меньше напряженность (сила, действующая на единичный заряд). С учетом малости угла α получим

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_0| \frac{b}{b+\alpha x},$$

где $\vec{E}_0$ — напряженность на силовой линии AB (там, где расстояние между пластинами конденсатора равно b), $\vec{E}$ — напряженность на соседней силовой линии, отстоящей от AB на x, b и $b + x$ — длины соответствующих силовых линий. Так же изменяется и густота силовых линий.

Теперь найдем емкость C конденсатора. По определению

$$C = \frac{q}{U},$$

где q — заряд и U — напряжение конденсатора. U можно выразить через $|\vec{E}_0|$:

$$U = |\vec{E}_0| b$$

Осталось выразить q.

Вблизи пластины электрическое поле аналогично полю плоскости; следовательно, его напряженность

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная. Отсюда

$$\sigma = 2\varepsilon_0 |\vec{E}| = \frac{2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| b}{b+\alpha x}.$$

Обозначим через l «глубину» пластины и выделим на пластине узкую полоску шириной Δx. Ее заряд равен

$$\Delta q = \sigma l \Delta x = \frac{2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| bl}{b+\alpha x} \Delta x.$$

Чтобы найти весь заряд пластины, надо просуммировать заряды всех элементарных полосок и перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим

$$q = 2\varepsilon_0 bl |\vec{E}_0| \int_{-a}^{a} \frac{dx}{b+\alpha x} = \frac{2\varepsilon_0 bl |\vec{E}_0|}{\alpha} \ln \frac{b+\alpha a}{b-\alpha a}.$$

Тогда окончательно

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\varepsilon_0 l}{\alpha} \ln \frac{b+\alpha a}{b-\alpha a}.$$

И. Слободецкий

В. Вавилов

Сечения многогранников

В этой статье разбираются 10 задач о сечениях, взятые в основном из учебников «Геометрия 9» и «Геометрия 10». Первоочередная цель — систематизировать приемы построения сечений многогранников. Здесь подобраны приемы и задачи, в основе которых — построение пересечений и параллельное проектирование. К приемам, связанным с перпендикулярностью, мы вернемся в другой статье.

1. Постановка задачи

Доказывая теоремы, решая стереометрические задачи, мы используем чертежи, то есть изображения на плоскости фигур, расположенных в пространстве.

«В стереометрии изображением фигуры (оригинала) будем называть любую фигуру, подобную параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость» (IX, § 13)*).

Таким образом, для построения изображений нужно учитывать свойства параллельной проекции. В частности (рис. 1),

1° *Точка изображается точкой;*

2° *прямая линия изображается прямой линией;*

3° *параллельные прямые изображаются параллельными прямыми;*

4° *если точка M лежит на отрезке [A; B], то изображение точки M лежит на изображении отрезка [A; B] и делит изображение отрезка в том же отношении, в каком точка M делит отрезок [A; B].*

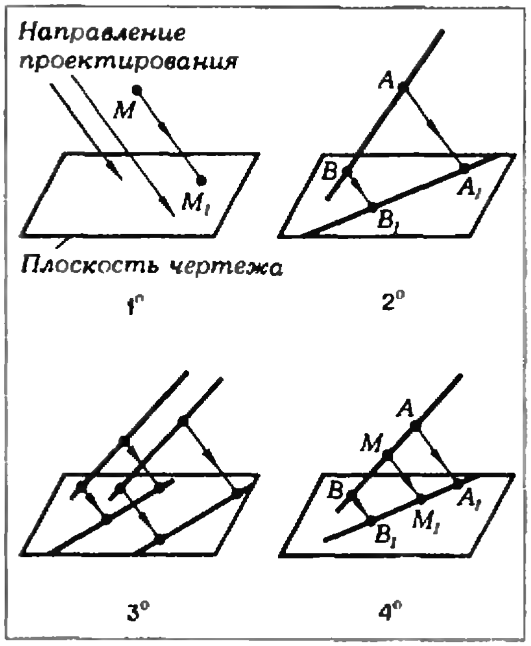


Рис. 1.

В свойствах 2°—4° предполагается, что направление проектирования не совпадает с направлениями проектируемых прямых и отрезков.

Отметим, что при параллельной проекции, вообще говоря, не сохраняются длины отрезков и величины углов.

Из этих свойств вытекает, например, что *параллелограмм* всегда *) *изображается параллелограммом*, но квадрат (ромб, прямоугольник) не обязан изображаться квадратом (ромбом, прямоугольником). Далее, *медиана изображается медианой*, но биссектриса (высота) не обязана изображаться биссектрисой (высотой). *Центр тяжести изображается центром тяжести*, но ортоцентр (точка пересечения высот) не изображается, как правило, ортоцентром.

Наша основная задача будет состоять в построении сечения многогранника плоскостью, т. е. в построении пересечения этих двух множеств. При этом, как правило, изображение многогранника будет считаться заданным, а плоскость сечения будет дана тремя точками (иногда — прямой и точкой) на изображении. Пользоваться можно, как обычно при геометрических построениях, только линейкой и циркулем. Задача считается решенной, если найдены все отрезки, по которым плоскость сечения пересекает грани многогранника.

---

*) Ссылка «IX, § 13» отсылает к § 13. «Геометрии 9»; «X, 73, 84» означает упражнения 73 и 84 из учебника «Геометрия 10».

*) Мы предполагаем, что направление проектирования не параллельно плоскости параллелограмма.

Итак, пусть нам дано изображение некоторых фигур (плоскости, прямой, многогранника). Требуется на нем найти изображение некоторого геометрического объекта (точки, отрезка, многоугольника), связанного с исходными фигурами определенным образом.

На чертежах, при наших построениях, синий цвет будет соответствовать секущей плоскости, а красный — той плоскости, в которой ищется линия пересечения.

2. Вспомогательные задачи

Прежде чем перейти к основной задаче, рассмотрим несколько вспомогательных приемов для определения пересечений прямых и плоскостей.

1. *Пересечение двух пересекающихся прямых* найти легко: точка, в которой они пересекаются на чертеже, и есть изображение их точки пересечения в пространстве. Но — осторожно! Это верно лишь в предположении, что прямые на самом деле пересекаются. (А прямые в пространстве, «как правило», скрещиваются!). Не впадайте в ошибку (рис. 2).

2. *Пересечение прямой AB и плоскости α* найти не сложно, если известны параллельные проекции A_1, B_1 точек A, B на α (рис. 3). Построение ясно из чертежа.

3. *Пересечение прямой AB и плоскости α* легко найти и в том случае, когда даны точки пересечения A_1, B_1 с плоскостью α двух пересекающихся прямых, проходящих через точки A, B соответственно (рис. 4).

4. *Пересечение двух плоскостей α* и (ABC) находится просто, если даны параллельные проекции A_1, B_1, C_1 точек A, B, C на α. Проследите за этим построением самостоятельно (рис. 5).

Можно указать еще много различных ситуаций, когда удается построить пересечение двух заданных плоскостей (ABC) и α.

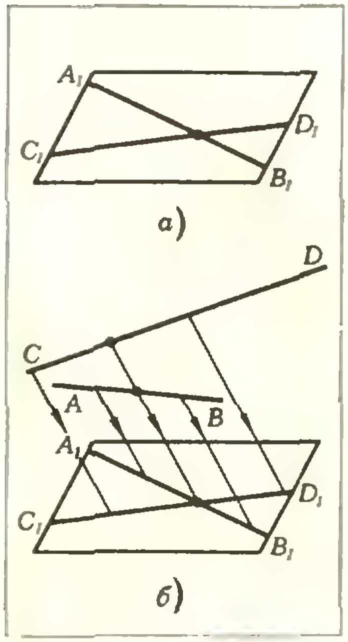


Рис. 2.

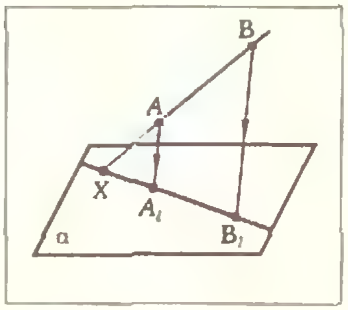


Рис. 3.

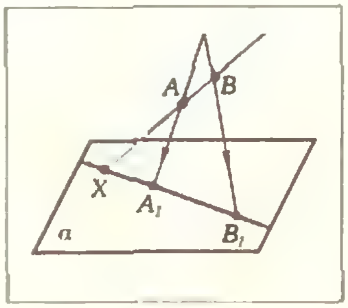


Рис. 4.

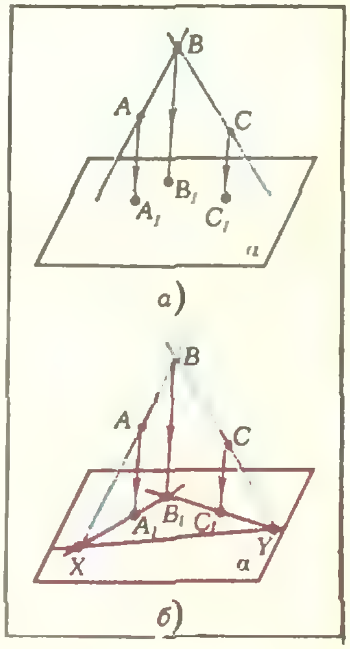


Рис. 5.

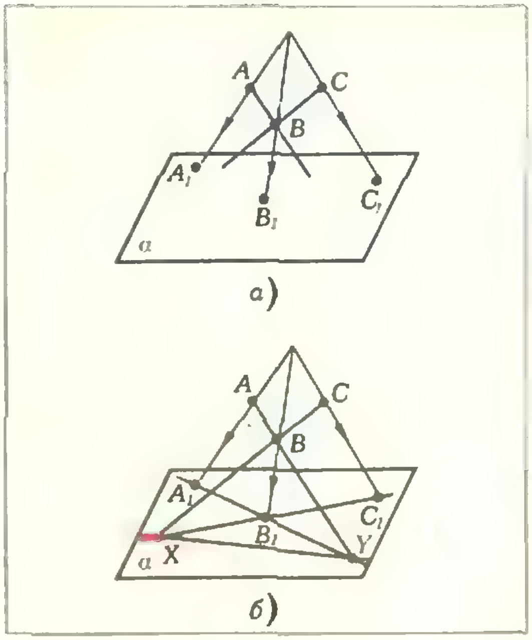

A
C
B
A_1
B_1
C_1
α
а)
A
C
B
A_1
B_1
C_1
X
Y
α
б)

Рис. 6.

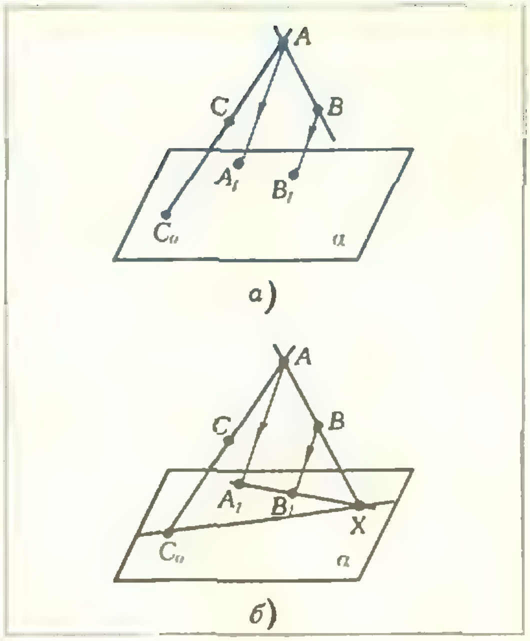

A
C
B
A_1
B_1
C_0
α
а)
A
C
B
A_1
B_1
X
C_0
α
б)

Рис. 7.

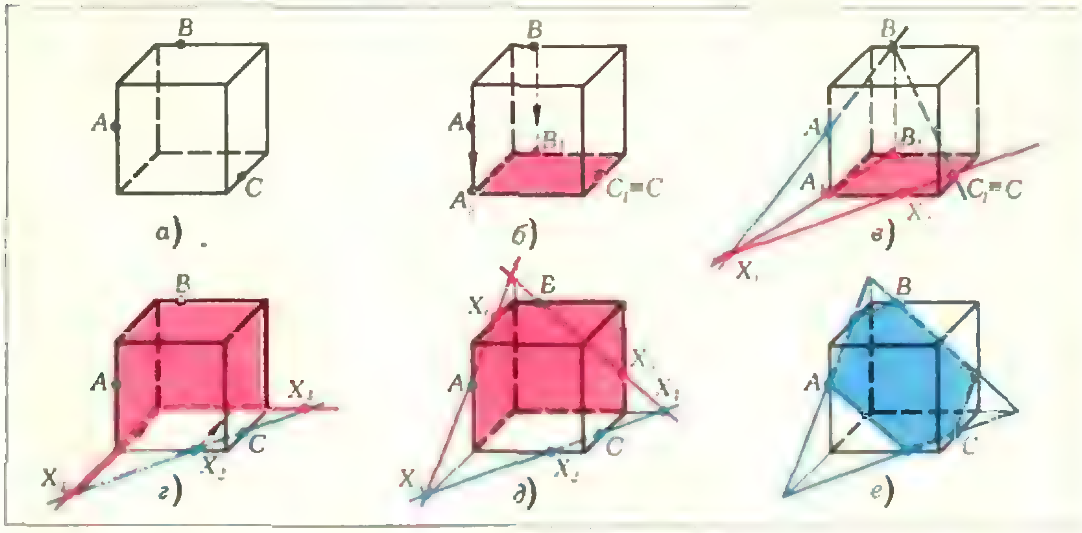

B
A
C
а)
B
A
B_1
A_1
$C_1=C$
б)
B
A
B_1
A_1
$C_1=C$
X_2
X_1
в)
B
A
X_1
X
X_2
C
г)
X
B
X_3
A
X_4
X_1
X
X_2
C
д)
B
A
C
е)

Рис. 8.

Мы ограничимся двумя случаями, которые читатель разберет самостоятельно по рисункам 6 и 7.

3. Построение сечения по трем заданным точкам

Здесь систематически применяются приемы, описанные в предыдущем разделе. Читатель должен самостоятельно прослеживать за ними по мультипликационным сериям рисунков.

5. *Сечение параллелепипеда плоскостью,* заданной тремя точками *A*, *B*, *C* (IX, 75, 95, 96, 145, 147) выполнено на рисунках 8, *а—е*. Здесь надо построить проекции A_1, B_1, C_1 точек *A*, *B*, *C* параллельно боковым *ребрам (рис. 8, б), применить* задачу 2 для построения X_1 (рис. 8, *в*) и найти X_2; затем, взяв новое направление проектирования (рис. 8, *г*), найти точку X_4 (снова задача 2) и применить задачу 1 для нахождения точек X_6 и X_5 (рис. 8, *д*).

6. *Сечение треугольной пирамиды плоскостью ABC показано на рисунках* 9, *а—д* (IX, 133, 135). Здесь дважды применяется задача 3.

7. *Сечение треугольной призмы плоскостью ABC* показано на рис. 10,

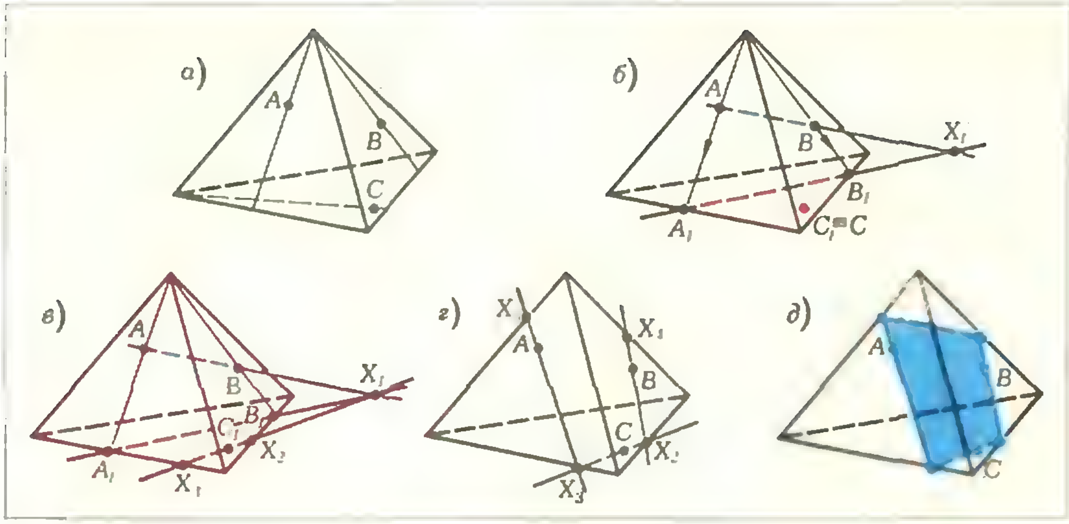

а)
A
B
C
б)
A
B
X₁
B₁
A₁
C₁≡C
в)
A
B
X₁
C₁
B₁
A₁
X₁
X₂
г)
X
A
X₁
B
C
X₂
X₃
д)
A
B
C

Рис. 9.

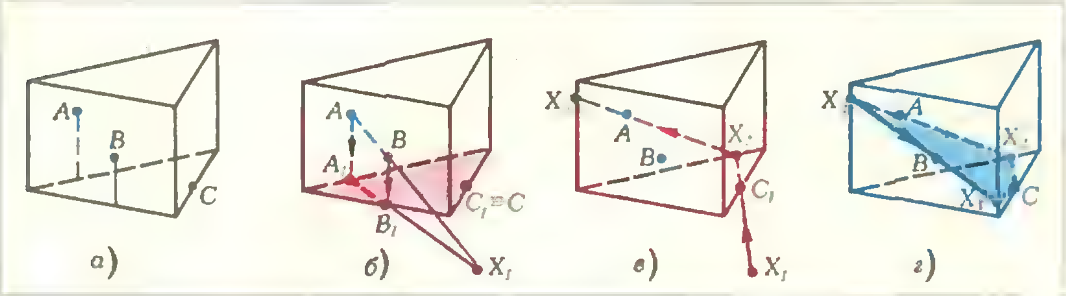

A
B
C
а)
A
A₁
B
B₁
C₁≡C
X₁
б)
X
A
B
X₁
C₁
X₁
в)
X
A
B
X₁
X₁
C
г)

Рис. 10.

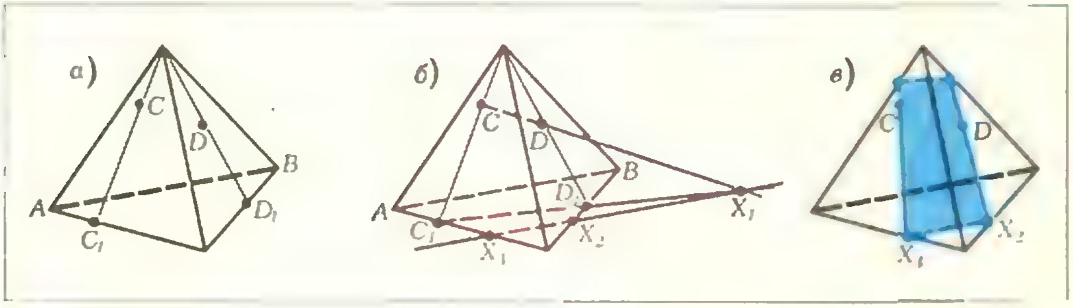

а)
C
D
B
A
C₁
D₁
б)
C
D
B
A
C₁
D₁
X₁
X₁
X₂
в)
C
D
X₂
X₁

Рис. 11.

а—г. Здесь применяются задача 2 и задача 1.

4. Параллельные прямые и плоскости

Кроме ранее изученных приемов, часто применяются две теоремы о параллельных плоскостях: (I) *сечение двух параллельных плоскостей третьей плоскостью есть пара параллельных прямых*; (II) *пересечение двух плоскостей, параллельных прямой l, есть прямая, параллельная l*.

8. *Построение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через заданные точки C, D, параллельно ребру AB* приводится на рисунках 11, *а—в* (IX, 53, 54, 95). Здесь точки X_2, X_3 получены как пересечение прямой, проходящей через X_1 параллельно AB, с соответствующими гранями (см. теорему II). Рекомендуем читателю решить задачу для случая, когда точки X_2, X_3 лежат не на ребрах, а на их продолжениях.

9. *Сечение тетраэдра плоскостью α, проходящей через точку M на высоте AA_1, параллельно грани ACD*, показано на рисунках 12, *а—г* (IX, 93, 94, 146; X, 312). Здесь дважды применяется теорема I: $\alpha \parallel (ACD) \Rightarrow$

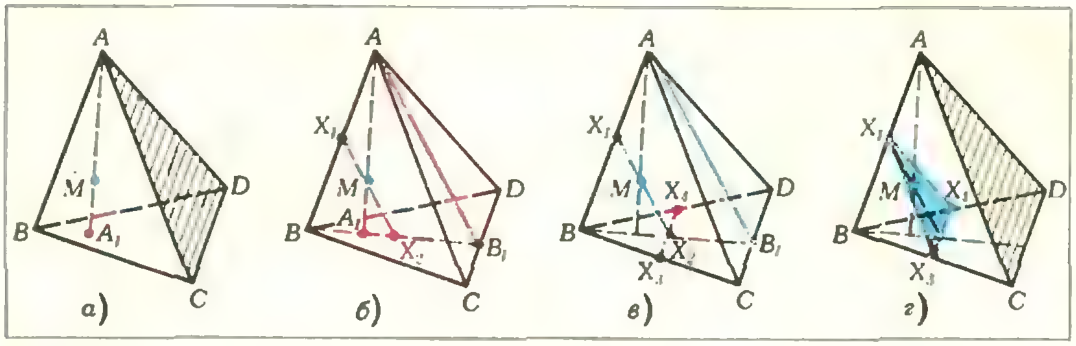


Рис. 12.

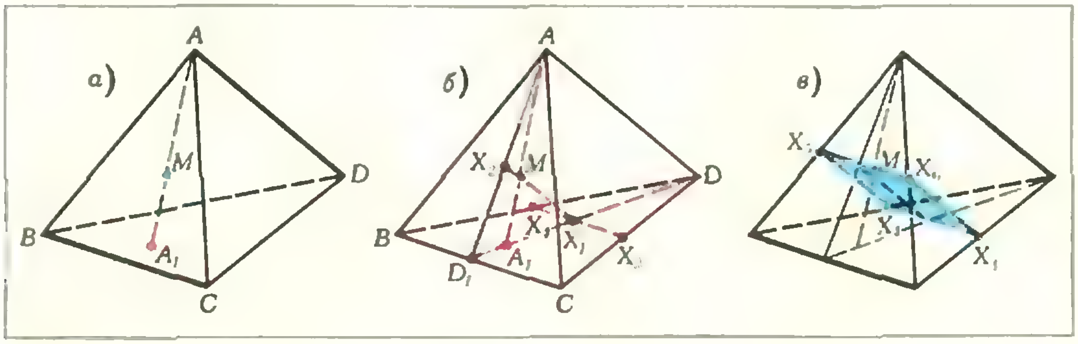


Рис. 13.

$\Rightarrow (X_1X_2) \parallel (AB_1)$ и $\alpha \parallel (ACD) \Rightarrow$ $\Rightarrow (X_3X_4) \parallel (CD)$.

10. *Сечение тетраэдра ABCD плоскостью α, проходящей через точку M параллельно скрещивающимся ребрам AD и BC* (IX; 132, 160), показано на рисунке 13, *а—в*. Здесь дважды применяется теорема II: $\alpha \parallel (AD)$ и $(AA_1D) \parallel AD \Rightarrow (MX_1) \parallel (AD)$, а затем $\alpha \parallel (BC)$ и $(BCD) \parallel (BC) \Rightarrow (X_3X_4) \parallel \parallel (BC)$.

5. Более трудные задачи

11. Докажите, что данный отрезок, не параллельный данной плоскости, можно параллельно спроектировать на отрезок любой длины на данной плоскости.

12. На какой по величине угол на данной плоскости можно параллельно спроектировать данный угол?

13. Докажите, что если для трех не лежащих на одной прямой точек плоской фигуры известны их изображения, то изображения всех точек этой фигуры вполне определены.

14. Докажите, что изображением данного треугольника может служить любой треугольник *).

15. Докажите, что изображением четырехугольника может служить любой четырехугольник, у которого диагонали делятся точкой пересечения в тех же отношениях, как и у исходного.

16. Докажите, что изображением тетраэдра может служить любой четырехугольник с проведенными диагоналями.

17. Меньший куб поставлен на больший куб так, что они имеют общую вершину и их грани параллельны. Построить сечение полученной фигуры плоскостью, заданной тремя точками, из которых

— все три лежат на трех скрещивающихся ребрах меньшего куба;

— все три лежат внутри трех различных граней большего куба;

— одна точка лежит на верхнем основании маленького куба, а две другие на различных ребрах большего куба.

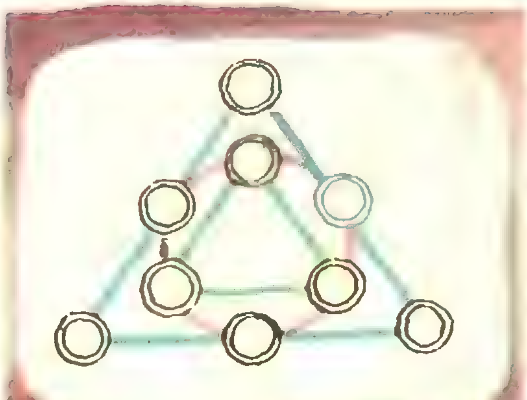
---

*) Напомним, что размеры изображения роли не играют (см. п. 1), поэтому «любой треугольник» означает «любой треугольник с точностью до подобия».

Квант для младших школьников

Задачи

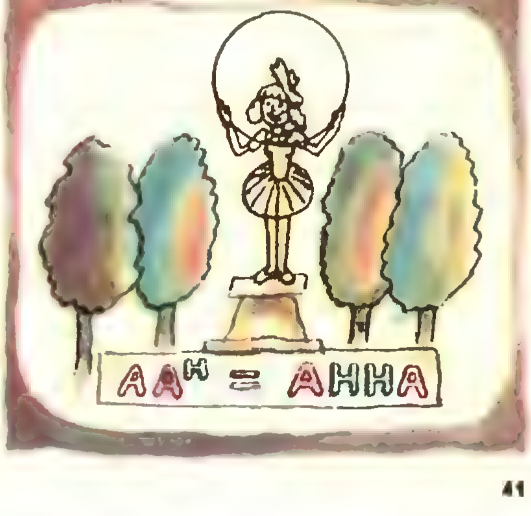
1. Расставьте числа 1, 2, ..., 9 в кружочки (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел по внутреннему треугольнику равнялась квадрату одного из этих чисел, сумма чисел по окружности — кубу того же числа, а сумма чисел по внешнему треугольнику — сумме квадрата и куба этого числа.

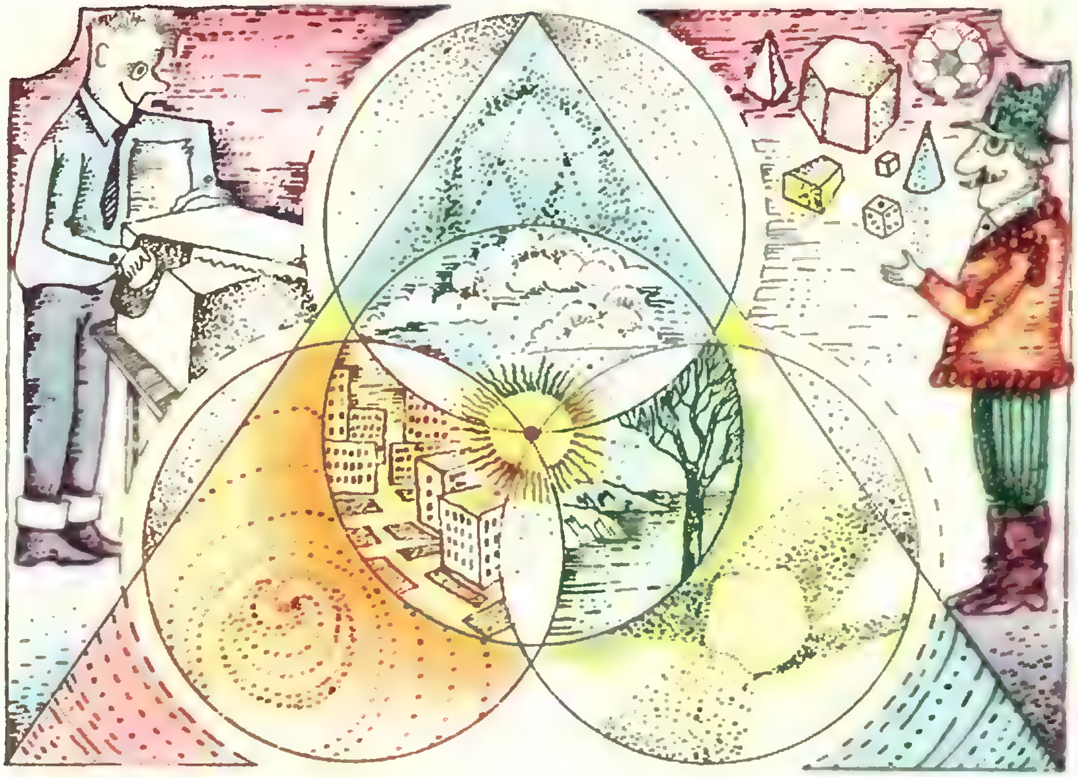


2. Был очень жаркий день, и четыре супружеские пары выпили 49 бутылок *coca-cola*. Анна выпила 2 бутылки, Бетти — 3, Сессиль — 4, Дороти — 5. Мистер Адамс выпил столько же, сколько и его жена, мистер Браун — вдвое, Вильсон — втрое, Грин — вчетверо больше своих жен. Назовите фамилию каждой из четырех дам.

3. В одном племени приняты женские имена, составленные лишь из двух букв — A и B. Сочетания AAA и BB сами по себе что-то означают, но из состава более длинных слов их можно без ущерба вычеркивать (или вписывать). Сочетание AAB в последнее время заменили на более культурное сочетание BA, так что теперь они равнозначны. Можно ли верить вождю племени, который говорит, что у него шесть дочерей и всех их зовут по-разному?

4. Решите уравнение, изображенное на рисунке (букве A соответствует одна цифра, букве H — другая).





А. Савин

Кое-что о выпуклости

Изучая геометрию в школе, вы встречаетесь с разными плоскими и пространственными фигурами. Так, вы уже знаете, что такое треугольник, квадрат, окружность, куб, пирамида, шар, конус, цилиндр. Конечно, этот перечень далеко не исчерпывает всего разнообразия форм, существующих в природе. Огромное количество замысловатых и причудливых форм способно создать и человеческое воображение. Естественно, что лишь немногие из этих форм имеют названия. Да и нужно ли все их назвать?

Когда садовод сокрушается: «Проклятые птицы склевали у меня все вишни!» — ему безразлично, какие именно птицы это сделали — воробьи, дрозды или попугаи. Он говорит о существах, которые летают, садятся на ветки деревьев и не прочь полакомиться сочными вишнями. Знаете ли вы, что существует 8616 различных видов птиц? Можно ли запомнить все их названия? Конечно, нет. Зоологи разделили всех птиц на 40 отрядов: голуби, чайки, воробьиные и т. д., объединив в один отряд птиц, обладающих похожими свойствами. И если вы будете знать эти сорок отрядов, а также два-три десятка названий птиц, обитающих в вашей местности, то знакомство с птицами можно уже считать состоявшимся.

Так и в геометрии: вы знакомитесь с наиболее часто встречающимися фигурами. А можно ли выделить какие-нибудь интересные совокупности — «отряды» фигур? Да, и это одна из целей геометрии. Свойство, которое объединяет фигуры в тот «отряд», о котором мы хотим рассказать, называется *выпуклостью*.

Слово *выпуклый* не является для вас новым. Однако попробуйте дать этому понятию четкое определение и вы увидите, что это сделать не так уж просто. Посмотрим, как это понятие определяется в «Словаре русского языка» С. И. Ожегова. Читаем: «*Выпуклый — имеющий дугообразную поверхность, обращенную наружу*». А что значит дугообразную? Читаем: «*Дугообразный — имеющий форму дуги*». Что же такое дуга? — «*Дуга — часть окружности, круга, или другой кривой линии*». Тут уже наше терпение лопается: во-первых, кривые линии могут быть самыми разнообразными, а во-вторых, круг — не линия. Исходя из этого определения выпуклости, можно ли что-нибудь утверждать о выпуклости (или невыпуклости), например, куба? По-моему, нельзя. Так что такое «определение» никак не может устроить математика.

В математике понятие выпуклый имеет четко определенный смысл. *Множество точек называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками A, B этому множеству принадлежит и весь отрезок* $[AB]$.

Теперь довольно очевидно, что куб — выпуклое тело. А вот фигура на рисунке 1 не выпукла. Нетрудно понять, что любой треугольник является выпуклой фигурой. А четырехугольники могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (рис. 2).

Ну, а можно ли про выпуклые множества что-нибудь доказать? Можно. Например, докажите (это совсем просто), что пересечение двух или нескольких выпуклых множеств снова является выпуклым множеством (пустое множество также будем считать выпуклым). Более трудно доказать такое утверждение: *через любую точку границы выпуклой фигуры на плоскости можно провести прямую так, чтобы вся фигура лежала по одну сторону от этой прямой*. Такая прямая изображена на рисунке 3: она называется *опорной прямой*. Если граничная точка является «угловой», как на рисунке 4, через нее можно провести несколько опорных прямых. Докажите самостоятельно, что если некоторая плоская фигура имеет опорную прямую в каждой граничной точке, то эта фигура является выпуклой. Таким образом, сформулированное утверждение можно принять за определение выпуклой фигуры.

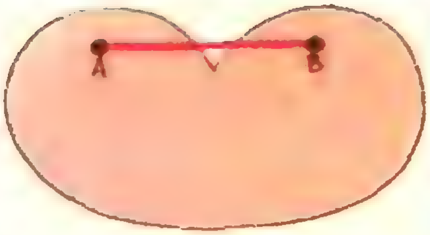


Рис. 1.

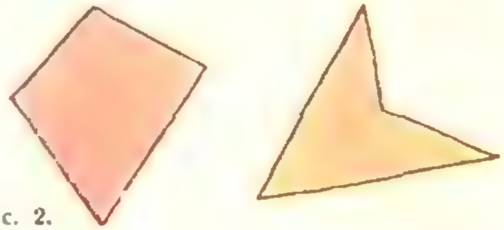


Рис. 2.

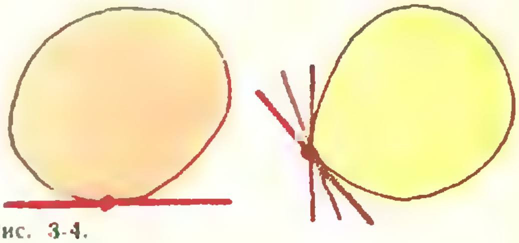


Рис. 3-4.

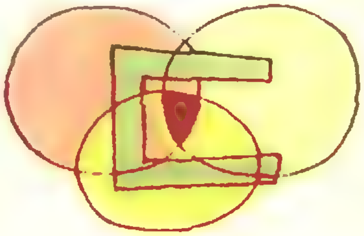
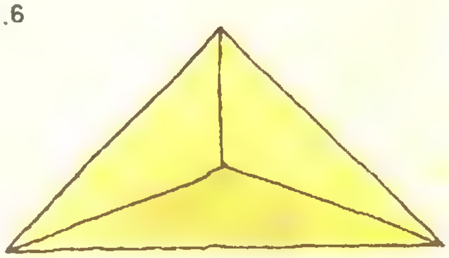


Рис. 5.

Рис. .6



Думаю, что наличие опорных прямых у плоских выпуклых фигур (аналогично — опорных плоскостей у выпуклых тел), хотя и является очень важным свойством, вряд ли кого удивит: оно довольно очевидно. Следующий факт гораздо более удивителен.

Теорема. *Если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим фигурам.*

Требование выпуклости фигур существенно. Действительно, взгляните на рисунок 5: из четырех фигур, изображенных на ней, невыпукла лишь одна; однако, хотя у любых трех фигур есть общая точка, точки, принадлежащей одновременно всем четырем фигурам, нет.

А если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, таких что любые две из них имеют общую точку? Обязательно ли найдется точка, общая для всех этих фигур? Покажите самостоятельно, что такой точки может и не быть.

Вы обратили внимание, что мы все время подчеркивали то, что рассматриваемые фигуры — плоские? И это неспроста, потому что существуют четыре выпуклых тела в пространстве, каждые три из которых имеют общую точку, но нет точки, общей всем четырем телам, например, четыре грани треугольной пирамиды, изображенной на рисунке 6. Значит, в пространстве подобная теорема уже не имеет места? Оказывается, чтобы она осталась верной и в пространстве, ее достаточно лишь немного «подправить». А именно:

Теорема$'$. *Если в пространстве задано несколько выпуклых тел, каждые четыре из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим телам.*

Теорема, о которой мы только что рассказали, была открыта не так давно — в начале 20-х годов нашего столетия австрийским математиком Э. Хелли и носит его имя (Хелли сформулировал ее для выпуклых тел, расположенных в n-мерном пространстве). Теорему Хелли можно рассмотреть и для выпуклых множеств, лежащих на прямой (на прямой выпуклыми множествами являются отдельные отрезки, лучи, а также вся прямая и пустое множество). На прямой теорема Хелли звучит так:

Теорема$''$. *Если на прямой задано несколько выпуклых множеств, каждые два из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим множествам.*

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.

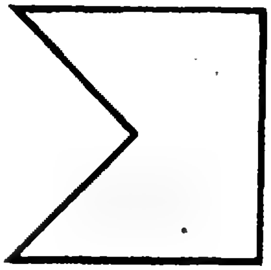
Если вас заинтересовали выпуклые фигуры, прочтите книгу И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, которая так и называется: «Выпуклые фигуры».

Задачи наших читателей

1. Батарейка и лампочка карманного фонаря вместе с соединительными проводами образуют цепь. Длина проводов в цепи (от «+» до «—» батареи) $l = 10$ м. Провод медный, его поперечное сечение $S = 1$ мм^2. В цепи идет ток $I = 0{,}15$ А, на который рассчитана лампочка. За какое время под действием электрического поля электрон доберется от «—» до «+» батареи? (Считать, что число свободных электронов в медном проводе равно числу атомов меди.)

А. Дозоров
(г. Ярославль)

2. Лист бумаги, имеющий форму флажка, разрежьте на четыре части так, чтобы из них можно было склеить выкройку куба.



Я. Темралиев
(Астраханская обл.)

И. Габович

Векторы помогают на экзамене

В этой статье приведены четыре важных векторных соотношения и показано на примере материалов вступительных экзаменов 1977—1978 гг., как их применять при решении конкурсных задач.

I основное соотношение. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $|AD|:|DC|=m:n$. Тогда*

$$\overrightarrow{BD}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}\,^{*}). \quad (1)$$

Доказательство. Имеем (рис. 1)

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}-$$

$$-\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BA}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}.$$

Задача 1 (МГУ, эконом. фак., 1978). *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $|KA|:|AL|=1:3$; на стороне LM взята точка B так, что $|LB|:|BM|=4:1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найти площадь треугольника KLM.*

Решение. Положим $S_{\triangle KLB}=S$. Тогда (рис. 2), очевидно, $S_{\triangle KLM}=\frac{4}{5}S$. Введем векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KM}$. На основании (1) имеем

$$\overrightarrow{KB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{KL}+\frac{4}{5}\overrightarrow{KM}.$$

Пусть $\overrightarrow{KC}=x\overrightarrow{KB}$, где $0<x<1$. Тогда

$$\overrightarrow{KC}=\frac{x}{5}\overrightarrow{KL}+\frac{4x}{5}\overrightarrow{KM}. \quad (2)$$

Пусть $|AC|:|CM|=m:n$. Тогда из треугольника AKM по той же формуле (1) имеем

$$\overrightarrow{KC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{KA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{KM}=$$

$$=\frac{n}{m+n}\frac{1}{4}\overrightarrow{KL}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{KM}. \quad (3)$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам из (2) и (3) получаем систему

$$\begin{cases}\dfrac{x}{5}=\dfrac{n}{4(m+n)}\\[2mm] \dfrac{4x}{5}=\dfrac{m}{m+n},\end{cases} \text{или} \begin{cases}\dfrac{4x}{5}=\dfrac{n}{m+n}\\[2mm] \dfrac{4x}{5}=\dfrac{m}{m+n}.\end{cases}$$

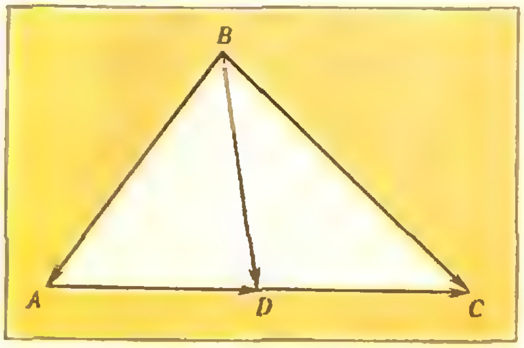


Рис. 1.

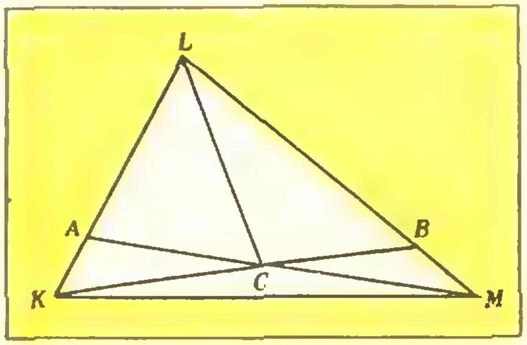


Рис. 2.

---

*) В несколько ином виде эта формула рассматривалась в статье С. Овчинникова («Квант», 1978, № 3, с. 48). См. также статью В. Болтянского в «Кванте» 1978, № 10, с. 14.

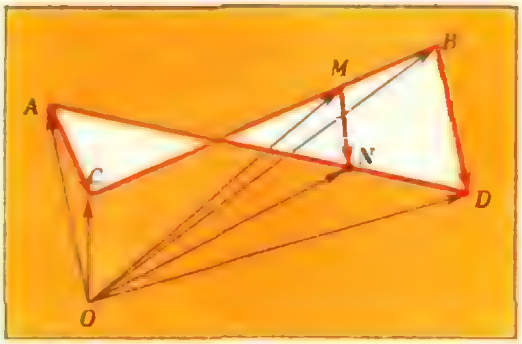


Рис. 3.

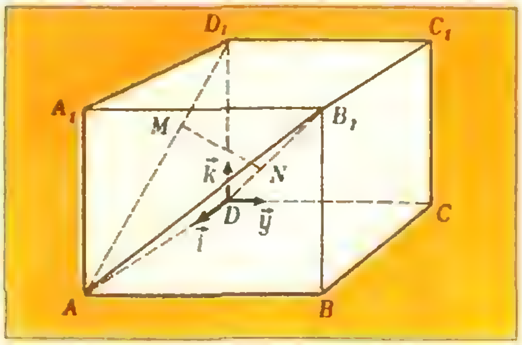


Рис. 4.

Сложив по частям уравнения последней системы, получаем

$$\frac{8x}{5} = 1 \text{ или } x = \frac{5}{8}.$$

Так как треугольники KLB и KLC имеют общую высоту, то

$$S_{\Delta KLC} = \frac{5}{8} S_{\Delta KLB} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} S = \frac{1}{2} S.$$

Но, по условию, $S_{\Delta KLC} = 2$, следовательно $S = S_{\Delta KLM} = 4$.

II основное соотношение. *Если точки M и N делят отрезки AB и CD соответственно в равных отношениях, т. е.*

$$|AM| : |MB| = |CN| : |ND| = m : n,$$

то выполняется равенство

$$\overrightarrow{MN} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{BD}. \qquad (4)$$

(Заметим, что отрезки AB и CD произвольны; например, они могут лежать на скрещивающихся прямых.)

Доказательство. Пусть O — точка, не принадлежащая ни отрезку AB, ни отрезку CD (рис. 3). Соединим точку O с точками A, M, B, C, N и D.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OD}$. Имеем по формуле (1)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{n}{m+n} \overrightarrow{OC} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{OD},$$

откуда

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) +$$

$$+ \frac{m}{m+n} (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) =$$

$$= \frac{n}{m+n} \overrightarrow{AC} + \frac{m}{m+n} \overrightarrow{BD}.$$

Задача 2 (МФТИ, 1977). *Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.*

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $|AM| : |AD_1| = 2 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

Решение (рис. 4). Рассмотрим плоскость, проходящую через M параллельно плоскостям граней ABB_1A_1, DCC_1D_1. Первая плоскость пересекает, очевидно, отрезок B_1D в точке N и делит отрезки AD_1 и B_1D, соединяющие вторую и третью плоскости в одинаковом отношении. (Докажите это самостоятельно.)

Значит, $|B_1N| : |ND| = |AM| : |MD_1| = 2 : 1$. Применяя II основное соотношение (4), получим

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{D_1D} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB_1}.$$

Введем прямоугольный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, как показано на рисунке 4. Тогда

$$\overrightarrow{D_1D} = -a\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AB_1} = 2a\vec{j} + a\vec{k}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}(-a\vec{k}) + \frac{1}{3}(2a\vec{j} + a\vec{k}) =$$

$$= \frac{2}{3} a\vec{j} - \frac{1}{3} a\vec{k},$$

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{a^2}{9}=\frac{5a^2}{9},$$

откуда

$$|MN|=\frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Пусть $|D_1M|:|MA|=p$.

Тогда

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{p+1}\overrightarrow{D_1D}+\frac{p}{p+1}\overrightarrow{AB_1}=$$
$$=-\frac{a}{p+1}\vec{k}+\frac{2ap}{p+1}\vec{j}+\frac{ap}{p+1}\vec{k}=$$
$$=\frac{2ap}{p+1}\vec{j}+\frac{a(p-1)}{p+1}\vec{k},$$
$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{4a^2p^2}{(p+1)^2}+\frac{a^2(p-1)^2}{(p+1)^2}=$$
$$=\frac{a^2(5p^2-2p+1)}{(p+1)^2}.$$

Очевидно, $|MN|$ будет иметь наименьшее значение при том значении p, при котором его достигает функция

$$y=\frac{5p^2-2p+1}{(p+1)^2}.$$

Читатель легко проверит (пользуясь производной), что это будет при $p=\frac{1}{3}$. Подставляя это значение в последнее выражение для $\overrightarrow{MN}^2$ и извлекая корень, находим искомое минимальное расстояние: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

III основное соотношение. *Дан тетраэдр ABCD и в плоскости его грани ABC точка M. Доказать, что для разложения*

$$\overrightarrow{DM}=\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}$$

выполняется равенство

$$\alpha+\beta+\gamma=1^{*)}. \qquad (5)$$

Решение. Допустим, что точка M лежит внутри треугольника ABC (рис. 5). Проведем через точки A и M прямую, которая пересекает сторону BC в точке E. Пусть точка E делит сторону BC в отношении

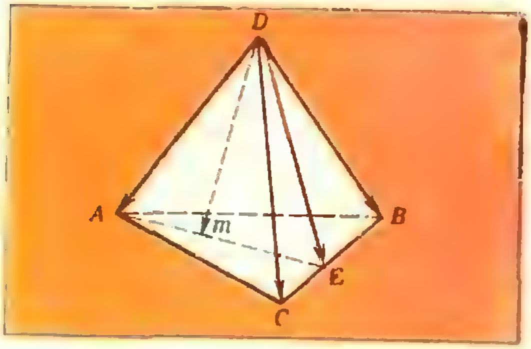


Рис. 5.

$m:n$, т. е. $|BE|:|EC|=m:n$. Тогда по формуле (1)

$$\overrightarrow{DE}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}.$$

Пусть, далее, точка M делит отрезок AE в отношении $p:q$, т. е. $|AM|:|ME|=p:q$. Тогда

$$\overrightarrow{DM}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{DE}+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{DA}=$$
$$=\frac{p}{p+q}\left(\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}\right)+$$
$$+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{DA}=\frac{q}{p+q}\overrightarrow{DA}+\frac{p}{p+q}\times$$
$$\times\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}+\frac{p}{p+q}\,\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DC}.$$

Итак, вектор $\overrightarrow{DM}$ разложен по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$. Непосредственный подсчет суммы коэффициентов в этом разложении дает

$$\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}\,\frac{n}{m+n}+$$
$$+\frac{p}{p+q}\,\frac{m}{m+n}=\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}=1,$$

что и требовалось. Остальные случаи (точка M лежит вне треугольника ABC или на одной из его сторон) аналогичны и мы их опускаем.

Задача 3 (МФТИ, 1978). *Длина ребра правильного тетраэдра ABCD равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами прямых AD и BC пересекают прямую EF и перпендикулярен ей. Найдем длину этого отрезка.*

Решение. Введем векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ (рис. 6). Заметим, что $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=a$ и

---

*) В несколько ином виде это соотношение имеется в цитированной статье С. Овчинникова.

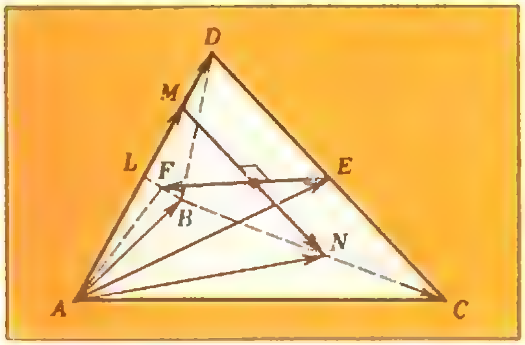


Рис. 8.

$\widehat{(\vec{b},\vec{c})}=\widehat{(\vec{c},\vec{d})}=\widehat{(\vec{d},\vec{b})}=\frac{\pi}{3}$. Так как E — середина ребра DC, то

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right). \qquad (6)$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\overrightarrow{AL}\right),$$

но $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\vec{d}$, поэтому

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}. \qquad (7)$$

Далее,

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}-$$
$$-\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}. \qquad (8)$$

Пусть $\overrightarrow{AM}=m\vec{d}$, $\overrightarrow{BN}=n\overrightarrow{BC}$, (9)
где $0<m<1$ и $0<n<1$. Из последнего равенства сразу следует

$$|BN|:|NC|=n:(1-n).$$

Тогда, на основании (1),

$$\overrightarrow{AN}=n\vec{c}+(1-n)\vec{b}. \qquad (10)$$

Далее, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$, откуда

$$\overrightarrow{MN}=n\vec{c}+(1-n)\vec{b}-m\vec{d}. \qquad (11)$$

Так как, по условию, отрезки EF и MN *перпендикулярны*, то $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{MN}=0$, или

$$\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{d}\right)\times$$
$$\times\left((1-n)\vec{b}+n\vec{c}-m\vec{d}\right)=0.$$

Учитывая сделанное выше замечание относительно модулей векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и углов между ними, раскроем скобки в левой части этого равенства. Получим

$$2m-4n+1=0. \qquad (12)$$

В силу III основного соотношения

$$\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AF}+\beta\overrightarrow{AE}+\gamma\overrightarrow{AM}, \qquad (13)$$

причем $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Подставим в (13) вместо $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AM}$ их выражения через $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, т. е. (7), (6), (9):

$$\overrightarrow{AN}=\frac{\alpha}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)+$$
$$+\gamma m\vec{d}=\frac{\alpha}{2}\vec{b}+\frac{\beta}{2}\vec{c}+$$
$$+\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}+\gamma m\right)\vec{d}.$$

В силу единственности разложения вектора по трем данным некомпланарным векторам $(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ отсюда и из (10) получаем систему

$$\frac{\alpha}{2}=1-n;\ \frac{\beta}{2}=n;\ \frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}+\gamma m=0,$$

решая которую получаем

$$\alpha=2-2n,\ \beta=2n,\ \ \gamma=-\frac{1+n}{2m}.$$

Пользуясь соотношением $\alpha+\beta+\gamma=1$, получим отсюда

$$2m-n-1=0.$$

Решая это уравнение совместно с (12), найдем $n=\frac{2}{3}$ и $m=\frac{5}{6}$. Осталось подставить эти значения в выражение (10) для $\overrightarrow{MN}$; получим

$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{d};$$

после несложного вычисления найдем $|MN|=\frac{a\sqrt{23}}{6}$.

IV основное соотношение. *Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC и O — произвольная точка пространства, то выполняется равенство:*

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Это соотношение сформулировано и доказано в учебнике «Геометрия 9» (§ 22, задача 2).

Задача 4 (Киевск. политехн. ин-т, 1978). *Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Доказать,*

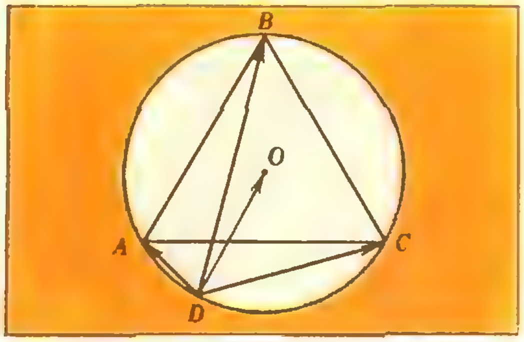


Рис. 7.

что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого треугольника равна $2a^2$.

Решение. Пусть D — произвольная точка окружности (рис. 7). Положим $|DA| = x$; $|DB| = y$; $|DC| = z$.

Тогда по теореме косинусов имеем:

из $\Delta\, ADB$: $a^2 = x^2 + y^2 - xy$,
из $\Delta\, BDC$: $a^2 = y^2 + z^2 - yz$,
из $\Delta\, ADC$: $a^2 = x^2 + z^2 + xz$.

Сложив по частям эти равенства, получаем

$$3a^2 = 2\,(x^2 + y^2 + z^2) - xy - yz + zx. \quad (14)$$

В силу IV основного соотношения

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right),$$

где O — центр окружности.

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получаем

$$\left|\overrightarrow{DO}\right|^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}\right).$$

Так как $|DO|$ — радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, то $\left|\overrightarrow{DO}\right|^2 = |DO|^2 = \frac{1}{3}a^2$.

Поэтому

$$\frac{a^2}{3} = \frac{1}{9}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx)$$

или

$$3a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx.$$

Сложив это равенство по частям с (14), получим

$$6a^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

Читатель «Кванта», готовящийся к экзаменам, может спросить: имеет ли он право пользоваться «основными соотношениями» при решении экзаменационных задач? Разумеется,— да! Однако при этом для соотношений I—III необходимо привести вывод используемого соотношения в экзаменационной работе. (Для соотношения IV, разумеется, достаточно сослаться на учебник.)

Чтобы привыкнуть к самостоятельному применению основных соотношений, рекомендуем решить нижеследующие упражнения. Из них 1—2 решаются с помощью I, 3—4 с помощью II, 5—6 с помощью III.

Упражнения

1 (МФТИ, 1970). В треугольнике ABC биссектриса AI делит сторону BC в отношении $|BD| : |CD| = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

2 (МГУ, биофак, 1973). Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найти площадь четырехугольника $QMCD$.

3 (МФТИ, 1977). Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4 (МФТИ, 1977). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные (SAD).

Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

5 (МФТИ, 1978). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $4a$, длина бокового ребра равна a. Точки D и E — середины ребра A_1B_1 и BC. Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен к ней. Найти длину этого отрезка.

6 (МФТИ, 1978). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен к ней. Найти длину этого отрезка.

Л. Баканина

КПД тепловых и холодильных машин

Что такое коэффициент полезного действия тепловой и холодильной машин? Может ли он быть больше 100%? Постараемся ответить на эти вопросы.

Для работы любой тепловой машины необходимы по крайней мере два тепловых резервуара с разными температурами. Получая тепло от более горячего резервуара (нагревателя), рабочее тело машины совершает работу, но при этом часть тепла отдается более холодному резервуару (холодильнику).

Коэффициент полезного действия η *тепловой машины* равен отношению работы A, совершенной машиной, к количеству теплоты $Q_н$, полученному ею от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_н}.$$

Согласно первому закону термодинамики,

$$A = Q - \Delta U = (Q_н - Q_х) - \Delta U.$$

Здесь $Q_х$ — количество теплоты, отданное холодильнику (чаще всего холодильником для тепловых машин служит окружающая среда), а ΔU — изменение внутренней энергии рабочего тела. Поскольку все тепловые машины работают по замкнутому циклу — рабочее тело в конце цикла возвращается в начальное состояние с той же внутренней энергией — изменение внутренней энергии равно нулю: $\Delta U = 0$. Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{Q_х}{Q_н}.$$

Отсюда сразу видно, что КПД тепловой машины всегда меньше 100%. Однако существует максимально возможный коэффициент полезного действия. Для его получения тепловая машина должна работать по так называемому идеальному циклу — циклу Карно *).

На рисунке 1 изображен цикл Карно для идеального газа (в качестве рабочего тела). Процессы *1—2* и *3—4* — изотермические, а *2—3* и *4—1* — адиабатные. Как известно, КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника:

$$\eta_К = \frac{T_н - T_х}{T_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н}.$$

Теперь рассмотрим холодильную машину. Она работает по такому принципу: за счет внешней механической работы тепло отнимается от более холодного резервуара и передается более горячему резервуару.

Полезный эффект холодильной машины определяется количеством теплоты $Q_х$, отобранным у охлаждаемого тела, а затраченная энергия — это внешняя работа A, совершенная над рабочим телом. Отношение

$$\varepsilon = \frac{Q_х}{A}$$

обычно называют *холодильным коэффициентом* (чтобы не путать с КПД тепловой машины).

Если холодильная машина работает по так называемому идеальному циклу — обратному циклу Карно (теперь цикл обходится против часовой стрелки; см. рис. 1), то

$$\varepsilon = \frac{T_х}{T_н - T_х}.$$

Из этой формулы видно, что ε может быть меньше, больше или равен 100%. Действительно, возможно построить холодильную машину, у которой разность температур нагрева-

---

*) Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье С. Шамаша и Э. Эвенчик «Цикл Карно» («Квант», 1977, № 1).

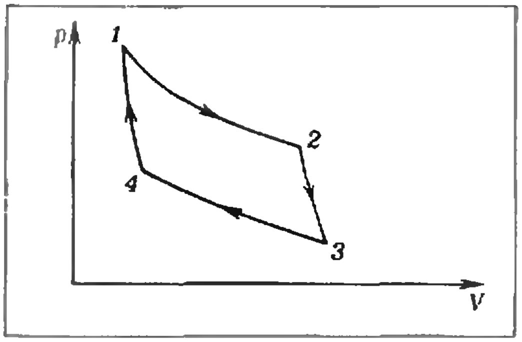


Рис. 1.

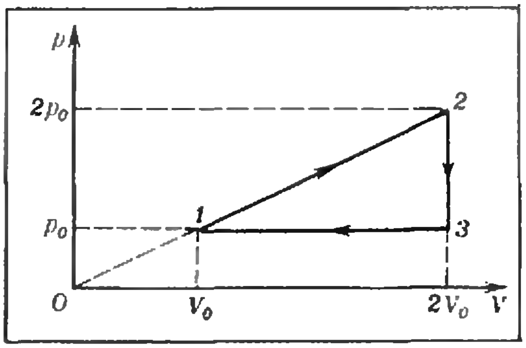


Рис. 2.

теля и холодильника будет больше, меньше или равна температуре холодильника.

Тот факт, что ε может быть больше 100%, иногда вызывает вопрос — не нарушается ли при этом закон сохранения энергии? На самом деле никакого противоречия с законом сохранения энергии нет. Тепло, отобранное у охлаждаемого тела, и энергия, затраченная на совершение работы извне, вовсе не переходят друг в друга, а отдаются нагревателю (обычно у холодильных машин им является окружающая среда).

Разберем несколько конкретных задач.

Задача 1. *Тепловая машина, рабочим телом которой является 1 моль идеального одноатомного газа, совершает цикл, изображенный на рисунке 2. Найти КПД этой машины.*

Коэффициент полезного действия тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_н}.$$

Работа A за цикл численно равна площади цикла, изображенного в координатах p, V (см. рис. 2):

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

Выясним, на каких участках цикла газ получает тепло, а на каких отдает его. Запишем первый закон термодинамики для любого участка:

$$Q_i = \Delta U_i + A_i.$$

Один моль идеального одноатомного газа обладает внутренней энергией $U = \frac{3}{2} RT$, откуда

$$\Delta U_i = \frac{3}{2} R\Delta T_i$$

— изменение внутренней энергии на каждом участке определяется изменением температуры. Работа A_i численно равна площади под соответствующим участком цикла.

С помощью уравнения состояния идеального газа $pV = RT$ найдем температуры газа в точках 1, 2, 3:

$$T_1 = \frac{p_0 V_0}{R}, \quad T_2 = \frac{2p_0 \cdot 2V_0}{R} = 4T_1,$$

$$T_3 = \frac{p_0 \cdot 2V_0}{R} = 2T_1.$$

На участке 1—2 температура газа увеличивается ($\Delta T_{12} > 0$), и газ совершает положительную работу (газ расширяется); следовательно, на этом участке газ получает тепло. На участках 2—3 и 3—1 температура газа убывает, на участке 2—3 работа вообще не совершается, а на участке 3—1 она отрицательна (газ сжимают, совершая работу извне) — значит, на этих участках газ тепла не получает.

Итак, газ получает тепло только на участке 1—2:

$$Q_н = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{9}{2} p_0 V_0 + \frac{3}{2} p_0 V_0 = 6p_0 V_0.$$

Тогда окончательно

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{1/2 p_0 V_0}{6p_0 V_0} = \frac{1}{12} \approx 8\%.$$

Задача 2. *Идеальная холодильная машина имеет в качестве холодильника резервуар с водой при 0°С, а в качестве нагревателя — резервуар с кипящей водой. Какую работу надо совершить, чтобы превратить в лед 1 кг воды? Какое количество воды в нагревателе превратится при этом в пар? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ кДж/кг,*

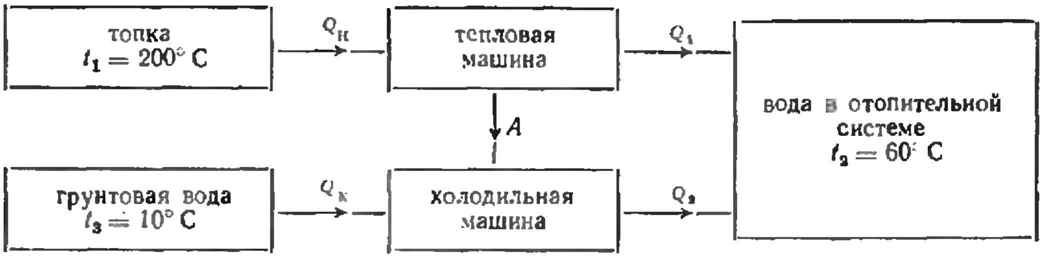


Рис. 3.

удельная теплота парообразования воды $L = 2260$ *кДж/кг.*

Идеальная холодильная машина работает по обратному циклу Карно, ее холодильный коэффициент

$$\varepsilon = \frac{T_х}{T_н - T_х} = \frac{273\ К}{100\ К} = 2{,}73.$$

При замерзании 1 кг воды выделяется количество теплоты

$$Q_х = \lambda m = 340\ кДж.$$

Совершенная при этом работа

$$A = \frac{Q_х}{\varepsilon} \approx 125\ кДж.$$

Нагреватель получит количество теплоты

$$Q_н = Q_х + A \approx 465\ кДж,$$

следовательно, в пар превратится масса воды

$$m_1 = \frac{Q_н}{L} \approx 0{,}2\ кг.$$

Задача 3. *В середине прошлого века английский физик Томсон предложил идею так называемого динамического отопления. Топка, в которой сжигается топливо, служит нагревателем тепловой машины, холодильником для этой машины служит вода в отопительной системе. За счет полученной работы приводится в действие холодильная машина. Для холодильной машины вода в отопительной системе служит нагревателем, а холодным резервуаром, от которого отбирается тепло, служит грунтовая вода. Считая, что обе машины работают по идеальным циклам, и пренебрегая потерями, определите, сколько тепла получит вода в отопительной системе при сжигании 1 кг топлива. Удельная теплота сгорания топлива* q, *температура в топке тепловой машины* $t_1 = 200^\circ C$, *температура воды в отопительной системе* $t_2 = 60^\circ C$, *температура грунтовой воды* $t_3 = 10^\circ C$.

Для того чтобы яснее представить себе идею Томсона, нарисуем схему динамического отопления (рис. 3). Теперь проведем необходимые расчеты.

Машины — идеальные, то есть работают они по циклу Карно. Следовательно, КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{140\ К}{473\ К} \approx 0{,}3,$$

холодильный коэффициент

$$\varepsilon = \frac{T_3}{T_2 - T_3} = \frac{283\ К}{50\ К} \approx 5{,}7.$$

При сжигании 1 кг топлива в топке выделяется энергия $Q_н = q$. Работа, которую совершает при этом тепловая машина, равна

$$A = \eta Q_н = \eta q,$$

а количество теплоты, переданное воде в отопительной системе, равно

$$Q_1 = q - A = (1 - \eta)\, q.$$

Холодильная машина отбирает у грунтовой воды количество теплоты

$$Q_х = \varepsilon A = \varepsilon\eta q.$$

Вода в отопительной системе получает при этом количество теплоты

$$Q_2 = Q_х + A = \eta\,(1 + \varepsilon)\, q.$$

В общей сложности вода в отопительной системе получает количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = (1 + \varepsilon\eta)\, q \approx 2{,}7q.$$

Таким образом, система динамического отопления позволяет в принципе (если пренебречь потерями) передавать воде в отопительной системе количество теплоты бо́льшее, чем выделяется в топке при сгорании топлива! Не нарушается ли здесь первое начало термодинамики? Никоим образом: «лишнее» тепло отбирается у грунтовой воды. Действительно, у грунтовой воды отбирается тепло

$$Q_х = \varepsilon A = \varepsilon\eta q,$$

— как раз разница между Q и q.

(Окончание см. на с. 54)

Московский инженерно-физический институт

Ниже приводятся варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1978 года.

Математика

Вариант 1

1. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли (по массе) составляла p%?

2. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, $(AB) \parallel (CD)$, $(BC) \parallel (AD)$, $|AB|=3$, $|BC|=4$. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Определите величину угла между прямыми (BS) и (CS), если радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 6,5.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=-8x-46$ и параболой $y=4x^2+ax+2$, если известно, что касательная к параболе в точке $x=-5$ составляет с осью Ox угол $\pi-\operatorname{arctg} 20$.

4. Решите уравнение

$$\cos 5x \operatorname{tg} 6|x|+\sin 5x=0.$$

Вариант 2

1. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток, равный 2.

2. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC $|AB|=|AC|=a$, $\widehat{ABC}=\varphi$. Прямая (AS) составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α, плоскость боковой грани (BSC) составляет с той же плоскостью угол величиной β и $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Найдите объем пирамиды $KSLC$, если известно, что точки K и L принадлежат ребрам $[AS]$ и $[BS]$ соответственно, а площадь треугольника KSL относится к площади треугольника ABS как $4:25$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)+\log_3(x-y)=2, \\ 2^{y^2}=512^{x+1} \end{cases}$$

4. Найдите критические точки функции

$$y=2\sin^2\frac{x}{6}+\sin\frac{x}{3}-\frac{x}{3},$$

координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2-10<-19{,}5x$.

Вариант 3

1. При помощи двух труб надо выкачать 1000 л воды. Две трубы неодинакового сечения выкачивают в один час V литров воды. Первая труба выкачала 500 литров воды, и затем всю оставшуюся воду выкачала вторая труба. Вся работа была выполнена в t часов. Сколько литров воды можно выкачать каждой трубой отдельно в один час?

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания (ABC) равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти площадь сечения, проведенного через вершину S параллельно ребру $[AB]$ и составляющего с плоскостью основания (ABC) угол γ.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$3y=-x^2+8x-7 \quad \text{и} \quad y+1=\frac{4}{x-3}.$$

4. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{10}}\sin 2x+\lg\cos x-\lg 7=0.$$

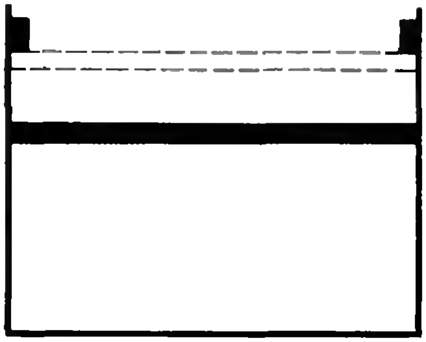


Рис. 1.

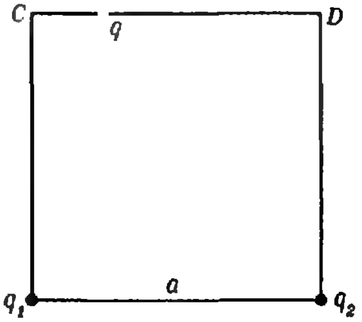


Рис. 2.

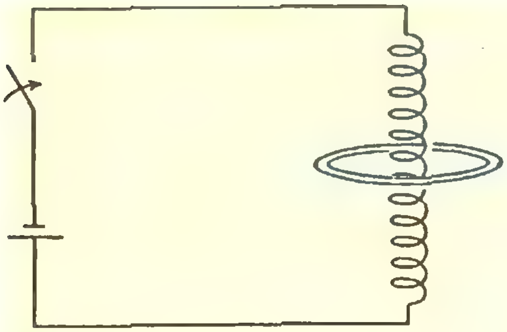


Рис. 3.

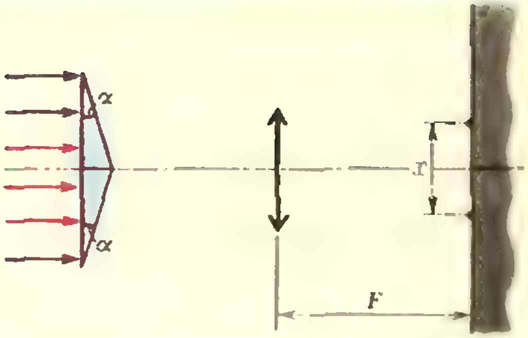


Рис. 4.

Ф и з и к а

1. Доска массой $M = 500$ г плавает на воде. На одном конце доски в точке A сидит лягушка. С какой наименьшей скоростью она должна прыгнуть, чтобы попасть в точку B на доске, отстоящую на $l = 25$ см от точки A? Масса лягушки $m = 150$ г. Трением между доской и водой пренебречь.

2. В цилиндре с площадью сечения $S = 5{,}0$ см³ под поршнем массы $M = 1{,}0$ кг находится некоторый газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n = 1{,}5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы (рис. 1). При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k = 1{,}2$ раза. Определить силу, с которой поршень давит на уступы. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа.

3. Неподвижные точечные заряды $q_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл расположены в соседних вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}9$ м (рис. 2). Найти работу, которую совершат электрические силы над зарядом $q = 10^{-8}$ Кл при перемещении его из вершины C в вершину D.

4. Длинный соленоид, содержащий $N = 200$ витков площадью $S = 1{,}6$ см², подключают к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 0{,}8$ В (рис. 3). Сопротивление обмотки соленоида и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. На соленоид надето проводящее кольцо сопротивлением $R = 0{,}6$ Ом. Найти индукцию магнитного поля в соленоиде и количество теплоты, выделившееся в кольце, к моменту времени $\tau = 0{,}06$ с после подключения батареи.

5. Параллельный световой пучок падает нормально на грань стеклянной бипризмы ($n = 1{,}5$) с малым преломляющим углом $\alpha = 10^{-2}$ рад (рис. 4). За бипризмой расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 100$ см. Найти расстояние x между точками схождения лучей в фокальной плоскости линзы. Считать $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

А. Александров, А. Забоев,
Н. Шолохов

КПД тепловых и холодильных машин

(Окончание. Начало см. на с. 50)

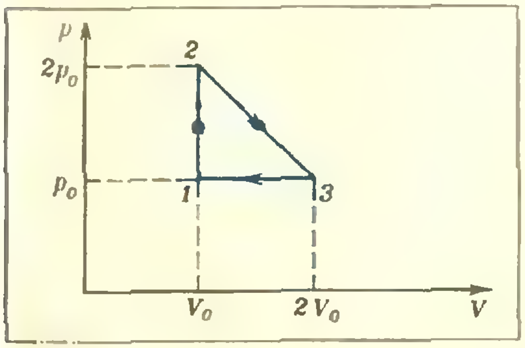


Рис. 4.

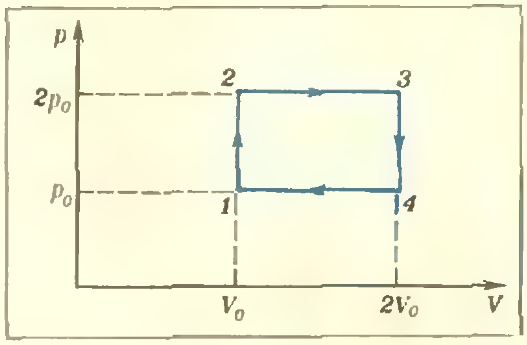


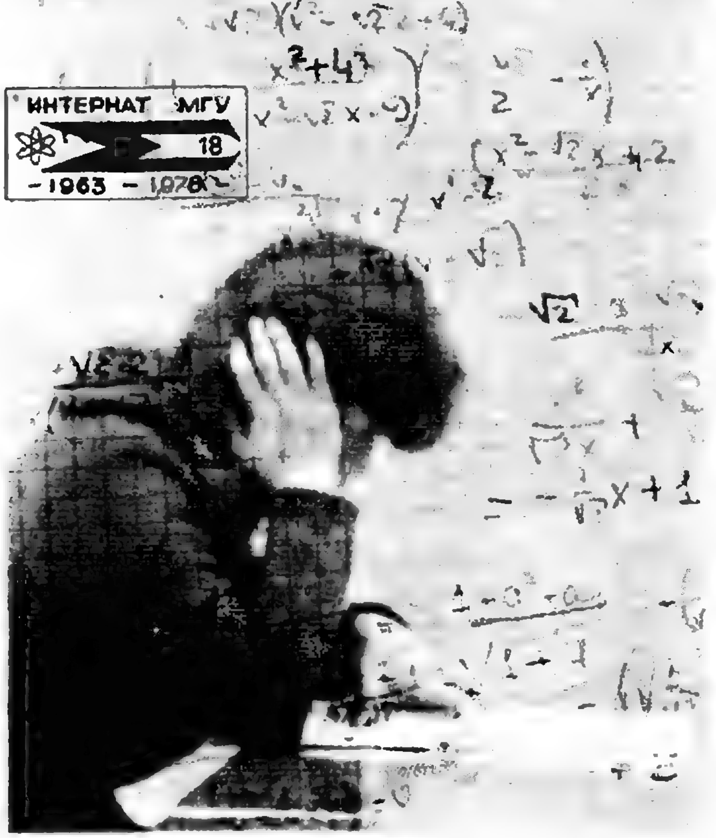
Рис. 5.

У п р а ж н е н и я

1. Тепловая машина, рабочим телом в которой является 1 моль идеального газа, совершает цикл, изображенный на рисунке 3. Найдите КПД этой машины.

2. Решите предыдущую задачу для цикла, изображенного на рисунке 4.

3. Сколько стоит приготовление 1 кг льда в домашнем холодильнике, если считать, что он работает по идеальному циклу? Комнатная температура 23 °С, температура фреона равна −10 °С, 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 коп.



ФМШ при МГУ — 15 лет

В прошлом году исполнилось 15 лет со дня создания первых четырех физико-математических школ-интернатов — при Новосибирском, Московском, Ленинградском и Киевском университетах. Физико-математические школы-интернаты были учреждены в 1963 году. В создании системы преподавания для этих школ приняли участие видные ученые: в Москве — академик А. Н. Колмогоров и академик И. К. Кикоин, в Новосибирске — академик М. А. Лаврентьев, в Киеве — академик В. М. Глушков, в Ленинграде — член-корреспондент АН СССР Д. К. Фадеев. В связи с юбилеем редакция обратилась к председателю Попечительского совета физико-математической школы-интерната при МГУ А. Н. Колмогорову, директору этой школы И. Т. Тропину и заведующему учебной частью по математике В. В. Вавилову с просьбой рассказать о ее работе.

Научно-техническая революция коренным образом изменила роль науки в жизни человеческого общества. Наука превратилась в непосредственную производительную силу. Необычайно быстрое развитие науки требует все новых и новых научных кадров. Поэтому так актуален вопрос о привлечении в науку талантливой молодежи. А она рассеяна по всей нашей необъятной стране. И если в столичных городах заметить ее не так уж трудно, то найти талантливых учащихся, способных к самостоятельным научным исследованиям, в небольших городах, поселках и сельской местности намного труднее.

Созданные 15 лет тому назад физико-математические школы-интернаты при ведущих университетах страны (в Новосибирске, Москве, Ленинграде и Киеве) призваны практически решать эту важнейшую государственную задачу.

Надежда на то, что из них выйдут настоящие исследователи, в широкой мере оправдалась. В частности, из школьников, принятых в Московскую ФМШ в 1963—70 годах, более двухсот человек закончили впоследствии аспирантуру и защитили кандидатские диссертации. Выпускники интерната при МГУ опубликовали сотни научных работ, выступали с обзорными докладами на международных конференциях и конгрессах. Среди выпускников ФМШ есть уже два доктора физико-математических наук. Сходная картина наблюдается и в трех других ФМШ.

Ввиду успеха первых четырех физико-математических школ-интернатов аналогичные школы открыты в некоторых других союзных республиках: Армении, Грузии, Казахстане, Литве, а также в некоторых автономных республиках Российской Федерации.

В московской ФМШ в девятых и десятых классах обучаются 360 школьников. Каждый год мы набираем 150 человек на двухлетнее обучение (в девятый класс) и 60 человек на одногодичное обучение (в десятый класс). Принимаются окончившие, соответственно, восемь или девять классов обычных школ, проживающие в центральной части РСФСР, на Урале, в Поволжье, на Северном Кавказе и в Белоруссии. Отбор будущих школьников производится на основе конкурсных экзаменов*) по математике и

---

*) Точные сроки и другие подробности о правилах приема можно узнать в областном отделе народного образования или в министерстве просвещения соответствующей республики по месту жительства. В случае необходимости за справками можно обратиться и непосредственно в школу по адресу: 121357, Москва, Кременчугская ул., 29, школа-интернат, приемная комиссия.

физике, которые организует Московский университет совместно с местными органами народного образования. Часть экзаменовавшихся зачисляется сразу в ФМШ, часть (примерно 75%) после экзаменов получает приглашение на летний учебный сбор и зачисляется по итогам этих летних занятий.

Опыт показывает, что 97% наших выпускников поступает в вузы, в том числе около 40% в Московский университет и 20% в Московский физико-технический институт.

Занятия математикой и физикой в Московской ФМШ не ограничиваются изучением программы обычных школ, а сама школа не является курсами подготовки к вступительным экзаменам в вузы. На простых примерах и задачах мы стремимся ввести учащихся в стиль мышления современной науки, дать возможность воспринимать полученные знания по математике и физике не формально, а с пониманием механизма, с помощью которого ведется научное исследование. Этому способствует самостоятельная работа — маленькие научные исследования, проводимые школьниками в рамках математического и физического практикумов, на факультативных спецкурсах и кружках. Большую роль в формировании и развитии устойчивого интереса к научно-исследовательской работе играет в ФМШ научное общество учащихся, различного рода конференции школьников, математические и физические бои, олимпиады. За 15 лет команда ФМШ на Всесоюзной математической олимпиаде завоевала 12 первых, 25 вторых и 23 третьих премий; на Международных математических олимпиадах представители нашей школы получили 10 первых, 6 вторых и 10 третьих премий.

Физику и математику в ФМШ преподают в основном молодые (иногда очень молодые!) ученые, уже ведущие собственную научную работу. В качестве «младших преподавате-

лей» со школьниками занимается группа лучших студентов и аспирантов МГУ.

Учиться в ФМШ не легко. Кроме способностей нужны большое упорство, организованность в работе и хорошее здоровье. В ФМШ не любят «вундеркиндов», считающих, что для них обычные требования не обязательны. Поступать имеет смысл только тем, кто уже утвердился в своем желании серьезно заниматься математикой и физикой. Став учащимся ФМШ, вы будете находиться среди товарищей, которые, как и вы, увлечены математикой и физикой.

За 15 лет в ФМШ сложились свои традиции, создавшие в школе особую атмосферу, где интерес к науке, привычка к упорному труду соединяются с увлечением литературой и музыкой, спортом (например, традиционными стали встречи по футболу, волейболу и баскетболу между командами учащихся и преподавателей), интересными туристскими походами.

Далеко не все выпускники школы делаются научными работниками в области математики и физики. Мы не менее гордимся теми, кто становится хорошими инженерами в той или иной производственной области. Есть и такие, кто выбирают своей специальностью биологию, лингвистику. Но мы надеемся, что все выпускники ФМШ с удовольствием вспоминают атмосферу творческого труда и широких культурных интересов в нашем интернате.

Конечно, нужно еще много сделать для того, чтобы Московская ФМШ более успешно выполняла возложенные на нее задачи.

Пользуясь случаем, мы от всей души поздравляем коллективы школ-интернатов Киева, Ленинграда, Новосибирска и нашей ФМШ с пятнадцатилетием и желаем им дальнейших успехов.

В. Вавилов,
А. Колмогоров,
И. Тропин

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов и учащиеся ПТУ. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1979 г. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 1 марта 1979 года. После проверки работ (примерно в июле 1979 года) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются, и рецензии на них не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см×6 см с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	Московская
Фамилия, имя	Иванов Петр
Год рождения	1965 г
Класс, школа	7 класс «А» школы № 2 г. Клина
Фамилия, имя, отчество учителя математики	Никаноров Владимир Алексеевич
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 2. Мать — домашняя хозяйка
Полный почтовый адрес	123456. Клин, ул. Ленина 1, кв. 1.

Результаты проверки

1 а) б) в)	2	3	4	5	6	7 а) б) в)	8	9 а) б)	10

Адреса, по которым следует присылать вступительные работы, будут указаны в следующем номере журнала (их можно посмотреть также в «Кванте», 1978, № 1).

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ, имеют возможность заниматься по программе ВЗМШ в группах «Коллективный ученик ВЗМШ».

«Коллективный ученик ВЗШМ» — это школьный математический кружок, работающий под руководством учителя математики данной школы по программе ВЗМШ. Прием в группы «Коллективный ученик ВЗМШ» проводится до 20 сентября 1979 года в два потока: для тех, кто с сентября 1979 года будет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Для организации кружка достаточно заявления учителя математики, берущего на себя руководство кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено подписью директора школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллек-

тивный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления об организации групп «Коллективный ученик ВЗМШ» следует присылать по адресу: 117234. Москва, В-234, МГУ, мехмат. ВЗМШ, заведующему сектором групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1979 году

1. Пусть точки A, B, C являются вершинами неравнобедренного прямоугольного треугольника. Сколькими способами можно поставить на плоскости точку D, чтобы множество точек $\{A, B, C, D\}$ имело: а) центр симметрии? б) ось симметрии? в) изменятся ли ответы на вопросы а) и б), если в условии задачи заменить слово «прямоугольного» на слово «непрямоугольного»?

2. Рассмотрим всевозможные девятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, ..., 9 встречается по одному разу. Определите наибольший общий делитель этих чисел.

3. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Клетки называются *соседями*, если у них общая сторона.)

4. Андрей бегает на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова все трое не прибежали в одно место. За это время Женя обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было за это время обгонов?

5. В одну строчку выписали 25 чисел. Сумма любых трех соседних чисел положительна. Может ли при этом сумма всех 25 чисел быть отрицательной?

6. Найдите все пары целых чисел $(m; n)$, для которых выполняется равенство $m^2+1=2^n$.

7. Рассмотрим на плоскости многоугольник, являющийся объединением трех параллелограммов: $OAHB$, $OBKC$ и $OCMA$. а) Обязательно ли этот многоугольник выпуклый? б) Сколько сторон может иметь этот многоугольник? в) Какой периметр может иметь этот многоугольник, если $|OA|+|OB|+|OC|=1$?

8. Загаданы два целых положительных числа. Математику A сообщена их сумма, а математику B — сумма их квадратов. Если A и B соединят свои знания, то они, конечно, определят оба числа. Но они узнали эти числа в процессе следующего разговора:

B. — Я не знаю, какие это числа.

A. — Их сумма больше десяти.

B. — Тогда я знаю, какие это числа.

Найдите и вы эти числа.

9. Можно ли нарисовать на плоскости прямоугольник $ABCD$ и точку M так, чтобы расстояния от точки M до точек A, B, C, D были равны, соответственно: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 4, 8, 7?

10. Имеются два автомата. Если в первый из них бросить 5 копеек, то он умножит данное ему число на 3. Если во второй из них бросить 2 копейки, то он прибавит к данному ему числу число 4. Какую минимальную сумму денег надо иметь, чтобы с помощью этих автоматов получить из данного числа 1 число 1979?

Ж. Раббот

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1979/80 учебный год. (В отдельных случаях допускается прием из других союзных республик.)

Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где помощь нашей школы особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружков—их руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультативных пунктах (в ряде московских школ) проводятся очные занятия по физике и математике. Набор в эти пункты происходит или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (собеседование будет проводиться в сентябре; справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительную контрольную работу по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте *простой бандеролью*. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Башкирская АССР*
2. Фамилия, имя, отчество	*Бугрова Галина Львовна*
3. Класс	*девятый*
4. Номер и адрес школы	*школа № 105, ул. Гончарова, д. 1*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*теплотехник, заместитель начальника цеха*
мать	*аппаратчица*
6. Подробный домашний адрес	*450064, г. Уфа, ул. Нежинская, д. 2, кв. 3.*

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1979 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1979 года.

Тетрадь с решенными задачами вступительной контрольной работы (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительной контрольной работы по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 5—11 — для учащихся восьмых классов и задачи 7—13 — для учащихся девятых классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

Задачи вступительной контрольной работы в ЗФТШ в 1979 году

Физика

1. Дорожка в саду имеет ширину 2 м. Какой длины дорожку можно покрыть слоем песка толщиной в 2 см, если песок доставлен десятитонным грузовиком, нагруженным до предела? Плотность песка определите самостоятельно.

2. Определите глубину шахты, на дне которой барометр показывает давление 860 мм рт. ст. Давление на поверхности земли принять равным 760 мм рт. ст. Плотность воздуха 1,29 кг/м^3. Изменением плотности воздуха с глубиной пренебречь.

3. Разломите спичку на как можно более маленькие кусочки. Почему маленькие кусочки труднее разламывать, чем большие?

4. Какое количество древесного угля потребуется для превращения в пар 3 кг льда при нормальном давлении? Начальная температура льда —5°С. КПД нагревателя 20%.

5. Электродвигатель, приводящий в действие насос, подключен к сети напряжением 220 В. Насос подает 500 м^3 воды на высоту 20 м. Какое количество электричества протечет по обмотке электродвигателя, если КПД установки (двигателя с насосом) 40%?

6. Мотоциклист проехал расстояние между двумя пунктами со скоростью 40 км/ч. Увеличив скорость до 80 км/ч, мотоциклист проехал затем расстояние вдвое меньшее. Определить среднюю скорость мотоциклиста за все время движения.

7. В цилиндрическую банку налита вода. Когда в банку опустили порожнюю алюминиевую чашку так, чтобы она плавала, вода поднялась на 2,7 см. На сколько изменится уровень воды в банке, если чашку утопить в ней? Плотность алюминия 2,7 г/см^3.

8. Человек роняет камень в глубокий колодец и слышит звук его падения через 8 с. Найти глубину колодца. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Скорость звука 330 м/с.

9. Какую мощность развивает человек, везущий по горизонтальной дороге груженые сани общей массой 40 кг? Коэффициент трения полозьев о дорогу равен 0,1. Сани тянут с постоянной скоростью 3 м/с с помощью веревки, наклоненной под углом 30° к горизонту.

10. Лыжник скатывается с трамплина высотой 50 м, имеющего у подножия закругление радиуса 10 м. Найти перегрузку, испытываемую лыжником при выезде на горизонтальный участок.

11. Воздушный шар массой M парит в воздухе на высоте H. На лестнице, привязанной к гондоле воздушного шара, стоит человек массой m. На какой высоте окажется воздушный шар, если человек поднимется по лестнице вверх на n ступенек? Расстояние между ступеньками h.

12. В комнате объемом 60 м^3 испарили капельку духов, содержащую 10^{-4} г ароматического вещества с относительной молекулярной массой 1000. Сколько молекул ароматического вещества попадет в легкие человека при каждом вздохе? Объем легких принять равным 2,2 л.

13. В герметическом сосуде объемом 11,2 л содержится воздух под давлением 0,1 МПа. Какое количество теплоты необходимо сообщить воздуху, чтобы давление в сосуде увеличилось в 3 раза? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной 21 Дж/(моль·К).

Математика

1. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учащихся посещают оба кружка?

2. Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии. Докажите.

3. Определите все значения a, при которых множество решений неравенства

$$x^2 - a(1+a)x + a^3 < 0$$

содержит отрезок $[0;\ 1]$.

4. Докажите или опровергните следующие утверждения: а) для того чтобы число $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)) - 1$ делилось на n, достаточно, чтобы n было простым; б) для того чтобы число $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)) - 1$ делилось на n, необходимо, чтобы n было простым.

5. Один четырехугольник расположен внутри другого четырехугольника. Может ли сумма длин диагоналей внутреннего четырехугольника быть больше суммы длин диагоналей внешнего четырехугольника?

6. На олимпиаде были даны три задачи: A, B, C. 25 школьников решили хотя бы одну задачу. Среди школьников, не решивших задачу A, решивших задачу B, в два раза больше, чем решивших задачу C. Школьников, решивших только задачу A, на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу A. Сколько школьников решило только задачу B, если среди школьников, решивших только одну задачу, половина не решила задачу A?

7. Точки D и E служат серединами сторон $[AB]$ и $[CD]$ четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}.$$

8. Даны два утверждения:

а) Система

$$\begin{cases} (a+4)x + 3y = a+1, \\ ax + (a-1)y = a-1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений;

б) Прямые, заданные уравнениями $5x+4y=6$ и $ax+6y=10$, пересекаются во второй четверти декартовой прямоугольной системы координат.

При каких значениях a одно из этих утверждений ложно, а другое — истинно?

9. Докажите, что если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ провести внутренние биссектрисы, то четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на одной окружности.

10. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

11. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

12. Даны k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, причем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0.$$

Вычислите предел последовательности (S_n):

$$S_n = a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \ldots + a_k\sqrt{n+k}.$$

13. Функции f и g не имеют производных в точке $x=x_0$. Можно ли утверждать, что функции

$$F_1(x) = f(x) + g(x) \quad \text{и} \quad F_2(x) = f(x) \cdot g(x)$$

также не имеют производных в точке $x = x_0$?

В. Асланян, С. Коршунов,
Т. Чугунова

В. Фабрикант

Исаак Ньютон и яблоко

Масса сведений — числа, законы,
$2\pi R$, H_2SO_4.
Лампа, яблоко, Круксы, Ньютоны,
Водород, колебанья в эфире.
Ю. Тувим

Известный рассказ о том, что к открытию закона всемирного тяготения Ньютона привело зрелище падающего с дерева яблока, имеет любопытную историю.

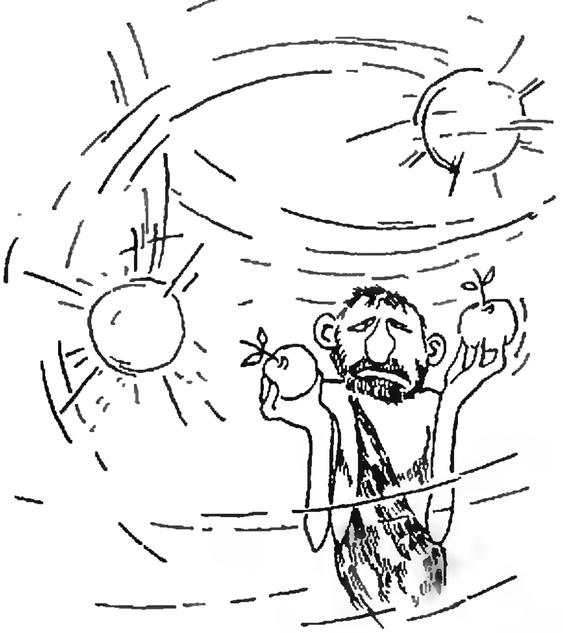
С. И. Вавилов в превосходной биографии Ньютона пишет, что рассказ этот, по-видимому, достоверен и не является легендой. Он ссылается на свидетельство Стаклея, близкого знакомого Ньютона:

«После обеда (в Лондоне, у Ньютона) погода была жаркая; мы перешли в сад и пили чай под тенью нескольких яблонь; были только мы вдвоем. Между прочим, сэр Исаак сказал мне, что точно в такой же обстановке он находился, когда впервые ему пришла в голову мысль о тяготении. Она была вызвана падением яблока, когда он сидел, погрузившись в думы. Почему яблоко всегда падает отвесно, подумал он про себя, почему не в сторону, а всегда к центру Земли. Должна существовать притягательная сила в материи, сосредоточенная в центре Земли. Если материя так тянет другую материю, то должна существовать пропорциональность ее количеству. Поэтому яблоко притягивает Землю так же, как Земля яблоко. Должна, следовательно, существовать сила, подобная той, которую мы называем тяжестью, простирающаяся по всей вселенной».

Очевидно, эти размышления о тяготении относятся к 1665 или к 1666 году, когда из-за вспышки чумы в Лондоне Ньютон вынужден был жить в деревне. В бумагах Ньютона была найдена такая запись по поводу «чумных лет»: «... в это время я был в расцвете моих изобретательских сил и думал о математике и философии больше, чем когда-либо после».

Свидетельство Стаклея было мало кому известно (мемуары Стаклея были напечатаны только в 1936 году), но знаменитый французский писатель Вольтер в книге, изданной в 1738 году и посвященной первому популярному изложению идей Ньютона, привел тот же рассказ со ссылкой на племянницу Ньютона. Рассказ быстро стал популярен, однако у многих вызвал сомнения. Считалось, что это очередная выдумка Вольтера, слывшего одним из самых остроумных людей своего времени. Нашлись люди, у которых этот рассказ вызвал даже возмущение. К числу последних принадлежал великий математик Гаусс. Он говорил:

«История с яблоком слишком проста; упало ли яблоко или нет — это все равно; но не понимаю, как можно



Если бы вместо Солнца была двойная звезда...

предполагать, что этот случай мог ускорить или замедлить такое открытие. Вероятно, дело было так: однажды к Ньютону пришел глупый и нахальный человек и спрашивал его, каким образом он мог дойти до такого великого открытия. Ньютон, увидев, какого рода существо стоит перед ним, и желая от него отвязаться, отвечал, что ему упало на нос яблоко, и это совершенно удовлетворило любознательность того господина».

Великий русский педагог К. Д. Ушинский, наоборот, увидел в истории с яблоком глубокий смысл. Противопоставляя Ньютона так называемым светским людям, он писал:

«Нужен был гений Ньютона, чтобы вдруг удивиться тому, что яблоко упало на землю. Таким «пошлостям» не удивляются всезнающие люди света. Они даже считают удивления таким обыденным событиям признаком мелкого, детского, не сформированного еще практического ума, хоть в то же самое время сами часто удивляются уже действительным пошлостям».

Ту же мысль в поэтической форме выразил советский поэт Кайсын Кулиев в мудром стихотворении «Жить удивляясь»:

«Рождаются великие творенья
Не потому ли, что порою где-то
Обычным удивляются явленьям
Ученые, художники, поэты».

Приведем еще несколько примеров того, как история с яблоком отразилась в художественной литературе.

Соотечественник Ньютона великий английский поэт Байрон начинает десятую песнь поэмы «Дон Жуан» следующими двумя строфами *):

«Случилось яблоку, упавши, прервать
Глубокие Ньютона размышленья,
И говорят (не стану отвечать
За мудрецов догадки и ученья),
Нашел он в этом способ доказать
Весьма наглядно силу тяготенья.
С паденьем, стало быть, и яблоком лишь он
Был в силах справиться с Адамовых времен.

* * *

От яблок пали мы, но этот плод
Возвысил снова род людской убогий
(Коль верен приведенный эпизод).
Проложенная Ньютоном дорога
Страданий облегчила тяжкий гнет;
С тех пор открытий сделано уж много,
И, верно, мы к луне когда-нибудь,
Благодаря парам**), направим путь».

В. Солоухин в стихотворении «Яблоко» несколько неожиданно повернул ту же тему:

«Я убежден, что Исаак Ньютон
То яблоко, которое открыло
Ему закон земного тяготенья,
Что он его,
В конечном счете, — съел».

Наконец, Марк Твен придал всему эпизоду юмористическую окраску. В рассказе «Когда я служил секретарем» он пишет:

«Что есть слава? Порождение случая! Сэр Исаак Ньютон открыл, что яблоки падают на землю, — честное слово, такие пустяковые открытия делали до него миллионы людей. Но у Ньютона были влиятельные родители, и они раздули этот банальный случай в чрезвычайное событие, а простаки подхватили их крик. И вот в одно мгновение Ньютон стал знаменит».

Рисунки профессора И. Новожилова

---

*) Перевод И. Козлова.

**) В оригинале «паровой машине».

Головоломки наших читателей

1. В кружках данной фигуры (рис. 1) расставьте 13 последовательно идущих чисел так, чтобы все шесть сумм четырех чисел, расположенных в вершинах ромбов, были бы одинаковы

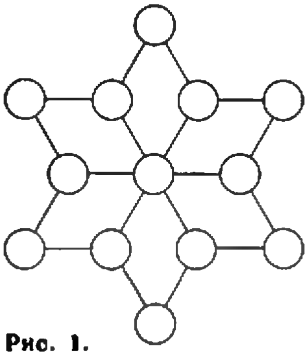


Рис. 1.

и равнялись бы 1977. Известно, что одно из этих чисел равно 496, и что оно стоит в центральном кружочке.

* * *

2. В кружочках изображенной на рисунке 2 фигуры расставьте девять последовательных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел по большой и по четырем малым окружностям, а также в вершинах выделенного центрального квадрата были бы одинаковы и равнялись шестидесяти.

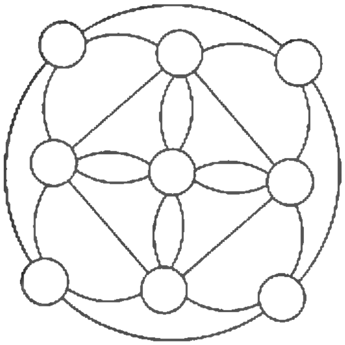


Рис. 2.

Я. Алексеев
(г. Ленинград)

Постройка тракта

(см. «Квант», 1978, № 12, 3-ю страницу обложки)

Участком тракта от Мутонвиля до Альбижуа одинаково пользуются жители всех пяти деревень; поэтому с каждой деревни причитается по $\frac{1}{5}$ стоимости постройки этого участка. Участком от Альбижуа до Бонди пользуются жители четырех деревень, поэтому каждая из них платит $\frac{1}{4}$ его стоимости. Итак, жителям деревень придется уплатить 24, 54, 94, 154 и 274 лундоров соответственно (см. таблицу; деревни обозначены в ней первыми буквами их названий).

	В долях стоимости участка	в лундорах
А	$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$	24
Б	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4} = \frac{27}{60}$	54
В	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{47}{60}$	94
Г	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{77}{60}$	154
Д	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1 = \frac{137}{60}$	274

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин,
Э. Назаров, А. Пономарева, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

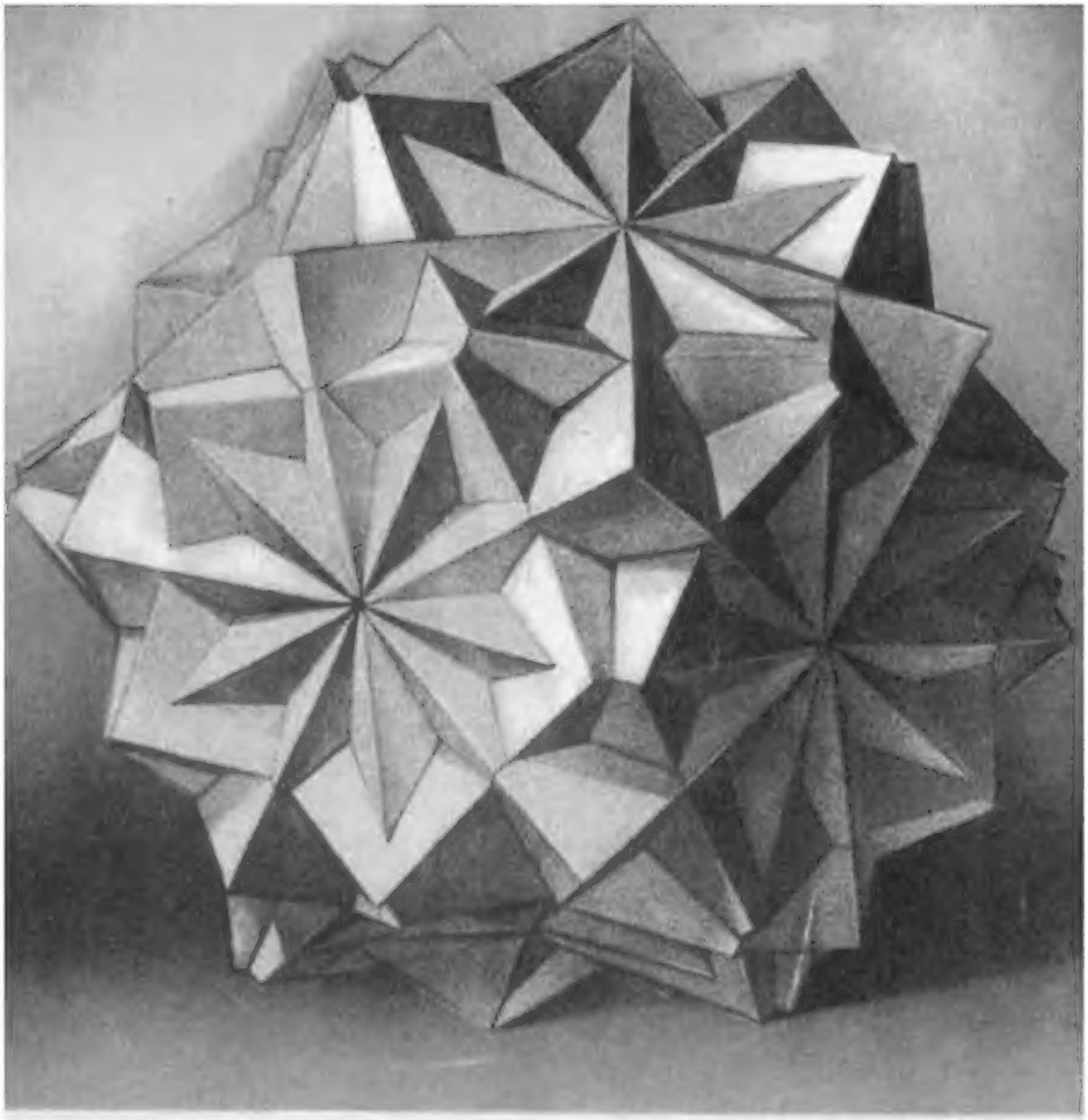
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Сомова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 30/X—78
Подписано в печать 15/XII—78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5, 60 Уч.-изд. л. 6, 39 Т-23021
Цена 30 коп. Заказ 2478
Тираж 286 965 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



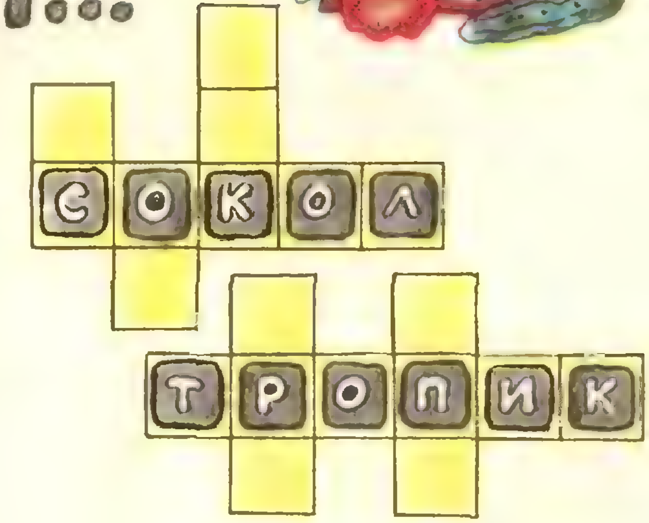
Сложный многогранник, показанный на обложке, ни что иное, как объединение десяти одинаковых кубов с общим центром. Эти кубы расположены в некотором смысле «максимально симметрично». В каком смысле? — Поясним это для случая пяти кубов. Возьмем додекаэдр и впишем в него куб (так, чтобы вершины куба лежали в вершинах додекаэдра); оказывается, это можно сделать пятью разными способами; объединение таких пяти кубов образует очень красивый многогранник — попытайтесь его нарисовать или построить из тонкого картона. Он попроще, конечно, чем многогранник из десяти кубов, показанный на обложке. Впрочем, тот тоже можно построить, отправляясь от додекаэдра (или икосаэдра), но это уже дело более хитрое—попробуйте! Более подробно о многограннике, составленном из пяти кубов рассказано на странице 57. Там же объясняется, как строить многогранник из десяти кубов.

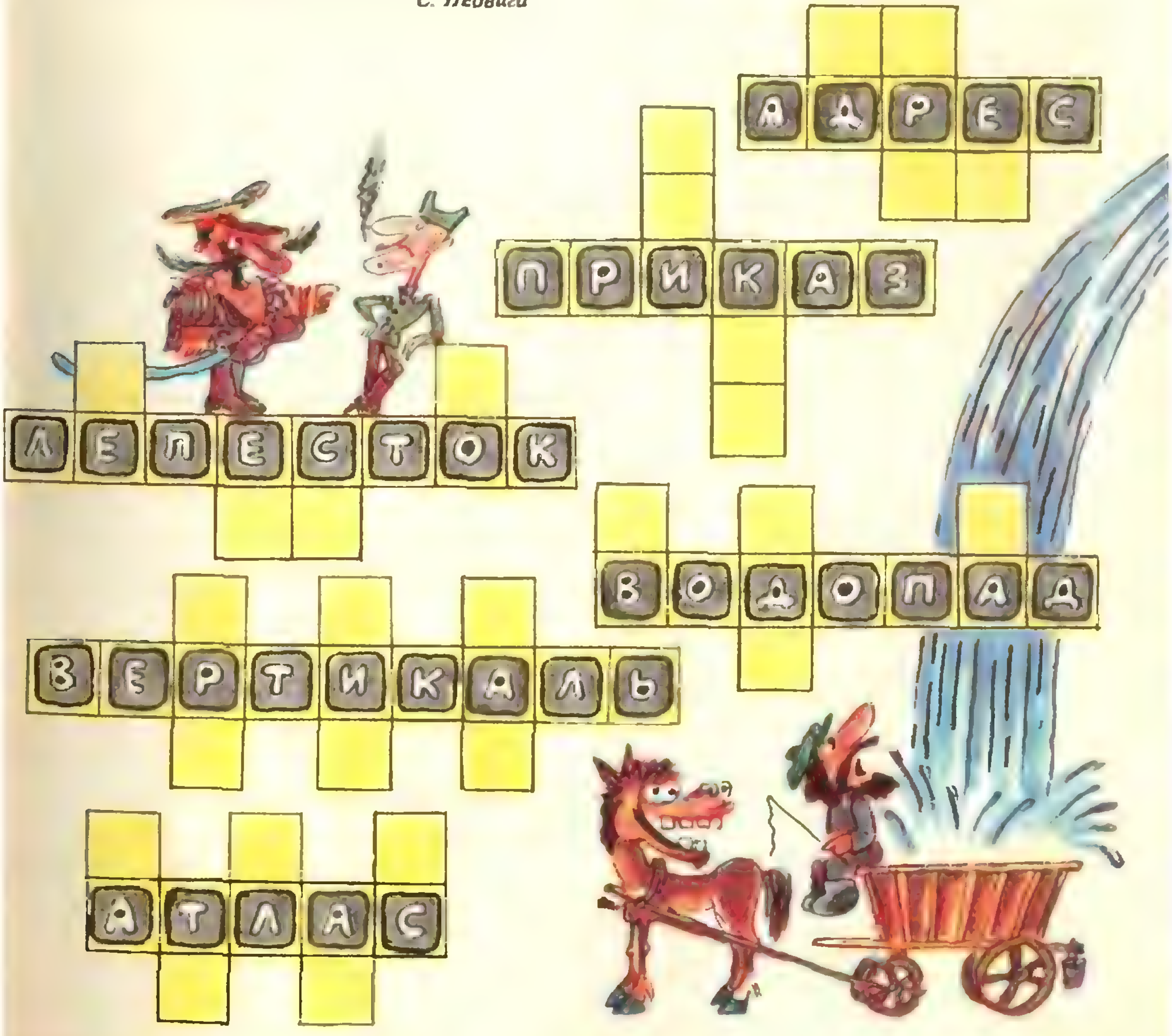
В. Гамаюнов

САЛАТ, ПРИТОК, ТЕЛЕСКОП...

Всем хорошо известна игра в пятнашки. Игра в слова—анаграммы, которую мы хотим вам предложить, чем-то на нее похожа. Пластинки с буквами можно передвигать на соседние свободные клетки (соседними считаются клетки, граничащие по стороне). Один ход — это одно перемещение пластинки. Руководствуясь этим правилом, совершите такие перестановки: *адрес — среда* (20 ходов), *атлас — салат* (22 хода), *сокол — колос* (36 ходов), *тропик — приток* (20 ходов), *приказ — каприз* (34 хода), *водопад — подвода* (42 хода), *лепесток — телескоп* (48 ходов), *вертикаль — кильватер* (64 хода).
В скобках мы указали, за сколько ходов удалось это сделать нам. Может быть, вы справитесь с заданием быстрее?

С. Недвига



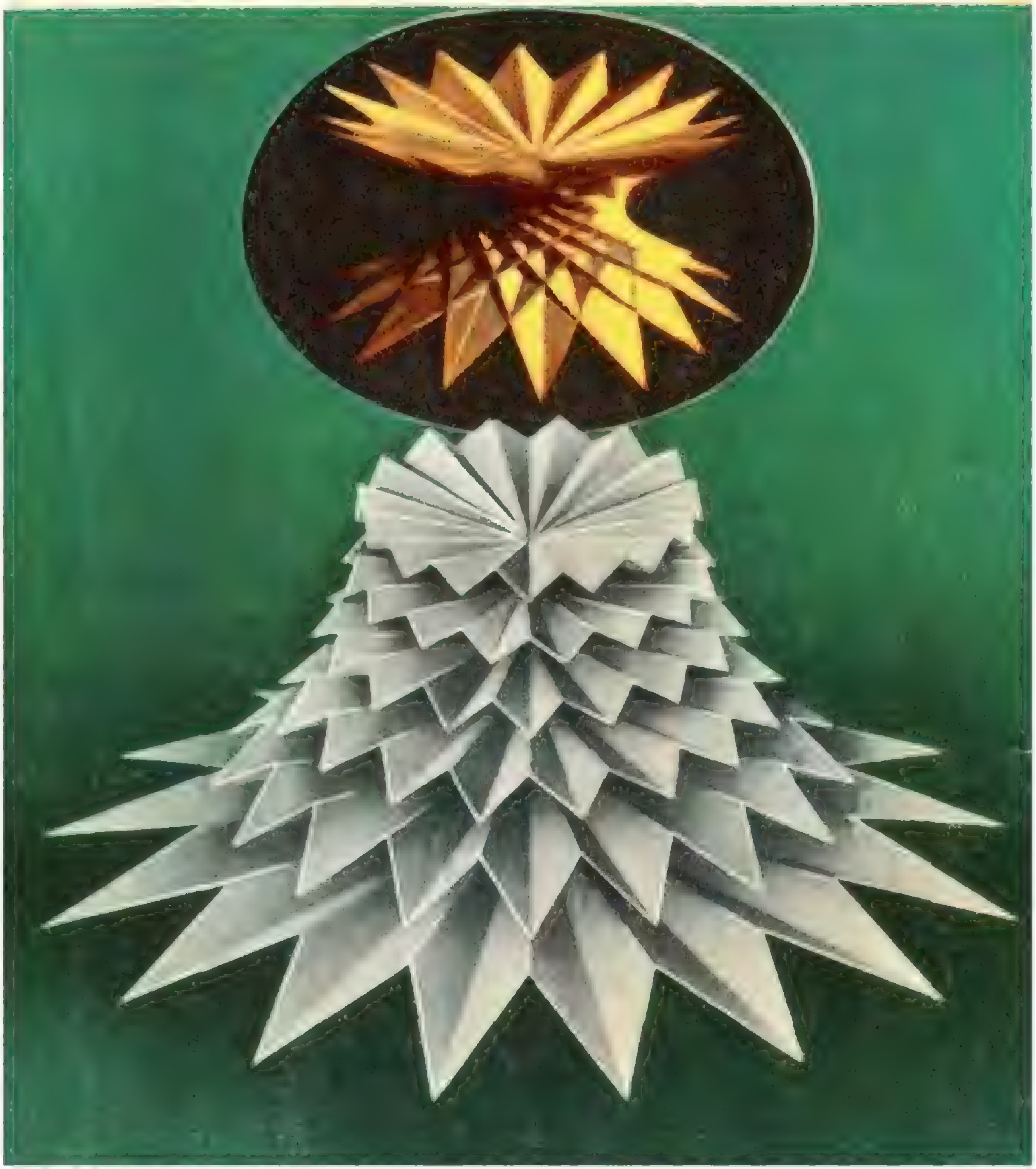


Цена 30 коп.
Индекс 70465

На первой странице обложки вы видите *модель однополостного гиперболоида.* Ее можно склеить из бумажных розеток, похожих на эти. Правда, складок у них должно быть не 16, а 32.

Розетка делается из сектора круга. Перед тем, как делать розетку, нужно выбрать следующие параметры — угловой размер сектора (он может быть больше полного круга!), радиус круга, радиус меньшего круга (он определяет размер зубцов) и наконец, решить, какую делать складку. Для того, чтобы при склеивании розеток получился гиперболоид, их размеры должны быть определенным образом согласованы. Постарайтесь придумать теорию расчета розеток. (О том, что такое «математический» однополостный гиперболоид см. на с. 26.)

А. Близнюк



НОМЕР
2

Основан в 1970 году

КВАНТ

2
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

2 *Ю. Иванов.* Школа творчества
5 *Г. Коткин.* Почему плохо кричать против ветра?
9 *О. Михайлов.* Одиннадцать правильных паркетов
15 *И. Белкин.* О Ньютоновских законах движения. Масса

Лаборатория «Кванта»

23 *М. Грабовский.* Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Математический кружок

26 *Б. Беккер, С. Востоков, Ю. Ионин.* 2-адические числа

Задачник «Кванта»

32 Задачи М546-М550; Ф558-Ф562
34 Решения задач М500 (а-в) — М503; Ф502, Ф504, Ф512

По страницам школьных учебников

40 *М. Чернявский.* Задачи на геометрический смысл производной

«Квант» для младших школьников

45 Задачи
46 *В. Майер.* Электричество и ... температура

Практикум абитуриента

48 *С. Овчинников, И. Шарыгин.* Решение неравенств с модулем
52 *Ю. Зайчиков.* Сила Лоренца и ее работа
56 *С. Козел, Б. Федосов, В. Чехлов, А. Шелагин.* Московский физико-технический институт

Информация

58 Приглашаем на малый мех-мат
59 Новый прием в ВЗМШ
61 *В. Орлов.* VI Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов

63 **Ответы, указания, решения**

Смесь (*с. 22, 44, 47*)
Наша обложка (*с. 8*)

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Рисунок Ф. Инфантэ
на первой странице
обложки
изображает
невозможные объекты.
О них
вы можете
прочитать на с. 8.

© Главная редакция физико-математической литературы
издательства «Наука», «Квант», 1979

Школа творчества

Научные общества учащихся... Эти творческие объединения в последние годы пользуются все большей популярностью у школьников, авторитетом и поддержкой у ученых. Именно эта форма работы способствует решению задачи, определенной XXV съездом КПСС, постановлением ЦК КПСС и Совета Министров «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду», — развивать творческие способности ребят, прививать умение самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной информации. ЦК ВЛКСМ совместно с заинтересованными организациями всячески поддерживает подобные объединения, пропагандирует и распространяет опыт работы лучших. Добиваясь эффективности в этой работе, ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения СССР, ВС НТО, Правление Всесоюзного общества «Знание» в марте 1977 года утвердили Примерное положение о городском, районном научном обществе учащихся (НОУ). В материалах XVIII съезда ВЛКСМ еще раз было подчеркнуто, что комитетам комсомола вместе с соответствующими организациями и учреждениями необходимо «создавать технические кружки и клубы, научные общества учащихся, юношеские очно-заочные школы при вузах и научно-исследовательских институтах».

С целью дальнейшего расширения сети НОУ и совершенствования их работы ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения РСФСР, ВС НТО приняли решение провести в 1979 году Всероссийский слет актива научных обществ учащихся. Идя навстречу слету, мы можем сказать, что сегодня научные общества учащихся завоевали прочное место в системе внеклассной и внешкольной работы со старшеклассниками. Значительно выросло количество районных, городских, областных НОУ. В 1968 году их было только 16, в 1976 — 98, а в 1978 — 264. Усилилось внимание к НОУ со стороны ученых, специалистов, студентов. Определенный опыт работы накоплен на Украине, в Белоруссии, Молдавии, Карельской АССР, Волгоградской, Свердловской, Челябинской областях, г. Москве.

Имеющийся опыт позволяет говорить об определенной **системе деятельности научных обществ учащихся.**

Научное общество учащихся (НОУ) строится как массовое добровольное объединение школьников, которые стремятся совершенствовать свои знания в определенной отрасли науки, техники, расширять свой научный кругозор, приобретать умения и навыки творческой научно-исследовательской деятельности под руководством ученых и специалистов. Членами НОУ, как правило, являются учащиеся 7—10 классов общеобразовательных школ.

Общества создаются при учебных заведениях, внешкольных учреждениях, научно-исследовательских и проектных организациях, на предприятиях промышленности и сельского хозяйства. Каждое из них может иметь свое название, эмблему, девиз, традиции. Основой общества являются первичные объединения учащихся (кружки, клубы, школы, секции и т. д.), высшим органом — сессия всех членов общества. Для решения организационных вопросов деятельности общества избирается ученический Совет. Из научных консультантов создается Совет кураторов, который организует и координирует научно-методическую работу.

В содержание деятельности НОУ входит: теоретическая подготовка; исследовательская, экспериментальная работа; применение полученных знаний, навыков в практической работе по оказанию помощи школе, народному хозяйству; пропаганда научно-технических знаний среди учащихся, проведение массовых мероприятий.

Занятия членов НОУ проводятся коллективно или индивидуально на основе утвержденных Советом кураторов программ и тематики творческих работ учащихся. Итоговое занятие проводится в форме конференции, сессии. В период зимних и летних каникул для членов общества организуются учебно-инструктивные сборы и профильные лагеря.

Непременным условием жизненности обществ является их тесная связь с производством, вузами, научными учреждениями, правлениями и советами ВОИР, НТО, обществом «Знание». Очень важно и ценно, что деятельность большинства НОУ носит общественно полезную направленность.

Несколько лет назад в г. Свердловске было создано научное общество учащихся, которое сегодня переросло в областное НОУ или, как называют его ребята, «Малую академию наук». Здесь на 11 отделениях — физическом, химическом, математическом, общественных наук и других — занимается около 40 тысяч школьников области. Руководят их работой 3 тысячи молодых ученых Уральского научного центра, студентов и преподавателей вузов, учителей школ, специалистов ряда промышленных предприятий, колхозов и совхозов. Много сил и энергии отдают работе со школьниками зав. лабораторией института «УралпромстройНИИпроект», председатель Совета кураторов общества доктор технических наук С. А. Тимашев, молодые ученые, сотрудники институтов Уральского научного центра АН СССР И. Б. Кочергина, Ю. В. Болтычев, М. И. Гусев. Четкая структура, интересные традиции, постоянное внимание заинтересованных организаций, творческая, эмоциональная атмосфера позволили добиться высокого уровня деятельности общества.

Интересно строит свою работу юношеское научное общество Московского городского Дворца пионеров и школьников. Постоянно в нем занимается около 500 учащихся. Работу возглавляет Совет общества, состоящий из школьников, направляет — Совет кураторов-ученых. В течение учебного года проводятся общие собрания, конференции. В обществе три секции: общественных, естественных и технических наук. Эти секции ведут работу по 25 направлениям. Общество имеет тесные постоянные связи более чем с 120 вузами, НИИ и организациями города. Со многими из них заключены договоры и составлены планы совместной работы. Выполнение заданий ученых и специалистов — один из ведущих принципов в организации деятельности общества. В настоящее время ведется работа по 47 таким заданиям. Так, в секции естественных наук работа осуществляется по комплексной программе изучения солнечно-земных связей «ГЕОС». Программа объединяет различные методы исследования различными кружками общества. Кружки радиофизики, математики и программирования, астрофизики, космологии, электронной автоматики выполняют работу по темам: «Исследование серебристых облаков», «Искусственный интеллект в космосе», «Исследование солнечно-земных связей» и т. п., конструируют и изготавливают различные приборы, составляют программы для ЭВМ. По итогам работы ребята пишут рефераты, выступают с докладами в школах, ЖЭКах, на конференциях секций общества. Ежегодно готовится около 600 рефератов, 100 докладов. Ряд результатов исследований членов общества используется в народном хозяйстве, при проведении экспериментальных работ в вузах и научных учреждениях.

В Узбекистане хорошо известно научное общество учащихся средней школы № 110 г. Ташкента. Цели и задачи общества определены специальным постановлением педагогического совета и комитета комсомола школы. Научно-педагогическое руководство осуществляется совместно учителями школы и учеными Академии наук Узбекистана, преподавателями и студентами ряда ташкентских вузов. Между школой и шефами заключены долгосрочные договоры содружества. Ежегодно в сентябре и мае проходят конференции, на которых утверждаются планы и программы, рассматриваются отчеты, вручаются памятные удостоверения «Лучший математик школы», «Лучший физик школы», премии шефствующих организаций. Между конференциями руководство работой общества осуществляет детский Совет. Общество объединяет секции математики, физики, химии, истории, литературы, права. Секции состоят из клубов для учащихся 6—7 классов, проблемных групп для старшеклассников.

Например, в секцию математики входят клубы «Считай, смекай, отгадывай» (для учащихся 6-х классов), «Занимательная математика» (для семиклассников и восьмиклассников), постоянно действующий семинар «Поиски и решения, исследования и выводы» и практикум будущего исследователя (для учащихся 8—10 классов). Каждая секция и все проблемные группы имеют научных консультантов. Члены общества изучают теоретические вопросы, проводят экспериментальную работу в лабораториях вузов и НИИ, учебных кабинетах школы, изготавливают различные пособия, оборудование, приборы для школы и народного хозяйства.

Кроме комплексных НОУ в ряде республик, краев успешно действуют профильные объединения учащихся, такие как «Малая лесная академия наук» в Карелии, научно-технические и сельскохозяйственные общества в Краснодарском крае, общество юных астрономов в Азербайджане, юных химиков и механиков в Казани, Ростовское областное общество юных краеведов.

Более десяти лет работает в средней школе № 5 г. Углича Ярославской области кружок юных астрономов. Здесь тесно сочетаются теоретическая, экспериментальная и практическая работа. Основными направлениями деятельности являются: исследовательская работа по изучению солнца и метеоров; приборостроение для нужд кружка и школы; проведение массовых мероприятий, направленных на пропаганду астрономических и атеистических знаний среди учащихся, родителей и населения. Ребята собственными руками построили и оборудовали школьную обсерваторию, кино- и фотолабораторию, сконструировали и изготовили необходимую радиоаппаратуру.

В исследовательской работе основное внимание уделяется изучению солнечной активности и ее связи с явлениями на Земле. Юные астрономы на занятиях изучают теоретические аспекты проблемы, ведут наблюдения за динамикой солнечных пятен, их фото- и киносъемку, регистрируют все метеорологические изменения, происходящие на Земле. Они разработали метод определения глубины солнечных пятен, накопили огромный наблюдательный материал, собрали специальную литературу по данному вопросу. Ребята организуют празднование Дня космонавтики, проводят экскурсии, беседы в обсерватории, атеистические вечера, викторины, читают лекции для учащихся школы. Кружок школы — постоянный участник Всесоюзных слетов юных астрономов, он награжден бронзовой медалью и дипломом ВДНХ.

Все большее распространение получают **юношеские школы по предметам** естественных и гуманитарных наук. Это добровольные, массовые объединения учащихся 8—10-х классов общеобразовательных школ, создаваемые при высших учебных заведениях и научных учреждениях с целью углубления знаний, удовлетворения и развития интересов школьников к определенной отрасли науки, расширения научного кругозора и профессиональной ориентации. Преподавание осуществляется учеными, научными сотрудниками, преподавателями, аспирантами и студентами на общественных началах. Очень популярны среди школьников очные, заочные, вечерние, летние школы юных математиков, физиков, химиков, историков, педагогов, медиков. Интересный опыт этой работы накоплен в Белоруссии, Татарской АССР, Горьковской области, Хабаровском крае, г. Москве.

Анализ деятельности научных обществ учащихся всех видов показывает, что они активно способствуют повышению качества знаний школьников, расширению их научного и технического кругозора, овладению навыками самостоятельной творческой работы, воспитанию готовности к сознательному выбору будущей профессии и творческому труду.

Но пока, к сожалению, научные общества не созданы повсеместно. Нет республиканских, областных, городских НОУ в ряде союзных республик, некоторых областных центрах РСФСР, хотя здесь есть все возможности для их работы. Недостаточно еще привлечены к этой работе молодые ученые и специалисты научно-исследовательских институтов. Нас тревожит, что в ряде объединений всю деятельность ребят сводят к подготовке их к поступлению в вуз. Не ведется пока целенаправленная разработка программ для НОУ. Часто учителя занимают пассивную позицию по отношению к НОУ, не используют его как хорошего помощника в работе по повышению качества знаний учащихся, пропаганде достижений науки и техники.

Повышению эффективности деятельности НОУ способствовала бы регулярная публикация на страницах соответствующих журналов, таких как «Квант», списков тем работ, заданий ученых и специалистов, учреждений и организаций юным исследователям.

Задача и долг прежде всего молодых ученых, учителей, студентов — превратить каждое научное общество учащихся в настоящую школу творчества, воспитания будущих творцов советской науки и техники.

Ю. Иванов,
Ответственный организатор
Отдела школьной молодежи ЦК ВЛКСМ

Г. Коткин

Почему плохо кричать против ветра?

Почему мы плохо слышим звук, если ветер дует от нас к его источнику? На первый взгляд, это ясно. Против ветра ближе падает брошенный камень, медленнее летит птица... Попробуем, однако, провести количественную оценку.

Пусть скорость звука относительно воздуха равна $\vec{c}$, а скорость ветра $\vec{u}$. Тогда скорость звукового сигнала относительно земли равна $|\vec{c}|-|\vec{u}|$ и время его распространения на расстояние l равно $t=\frac{l}{|\vec{c}|-|\vec{u}|}$. За это время сигнал проходит относительно воздуха расстояние

$$l'=|\vec{c}|\,t=\frac{l\,|\vec{c}|}{|\vec{c}|-|\vec{u}|}.$$

Именно величина l' определяет ослабление звука: находясь на расстоянии l от источника звука (против ветра), мы слышим звук таким же, как если бы ветра не было, а мы находились на расстоянии l'.

Примем $|\vec{u}|=15$ м/с (довольно сильный ветер), $|\vec{c}|=330$ м/с, $l=50$ м. Тогда $l'\approx 52$ м. Ветер «отодвигает» нас примерно на 2 м. Этого мы, пожалуй, и не заметили бы. В *действительности, влияние ветра* гораздо сильнее. Следовательно, надо искать другое объяснение.

Обратим внимание на тот факт, что скорость ветра не одинакова на разных высотах — она растет с увеличением высоты над уровнем земли. Казалось бы, это никак не должно повлиять на распространение звука, когда источник и приемник расположены на одной высоте. Если же приемник (или источник) звука опустится, часть пути звуковой сигнал будет проходить в слоях воздуха, движущихся с меньшей скоростью, и придет менее ослабленным. На самом же деле, если слушающий (или кричащий) человек присядет, слышимость только ухудшится. И все-таки дело именно в зависимости скорости ветра от высоты.

Чтобы легче было разобраться в картине распространения звука, рассмотрим сначала такой пример. Представим себе моторную лодку $Л$, идущую со скоростью $\vec{c}$ относительно воды под углом к течению (рис. 1). Пусть сидящий в ней человек (будем называть его капитаном) «целит» на видимую где-то вдали заводскую трубу T. Если бы течения не было, лод-

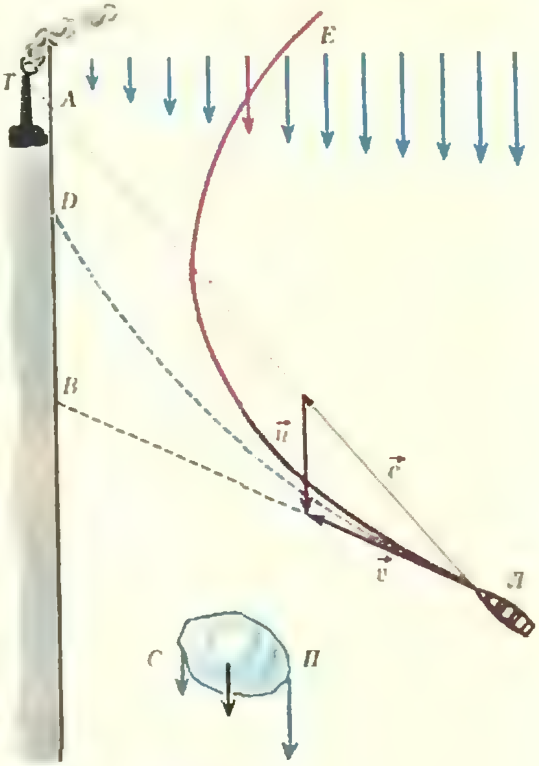


Рис. 1.

ка пристала бы к берегу в точке A. В действительности, скорость лодки относительно берега $\vec{v} = \vec{c} + \vec{u}$. Если бы скорость течения $\vec{u}$ была неизменной вплоть до берега, лодка пристала бы в точке B. Но скорость течения убывает по мере приближения к берегу, поэтому изменяются величина и направление скорости лодки $\vec{v}$, так что она движется по кривой $ЛD$.

Предположим, что капитан ненадолго задремал, но продолжает удерживать руль в прежнем положении. Пока он спит, посмотрим на плывущую по течению льдину $СП$. Эта льдина плывет вращаясь: ее приводит во вращение вода, которая у одного края льдины ($С$) от нее отстает, а у другого края ($П$) — обгоняет ее. То же самое произойдет и с лодкой. Она будет поворачиваться, при этом будет изменяться направление скорости $\vec{c}$ (несмотря на неподвижно удерживаемый руль). Проснувшись, капитан увидит, что лодка, описавшая дугу $ЛЕ$, удаляется от берега.

Теперь нам нетрудно изобразить и картину распространения звуковых сигналов. Их траектории («лучи») искривляются, подобно траектории лодки со спящим капитаном (рис. 2; ветер дует справа налево). При этом область MLN оказывается «мертвой зоной»: в нее не заходят «лучи» звука. Человек в этой области почти не слышит звука от источника S. (Некоторая слышимость в «мертвой зоне» связана с рассеянием звука при отражении от поверхности земли, а также с дифракцией звука.)

Вспомним, однако, что мы обнаружили несостоятельность первого объяснения явления при попытке количественной оценки. Попробуем провести количественную оценку и для второго объяснения. Оценим расстояние до «мертвой зоны». Рассмотрим «луч» SLM (см. рис. 2), будем считать его направление близким к горизонтальному. Выделим малый участок AB волновой поверхности, будем считать его плоским и расположенным вертикально (рис. 3). Через время Δt этот участок займет положение $A'B'$, причем

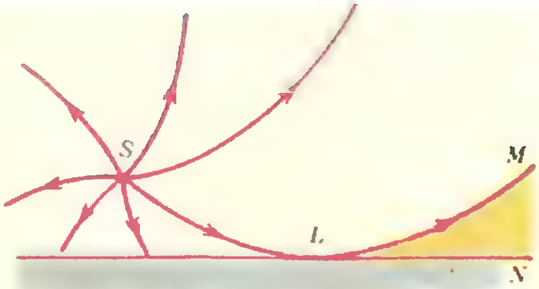


Рис. 2.

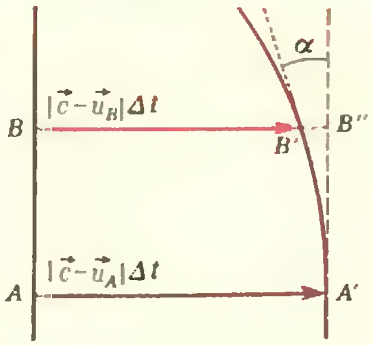


Рис. 3.

$$|AA'| = (|\vec{c}| - |\vec{u}_A|)\Delta t,$$

$$|BB'| = (|\vec{c}| - |\vec{u}_B|)\Delta t$$

($\vec{u}_A$ и $\vec{u}_B$ — скорости ветра на высоте точек A и B). При этом рассматриваемый участок повернется на малый угол α:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \frac{|B'B''|}{|A'B''|} =$$

$$= \frac{(|\vec{c}| - |\vec{u}_A|) - (|\vec{c}| - |\vec{u}_B|)}{\Delta h} = \frac{|\Delta\vec{u}|\,\Delta t}{\Delta h},$$

где $|A'B''| = |AB| = \Delta h$ и $\Delta\vec{u} = \vec{u}_B - \vec{u}_A$.

Таким образом, участок волновой поверхности поворачивается с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\alpha}{\Delta t} \approx \frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta h}.$$

С такой же угловой скоростью вращается и вектор скорости $\vec{c}$ — скорости звука относительно воздуха.

Будем считать, что величина ω постоянна вдоль всего «луча», тогда рассматриваемый участок SLM (см. рис. 2) можно считать дугой окружности. Скорость звукового сигнала

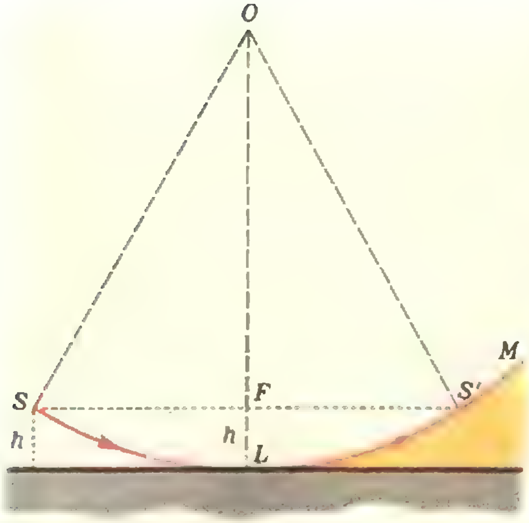


Рис. 4.

относительно земли $|\vec{v}| = |\vec{c}| - |\vec{u}| \approx \approx |\vec{c}|$ можно связать с радиусом r этой окружности: $|\vec{v}| = \omega r$. Отсюда (рис. 4)

$$|SO| = |OL| = r = \frac{|\vec{v}|}{\omega} \approx \frac{|\vec{c}|\,\Delta h}{|\Delta\vec{u}|}.$$

Из треугольника OSF

$$|SF| = \sqrt{|OS|^2 - |OF|^2} =$$

$$= \sqrt{r^2 - (r-h)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{2rh} \approx \sqrt{2|\vec{c}|h\frac{\Delta h}{|\Delta\vec{u}|}}.$$

Итак, слушатель, находящийся на той же высоте h, что и источник звука, попадает в «мертвую зону» на расстоянии

$$|SS'| = 2|SF| \approx 2\sqrt{2|\vec{c}|h\frac{\Delta h}{|\Delta\vec{u}|}}.$$

Примем $\frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta h} \approx \frac{|\vec{u}|}{h}$. Тогда окончательно

$$|SS'| \approx 2h\sqrt{\frac{2|\vec{c}|}{|\vec{u}|}} \approx 3h\sqrt{\frac{|\vec{c}|}{|\vec{u}|}}.$$

Для $h = 1{,}5$ м, $|\vec{c}| = 330$ м/с и $|\vec{u}| = 15$ м/с получаем

$$|SS'| \approx 20 \text{ м}$$

— вполне разумный результат. Точный расчет формы «звуковых лучей» приводит примерно к такому же результату.

Разумеется, есть еще много причин, ухудшающих слышимость при ветре, но приведенный расчет дает уверенность, что главную причину мы указали правильно.

Упражнения

1. В летний полдень жук решил полететь на Солнце и полетел со скоростью $|\vec{c}| = 2$ м/с. Однако он не учел, что дует слабый ветерок (ветер южный, скорость его $|\vec{u}| = 1$ м/с). На какой угол отклонится жук от цели своего полета (с точки зрения сидящего на ветке воробья)? Дело происходит в Новосибирске; высоту Солнца над горизонтом в полдень можно принять равной $\alpha = 60°$.

2. Найти траекторию жука, летящего к Солнцу со скоростью $\vec{c}$ (см. предыдущую задачу), если скорость ветра $\vec{u}$ растет с высотой h по линейному закону: $|\vec{u}| = bh$ ($b = \text{const}$).

3. Плоскость AB разделяет области неподвижного воздуха и воздуха, движущегося со скоростью $\vec{u}$ (рис. 5). На границу падает звуковая волна, фронт которой SL составляет с AB угол α. Скорость падающей волны равна $\vec{c}$. Под каким углом к плоскости AB расположен фронт преломленной волны, прошедшей в область движущегося воздуха?

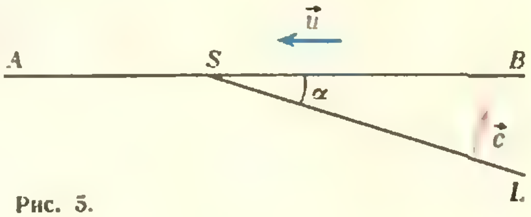


Рис. 5.

Примечание

Эта задача аналогична задаче Ф509, решение которой вы можете найти в первом номере журнала за этот год

Невозможные объекты

На I странице обложки по звездному небу летят «невозможные объекты»: красная лестница все время опускается довольно круто вниз, но, обойдя по ней полный виток, вы окажетесь... в исходном месте; три параллельные цилиндрические ножки фиолетовой детали умудряются примыкать к соединительной перекладине... в двух местах; с синим и оранжевым объектами тоже что-то неладно — их длительное разглядывание вызывает неприятное ощущение внутреннего противоречия.

Попытайтесь понять, в чем секрет «эффекта невозможности» в каждом случае. Впрочем, все ли эти объекты невозможны? Нельзя ли так «увидеть» некоторые из них, чтобы противоречия не было?

Оказывается, по оранжевому треугольнику (это так называемый *треугольник Л. и Р. Пенроузов*) можно сконструировать реальный объект, который в некоторых ракурсах будет выглядеть именно как треугольник Пенроузов. Об этом в «Кванте» уже писалось (1971, № 5, с. 26—29). Здесь же мы помещаем два новых конструктивных решения этого треугольника, присланных в редакцию вместе с фотографиями архитектором В. Колейчуком.

Посмотрите на первые две фотографии (рис. 1, 2). На них один и тот же предмет, состоящий из «скрученных» деревянных брусков, склеенных «треугольником», снят из разных точек. Фотограф нашел такую точку (рис. 1), из которой все три бруска кажутся прямыми.

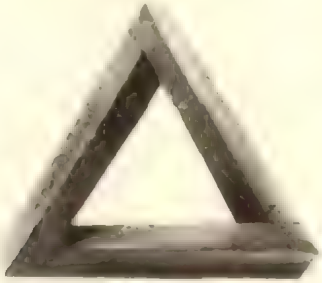


Рис. 1.

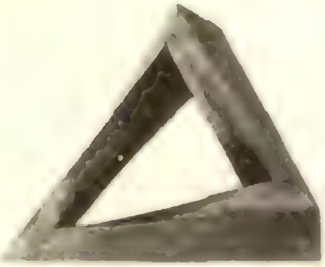


Рис. 2.

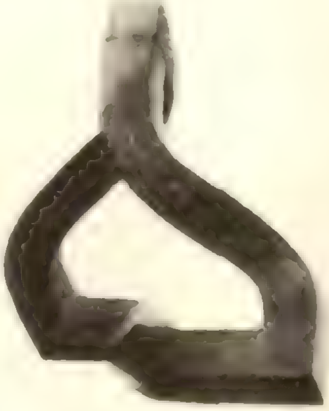


Рис. 3.

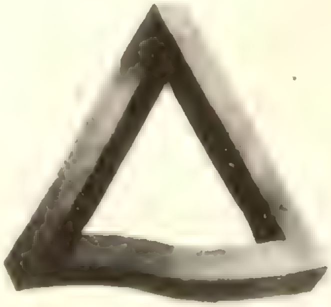


Рис. 4.

Еще интереснее следующие фотографии (рис. 3, 4). Трудно поверить, что на них сфотографирован один и тот же предмет.

Принцип построения этого предмета совсем прост. Нарисуем на плоскости π изображение треугольника Пенроузов (рис. 5) и выберем точки A' и B' над π так, что $(AA') \parallel (BB')$. Тогда любая кривая γ, соединяющая A' с B' и лежащая в плоскости $ABB'A'$, будет выглядеть как отрезок, если на нее смотреть, поместив глаз в плоскость $ABB'A'$ или в точку, расположенную «очень далеко» над плоскостью π по направлению луча $[AA')$. Поступив аналогично с другими отрезками, можно построить пространственный предмет, изображенным на рисунке 3.

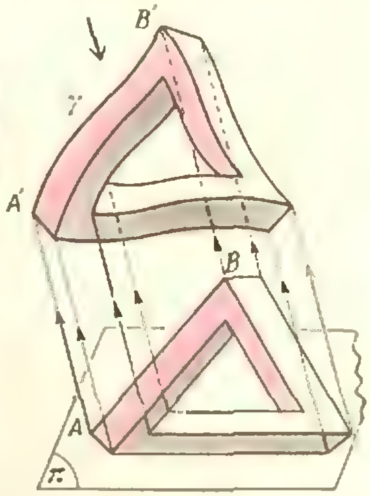


Рис. 5.

Ясно, что глаз (или фотоаппарат), помещенный достаточно далеко по направлению $[AA')$, увидит этот предмет таким, как он изображен на плоскости π.

О. Михайлов

Одиннадцать правильных паркетов

В повседневной жизни мы нередко встречаемся с покрытиями плоскости многоугольниками: полы в жилых домах застилают паркетами, стены ванных комнат покрывают кафельными плитками, современные здания украшают орнаментами. О наиболее симметричных покрытиях — математики называют их правильными паркетами — в «Кванте» уже писалось: в статье А. Колмогорова («Квант», 1970, № 3) обсуждалась задача классификации правильных паркетов. В настоящей заметке приводится одно из возможных ее решений.

Паркетом мы будем называть покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо совсем не имеют общих точек. Паркет называется *правильным*, если его можно наложить на себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую наперед заданную вершину.

Сколько всего правильных паркетов? Как они устроены? Наша задача — ответить на эти вопросы.

Легко видеть, что вообще паркетов — не обязательно правильных — существует бесчисленное множество *) (покажите это самостоятельно). Однако, подобно тому как при бесчисленном множестве многогранников вообще существует лишь конечное число правильных многогранников, так и при бесчисленном множестве паркетов существует лишь конечное число правильных паркетов.

Иногда в этой статье мы будем для краткости правильные паркеты называть просто паркетами.

Решение нашей задачи естественно начать с исследования вершин паркета. Из определения правильности сразу вытекает принцип эквивалентности вершин: *любые две вершины устроены одинаково* в том смысле, что звезды всех вершин одинаковы. (*Звездой вершины* называется фигура, образованная всеми многоугольниками, содержащими ее.)

Обозначим через m_i число прилегающих к вершине i-угольников, а через α_i — величину внутреннего угла правильного i-угольника. Тогда в каждой вершине, очевидно, выполняется соотношение

$$\sum m_i\alpha_i = 360^\circ = 4d,$$

где в сумму мы включаем все слагаемые с номерами i, для которых к вершине примыкает хотя бы один i-угольник *).

Подставляя в эту формулу известное из геометрии выражение для α_i, $\alpha_i = 2(1-2/i)d$, и сокращая на $2d$, получим

$$\sum m_i\left(1-\frac{2}{i}\right)=2. \qquad (1)$$

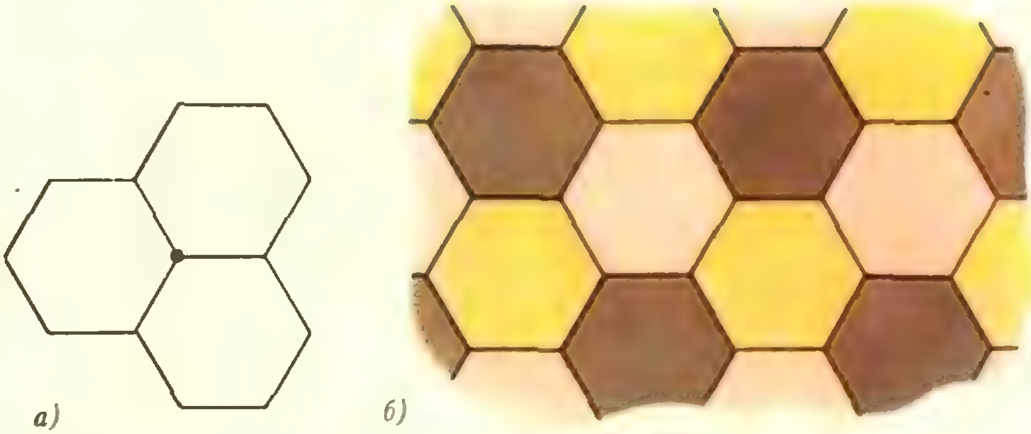
Таким образом, *числа m_i являются целочисленными решениями уравнения* (1). Однако, как мы увидим ниже, не все целочисленные решения уравнения (1) реализуются правильными паркетами!

Далее, *в вершине паркета может сходиться не более шести и не менее трех многоугольников.* Действительно, при схождении в одной вершине семи или более многоугольников хотя бы один угол в правильном многоугольнике должен быть менее 60°, что невозможно (минимальный угол — у треугольника — равен 60°).

---

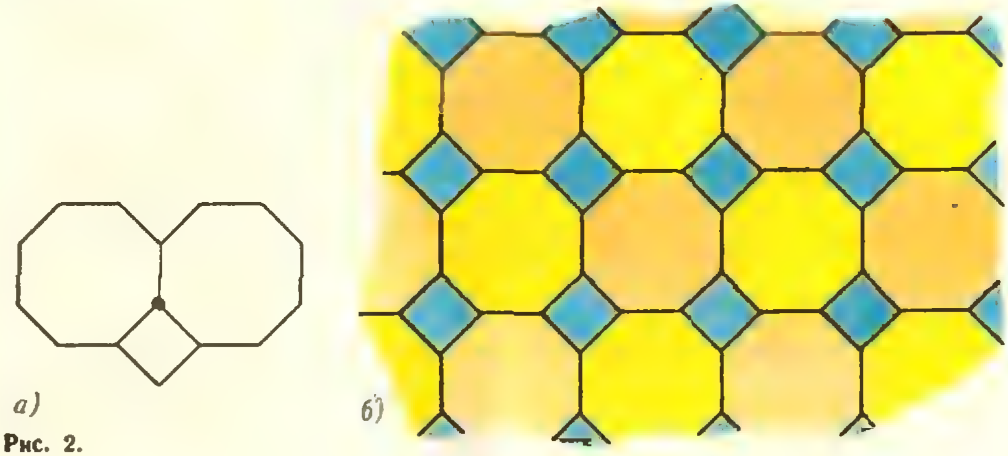
*) Два паркета мы считаем различными, если не существует гомотетии плоскости, переводящей один из этих паркетов в другой.

*) Впрочем, $m_i = 0$ для остальных i, поэтому формально можно считать, что мы суммируем по всем i.



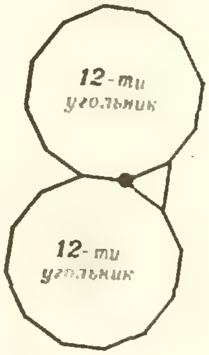
а) б)

Рис. 1.

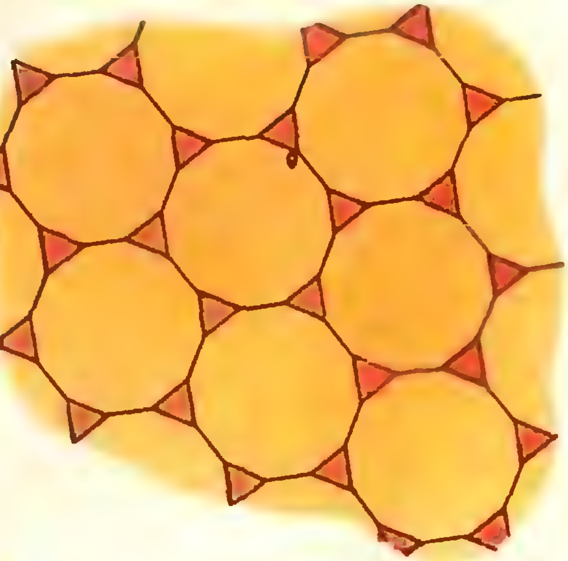


а) б)

Рис. 2.


12-ти угольник
12-ти угольник

а)



б)

Рис. 3.

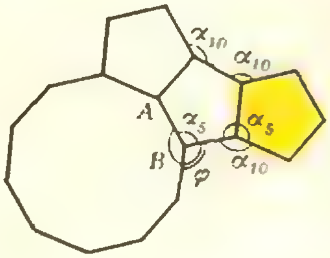

α_{10}
α_{10}
A
α_5
α_5
B
φ
α_{10}

Рис. 4.

При схождении в одной вершине двух многоугольников у одного из них внутренний угол должен быть более $2d$ (180°), что, очевидно, также невозможно. Таким образом, решение задачи распадается на анализ тех вариантов, когда в вершине паркета сходятся 3, 4, 5 и 6 правильных многоугольников.

Паркеты с тремя многоугольниками в вершине

Здесь, в свою очередь, в принципе возможны три случая (в зависимости от набора многоугольников в каждой вершине):

1°. Три одинаковых многоугольника.

2°. Два одинаковых и один отличный от них.

3°. Три различных многоугольника.

В первом случае сумма в уравнении (1) сводится к одному слагаемому, отвечающему трем одинаковым n-угольникам, поэтому мы получаем $3\left(1-\frac{2}{n}\right)=2$ или $n=6$, то есть к каждой вершине примыкает 3 шестиугольника. Это один из простейших правильных паркетов (рис. 1).

Для второго случая (два k-угольника, один n-угольник) имеем $\left(1-\frac{2}{n}\right)+2\left(1-\frac{2}{k}\right)=2$ или $k=\frac{4n}{n-2}$.

Целочисленные решения последнего уравнения проще всего найти перебором различных значений:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k			12	8	$\frac{20}{3}$	6	$\frac{28}{5}$	$\frac{32}{6}$	$\frac{36}{7}$	5	$\frac{44}{9}$

Продолжать перебор дальше нет смысла, так как целочисленных k мы больше не получим: $\frac{4n}{n-2}=4+\frac{8}{n-2}$, а при $n>10$ последнее слагаемое не может быть целым.

Таким образом, кроме уже рассмотренного случая $n=k=6$ мы получили три решения, которые мы запишем в виде суммы углов в вершине:

$\alpha_4+2\alpha_8$; $\alpha_3+2\alpha_{12}$; $\alpha_{10}+2\alpha_5$.

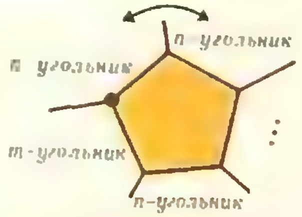


Рис. 5.

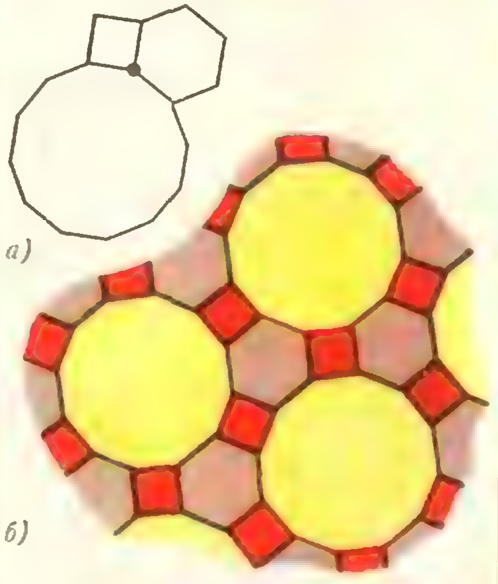


Рис. 6.

Первому решению отвечает паркет, часто встречающийся на практике (рис. 2). Менее обычный паркет, отвечающий второму решению, изображен на рисунке 3.

А вот комбинация $\alpha_{10}+2\alpha_5$, в отличие от ранее рассмотренных, правильного паркета не образует. Убедиться в этом позволяет «достройка» (рис. 4) окружения вершины A еще одним многоугольником (желтого цвета). Из нее видно, что один из углов при вершине B (угол, обозначенный на рисунке 4 через φ), по принципу эквивалентности вершин, должен быть равен α_{10}. На самом же деле, угол φ равен α_5 — правильного паркета типа $\alpha_{10}+2\alpha_5$ *не существует*.

Для оставшегося, наиболее сложного, *третьего случая* (три разных многоугольника с n, m и k вершинами) уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Чтобы не разбирать всех возможных

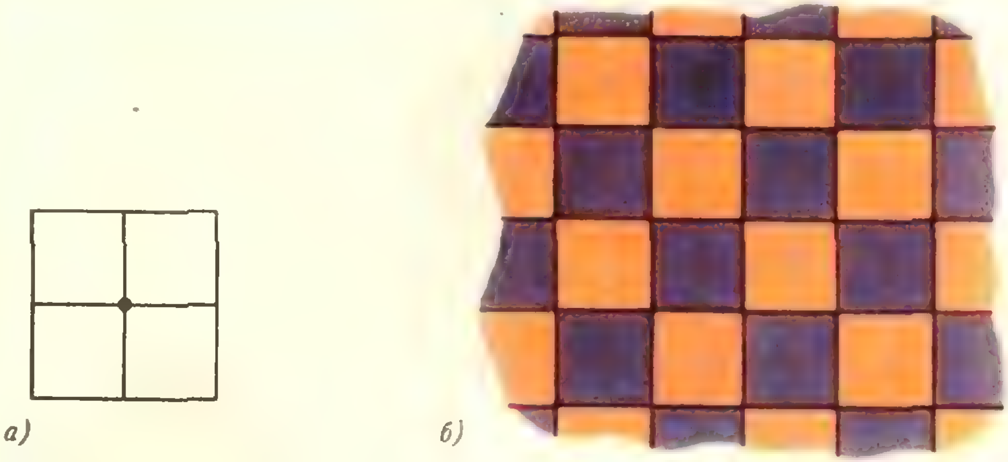


Рис. 7.

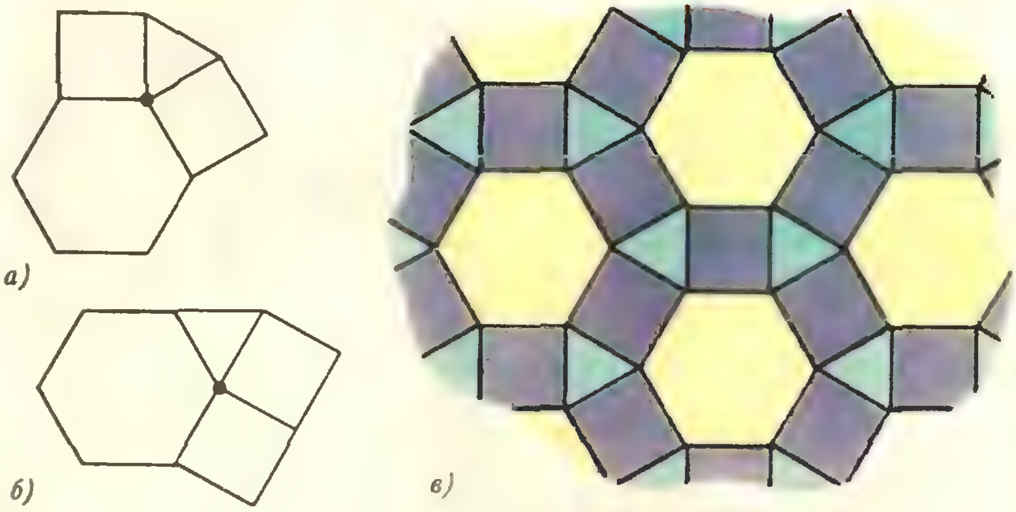


Рис. 8.

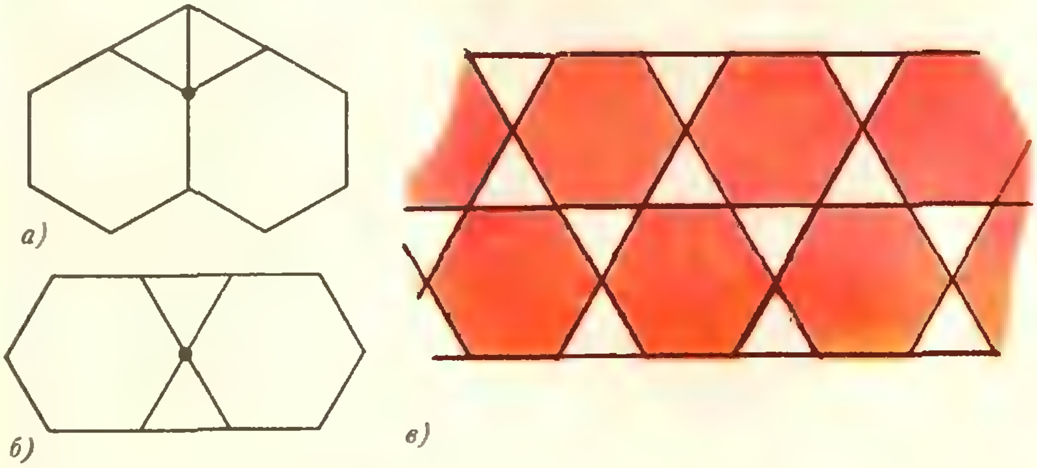


Рис. 9

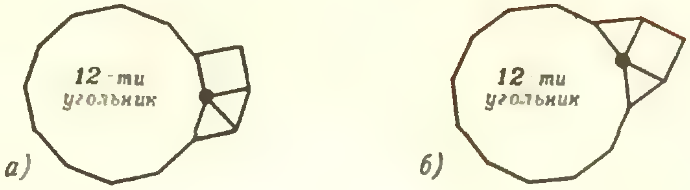

12-ти угольник
а)
12 ти угольник
б)

Рис. 10.

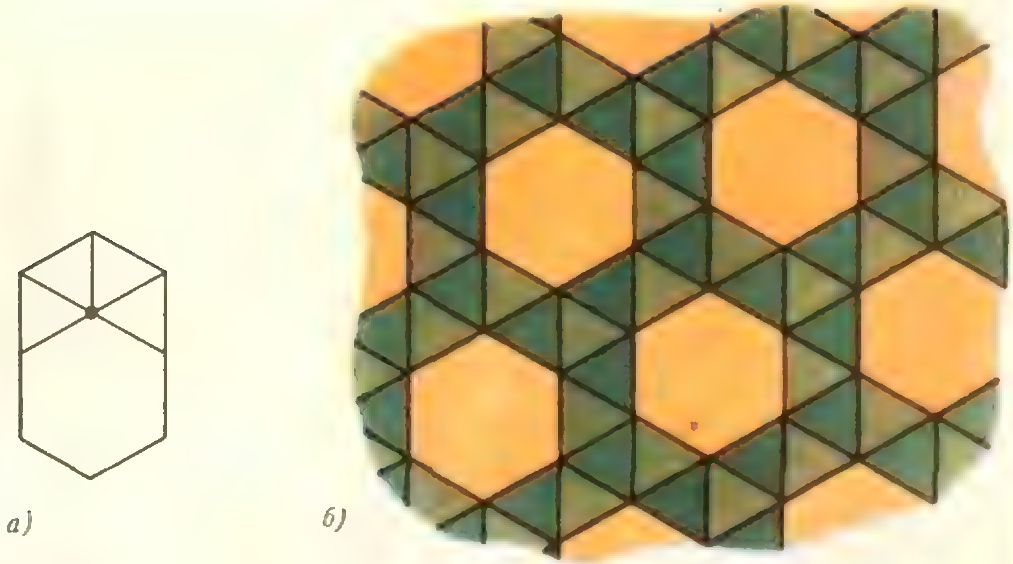

а) б)

Рис. 11.

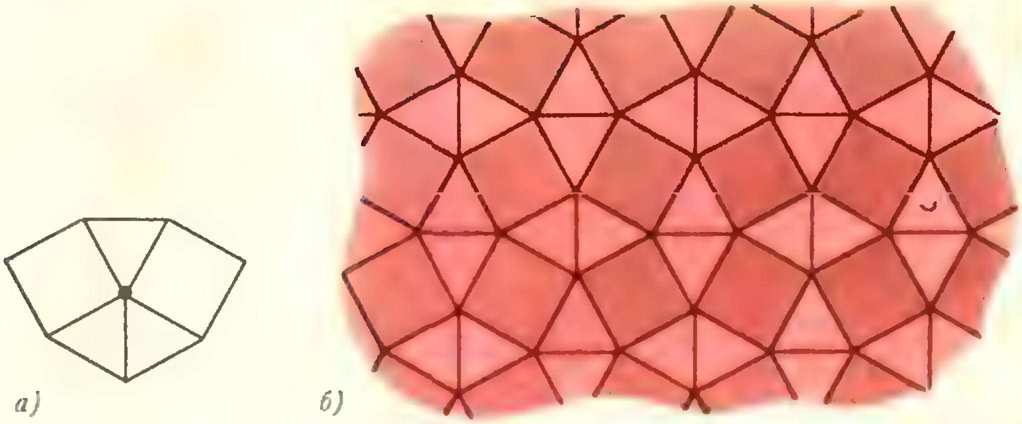


Рис. 12.

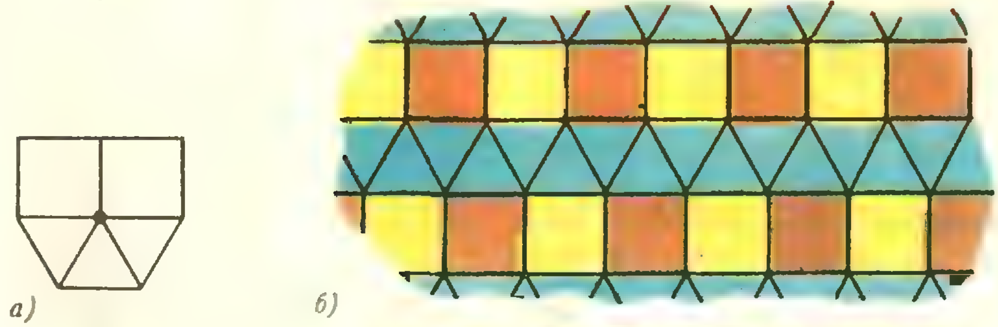


Рис. 13.

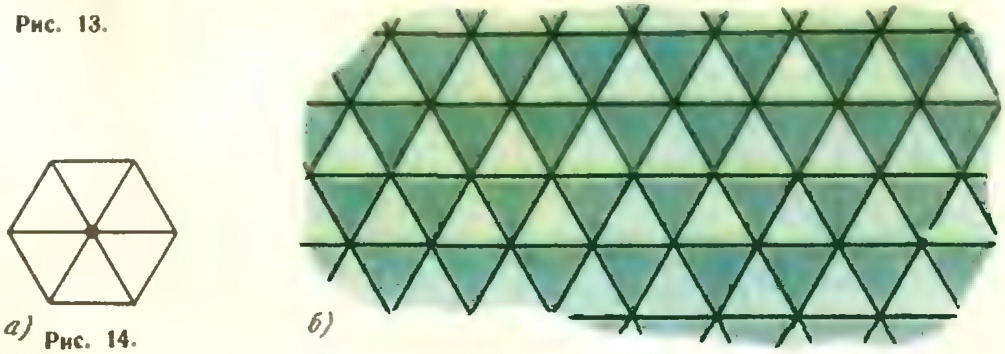

а) б)

Рис. 14.

числовых решений, нам будет нужна следующая

Лемма. *В вершине правильного паркета не могут сходиться три различных многоугольника, у одного из которых нечетное число сторон.*

Действительно, пусть такой паркет существует (рис. 5). Тогда вокруг нечетноугольника оставшиеся m- и n-угольники должны идти чередуясь. Поэтому при его обходе рядом окажутся два одинаковых многоугольника, вопреки условию леммы.

Благодаря лемме мы можем в (2) заменить k на $2k_1$, m на $2m_1$, l на $2l_1$ и перейти к уравнению

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{k_1}=1.$$

Не нарушая общности, можно предположить, что $k_1<m_1<n_1$. Тогда

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}+\frac{1}{k_1}<\frac{3}{k_1},$$

поэтому $k_1=2$. Следовательно, $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}=\frac{1}{2}$, откуда $m_1=3$, $n_1=6$ (если $m_1\geqslant 4$, то $n_1\leqslant m_1$). Полученное решение $\alpha_4+\alpha_6+\alpha_{12}$ дает нам очередной паркет (рис. 6).

Паркеты с четырьмя многоугольниками в вершине

В этом случае мы приходим к уравнению

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}=1. \qquad (3)$$

Будем считать, что $l\leqslant k\leqslant m\leqslant n$. Легко видеть, что тогда $l\leqslant 4$. Если $l=4$, то приходим к набору $4\alpha_4$. Если $l=3$, то получаем уравнение

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{2}{3},$$

из которого находим, что $k<5$. Если $k=4$, то, поскольку $m\geqslant k$, приходим к единственному решению $m=4$, $n=6$. Если же $k=3$, то получаем два решения: $m=4$, $n=12$ и $m=6$, $n=6$.

Нам, следовательно, предстоит исследовать четыре набора:

$4\alpha_4$; $\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6$; $2\alpha_3+2\alpha_6$; $\alpha_4+2\alpha_3+\alpha_{12}$.

Первый набор $4\alpha_4$ дает тривиальный квадратный паркет (рис. 7).

Для комбинации $\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6$ возможны две неэквивалентные вершины (рис. 8, *а*, *б*), но только вариант 8,*а* дает правильный паркет (рис. 8,*в*). Убедитесь самостоятельно, что вариант 8,*б* не дает никакого правильного паркета.

Для $2\alpha_3+2\alpha_6$ также возможны две различные вершины (рис. 9, *а*, *б*), но только вторая дает правильный паркет (9, *в*). Достройка первой приводит к противоречию с принципом эквивалентности вершин.

Рассмотрим, наконец, последнее решение $\alpha_4+2\alpha_3+\alpha_{12}$. Здесь оба возможных варианта (рис. 10, *а*, *б*) приводят при достройке к противоречию. Таким образом, «четырехмногоугольных» паркетов три:

$4\alpha_4$; $\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6$; $2\alpha_3+2\alpha_6$.

Паркеты с пятью многоугольниками в вершине

В этом случае нужно найти решения уравнения

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{j}=\frac{3}{2}. \qquad (4)$$

Из него сразу видно, что $j=k=l=3$ (мы считаем, что $j\leqslant l\leqslant k\leqslant m\leqslant n$). Получилось уравнение $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$, у которого два решения: $m=3$, $n=6$ и $m=4$, $n=4$.

Остается теперь рассмотреть найденные комбинации:

$$\alpha_6+4\alpha_3 \quad \text{и} \quad 2\alpha_4+3\alpha_3.$$

Первая из них дает единственный тип вершины и единственный правильный паркет (рис. 11). Вторая комбинация допускает две неэквивалентные вершины, причем каждая из них образует паркеты (рис. 12 и 13).

Таким образом, «пятимногоугольных» паркетов три:

$4\alpha_3+\alpha_6$; $(2\alpha_4+3\alpha_3)'$; $(2\alpha_4+3\alpha_3)''$.

Паркеты с шестью многоугольниками в вершине

Совершенно очевидно, что такой паркет (рис. 14) — единственный, получающийся из комбинации $6\alpha_3$.

Перечисленными выше случаями исчерпывается все многообразие правильных паркетов. Как видно из сказанного, общее число их — одиннадцать.

И. Белкин

О Ньютоновских законах движения.

Масса

Законы механического движения тел были открыты Ньютоном в середине XVII века. Изложены они были в его книге «Математические начала натуральной философии», напечатанной в 1687 году. Без преувеличения можно сказать, что с этой книги началась современная механика.

Об основных идеях механики и открытых Ньютоном законах движения и будет рассказано в этой статье.

Немного о механике до Ньютона

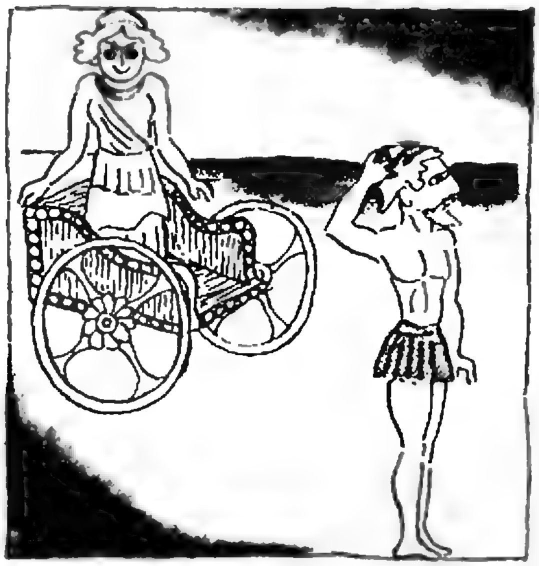
Чтобы понять суть той революции в науке о движении тел, которую совершил Ньютон, познакомимся сначала в самых общих чертах с наукой о движении, которая существовала до Ньютона.

Наибольшей известностью в доньютоновские времена пользовалась механика Аристотеля (384—322 до н. э.). О ней мы здесь вкратце и расскажем, хотя эта теория почти во всех своих частях оказалась ложной. Но именно ей пришла на смену механика Ньютона.

В своих построениях и умозаключениях Аристотель опирался на наблюдения, повседневный опыт. (На такой основе, несомненно, и строится наука.) Однако наблюдения эти часто были поверхностными и не сопровождались измерениями. Поэтому и выводы, сделанные Аристотелем, оказались неверными.

Наблюдения показывают, например, что повозка на ровной дороге движется лишь тогда, когда ее тянет лошадь. Значит, для того чтобы тело двигалось (обладало *скоростью*), нужно, чтобы на него влияло другое тело. Это влияние одного тела на другое назовем силой. По Аристотелю сила — причина *движения*. При отсутствии силы возможен покой и только покой.

С другой стороны, наблюдения показывают, что существуют движения,



обходящиеся «без лошадей», без сил. Так, всякое тяжелое тело само по себе падает, движется вниз; легкие тела (дым, нагретый воздух и т. д.) движутся вверх и тоже сами собой. Наблюдения, наконец, показывают, что «без лошадей» движутся планеты.

На основании таких наблюдений Аристотель делит все движения на два класса: насильственные и естественные. Причиной насильственных движений является влияние других тел, то есть сила. Что касается движений естественных, то здесь причина совсем другая. Аристотель определяет ее так: всякому телу природой предназначено определенное место. Тяжелым телам отведено место внизу, легким — наверху. Планетам и звездам предопределено вечное вращение вокруг Земли. Так что причиной естественных движений является стремление тел занять то место, которое им определено природой.

Но тяжелые тела могут двигаться и вверх. Как быть с брошенным вверх камнем? Согласно Аристотелю это уже насильственное движение. А причина его заключена в том, что природа не допускает существования пустоты: воздух стремится немедленно заполнить место, освобождаемое телом при движении, и все время подталкивает это тело. (Это представление о «боязни пустоты» сохранялось в физике вплоть до Галилея и Торричелли, которые, наконец, покончили с ним.)

Мы видим, что механика Аристотеля не была единой наукой о законах движения. Различным движениям приписывались различные причины, а сами причины формулировались очень неопределенно. Но авторитет Аристотеля был столь велик, что его механика просуществовала почти два тысячелетия, до времен Галилея и Ньютона.

Механика Ньютона. Первый закон механики

В отличие от наивных представлений доньютоновской механики, механика Ньютона является единой теорией, относящейся к любым движениям тел. Все движения подчиняются одним и тем же строгим законам. Что же это за законы?

В механике Ньютона прежде всего обращается внимание на то, что движение должно изучаться относительно определенной системы отсчета. Фактически Ньютон пользуется системой отсчета, связанной с Солнцем.

В ту пору было уже известно, как движутся планеты относительно Солнца (законы движения планет были изучены Кеплером). Анализируя эти движения, а также движения тел на Земле, изученные отчасти им самим, отчасти его предшественниками, прежде всего — Галилеем, Ньютон пришел к фундаментальному выводу: если какое-либо тело движется относительно Солнца с ускорением, то это ускорение всегда вызвано влиянием на тело какого-либо другого тела или нескольких тел. Так, с ускорениями движутся планеты. Эти ускорения вызваны влиянием Солнца. Ускорение падающего на Землю тела вызвано влиянием Земли. Ускорение тела, прикрепленного к пружине, вызвано влиянием пружины и т. д. Это — закон природы: ускорение любого тела относительно Солнца всегда вызвано влиянием на него какого-либо тела или тел. По Аристотелю сила — причина движения (скорости) тела и притом только насильственного. В механике Ньютона сила — причина *изменения движения* (изменения скорости — ускорения) тел при *любых* движениях.

А как должно вести себя тело, на которое не влияют другие тела? Согласно Аристотелю такое тело должно покоиться, скорость его должна быть равна нулю. По Ньютону у такого тела в системе отсчета, связанной с Солнцем, должно быть равно нулю ускорение. Это значит, что в этой системе тело, на которое не влияют другие тела, может или покоиться, или двигаться прямолинейно и равномерно. В этом и состоит первый закон Ньютона — закон инерции.

Закон инерции справедлив не только тогда, когда на тело не влияют никакие другие тела. Ему подчиняются и такие тела, которые испытывают влияние других тел, но этих «других» тел не одно, а несколько, и влияние каждого из них компенсируется всеми остальными. Слово «инерция» и обозначает явление, состоящее в том, что тело, на которое не влияют другие тела (силы) или влияния на которое других тел компенсируются, не изменяет своего движения, то есть не изменяет своей скорости.

Как мы говорили, Ньютон рассматривал движение в системе отсчета, связанной с Солнцем. Но если тело движется с постоянной скоростью относительно Солнца, то относительно любого другого тела, движущегося без ускорения относительно Солнца, оно также движется с постоянной скоростью (но уже другой). Так что в системе отсчета, связанной с этим «другим» телом, тоже выполняется закон инерции. Все такие системы называются *инерциальными*.

Первый закон Ньютона теперь принято формулировать так: *существуют такие системы отсчета, относительно которых поступательно движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действие других тел компенсируется.*

А если связать систему координат с телом, которое относительно инерциальной системы координат само движется с ускорением?

Относительно такой системы любое тело, на которое не влияют другие тела, будет двигаться с ускорением. В этой системе тело может находиться в покое, несмотря на влияние на него другого тела. Все такие системы отсчета, движущиеся относительно инерциальной системы с ускорением, называются неинерциальными.

Можно ли говорить, что система координат, связанная с Землей, — инерциальная? Строго говоря, нет, потому что Земля движется вокруг Солнца по криволинейной траектории (почти по окружности), и следовательно, относительно Солнца она движется с ускорением. Кроме того, Земля вращается около своей оси. Это движение тоже ускоренное. Но вокруг Солнца Земля совершает всего один оборот за год, а около оси — за сутки. Оба ускорения настолько малы, что в большинстве случаев Землю можно принимать за инерциальную систему отсчета.

Факт существования в мире инерциальных систем отсчета вовсе не представляется очевидным, само собой разумеющимся. Античным мыслителям (Аристотелю) было трудно понять, почему тела продолжают двигаться и после того, как влияние на них других тел прекратилось. Почему, например, стрела продолжает свой полет после того, как тетива лука перестала ее толкать?

Галилей первым заметил ошибочность убеждения в том, что другие тела должны поддерживать движение (скорость) данного тела. Он задался вопросом: какое свойство движения тела зависит от влияния на него других тел? Никакие умозрительные рассуждения не могут дать ответ на этот вопрос. Здесь нужно обратиться непосредственно к природе, то есть к опыту.

Ответ, который дала природа, оказался неожиданным и состоит в следующем: существуют инерциальные системы отсчета; в них для поддержания движения тела с постоянной скоростью ничего не требуется — оно происходит само собой.

Когда такой ответ был получен, это явилось крупнейшим открытием. Именно поэтому закон инерции относится к числу важнейших законов природы.

Взаимодействие тел и ускорения. Масса

Еще один важный факт установил Ньютон из наблюдений за движениями тел. Он состоит в том, что когда какое-нибудь тело влияет на другое тело и сообщает ему ускорение, то это другое тело «отвечает» ему тем же, то есть сообщает и ему ускорение. Влияние одного тела на другое не является односторонним — тела *взаимодействуют*, сообщая друг другу ускорения. Если, например, сталкиваются два шара (столкновение — это пример взаимодействия), ускорение получает каждый из них. Каковы эти ускорения? Как они направлены? Каковы их численные значения?

Опыт показывает, что во всех случаях ускорения взаимодействующих тел противоположны по направлению.

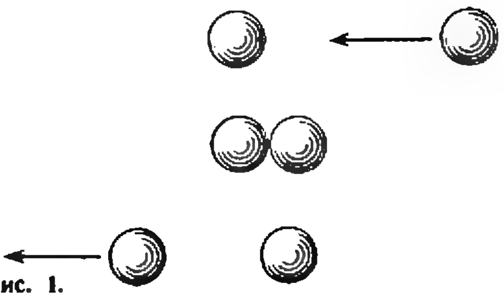


Рис. 1.

Если, например, движущийся шар сталкивается с таким же неподвижным шаром так, что скорость шара направлена по линии, соединяющей центры шаров (рис. 1), то скорость первого из них уменьшится, а скорость второго — увеличится. А это и означает, что ускорения шаров противоположны по направлению.

Что касается абсолютных значений (модулей) ускорений, то они могут быть любыми. Это зависит от того, как двигались тела до взаимодействия (от начальных условий), от характера взаимодействия, от того, какие именно тела взаимодействуют. Но для данной пары взаимодействующих тел отношение ускорений всегда одно и то же. Оно не зависит ни от характера взаимодействия, ни от начальных условий. Значит, зависит оно от какого-то особого свойства, таящегося в самих взаимодействующих телах. Свойство это, внутренне присущее каждому телу, выражается величиной массы тела.

Ньютон открыл это свойство и ввел в науку величину, количественно характеризующую его, — массу. Что это за свойство?

Представим себе, что два взаимодействующих тела — это два шара одинаковых объемов. Первый из них — деревянный, второй — алюминиевый. Если они каким-то образом станут взаимодействовать (они могут столкнуться, взаимодействовать через пружину (рис. 2, *а*); взаимодействие может осуществляться посредством нити, связывающей шары, вращающиеся на центробежной машине (рис. 2, *б*); это может быть электрическое взаимодействие, если шары электрически заряжены), то каждый из них изменит свою скорость — получит ускорение (рис. 2). И в любом случае ускорение $\vec{a}_1$ деревянного шара окажется в 5 раз больше ускорения $\vec{a}_2$ алюминиевого шара:

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = 5.$$

И вообще, для любых двух взаимодействующих тел

$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \text{const} \qquad (1)$$

— отношение абсолютных значений ускорений, приобретаемых в процессе взаимодействия, есть величина постоянная.

Напомним, что ускорение $\vec{a}$ тела равно быстроте изменения скорости, то есть изменению скорости в единицу времени:

$$|\vec{a}_1| = \frac{|\Delta\vec{v}_1|}{\Delta t}, \quad |\vec{a}_2| = \frac{|\Delta\vec{v}_2|}{\Delta t}.$$

Здесь $\Delta\vec{v}_1$ — изменение скорости деревянного шара, $\Delta\vec{v}_2$ — алюминиевого, Δt — время, в течение которого шары взаимодействовали. Именно за это время и произошло изменение скоростей обоих шаров. Но деревянный шар за это время «успел» изменить свою скорость на величину в 5 раз большую, чем алюминиевый:

$$\frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} = 5.$$

То присущее всем телам свойство, проявляющееся при их взаимодействии, о котором идет речь, и состоит в том, что для *изменения скорости тела требуется время*. Ни набрать скорость, ни, наоборот, потерять ее тело не может мгновенно. Называется это свойство *инертностью*. Из двух взаимодействующих тел то из них более инертно, которое за время взаимодействия меньше изменило свою скорость. (Отсюда и название этого свойства — инертность: ведь когда скорость тела вовсе не изменяется, говорят, что тело движется по инерции.)

Количественную меру этого свойства Ньютон назвал *массой* (часто говорят — инертная масса): более инертное тело обладает и большей массой (инертной). Масса алюминиевого шара в 5 раз больше массы такого же по размеру деревянного шара.

Поэтому вообще для отношения модулей ускорений двух взаимодействующих тел можно написать равенство

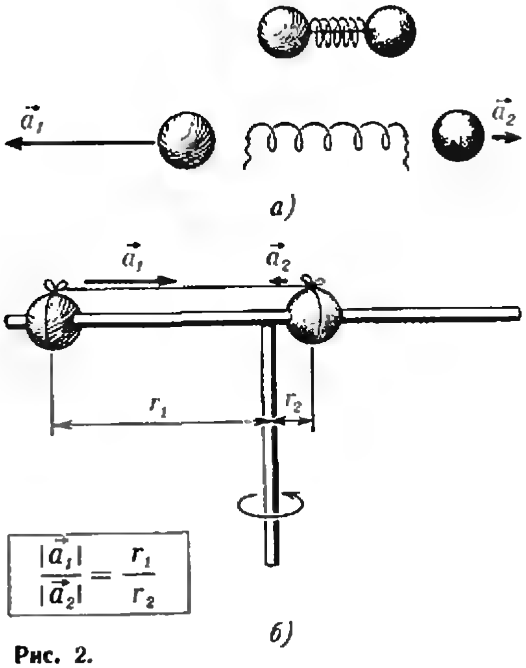
$$\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{m_2}{m_1}, \qquad (2)$$

где m_1 и m_2 — массы соответственно первого и второго тела.

Соотношение (2) дает нам в руки метод измерения массы любого тела.

В самом деле, измерить массу тела — значит сравнить ее с массой тела-эталона, принятой за единицу (так же, как, например, измерение длины тела сводится к сравнению ее с длиной эталона длины — например, метра). В качестве эталона массы, как известно, принят 1 килограмм (это — масса цилиндра из специального сплава, который хранится в Международном бюро мер и весов (во Франции); копии эталона хранятся во многих государствах мира; в СССР имеются даже две копии).

Для измерения массы m какого-нибудь тела надо его привести во взаимодействие с эталоном (или с его копией) и измерить ускорение обоих тел. Тогда массу m мы найдем из



$$\boxed{\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} = \frac{r_1}{r_2}}$$

Рис. 2.

соотношения

$$\frac{m}{m_{эт}} = \frac{|\vec{a}_{эт}|}{|\vec{a}|}, \qquad (3)$$

где $m_{эт}$ — масса эталона, $\vec{a}_{эт}$ и $\vec{a}$ — соответственно ускорения эталона и тела, приобретаемые в процессе взаимодействия. Из (3) находим

$$m = \frac{|\vec{a}_{эт}|}{|\vec{a}|} m_{эт} = \frac{|\vec{a}_{эт}|}{|\vec{a}|} 1\ (кг). \quad (3а)$$

Но вернемся к соотношению (2), из которого следуют формулы (3) и (3а). Вдумаемся, в какой мере оно обосновано опытом. Опыт нам показал лишь, что отношение ускорений двух взаимодействующих тел—вполне определенная величина (формула (1)).

Далее мы условились (именно условились!) приписать телу, ускорение которого меньше, то есть более инертному телу, бóльшую массу.

Математически мы это выразили уравнением (2), из которого и следует, что большей массе соответствует меньшее ускорение. Но вместо уравнения (2) можно написать, например, следующую формулу:

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

или

$$\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{m_1^n}{m_2^n}. \qquad (*)$$

Из этих формул тоже следует, что из двух взаимодействующих тел меньшее ускорение получает тело большей массы! Почему же мы выбрали простейшую формулу (2), из которой следует приведенный выше способ измерения массы?

Потому что при таком способе измерения массы оказывается, что масса нескольких тел, сложенных вместе, равна сумме масс слагаемых тел (закон сохранения массы).

Представим себе, что при взаимодействии двух тел A и B мы измерили их ускорения и, пользуясь формулой (2), нашли, что масса тела B втрое больше массы тела A (рис. 3, *а*):

$$m_B = 3m_A.$$

Возьмем еще третье тело D, приведем его во взаимодействие с телом A, измерим ускорения этих тел и найдем отношение их масс. Предположим, оказалось, что масса тела D вдвое больше массы тела A (рис. 3, *б*):

$$m_D = 2m_A.$$

Соединим теперь вместе тела B и D. Приведем «сложное» тело $B + D$ во взаимодействие с телом A и по измеренным их ускорениям найдем отношение массы тела $B + D$ к массе тела A. Опыт покажет, что (рис. 3, *в*)

$$m_{B+D} = 5m_A.$$

Выходит, что

$$m_{B+D} = m_B + m_D$$

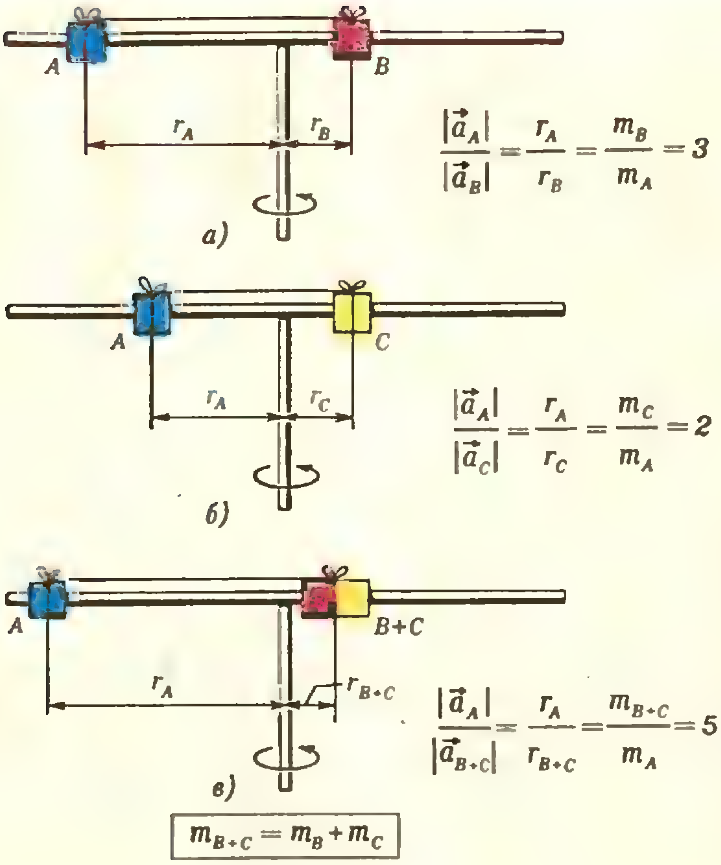
— массы складываются.

Если для измерения масс тел пользоваться соотношением (*), то окажется, что массы тел не складываются. Вот почему в физике принято соотношение (2).

В быту и в технике, в научных исследованиях часто (но не всегда) массу измеряют другим способом — взвешиванием. Этот способ не связан с законами движения; он связан с законом всемирного тяготения, и им измеряется не инертная, а так называемая гравитационная масса. Но удивительным образом эти две совершенно различные по своей роли в механике массы совпадают. В этой статье идет речь об инертной массе, которая является мерой инертности тела. Именно из-за существования инертной массы, из-за существования свойства инертности взаимодействие тел оказывается причиной появления ускорений (а не скоростей) у взаимодействующих тел.

В обиходе, а иногда и в книгах по физике под словом «масса» подразумевается количество вещества в теле. Но ведь количество вещества в теле определяется числом частиц (атомов или молекул) данного вещества в нем. А масса определяет инертность тела и ничего больше. Но масса тела из данного вещества пропорциональна числу частиц этого вещества в теле. Измерять массу легко, а считать число частиц трудно. По этой причине и пользуются массой как мерой количества вещества.

Интересно, что сам Ньютон определял массу именно как количество



$$\frac{|\vec a_A|}{|\vec a_B|}=\frac{r_A}{r_B}=\frac{m_B}{m_A}=3$$

$$\frac{|\vec a_A|}{|\vec a_C|}=\frac{r_A}{r_C}=\frac{m_C}{m_A}=2$$

$$\frac{|\vec a_A|}{|\vec a_{B+C}|}=\frac{r_A}{r_{B+C}}=\frac{m_{B+C}}{m_A}=5$$

$$\boxed{m_{B+C}=m_B+m_C}$$

Рис. 3.

вещества. Но это объясняется тем, что в то время считалось, что все вещества состоят из совершенно одинаковых атомов, лишь различным образом движущихся. Поэтому одинаковые массы содержали и одинаковые количества вещества. Истинный же смысл массы состоит в том и только в том, что масса — мера инертности тел. Никакого другого смысла масса в механике Ньютона не имеет.

Масса в теории относительности

(Добавление)

В начале нынешнего столетия Эйнштейном была создана так называемая специальная теория относительности, совершившая в физике не меньшую по значению революцию, чем в свое время механика Ньютона. Она оказала влияние на всю физику, и механика не составила исключения. Теория относительности показала, что законы механики Ньютона верны лишь приближенно. В частности, не вполне точна и приведенная нами формула (1). Если два тела взаимодействуют так, как показано на рисунке 2, *б*, и приобретают при этом ускорения $\vec a_1$ и $\vec a_2$, то в действительности постоянным остается не отношение $|\vec a_2|/|\vec a_1|$, а отношение

$$\frac{|\vec a_1|\sqrt{1-v_2^2/c^2}}{|\vec a_2|\sqrt{1-v_1^2/c^2}},$$

где $\vec v_1$ и $\vec v_2$ — соответственно скорости первого и второго тела, c — постоянная величина, имеющая размерность скорости и равная $3\cdot 10^8$ *м/с (таково же и значение скорости света!)*.

Постоянство этого отношения тоже связано со свойством инертности тел, выражаемым их массами. Так что мы опять можем написать, обозначив теперь массы тел через m_1' и m_2':

$$\frac{|\vec a_1|\sqrt{1-v_2^2/c}}{|\vec a_2|\sqrt{1-v_1^2/c}}=\frac{m_2'}{m_1'}.$$

Формулу эту можно переписать в таком виде:

$$\frac{|\vec a_1|}{|\vec a_2|}=\frac{m_2'\sqrt{1-v_1^2/c^2}}{m_1'\sqrt{1-v_2^2/c^2}}. \qquad (4)$$

Сравнивая формулы (4) и (2), мы видим, что массы m_1' и m_2', о которых идет речь в теории относительности, и ньютоновские массы m_1 и m_2 связаны соотношениями

$$m'_1 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \quad m'_2 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}. \tag{5}$$

Они показывают, что масса тела вовсе не является постоянной величиной — она зависит от скорости движения тела и возрастает с ростом скорости. А так как скорость — величина относительная и изменяется при переходе от одной системы координат к другой, то и масса — величина относительная.

Однако, когда скорости тел очень малы по сравнению со скоростью света c, то, как это видно из формул (5), можно считать, что $m'_1 = m_1$ и $m'_2 = m_2$. Это значит, что ньютоновские массы m_1 и m_2 — это инертные массы медленно движущихся, в пределе — покоящихся, тел. Их так и называют *массами покоя*. В механике Ньютона инертность тела выражается массой покоя, которая действительно является неизменяющейся характеристикой тела.

Те скорости, которые встречаются в обычной технической практике, всегда много меньше скорости света. Даже скорости искусственных спутников Земли и космических кораблей (до 40 000 км/ч), даже скорость Земли в ее движении вокруг Солнца (108 000 км/ч) слишком малы, чтобы сказалось влияние скорости на массу, и можно считать, что массы тел, движущихся с такими скоростями,— это все еще постоянные и неизменные массы покоя. Лишь так называемые элементарные частицы могут двигаться со скоростями, близкими к скорости света. Тогда и только тогда механика Ньютона оказывается неверной.

Итак, масса m_v тела, движущегося с некоторой скоростью $\vec{v}$, связана с массой m_0 того же тела, когда оно покоится (относительно той же системы отсчета), соотношением

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Из него особенно ясно видно, что масса не имеет смысла количества вещества. Не может же изменение скорости тела привести к изменению количества вещества (числа частиц) в нем!

Но как же при увеличении скорости может возрасти инертность тела? Почему для изменения скорости на одну и ту же величину быстро движущемуся телу нужно больше времени, чем медленно движущемуся? Не вдаваясь здесь в подробности, связанные с не совсем обычными идеями теории относительности, заметим, что масса согласно этой теории связана с энергией и связана так, что эти два понятия оказываются эквивалентными друг другу. Можно поэтому сказать, что энергия, которую сообщают телу, чтобы увеличить его скорость, как бы преобразуется в массу, которая и растет с ростом скорости.

В механике Ньютона масса — это только мера инертности тела. В механике теории относительности масса — это еще и мера энергии.

Кроме массы важнейшую роль в механике Ньютона играет понятие силы. Более подробно о силе в механике Ньютона мы расскажем в другой статье.

Как быть?

В некоторой школе, в некотором (десятом) классе ученики искали первообразную для функции

$f(x) = \sin x \cdot \cos x$.

И было получено два ответа:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

Поскольку все полагали, что нашли одну и ту же первообразную, на доске появилось равенство

$$\frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x,$$

откуда быстренько оказалось

$\sin^2 x + \cos^2 x = 0$,

или, попросту говоря,

$1 = 0$.

От такой чепухи надо было поскорее избавиться и полученные ответы были записаны иначе:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Однако на доске опять появилось равенство

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C,$$

из которого после вычитания C снова получилось $1 = 0$.

И тогда ответы были записаны совсем аккуратно:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2.$$

Но ведь этими постоянными могут быть любые числа, в том числе — одни и те же. И опять на доске появилось равенство

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + 1979 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + 1979,$$

из которого после вычитания 1979 снова получилось $1 = 0$.

В той школе, в том классе в конце концов поняли, что можно и чего нельзя писать, когда имеешь дело с первообразными. А вы?

В. Рыжик

М. Грабовский

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

В этой статье рассматриваются довольно простые опыты, на которых можно познакомиться со сложением двух взаимно перпендикулярных колебаний. Попробуйте самостоятельно проделать предлагаемые опыты и объяснить полученные результаты.

1. В верхнюю часть рамы дверного проема вбейте гвоздь. Слегка согните его, придав ему форму крючка. Привяжите к крючку тонкую прочную некрутящуюся нить (бечевку) длиной 1,4—1,6 м. К свободному концу нити привяжите гирю массой 0,5—0,6 кг.

Вы получите так называемый математический маятник. При небольших отклонениях от положения равновесия (а также при указанных значениях длины нити и массы гири) колебания маятника можно считать гармоническими.

С помощью секундомера или секундной стрелки наручных часов определите период колебаний маятника в плоскости дверной рамы (будем называть ее основной плоскостью). Повторите опыт, вызвав колебания маятника с той же амплитудой в плоскости, перпендикулярной основной (назовем ее перпендикулярной плоскостью). Убедитесь в том, что найденные значения периодов колебаний в обоих случаях практически совпадают.

Теперь проделайте опыты по сложению двух указанных колебаний. Сначала вызовите колебания маятника с амплитудой 20—25 см в основной плоскости вдоль оси *X*. Затем толкните груз (например, с помощью молоточка) с расчетом вызвать его колебания в перпендикулярной плоскости вдоль оси *Y*.

Вы увидите, что движение груза изменится. Прежде всего груз будет двигаться по другой траектории, причем эта траектория определяется соотношением амплитуд слагаемых колебаний и начальным сдвигом фаз между ними.

Какие же виды траекторий возможны? Рассмотрим сначала несколько частных случаев. Предположим, вы ударили по грузу в тот момент, когда он проходил положение равновесия, — груз будет колебаться по прямой, составляющей некоторый угол с осью *X* (рис. 1).

Теперь ударьте по грузу в момент его наибольшего смещения из положения равновесия — груз начнет двигаться по эллипсу (рис. 2). Если же нанести удар в другом крайнем положении груза (с противоположной стороны от положения рав-

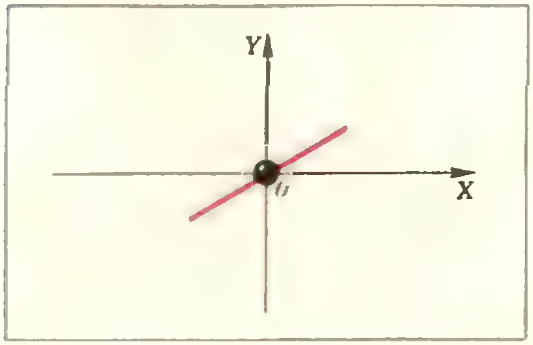


Рис. 1.

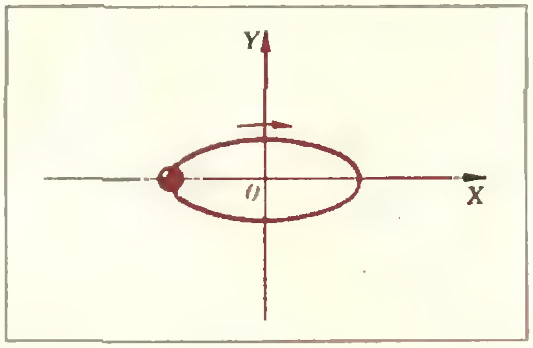


Рис. 2.

новесия), траекторией груза будет по-прежнему эллипс, но направление движения изменится на противоположное.

Оказывается, и во всех остальных случаях груз будет двигаться тоже по эллипсу, причем направление движения будет определяться тем, к какому именно крайнему положению близок груз в момент удара. Проверьте это. Кроме того, убедитесь в том, что движение по любой траектории происходит с периодом, равным периоду колебаний маятника в одной плоскости.

Заметим, что для успешного проведения описанных опытов необходима некоторая тренировка. Особенно трудно наносить удары по грузу в положении равновесия, когда скорость движения груза наибольшая.

Давайте попробуем объяснить полученные результаты. Ограничимся рассмотрением частных случаев. Пусть колебания маятника по оси X (в основной плоскости) происходят по закону

$$x = x_m \cos \omega t,$$

а по оси Y — по закону

$$y = y_m \cos (\omega t - \varphi_0).$$

Здесь x и y — смещения маятника от положения равновесия, x_m и y_m — амплитуды колебаний, ω — циклическая частота колебаний и φ_0 — начальный сдвиг фаз.

В первом частном случае, когда удар наносится в положении равновесия, сдвиг фаз φ_0 может быть равным либо 0, либо π.

Если $\varphi_0 = 0$, колебания маятника описываются уравнениями

$$x = x_m \cos \omega t \quad \text{и} \quad y = y_m \cos \omega t.$$

Поделим второе уравнение на первое:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_m}{x_m}, \text{ или } y = \frac{y_m}{x_m} x.$$

Это уравнение прямой, наклоненной к оси X под углом α таким, что $\operatorname{tg} \alpha = y_m/x_m$. В частности, при равенстве амплитуд колебаний ($y_m = x_m$) $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и $\alpha = 45°$.

Если $\varphi_0 = \pi$, уравнения колебаний маятника таковы:

$$x = x_m \cos \omega t,$$

$$y = y_m \cos(\omega t - \pi) = -y_m \cos \omega t.$$

Отсюда

$$\frac{y}{x} = -\frac{y_m}{x_m}, \text{ или } y = -\frac{y_m}{x_m} x.$$

При $y_m = x_m$ $\operatorname{tg} \alpha = -1$ и $\alpha = 135°$.

Второй частный случай, когда удар наносится в крайних положениях груза, соответствует сдвигам фаз $\pi/2$ или $3\pi/2$. Для $\varphi_0 = \pi/2$ можно записать:

$$x = x_m \cos \omega t,$$

$$y = y_m \cos (\omega t - \pi/2) = y_m \sin \omega t.$$

После несложных алгебраических преобразований получим:

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} = 1.$$

Это действительно уравнение эллипса.

При $\varphi_0 = 3\pi/2$ результат оказывается тем же.

Если $y_m = x_m$, эллипс превращается в окружность, уравнение которой

$$x^2 + y^2 = x_m^2.$$

Заметим, что при сдвиге фаз $\varphi_0 = \pi/2$ движение груза по эллипсу (или, в частности, по окружности) происходит против часовой стрелки, а при $\varphi_0 = 3\pi/2$ — по часовой стрелке.

II. Перейдем к более сложным опытам. Вбейте в дверной проем еще один гвоздь на расстоянии 30—40 см от первого и опять слегка загните его. Подвесьте груз на двух нитях, прикрепленных к двум крючкам. Вы получите маятник с двойным (или бифилярным) подвесом.

Подберите длины нитей такими, чтобы расстояние от груза до дверного проема было равно длине нити простого маятника, с которым вы проводили первую серию опытов.

Вызовите колебания маятника в перпендикулярной плоскости и экспериментально определите его период колебаний. Убедитесь в том, что найденный период практически совпадает с периодом колебаний математического маятника.

Затем охватите обе нити небольшим проволочным колечком и поднимите колечко как можно выше (рис. 3). Полученный маятник с раздвоенным подвесом может колебаться как в основной, так и в

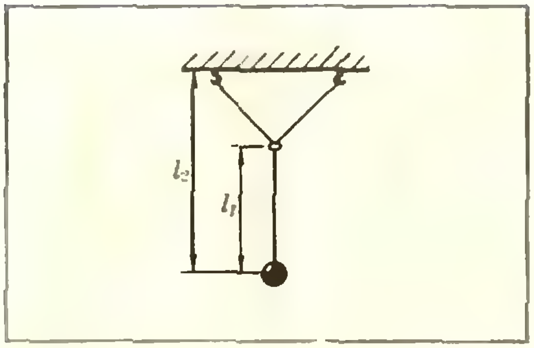


Рис. 3.

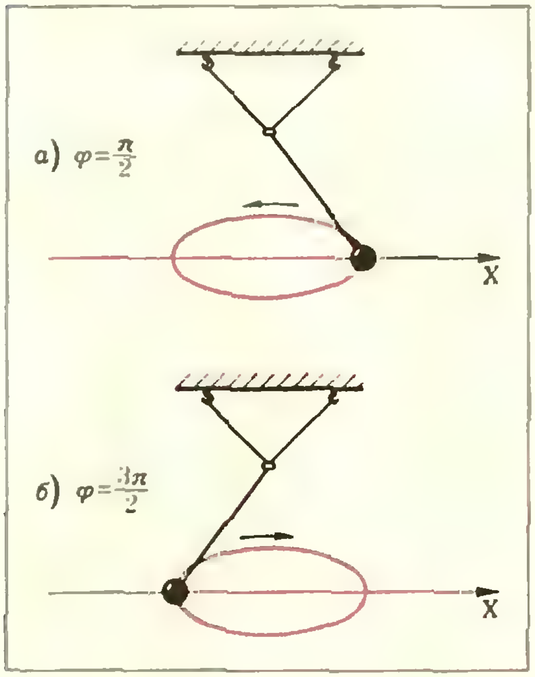


Рис. 4.

перпендикулярной плоскостях, но частоты колебаний будут разными. Это связано с тем, что период колебаний нашего маятника в основной плоскости определяется длиной l_1, а в перпендикулярной плоскости — длиной l_2 (см. рис. 3). Поскольку

$$\omega = \sqrt{g/l} \text{ и } l_1 < l_2,$$

получается, что частота колебаний в основной плоскости больше, чем в перпендикулярной.

Как будет себя вести маятник с раздвоенным подвесом, если его заставить колебаться одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях?

Вызовите колебания маятника в основной *плоскости. Когда груз будет* находиться в одном из крайних положений, ударьте по нему в перпендикулярном направлении — маятник начнет колебаться и в перпендикулярной плоскости тоже. Постарайтесь сделать так, чтобы амплитуды обоих колебаний совпадали.

Сначала груз движется по окружности вокруг вертикальной оси (рис. 4). Через некоторое время окружность превращается в эллипс. Большая ось эллипса постепенно поворачивается, а малая ось — уменьшается, так что в некоторый момент эллипс стягивается в отрезок. Затем груз опять движется по эллипсу, но уже в противоположном направлении, через некоторое время эллипс превращается в окружность. Дальше все периодически повторяется. Характерно, что при каждом переходе эллипса в прямую направление вращения груза изменяется на противоположное.

Попробуем объяснить *такое поведение* маятника. Напомним, что частоты колебаний маятника в двух взаимно перпендикулярных направлениях не одинаковы — в основной плоскости по оси X частота несколько больше, чем в перпендикулярной по оси Y. Это приводит к тому, что разность фаз колебаний с течением времени постепенно изменяется (а не остается постоянной, *как в первой* серии экспериментов).

Предположим, в начальный момент разность фаз колебаний равна $\pi/2$ — груз движется по окружности против часовой стрелки (см. рис. 4, *а*). Со временем колебания по оси Y отстают от колебаний по оси X все больше и больше — окружность переходит в эллипс. Когда отставание достигнет π, груз будет *колебаться по прямой*, составляющей с осью X угол 135°. При разности фаз $3\pi/2$ груз опять будет двигаться по окружности, но уже по часовой стрелке (см. рис. 4, *б*). Еще через некоторое время разность фаз колебаний станет равной 2π, то есть, другими словами, колебания совпадут по фазе — груз будет двигаться по прямой, наклоненной к оси X под углом 45°. *Наконец, разность* фаз снова увеличится до $\pi/2$ — груз, как и в начальный момент, будет двигаться по окружности против часовой стрелки. И так далее.

Б. Беккер, С. Востоков, Ю. Ионин

2-адические числа

Если бы вас спросили, что можно назвать «расстоянием между двумя рациональными числами», то, подумав, вы, вероятно, дали бы такой ответ: «расстоянием» между двумя числами следует назвать модуль их разности. Такое определение вполне разумно — это «расстояние» удовлетворяет всем аксиомам расстояния (см. «Геометрия 8», п. 132). Но, оказывается, расстояние между рациональными числами, удовлетворяющее всем аксиомам, можно ввести и по-другому. Это сделал немецкий математик К. Гензель (1861—1941) — он придумал даже целый класс таких расстояний. Об одном из них и рассказывается в этой статье.

Исследования Гензеля оказались очень важными для алгебры и математики в целом, а нам его расстояние поможет решить две задачи, на первый взгляд, вообще не связанные ни с какими расстояниями.

2-адическое расстояние

Пусть a и b — рациональные числа. Если $a \neq b$, то представим число $a-b$ в виде $a-b=2^k\cdot\frac{m}{n}$, где m и n — нечетные числа, а k — целое число (положительное, отрицательное или нуль). 2-адическим расстоянием между числами a и b, $a \neq b$, называется число $\rho(a, b)=1/2^k$. Если $a=b$, то положим $\rho(a, b)=0$.

Напомним аксиомы расстояния:

А1. $\rho(a, b)>0$, *если* $a \neq b$, *и* $\rho(a, b)=0$, *если* $a=b$.

А2. $\rho(a, b)=\rho(b, a)$.

А3. $\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c)$.

Свойства А1 и А2 для 2-адического расстояния, а также свойство А3 в случае, если среди чисел a, b, c есть равные, очевидны.

Докажем свойство А3 для различных рациональных чисел a, b, c. Пусть $a-b=2^{k_1}\frac{m}{n_1}$, $b-c=2^{k_2}\frac{m_2}{n_2}$, $a-c=2^{k_3}\frac{m_3}{n_3}$, где все m_i, n_i — нечетные числа. Так как $a-c=(a-b)+(b-c)$, то k_3 не меньше меньшего из чисел k_1 и k_2. Но тогда $\frac{1}{2^{k_3}}$ не превосходит большего из чисел $\frac{1}{2^{k_1}}$ и $\frac{1}{2^{k_2}}$ и тем более $\frac{1}{2^{k_3}}\leqslant\frac{1}{2^{k_1}}+\frac{1}{2^{k_2}}$.

Итак, мы видим, что все аксиомы выполняются, так что ρ действительно можно назвать расстоянием.

Что же измеряет это расстояние? Оказывается, оно измеряет степень делимости рационального числа на 2. Чем лучше делится число на 2, тем оно ближе к нулю. Например, 8 ближе к нулю, чем 1/2; 16 ближе к нулю, чем 8; 480 ближе к нулю, чем 16; 384 ближе к нулю, чем 480.

В действительности, мы доказали, что 2-адическое расстояние обладает свойством А3′, более сильным, чем свойство А3. А3′. *Расстояние* $\rho(a, c)$ *не превосходит большего из расстояний* $\rho(a, b)$ *и* $\rho(b, c)$.

Упражнение 1. Докажите, что если $\rho(a, b)\neq\rho(b, c)$, то $\rho(a, c)$ равно большему из чисел $\rho(a, b)$, $\rho(b, c)$, а если $\rho(a, b)=\rho(b, c)\neq 0$, то $\rho(a, c)<\rho(a, b)$.

Свойство А3′ приводит к любопытным следствиям. Назовем 2-адическим кругом радиуса r с центром a (a — рациональное число, r — положительное вещественное число) множество рациональных чисел x, для которых $\rho(a, x)<r$.

Упражнения

2. Докажите, что если два 2-адических круга имеют непустое пересечение, то один из этих кругов содержится в другом.

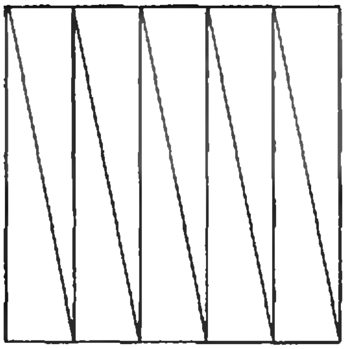


Рис. 1.

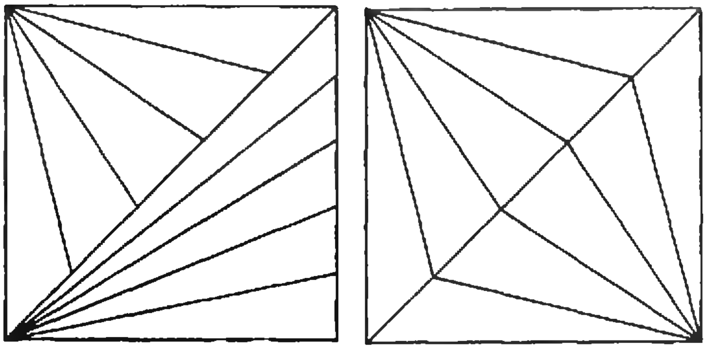


Рис. 2.

3. Докажите, что 2-адический круг радиуса r содержит бесконечно много попарно непересекающихся 2-адических кругов радиуса r.

По аналогии с обычным модулем числа мы определим *2-адический модуль* $\|a\|$ рационального числа a как 2-адическое расстояние от этого числа до нуля: если $a=2^k\frac{m}{n}$, где m и n — нечетные числа, то $\|a\| = \rho(0,a) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Легко установить следующие свойства 2-адического модуля:

M1. $\|a\|>0$, если $a\neq 0$, и $\|0\|=0$.

M2. Если $\|a\|>\|b\|$, то $\|a+b\|=\|a\|$, если $\|a\|=\|b\|\neq 0$, то $\|a+b\|<\|a\|$ *).

M3. $\|ab\|=\|a\|\cdot\|b\|$.

Упражнения

4. Выведите из свойств M1—M3 следующие свойства 2-адического модуля:
а) $\|-a\|=\|a\|$, б) если $\|a\|\neq\|b\|$, то $\|a-b\|=\|a+b\|$.

5. Докажите, что если $\|1-x\|<1$ и $\|1-y\|<1$, то $\|1-xy\|<1$.

Задача о квадрате

На рисунке 1 изображен квадрат, разбитый на конгруэнтные треугольники. Квадраты на рисунке 2 разбиты на треугольники равной площади. В каждом из этих примеров число треугольков разбиения четно.

Задача. *Доказать, что квадрат нельзя разбить на нечетное число треугольников равной площади.*

Выберем на плоскости систему координат таким образом, чтобы вершины O, A, B и C данного квадрата имели координаты $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$. Предположим, что квадрат разбит на n треугольников равной площади. Тогда площадь каждого из треугольников разбиения равна $1/n$. Если n нечетно, то $\|1/n\|=1$, если же n четно, то $\|1/n\|\geqslant 2$. Поэтому четность числа n будет доказана, если мы установим, что $\|1/n\|\geqslant 2$.

Разберем частный случай. Пусть вершины треугольников разбиения — точки с рациональными координатами. В этом случае каждую вершину $(x;\ y)$ можно окрасить в зеленый, красный или синий цвет по следующему правилу: если $\|x\|<1$ и $\|y\|<1$, то точка окрашивается в зеленый цвет; если $\|x\|\geqslant\|y\|$ и $\|x\|\geqslant 1$, то точка окрашивается в красный цвет; если $\|x\|<\|y\|$ и $\|y\|\geqslant 1$, то точка окрашивается в синий цвет (см. рис. 3). Будем считать, что раскрашены не только вершины, а все рациональные точки плоскости.

Упражнение 6. а) Докажите, что если P — зеленая точка, то при параллельном переносе $\overrightarrow{PO}$ (O — начало координат) каждая окрашенная точка сохраняет свой цвет.

б) Докажите, что ни на какой прямой не встречаются точки всех трех цветов.

Предположим, что у одного из треугольников разбиения все вершины — разных цветов (в приложении доказано, что такой треугольник обязательно найдется). Пусть K — зеленая вершина этого треугольника.

При параллельном переносе $\overrightarrow{KO}$ мы снова получим, в силу упражнения 6а), треугольник с вершинами всех трех цветов. Обозначим через $L_1(x_1,\ y_1)$ красную вершину полученного треугольника, а через $L_2(x_2,\ y_2)$ — его синюю вершину (зеленая

---

*) Так что в любом случае $\|a+b\|\leqslant\|a\|+\|b\|$.

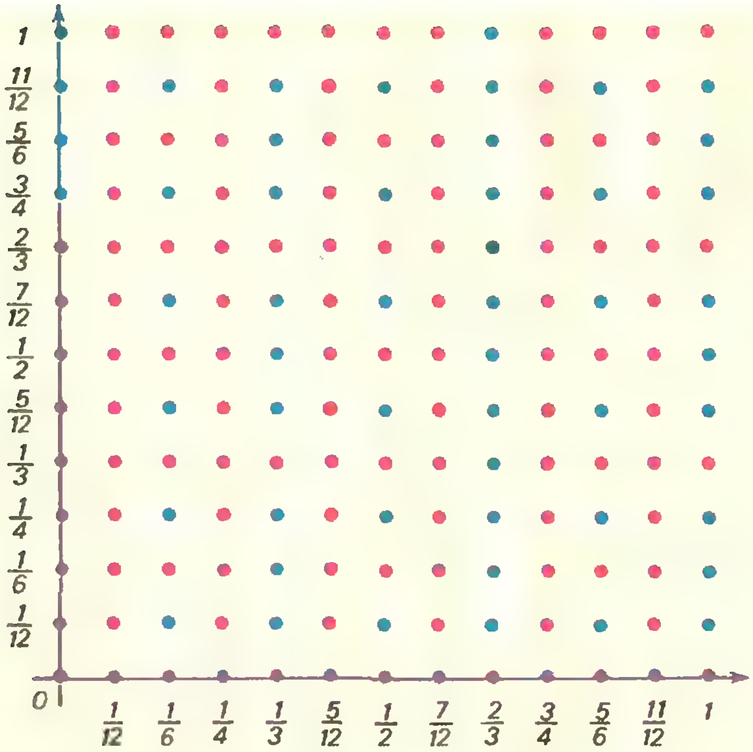


Рис. 3.

вершина этого треугольника — точка O). Так как треугольник OL_1L_2 получен параллельным переносом треугольника разбиения, то его площадь равна $1/n$. С другой стороны, площадь треугольника OL_1L_2 равна $1/2\,|x_1y_2-x_2y_1|$. (Докажите, это самостоятельно.)

Таким образом, мы получили равенство $1/n=1/2\,|x_1y_2-x_2y_1|$. Теперь уже нетрудно установить неравенство $\left\|\frac{1}{n}\right\|\geqslant 2$. В самом деле, так как L_1 — красная точка, а L_2 — синяя точка, то $\|x_1\|\geqslant\|y_1\|$, $\|x_2\|<\|y_2\|$.

Перемножая эти неравенства, мы получаем $\|x_1\|\ \|y_2\|>\|x_2\|\ \|y_1\|$ и, значит, по свойству М3 $\|x_1y_2\|>\|x_2y_1\|$. В силу свойства М2 и упражнения 4б) $\|x_1y_2-x_2y_1\|=\|x_1y_2\|$. Кроме того, $\|x_1\|\geqslant 1$, $\|y_2\|\geqslant 1$, так что $\|1/n\|=2\,\|x_1\|\ \|y_2\|\geqslant 2$.

Для того, чтобы решить задачу в общем случае, достаточно доказать, что 2-адический модуль имеет продолжение на множество всех действительных чисел, т. е. существует функция $x\to\|x\|$, определенная на множестве всех действительных чисел, обладающая свойствами М1—М3 и совпадающая на множестве рациональных чисел с 2-адическим модулем. Такая функция действительно существует, но доказательство ее существования требует привлечения гораздо более сложных средств, чем те, которыми мы располагаем в этой статье.

2-адическое разложение

Как известно, любое натуральное число можно представить в виде суммы степеней числа 2. Например, $1000=2^3+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9$. Используя 2-адическое расстояние, это разложение можно получить так. Сначала мы ищем степень числа 2, которая находится на том же расстоянии от 0, что и число 1000. Найдя эту степень (2^3), вычитаем ее из числа 1000 и для получившегося числа (992) снова ищем степень числа 2, находящуюся с ним на одинаковом расстоянии от 0. Затем ищем степень числа 2, находящуюся на одинаковом расстоянии от 0 с числом $960=992-2^5$, и так далее.

Используя отрицательные степени числа 2, можно получить аналогичные разложения рациональных чисел вида $\frac{m}{2^k}$, где m, k — натуральные числа. Например,

$$\frac{1477}{256}=\frac{1+2^2+2^6+2^7+2^8+2^{10}}{2^8}=$$
$$=2^{-8}+2^{-6}+2^{-2}+2^{-1}+2^0+2^2.$$

Никакие другие рациональные числа нельзя представить в виде суммы степеней двойки, но, оказывается, такими суммами можно сколь угодно точно приблизить любое рациональное число. Действительно, пусть a — рациональное число и $\|a\|=\frac{1}{2^{k_1}}$. Положим $a_1=a-2^{k_1}$. Тогда a_1 ближе к нулю, чем a (см. упражнение 1).

Поэтому либо $a_1=0$, либо $\|a_1\|=$ $=\frac{1}{2^{k_2}}$, где $k_2>k_1$. Полагая $a_2=a_1-$ -2^{k_2}, мы снова получим, что либо $a_2=0$, либо $\|a_2\|=\frac{1}{2^{k_3}}$, где $k_3>k_2$, и так далее. Таким образом, либо некоторое число a_s равно нулю, и тогда a является суммой степеней двойки: $a=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}$, либо все a_s отличны от нуля, и тогда суммами вида $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}$ число a приближается сколь угодно точно. В этом случае удобно считать, что a равно бесконечной сумме $a=2^{k_1}+$ $+2^{k_2}+\ldots+2^{k_s}+\ldots$

Определение. *Пусть x_1, x_2, …, x_n — последовательность рациональных чисел. Будем говорить, что рациональное число a равно бесконечной сумме $x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots$, если 2-адическое расстояние между числом a и конечными суммами $S_n=$ $=x_1+\ldots+x_n$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то есть*

$$\lim_{n\to\infty}\rho(a,\ S_n)=0.$$

Упражнение 7. Докажите, что если $\|q\|<1$, то бесконечная сумма $a+$ $+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ определена и равна $\frac{a}{1-q}$.

Мы доказали, что всякое рациональное число можно представить либо в виде конечной суммы $2^{k_1}+$ $+2^{k_2}+\ldots+2^{k_n}$ $(k_1<k_2<\ldots<k_n)$, либо в виде бесконечной суммы $2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_n}+\ldots$ (k_i — целые числа, $k_1<k_2<\ldots$). В обоих случаях это представление, которое мы будем называть *2-адическим разложением* числа a, можно записать в виде $\varepsilon_k2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots+\varepsilon_{k+n}2^{k+n}+$ $+\ldots$, где k — целое число, а каждое из чисел $\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots, \varepsilon_{k+n}, \ldots$ равно 0 или 1, причем $\varepsilon_k=1$. Числа ε_k, ε_{k+1}, … называются *2-адическими цифрами* числа $\frac{p}{q}$. Нетрудно доказать, что каждое рациональное число имеет одно и только одно 2-адическое разложение.

Упражнение 8. Докажите, что

$$-1=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n+\ldots,$$

$$\frac{1}{6}=2^{-1}+1+2^2+2^4+\ldots+2^{2n}+\ldots$$

В силу упражнения 8 2-адические цифры -1 образуют последовательность 1, 1, 1, …, а 2-адические цифры числа $\frac{1}{6}$ образуют последовательность 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, … Обе полученные последовательности периодичны. Можно показать, что у любого рационального числа $\frac{p}{q}$ последовательность 2-адических цифр периодична *).

Для этого рассмотрим последовательность целых чисел a_1, a_2, … …, a_n, …, определяемых равенствами

$$\frac{p}{q}-\varepsilon_k2^k=\frac{a_1}{q}2^{k+1},\ \frac{p}{q}-(\varepsilon_k2^k+$$
$$+\varepsilon_{k+1}2^{k+1})=\frac{a_2}{q}2^{k+2},\ \ldots,$$
$$\frac{p}{q}-(\varepsilon_k2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots+\varepsilon_{k+n-1}\times$$
$$\times2^{k+n-1})=\frac{a_n}{q}2^{k+n},\ \ldots,$$

где ε_k, ε_{k+1} …, ε_{k+n-1}, … 2-адические цифры, числа $\frac{p}{q}$. (Проверьте, что a_1, a_2, … …, a_n, … — действительно целые числа.) Теперь заметим, что 2-адическое разложение числа $\frac{p}{q}$ можно получить из 2-адического разложения числа $\frac{a_n}{q}$, умножив каждое слагаемое в последнем разложении на 2^{k+n} и приписав к получившейся сумме спереди

---

*) В том же смысле, в котором периодична десятичная дробь, представляющая рациональное число: периодична, начиная с некоторого места.

$$\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots+\varepsilon_{k+n-1}2^{k+n-1}.$$

Поэтому периодичность последовательности $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots$ будет установлена, если мы докажем, что в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ какое-нибудь число встречается дважды. В действительности, последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ограничена, и так как члены ее — целые числа, среди них обязательно встретятся равные. Ограниченность этой последовательности устанавливается следующей цепочкой неравенств:

$$|a_n|=\left|\frac{p}{2^{k+n}}-\left(\frac{\varepsilon_k}{2^n}+\frac{\varepsilon_{k+1}}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{\varepsilon_{k+n-1}}{2}\right)q\right|\leqslant\left|\frac{p}{2^{k+n}}\right|+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{2}\right)|q|\leqslant\frac{|p|}{2^k}+|q|.$$

Упражнение 9. Используя результат упражнения 7, докажите, что если $\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \varepsilon_{k+2}, \ldots$ — периодическая последовательность цифр 0 и 1, то бесконечная сумма $\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\varepsilon_{k+2}2^{k+2}+\ldots$ является 2-адическим разложением некоторого рационального числа.

2-адические числа

Кроме периодических разложений, которые задают рациональные числа, можно рассматривать и непериодические разложения, считая, что они задают некоторые новые числа. Эти числа вместе с рациональными образуют множество Q_2, элементы которого называются *2-адическими числами*.

Элементы из Q_2 можно попарно складывать и перемножать. Вот как это делается. Пусть $\alpha=\varepsilon_k 2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k-1}+\ldots$ Запишем α подобно бесконечной дроби: $\alpha=\varepsilon_k\ldots\varepsilon_0, \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$

Если есть два числа из Q_2, записанных таким образом, то их сумму (произведение) следует вычислять так же, как сумму (произведение) двух бесконечных дробей, но с переносами «слева направо». (Примеры см. на рисунке 4.) Мы не можем останавливаться на этом более подробно и предлагаем читателю самостоятельно проверить, что сумма и произведение элементов из Q_2 вновь дает элемент из Q_2 и что эти операции обладают обычными для умножения и сложения свойствами: удовлетворяют переместительному, сочетательному и распределительному законам.

2-адический модуль и расстояние естественно распространяются на Q_2:

если $\alpha\in Q_2$ и $\alpha=\varepsilon_k2^k+\varepsilon_{k+1}2^{k+1}+\ldots$ (где $\varepsilon_k\neq0$), то $\|\alpha\|=1/2^k$; *если* $\alpha, \beta\in Q_2$, *то* $\rho(\alpha, \beta)=\|\alpha-\beta\|$.

$$\begin{array}{rr}
 & \overset{}{1\,011{,}0101}^{1}\ldots \\
+ & 101{,}1010\ldots \\
\hline
 & 1\,110{,}0000\ldots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 110{,}11001\ldots \\
\times & 0{,}01101\ldots \\
\hline
 & 1{,}10110\ldots \\
 & 0{,}11011\ldots \\
 & 0{,}00110\ldots \\
 & \cdot\;\cdots\cdots\cdots \\
\hline
 & 1{,}001\ldots\ldots
\end{array}$$

Рис. 4.

Упражнения

10. По разложению $\alpha\in Q_2$ постройте разложение числа $-\alpha$.

11. Убедитесь, что обычная сумма двух рациональных чисел и сумма этих чисел в Q_2 соответствует одному и тому же числу. Продумайте аналогичный вопрос для произведения.

12. Научитесь делить в Q_2.

Вы знаете, что при определенных условиях для бесконечной последовательности (x_n) действительных чисел существует их сумма Σx_n. Для этого необходимо, но недостаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Для 2-адических чисел дело обстоит проще. Условие $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$ является и необходимым и достаточным:

если $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$, *то существует* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

Упражнения

13. Докажите достаточность условия $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$.

14. Докажите, что сумма $1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+n\cdot n!+\ldots$ определена, и найдите ее значение.

15. Докажите, что если $x\in Q_2$ и $\|x\|\leqslant\frac{1}{2}$, то определена сумма $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

2-адический логарифм

В заключение мы придадим более естественную форму решению задачи М434*).

Для этого рассмотрим функцию $L(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$, определенную на множестве 2-адических чисел x, модуль которых не больше $\frac{1}{2}$ (см.

---

*) Условие и решение этой задачи см. в «Кванте» № 12 за 1977 год.

упражнение 15). Для решения задачи М434в достаточно доказать, что $L(2)=0$. Введем еще одну функцию по формуле $\log x = -L(1-x)$. *Равенство $L(2)=0$ означает*, что $\log(-1)=0$. Функция log (она называется 2-*адическим логарифмом*) обладает основным свойством логарифмов: $\log(xy)=\log x+\log y$. Из этого свойства легко вывести равенство $\log(-1)=0$. Действительно, $\log 1=\log(1\times 1)=\log 1+\log 1=2\log 1$, откуда $\log 1=0$. С другой стороны, $\log 1=\log((-1)\times(-1))=\log(-1)+\log(-1)=2\log(-1)$ и потому $\log(-1)=0$. 2-адический логарифм в множестве 2-адических чисел играет ту же роль, что и обычный логарифм в множестве вещественных чисел. 2-адический логарифм определен для тех чисел x, для которых $\|x\|=1$, так как именно в этом случае $\|1-x\|\leqslant\frac{1}{2}$. (В частности, определен $\log(-1)$.) Равенство, на котором основано решение задачи М434 в «Кванте», в пределе при n, стремящемся к бесконечности, принимает вид $L(2x-x^2)-2L(x)=0$. Это равенство также является следствием основного свойства логарифма. Действительно, $L(2x-x^2)=-\log(1-2x+x^2)=-\log(1-x)^2=-2\log(1-x)=2L(x)$.

С доказательством основного свойства 2-адического логарифма и с рядом других свойств 2-адических чисел вы можете познакомиться по книге З. И. Боревича и И. Р. Шафаревича «Теория чисел». Кроме логарифма есть и другие замечательные функции 2-адической переменной. Одной из таких функций является *экспонента* — функция, определенная равенством

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Упражнение 16. Докажите, что экспонента определена на множестве 2-адических чисел x, удовлетворяющих условию $\|x\|\leqslant\frac{1}{4}$.

2-адическая экспонента обладает свойствами, аналогичными свойствам обычной экспоненты: $\exp(x+y)=\exp x\cdot\exp y$, $\exp(\log x)=x$, $\log(\exp x)=x$. (Эти равенства справедливы для тех значений переменных, для которых они определены.)

* * *

Подобно тому, как было определено 2-адическое расстояние, с помощью произвольного простого числа p можно определить p-адическое расстояние. Оказывается, все расстояния между рациональными числами эквивалентны либо обычному, либо одному из p-адических расстояний. Но это — тема для другого рассказа.

Приложение

Нам осталось доказать существование треугольника с вершинами всех трех цветов. Сформулируем и докажем более общее утверждение:

Пусть квадрат OABC разбит на несколько треугольников. Предположим, что каждая вершина этих треугольников окрашена в зеленый, красный или синий цвет таким образом, что ни на какой прямой не встречаются точки всех трех цветов. Пусть при этом O — зеленая точка, A и B — красные точки, C — синяя точка. Тогда среди треугольников разбиения есть треугольник, имеющий вершины всех трех цветов.

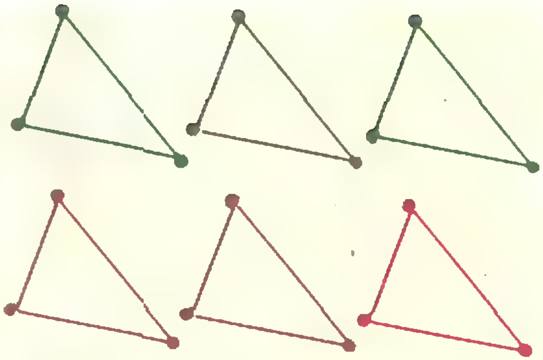


Рис. 5.

Доказательство. Нам будет удобно различать стороны треугольников и звенья, т. е. отрезки, на которые сторона треугольника разбивается попавшими на нее вершинами других треугольников. Сторона треугольника разбиения, не содержащая внутри себя вершин других треугольников, сама считается звеном.

В зависимости от того, в какой цвет окрашены концы звена или стороны, мы будем различать 6 типов звеньев и 6 типов сторон: *ЗЗ* (оба конца зеленые), *ЗК* (один из концов красный, другой — зеленый) и т. д. (*ЗС*, *КК*, *КС*, *СС*). Докажем, что на сторонах треугольника, у которого какие-нибудь две вершины окрашены в один цвет, лежит четное число звеньев типа *ЗК*. Действительно, так как ни на какой прямой не встречаются точки всех трех цветов, звенья типа *ЗК* встречаются лишь на сторонах типов *ЗЗ*, *ЗК*, *КК*, причем на стороне типа *ЗЗ* или *КК* таких звеньев четное число, а на стороне типа *ЗК* — нечетное число. Отсюда следует, что на сторонах каждого из треугольников, изображенных на рисунке 5, четное число звеньев типа *ЗК* (на сторонах треугольников с двумя или тремя синими вершинами звеньев типа *ЗК* нет).

Предположим теперь, что среди треугольников разбиения нет такого, который имеет вершины всех трех цветов, т. е. в каждом треугольнике разбиения есть две вершины одного цвета. Так как каждое звено, находящееся на контуре квадрата *OABC*, лежит на стороне одного треугольника разбиения, а каждое звено, находящееся внутри этого квадрата, лежит на сторонах двух треугольников разбиения, то из того, что каждый треугольник разбиения имеет две вершины одного цвета, следует, что на контуре квадрата лежит четное число звеньев типа *ЗК*. С другой стороны, на отрезках *OC* и *BC* таких звеньев нет, на отрезке *OA* — нечетное число, а на отрезке *AB*—четное число таких звеньев. Получено противоречие.

задачник Кванта

Задачи

М546—М550; Ф558—Ф562

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 апреля 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М546, М547» или «Ф558». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М546. Из произвольной точки M окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры MP и MQ на две его противоположные стороны, и перпендикуляры MR и MT — на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые PR и QT перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.

Ваге Шафарян, ученик 10 класса (Ереван)

М547. Для того чтобы уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах x, y, необходимо и достаточно, чтобы n было простым. Докажите это.

А. Данислян

М548. а) На окружности расположено 4 точки. Через середину хорды, соединяющей две из них, проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки. (Такая прямая проводится для каждой пары точек.) Докажите, что все шесть построенных прямых проходят через одну точку.

б) На окружности расположено 5 точек. Через центр тяжести трех из них (точку пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках) проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей остальные точки. Докажите, что все десять построенных прямых проходят через одну точку.

в) Обобщите эти утверждения на случай n точек.

А. Лопшиц

М549. Дано натуральное число N. Выпишем все его делители d_1, d_2, ..., d_n и для каждого из них найдем, сколько делителей оно имеет. Докажите, что для полученных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n выполняется равенство

$$(a_1+a_2+\qquad+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\qquad+a_n^3.$$

Например, число $N=6$ имеет четыре делителя: 1, 2, 3, 6; здесь $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=4$ и

$$(1+2+2+4)^2=1^3+2^3+2^3+4^3.$$

В. Матизен

М550. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно d км, должны добраться n велосипедистов, у которых имеется m велосипедов. Каждый может идти пешком со скоростью u км/ч или ехать на велосипеде со скоростью v км/ч. За какое наименьшее время все n велосипедистов смогут попасть из A в B? (Время считается по последнему прибывшему. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.) Рассмотрите частный случай: $m=2$, $n=3$.

С. Кротов

Ф558. Маленький тяжелый шарик влетает через отверстие внутрь гладкой сферы той же массы, проходя на расстоянии $R/2$ от центра сферы (R — радиус сферы). После влета шарика отверстие автоматически закрывается. Считая соударения между шариком и сферой абсолютно упругими, найти траектории шарика и центра сферы в той системе отсчета, в которой сфера первоначально покоилась. Определить параметры этих траекторий и отметить на них точки, в которых происходят соударения.

Б. Буховцев

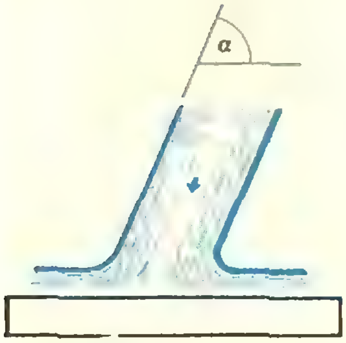


Рис. 1.

Ф559. Согласно теории Бете углеродный цикл звездных термоядерных реакций состоит из следующих реакций:

$$p+{}^{12}\mathrm{C}\to{}^{13}\mathrm{N}+\gamma,\quad {}^{13}\mathrm{N}\to{}^{13}\mathrm{C}+e^{+}+\nu,$$
$$p+{}^{31}\mathrm{C}\to{}^{14}\mathrm{N}+\gamma,\quad p+{}^{14}\mathrm{N}\to{}^{15}\mathrm{O}+\gamma,$$
$${}^{15}\mathrm{O}\to{}^{15}\mathrm{N}+e^{+}+\nu,\quad p+{}^{15}\mathrm{N}\to{}^{12}\mathrm{C}+{}^{4}\mathrm{He}.$$

Найти энергию, выделяющуюся при образовании моля гелия.

Ф560. Плоская бесконечная струя толщины d_0 падает под углом α на плоскость (рис. 1). Скорость струи равна $\vec{v}$, ее плотность ρ. На какие струи распадается струя?

Ф561. Глубоководный батискаф сварен из двух полусфер радиуса $R=2$ м. Батискаф должен погружаться на глубину $H=10$ км. Какое напряжение (отношение модуля силы к длине экватора) должен выдерживать шов батискафа, если сварной экватор расположен а) горизонтально? б)* вертикально?

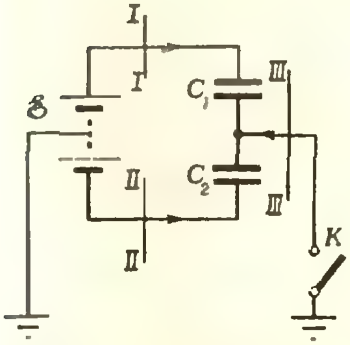


Рис. 2.

Ф562. Конденсаторы емкостей $C_1=2{,}00$ мкф и $C_2=3{,}00$ мкф соединены последовательно и подключены к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=120$ В, средняя точка которой заземлена (рис. 2). Провод, соединяющий конденсаторы, может быть заземлен с помощью ключа K. Найти заряды q_1, q_2 и q_3, которые пройдут после замыкания ключа через сечения $I-I$, $II-II$ и $III-III$ в направлениях, указанных на рисунке.

Решения задач

М500 (а — в) — М503; Ф502, Ф504, Ф512

М500. *N первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-ВО» все одновременно повернулись на 90°, некоторые — налево, а другие — направо. Ровно через секунду каждый, кто стал лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°. Еще через секунду каждый, оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом, снова поворачивается на 180° и т. д. (рис. 1).*

а) Докажите, что через конечное время движение прекратится.

б) Какое наибольшее число раз мог повернуться «кругом» один человек?

в) Какое наибольшее количество времени могло продолжаться движение в строю? *)

Мы решим задачи б) и в); задача а) следует из в) (или из б)).

б) Нетрудно видеть, что число поворотов, которые совершит первоклассник A, не может превосходить общего числа первоклассников m_A, стоящих к нему лицом (спереди и сзади). Действительно, в те моменты, когда A не поворачивается, m_A, очевидно, не меняется, а когда A поворачивается, m_A уменьшается на единицу. С другой стороны, очевидно, $m_A \leqslant N-1$. Итак, каждый первоклассник может повернуться *не более $N-1$ раз*. Простейшие примеры показывают, что эта оценка достигается (рис. 2).

в) Для времени движения справедлива та же оценка: $N-1$. Докажем это по индукции. При $N=1$, очевидно, оценка выполняется; пусть она выполняется при $N=k$. Рассмотрим самого правого (последнего) и второго справа (предпоследнего) первоклассников в строю из $N=k+1$ человек. Если последний первоклассник смотрит направо, то он, очевидно, поворачиваться не будет, и для времени движения, по предположению индукции, выполняется оценка $k-1$. Если последний первоклассник смотрит влево, а предпоследний — вправо, то в следующий момент оба они повернутся, последний первоклассник станет смотреть вправо, а для общего времени движения будет выполняться оценка $1+(k-1)=k=N-1$. Остается рас-

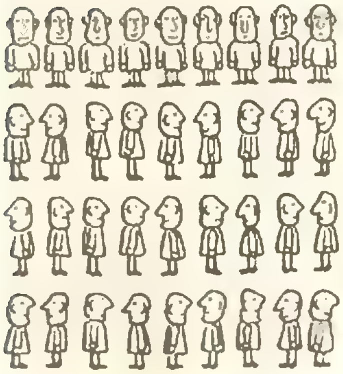


Рис. 1.

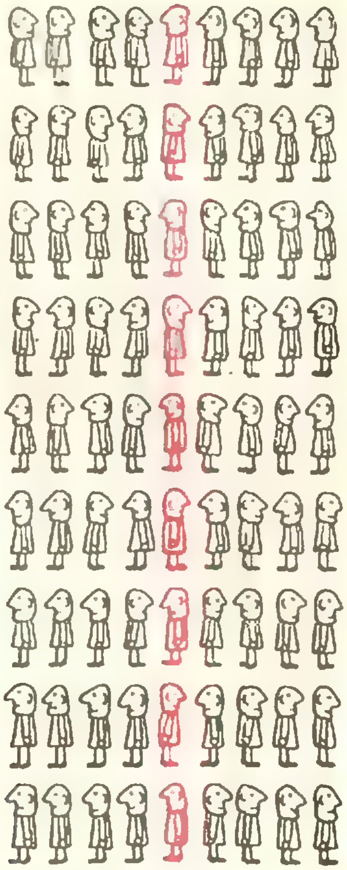


Рис. 2.

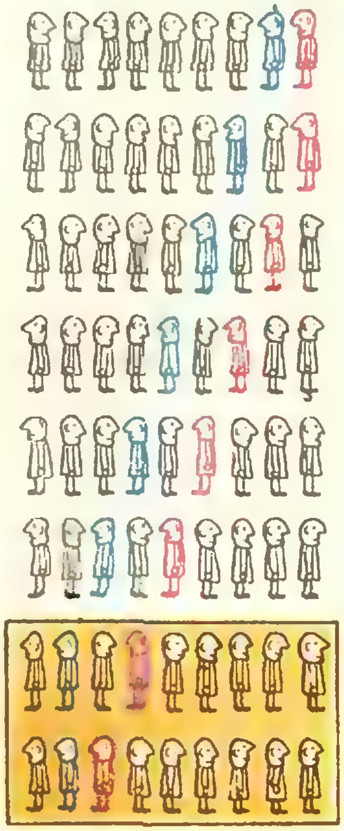
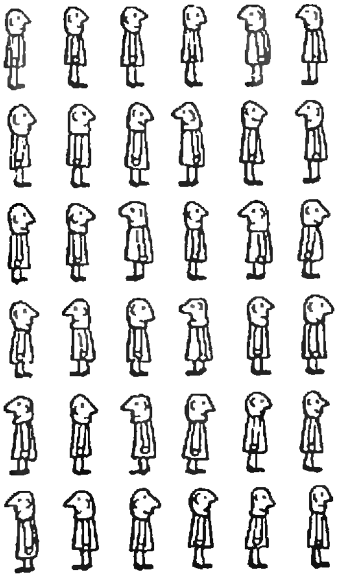


Рис. 3.

---

*) Задача М500 г) будет решена позже.



$N=6$

время движения-5секунд.

Рис. 4.

смотреть случай, когда оба:— последний и предпоследний — первоклассника смотрят влево.

Будем теперь считать, что первоклассники, стоящие друг к другу лицом, *не поворачиваются, а меняются местами* (каждый из них делает шаг вперед); картина от этого не изменится. Тогда нетрудно видеть (рис. 3), что:

1) наличие последнего первоклассника никак не будет сказываться на движении предпоследнего;

2) последний первоклассник может отстать от предпоследнего не более чем на два шага (между ними может стоять не более одного человека).

Из этого следует, что последний (смотрящий влево) первоклассник остановится не более чем через одну секунду после того, как окончательно прекратит движение предпоследний первоклассник (также смотрящий влево); а с остановкой последнего первоклассника движение в строю вообще прекращается (действительно, у него за спиной — только «правые», а перед ним — только «левые»). При этом движение в строю из $N=k+1$ человек будет продолжаться не более чем на одну секунду больше, чем в строю из k человек, то есть не более чем $1+(k-1)=k=N-1$ секунд. Таким образом, оценка $N-1$ выполняется. Из рисунка 4 видно, что она является точной (на рисунке $N=6$, время движения — пять секунд).

Г. Курдюмов

◆

М501. *Выберем из последовательности степеней тройки 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, ... все числа, начинающиеся с цифры 9; пусть эти числа (по порядку) $3^{f(1)}$, $3^{f(2)}$, $3^{f(3)}$, ... (в частности, $f(1)=2$, так как первое из таких чисел $3^2=9$).*

а) Найдите $f(2)$ и $f(3)$ — номера второго и третьего такого числа.

б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.

в) Докажите, что $f(n)$ при $n>1$ удовлетворяет условиям:

(1) $f(n)-n$ *нечетно;*

(2) $\left|f(n)-\dfrac{n\lg 9}{1-\lg 9}\right|<1,$

и определяется этими условиями однозначно.

Докажем сначала такое утверждение: *для любого $k>1$ существуют две или три k-значные степени тройки, причем в том и только в том случае, когда их три, одна из них начинается цифрой 9* (если последовательность степеней тройки дополнить числом $3^0=1$, то это утверждение будет верно и при $k=1$). Пусть 3^m— наименьшая k-значная степень тройки; тогда $10^{k-1}\leqslant 3^m<3\cdot 10^{k-1}$. Отсюда $3\cdot 10^{k-1}\leqslant 3^{m+1}<9\cdot 10^{k-1}$, то есть 3^{m+1}— k-значное число, не начинающееся с девятки. Далее, $3^{m+2}\geqslant 9\cdot 10^{k-2}$, то есть если 3^{m+2}— k-значное число, то оно обязательно начинается цифрой 9. (В любом случае $3^{m+3}\geqslant 27\cdot 10^{k-1}$— не k-значное число.)

Пусть теперь $3^{f(n)}$— k-значная степень тройки, начинающаяся с девятки, то есть

$$9\cdot 10^{k-1}<3^{f(n)}<10^k \qquad (*)$$

(оба неравенства строгие, поскольку $3^{f(n)}$— число нечетное). Подсчитаем двумя способами количество степеней тройки, меньших $3^{f(n)}$. С одной стороны, кроме тех $n-1$ степеней, которые начинаются цифрой 9, есть еще ровно две l-значные степени тройки для каждого $l=1,2,\ldots,k$, то есть их всего $2k+(n-1)$ штук. С другой стороны, количество степеней тройки, меньших $3^{f(n)}$, равно $f(n)$: это числа 3^0, 3^1, ..., $3^{f(n)-1}$. Значит, $2k+(n-1)=f(n)$, откуда

$$k=\frac{f(n)-n+1}{2}. \qquad (**)$$

Поскольку k — натуральное, из этого следует, что $f(n)-n$ — нечетное число. Условие (1) пункта в) доказано.

Из $(*)$ и $(**)$ имеем

$$9\cdot 10^{\frac{f(n)-n-1}{2}}<3^{f(n)}<10^{\frac{f(n)-n+1}{2}}, \qquad (***)$$

или

$$\lg 9+\frac{f(n)-n-1}{2}<f(n)\lg 3<\frac{f(n)-n+1}{2}.$$

Выполнив несколько равносильных преобразований, получим

$$2\lg 9+f(n)-n-1<f(n)\lg 9<f(n)-n+1,$$

$$\lg 9-1<f(n)\lg 9-f(n)-\lg 9+n<-\lg 9+1,$$

то есть

$$-(1-\lg 9)<-(1-\lg 9)f(n)+(n-\lg 9)<1-\lg 9,$$

и поскольку $1-\lg 9>0$, имеем

$$-1<-f(n)+\frac{n-\lg 9}{1-\lg 9}<1,$$

то есть

$$\left|f(n)-\frac{n-\lg 9}{1-\lg 9}\right|<1$$

— условие (2) пункта в) задачи.

Число $\dfrac{n-\lg 9}{1-\lg 9}=\dfrac{n-1}{1-\lg 9}+1$ иррациональное ($n>1$ и $\lg 9$ иррационально). Поэтому при любом $n>1$ условию (2) удовлетворяют ровно два последовательных натуральных числа; одно из них четно, другое нечетно. Но так как для каждого n четность $f(n)$ известна (разность $f(n)-n$ нечетна), то при каждом n число $f(n)$ определяется однозначно. Остается доказать, что для $f(n)$, определенного условиями (1) и (2), степень тройки $3^{f(n)}$ действительно начинается с цифры 9 (все условия на $f(n)$ мы получили в предположении, что $f(n)$ существует). Проведя выполненные выше преобразования в обратном порядке, из условия (2) легко получим (•••), то есть $3^{f(n)}$ в самом деле начинается с девятки.

Теперь уже нетрудно найти $f(2)$ и $f(3)$:

$$f(2)=23,\ f(3)=44.$$

Наконец, поскольку $f(n)$ определено для всех натуральных n, получаем, что степеней тройки, начинающихся цифрой 9, бесконечно много.

Замечание. Из неравенства (2) в условии задачи следует, что величина $f(n)$ растет примерно как $\dfrac{1}{1-\lg 9}n$. Этот результат можно вывести из того факта, что при больших значениях N среди N первых степеней тройки количество степеней, начинающихся цифрой 9, примерно равно $(1-\lg 9)N$ (рис. 5; тут совершенно неважно, рассматриваем ли мы степени двойки, тройки или другого числа α с иррациональным $\lg\alpha$; см. статью В. Болтянского — «Квант», 1978, № 5). В самом деле, если $f(n)=N$, то среди чисел $3^1, 3^2, \ldots, 3^N$ ровно $n\approx(1-\lg 9)N$ начинаются с 9; поэтому $f(n)\approx\dfrac{1}{1-\lg 9}n$. Результат задачи М501 позволяет найти точное значение $f(n)$ для любого n.

Э. Туркевич

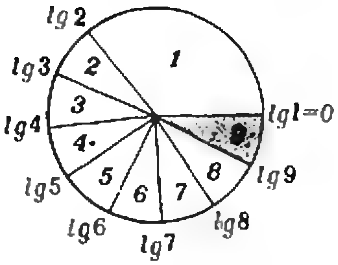


Рис. 5. Круг разбит на девять секторов: 1, 2, ..., 9, показывающих, какую долю (в пределе при $N\to\infty$) среди чисел $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ составляют те, которые начинаются цифрой 1, 2,...,9 соответственно.

◆

М502. *Даны три параллельных отрезка AA_1, BB_1, CC_1, не лежащих в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1 и CAB_1, а M_1 — точка пересечения плоскостей A_1B_1C, B_1C_1A и C_1A_1B. Докажите, что отрезок MM_1 параллелен трем первоначальным.*

Пусть A_0, B_0, C_0 — проекции данных отрезков на перпендикулярную им плоскость (рис. 6). Заметим, что линия пересечения плоскостей ABC_1 и CAB_1 проходит через точку A и точку пересечения прямых BC_1 и B_1C (рис. 7), а ее проекция проходит через точку A_0 и делит отрезок B_0C_0 в отношении $|BB_1|:|CC_1|$. Линия пересечения плоскостей BCA_1 и ABC_1 проходит через точку B и точку пересечения прямых AC_1 и A_1C (рис. 7), так что ее проекция проходит через точку B_0 и делит отрезок A_0C_0 в отношении $|AA_1|:|CC_1|$ (рис. 6). Остается заметить, что те же факты имеют место и для проекций линий пересечения пар плоскостей $(A_1B_1C,\ C_1A_1B)$ и $(B_1C_1A,\ A_1B_1C)$, так что точки M и M_1 пересечения троек плоскостей проектируются в одну и ту же точку M_0 плоскости $A_0B_0C_0$, перпендикулярной $[AA_1]$. Отсюда следует утверждение задачи.

А. Савин, З. Скопец

Другое решение этой задачи получается с использованием понятия косой симметрии. *Косой симметрией* на плоскости называется следующее преобразование: нужно

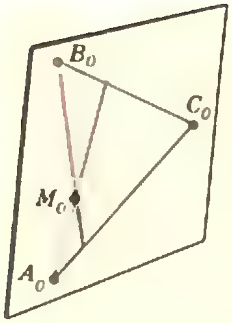


Рис. 6.

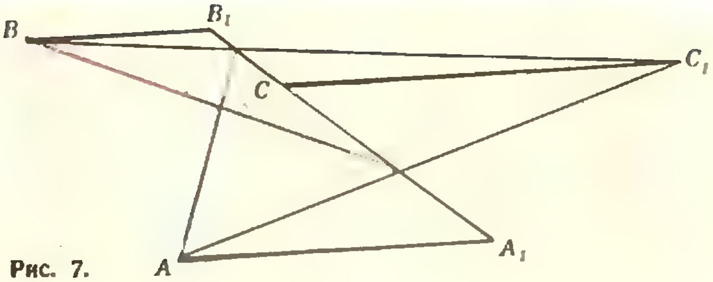


Рис. 7.

взять прямую — ось симметрии — и некоторое не параллельное ей направление. Затем через произвольную точку K провести прямую, параллельную выбранному направлению, и найти на ней такую точку K_1, что отрезок KK_1 делится осью пополам. Точка K_1 и называется *кососимметричной* точке K. Аналогично и в пространстве, но там вместо оси нужно взять плоскость симметрии (и не параллельное ей направление). Легко проверить, что при косой симметрии прямые переходят в прямые, плоскости — в плоскости.

Решение задачи. Проведем через середины наших параллельных отрезков плоскость симметрии. Рассмотрим косую симметрию относительно этой плоскости с направлением, параллельным нашим отрезкам. Тогда тройка плоскостей ABC_1, BCA_1, CAB_1 переходит во вторую тройку плоскостей: A_1B_1C, B_1C_1A и C_1A_1B. Следовательно, точка пересечения первой тройки плоскостей перейдет в точку пересечения второй тройки плоскостей; поэтому соединяющий их отрезок параллелен данным (если две точки кососимметричны, то соединяющий их отрезок имеет выбранное направление).

Л. Лиманов

◆

М503. *Набор из $2n+1$ чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ таков, что $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для всех $k=1, 2, \ldots, 2n-1$. Докажите неравенство*

$$\frac{a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}{n+1} \quad (*)$$

и выясните, для каких наборов оно превращается в равенство.

Заметим сначала, что если данный набор — арифметическая прогрессия, то все написанные в условии задачи неравенства превращаются в равенства. Ниже мы увидим, что из «выпуклых» наборов (то есть наборов, у которых $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для всех $k=1, 2, \ldots, 2n-1$) только для арифметической прогрессии неравенство (*) становится равенством.

Числа произвольного «выпуклого» набора $\{a_k\}$ представим в виде суммы чисел $a_k=b_k+c_k$ двух наборов $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$, один из которых — $\{b_k\}$— арифметическая прогрессия с крайними членами $b_0=a_0$ и $b_{2n}=a_{2n}$, а другой — $\{c_k\}$— «выпуклый» набор с нулевыми крайними членами: $c_0=c_{2n}=0$.

Поскольку для набора $\{b_k\}$ неравенство (*) превращается в равенство, достаточно доказать его для набора $\{c_k\}$. Но для «выпуклых» наборов с нулевыми крайними членами оно получается непосредственно из условия «выпуклости»: записав, что $c_{2i-1} \geqslant \frac{c_{2i-2}+c_{2i}}{2}$ для всех $i=1, \ldots, n$, и сложив эти неравенства, получим:

$$c_1+c_3+\ldots+c_{2n-1} \geqslant \frac{c_0}{2}+c_2+c_4+\ldots+$$

$$+c_{2n-2}+\frac{c_{2n}}{2}=c_0+c_2+\ldots+c_{2n-2}+c_{2n}$$

(мы учли, что $c_0=c_{2n}=0$), так что

$$\frac{c_1+c_3+\ldots+c_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{c_0+c_2+\ldots+c_{2n}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{c_0+c_2+\ldots+c_{2n}}{n+1}. \qquad (**)$$

Осталось лишь доказать, что для выпуклых наборов неравенство (*) может быть равенством только для арифметической прогрессии. Для этого достаточно показать, что если $c_k \geqslant (c_{k-1}+c_{k+1})/2$, то либо все c_k, $k=0, \ldots, 2n$, равны нулю, либо все c_k, $k=1, \ldots, 2n-1$, положительны (в последнем случае правое неравенство в (**) обязательно строгое).

Выберем наименьшее c_l; пусть оно стоит не с краю: $l\neq 0$, $l\neq 2n$. Тогда $c_l \leqslant c_{l-1}$ и $c_l \leqslant c_{l+1}$, откуда $c_l \leqslant \dfrac{c_{l-1}+c_{l+1}}{2}$. Но по условию $\{c_k\}$ — «выпуклый» набор, значит, $c_l = c_{l-1} = c_{l+1}$. Применив то же рассуждение к c_{l-1} (или к c_{l+1}), получим, что $c_{l-2}=c_{l-1}=c_l$ (или $c_l=c_{l+1}=c_{l+2}$) и т. д. — до тех пор, пока не дойдем до краев; получим $0=c_1=c_2=\ldots=c_{2n-1}=0$. Поэтому если среди чисел c_k есть отличные от нуля, то наименьшее обязательно стоит с краю (и равно нулю), так что для $k=1, \ldots, 2n-1$ имеем $c_k>0$.

Н. Васильев, И. Клумова

◆

Ф502. *В крышке закрытого ящика высоты $h=1$ м имеется круглое отверстие. Как изменится освещенность дна под отверстием, если в отверстие вставить линзу с оптической силой $D=1$ дптр? Ящик стоит под открытым небом, затянутым равномерной пеленой облаков.*

Световой поток, идущий в единичном телесном угле, под любым направлением один и тот же. Обозначим через σ световой поток, идущий в единичном телесном угле и попадающий на единичную площадку линзы или дна под отверстием.

В отсутствие линзы на дно попадают лучи, идущие в телесном угле $\Omega = S_{\text{отв}}/h^2$ (рис. 8). Следовательно, в этом случае освещенность дна под отверстием равна

$$E_1 = \sigma\Omega = \sigma S_{\text{отв}}/h^2$$

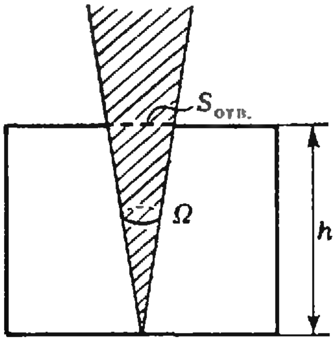


Рис. 8.

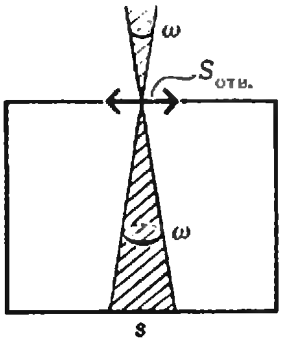


Рис. 9.

Линза собирает в своей фокальной плоскости на дне ящика на площадке площадью $s=h^2\omega$ все лучи, идущие в телесном угле ω (рис. 9). Такие лучи несут световой поток $\Phi=\sigma S_{\text{отв}}\omega$, так что освещенность изображения неба в этом случае равна

$$E_2 = \Phi/s = \sigma S_{\text{отв}}/h^2.$$

Мы видим, что $E_1=E_2$, то есть освещенность дна ящика под отверстием не меняется.

И. Слободецкий

◆

Ф504. *Колеса легковых автомобилей тщательно балансируют — добиваются того, чтобы центр масс колеса лежал точно на оси его вращения. Для чего необходима балансировка колес?*

На колесо со стороны дороги действует сила реакции $\vec{N}$. Если колесо сбалансировано, эта сила равна по абсолютной величине 1/4 веса автомобиля $M|\vec{g}|$*) (при езде по гладкой горизонтальной дороге). Если же колесо не сбалансировано, то его центр тяжести движется по окружности радиуса r с центростремительным ускорением $\omega^2 r$ (r — расстояние между центром колеса и центром тяжести, ω — угловая скорость вращения колеса). Поэтому в тот момент, когда центр тяжести находится в самой нижней точке, значение $|\vec{N}|$ больше значения $\frac{1}{4}M|\vec{g}|$ на величину $m\omega^2 r$ (m — масса колеса). Когда же центр тяжести находится в самой верхней точке, значение $|\vec{N}|$ меньше $\frac{1}{4}M|\vec{g}|$ на такую же величину. При проскальзывании колеса относительно дороги (проскальзывание всегда имеет место) сила трения между колесом и дорогой по этим причинам оказывается переменной. Поэтому в некоторых местах шина изнашивается быстрее, чем если бы колесо было сбалансировано. А это приводит к необходимости чаще менять покрышки.

---

*) То, какая часть веса автомобиля приходится на колесо, определяется положением центра тяжести автомобиля. Вообще говоря, она не равна 1/4

С. Семенчинский

◆

Ф512. *Цепь, показанная на рисунке 10, включена в сеть переменного тока частоты $\nu = 50$ Гц. С помощью коммутатора на вход осциллографа подается попеременно то напряжение между точками a и b, то напряжение между точками b и d. На экране осциллографа получаются изображения двух кривых. Рисунок 11 сделан с фотографии картины на экране осциллографа. Определить индуктивность L контура, если C = 32 мкФ, R = 65 Ом.*

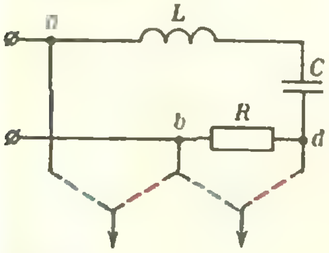


Рис. 10.

Как известно, в цепи переменного тока напряжение и ток не совпадают по фазе. Для определения разности фаз φ между током и напряжением воспользуемся рисунком 10. Поскольку на участке bd имеется только активное сопротивление, ток и напряжение на этом участке совпадают по фазе. Следовательно, нам достаточно найти сдвиг фаз между напряжениями на участках ab и bd.

Пусть, для определенности, ток в цепи (а значит, и напряжение между точками b и d) отстает от приложенного напряжения — на рисунке 11 красная кривая сдвинута вправо относительно синей кривой на длину отрезка BD. Измерив длины отрезков AD (этому отрезку соответствует сдвиг фаз 180°) и BD, найдем

$$\varphi = \frac{|BD|}{|AD|}\,180^\circ = \frac{1}{4}\,180^\circ = 45^\circ.$$

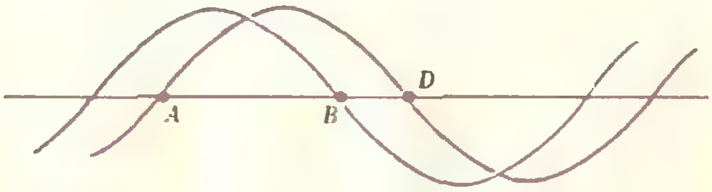


Рис. 11.

С другой стороны, разность фаз φ связана с параметрами электрической цепи. Построим векторную диаграмму токов и напряжений для данного последовательного контура (рис. 12). Отсюда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

и

$$L = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega C} + R\operatorname{tg}\varphi\right) = \frac{1}{2\pi\nu}\left(\frac{1}{2\pi\nu C} + R\operatorname{tg}\varphi\right) \approx 0{,}5\ \text{Г}.$$

В. Нижник

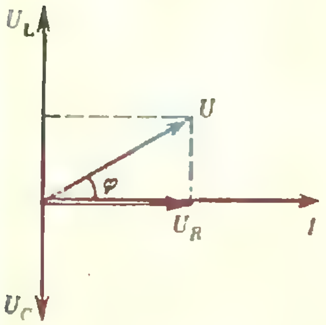


Рис. 12.

М. Чернявский

Задачи на геометрический смысл производной

В § 10 учебника «Алгебра и начала анализа 9» приводится уравнение касательной к графику дифференцируемой функции и *объясняется геометрический* смысл производной *). Задачи, разобранные в данной заметке, иллюстрируют возможность исследования геометрических фактов аналитическим методом.

Из курса физики нам известно, что отражателю прожектора обычно придают форму параболоида вращения. Это объясняется свойством параболы, рассматриваемым в следующей задаче:

Задача 1. *Доказать, что лучи света, исходящие из фокуса $F(0, {}^1/_4a)$ параболы $y=ax^2$, в любой ее точке отражаются параллельно ее оси симметрии **).*

Решение. Пусть $M(x_0; ax_0^2)$ — произвольная точка параболы (рис. 1). Из закона отражения света вытекает, что величины углов, образуемых с касательной MP падающим лучом FM и отраженным лучом MA, равны между собой. (На рисунке 1: $\hat{1}=\hat{2}$). Нам нужно доказать, что $MA\,\|\,Oy$, что равносильно равенству $\hat{2}=\hat{3}$ или, с учетом предыдущего, равенству $\hat{1}=\hat{3}$. Последнее же вытекает из равнобедренности треугольника PFM. Итак, достаточно доказать, что $|FM|=|FP|$.

$$|FM|=\sqrt{x_0^2+\left(ax_0^2-\frac{1}{4a}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2x_0^4+\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{16a^2}}=\left|ax_0^2+\frac{1}{4a}\right|.$$

Для вычисления $|FP|$ запишем уравнение касательной MP. Так как $y'=2ax$, это уравнение имеет вид $y-ax_0^2=2ax_0(x-x_0)$. Полагая в нем $x=0$, найдем ординату точки P: $y=-ax_0^2$. Следовательно, $|FP|=$

$$=\left|\frac{1}{4a}-(-ax_0^2)\right|=\left|ax_0^2+\frac{1}{4a}\right|=$$

$=|FM|$.

* * *

Легко решаются задачи, в которых требуется найти угловой коэффициент касательной или уравнение касательной к графику заданной функции, если известна точка касания. Впрочем, в прикладных задачах эту функцию иногда бывает необходимо найти из некоторых дополнительных условий. С таким случаем мы встретимся в следующей задаче:

Задача 2. *Профиль автомобильного моста имеет форму параболы (рис. 2) с осью, проходящей вертикально через середину моста с высотой центральной части 10 м и длиной основания 120 м. Какой должен быть наклон насыпи на обоих концах моста?*

Решение. Заметим, что наклон насыпи — это наклон отрезков каса-

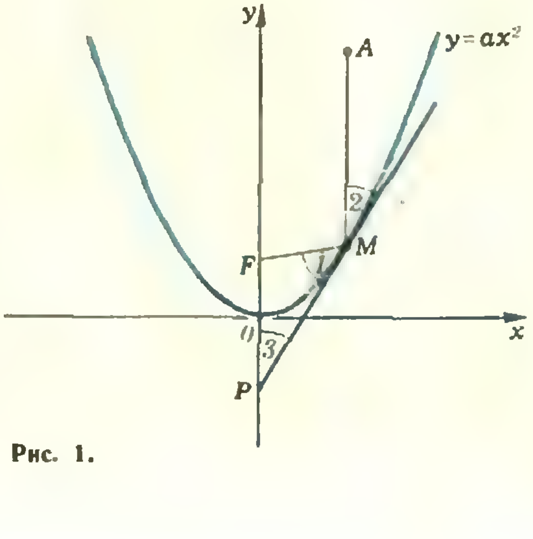


Рис. 1.

---

*) Более подробно об этом см. «Квант», 1977, № 2, с. 35.

**) См. также «Квант», № 4, с. 9.

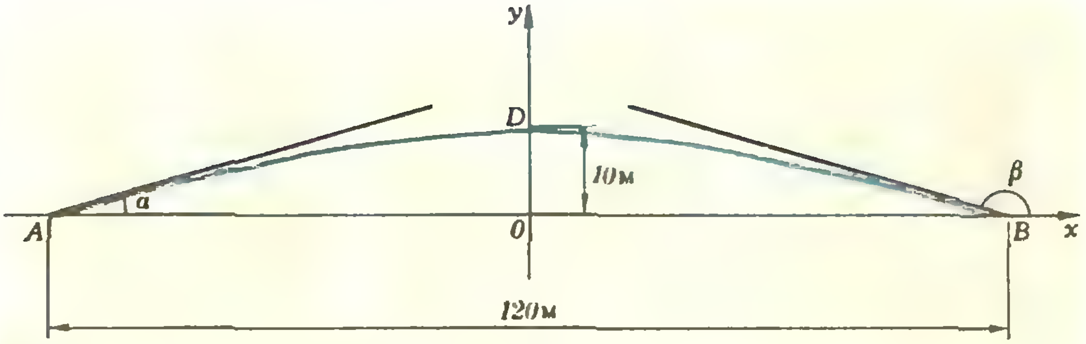


Рис. 2.

тельных к параболе в точках A и B. Выберем систему координат так, как указано на рисунке 2. Тогда парабола в этой системе задается уравнением вида $y = ax^2 + 10$. Так как точка $A(60; 0)$ лежит на параболе, $a = -\frac{1}{360}$. Таким образом, уравнение параболы $y = -\frac{x^2}{360} + 10$. Отсюда $y' = -\frac{x}{180}$.

В точке A: $\operatorname{tg}\alpha = y'(-60) = \frac{1}{3}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

В точке B: $\operatorname{tg}\beta = y'(60) = -\frac{1}{3}$, $\beta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

* * *

Иногда нужно проверить, касается ли данная прямая графика заданной функции. Для этого достаточно проверить следующие два условия, которые являются необходимыми, а в совокупности и достаточными для касания:

1. Прямая и график функции имеют общую точку.
2. В общей точке значение производной данной функции равно угловому коэффициенту данной прямой.

Задача 3. *Касается ли прямая* $x + 4y - 4 = 0$ *гиперболы* $y = \frac{1}{x}$?

Решение. Решив систему

$$\begin{cases} x + 4y - 4 = 0, \\ xy = 1, \end{cases}$$

находим общую точку прямой и гиперболы $(2;\ 1/2)$. Производная функции $y = \frac{1}{x}$ равна $y' = -\frac{1}{x^2}$, а ее значение в точке пересечения — $y'(2) = -\frac{1}{4}$. Но угловой коэффициент прямой такой же. Значит, данная прямая касается гиперболы в точке $(2;\ 1/2)$.

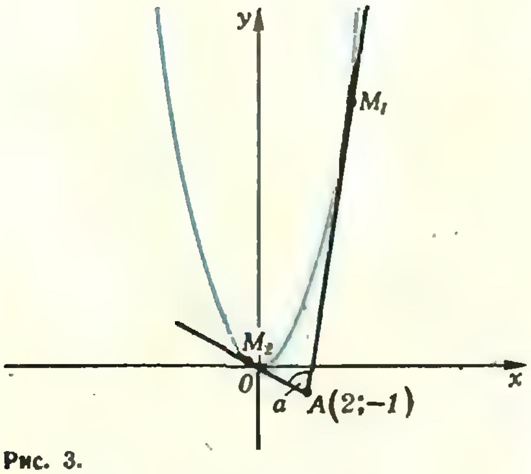


Рис. 3.

Задача 4. *Найти величину угла, под которым парабола* $y = x^2$ *видна из точки* $A\ (2; -1)$.

Решение. Очевидно, этот угол образован двумя касательными к параболе, проходящими через точку A (рис. 3). Обозначим искомый угол через α, а углы наклона касательных к оси Ox через α_1 и α_2. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \quad (1)$$

где k_1 и k_2 обозначают угловые коэффициенты касательных*). Для их вычисления нужно знать абсциссы точек касания.

Обозначим точку касания через $M(x_0; x_0^2)$. Для вычисления x_0 запишем уравнение касательной

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$$

и воспользуемся тем, что точка A $(2; -1)$ удовлетворяет этому уравнению, то есть

$$-1 - x_0^2 = 2x_0(2 - x_0),$$

откуда

$$x_0 = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Таким образом, $k_1 = y'(2+\sqrt{5}) = 4 + 2\sqrt{5}$; $k_2 = y'(2-\sqrt{5}) = 4 - 2\sqrt{5}$. Согласно (1), $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4-2\sqrt{5}-(4+2\sqrt{5})}{1+(4-2\sqrt{5})(4+2\sqrt{5})} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$,

то есть

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\sqrt{5}.$$

Задача 5. *Вертикальный разрез теплицы имеет форму пятиугольника $ABCDE$ (рис. 4), в котором $|AE| = 8$ м, $|AB| = |DE| = 1$ м. Из точки P, расположенной на высоте 2 м в плоскости POE горизонтально вытекает струя воды, которая при максимальном напоре достигает точки E (или A). Какую высоту h нужно придать центральной части теплицы, если требуется, чтобы струя воды (она имеет форму параболы с вершиной в точке P) не задевала крыши теплицы?*

Решение. Выберем систему координат так, как указано на рисунке 4, и найдем уравнение параболы. Оно должно иметь вид $y = 2 + ax^2$. Так как точка $E(4; 0)$ лежит на параболе, $a = -\frac{1}{8}$. Таким образом, парабола определяется уравнением $y = 2 - \frac{x^2}{8}$. Поскольку точка $D(4; 1)$ фиксирована, то нам надо найти такое положение точки $C(0; y_C)$, при котором прямая (CD) касается параболы $y = 2 - \frac{x^2}{8}$, а затем взять $h > y_C$.

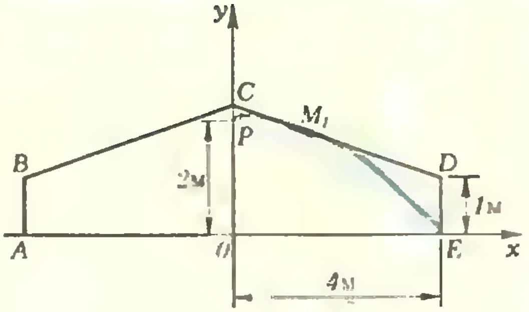


Рис. 4.

Обозначим точку касания через $M\left(x_0; 2 - \frac{x_0^2}{8}\right)$ и запишем уравнение касательной

$$y - \left(2 - \frac{x_0^2}{8}\right) = -\frac{x_0}{4}(x - x_0).$$

Подставляя координаты точки $D(4; 1)$ в это уравнение, получим

$$x_0^2 - 8x_0 + 8 = 0,$$

т. е. $x_0 = 4 \pm 2\sqrt{2}$. Условию задачи удовлетворяет лишь корень $x_0 = 4 - 2\sqrt{2}$, так как второй корень соответствует точке касания, лежащей вне рассматриваемого участка параболы. Подставив полученное значение x_0 в уравнение касательной и положив в нем $x = 0$, получим ординату точки C:

$$y_C = 2 - \frac{x_0^2}{8} + \frac{x_0^2}{4} = 2 + \frac{x_0^2}{8} =$$

$$= 2 + \frac{(4-2\sqrt{2})^2}{8} = 5 - 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, достаточно взять $h > 5 - 2\sqrt{2} \approx 2.2$ (м).

* * *

В некоторых задачах мы встречаемся с касающимися между собой кривыми. Естественно считать, что *кривые касаются друг друга* в некоторой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. Для того чтобы графики функций f и φ касались в

---

*) Формула (1), выражающая тангенс угла между прямыми через угловые коэффициенты этих прямых, заслуживает осознания, отдельного от данной задачи, — она часто бывает полезна.

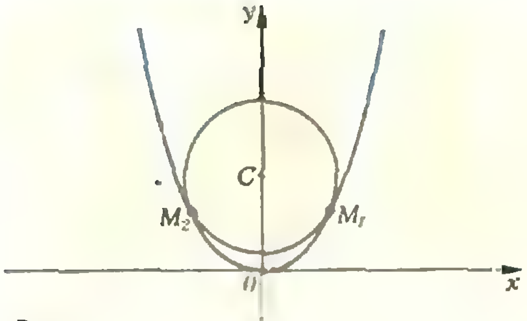


Рис. 5.

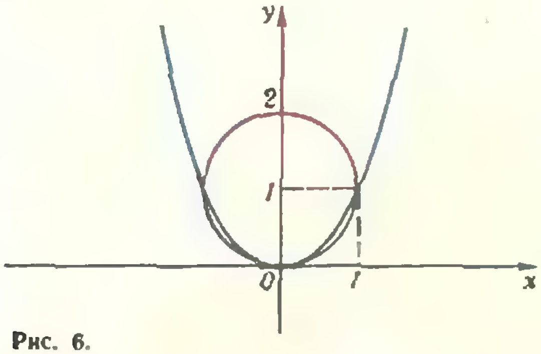


Рис. 6.

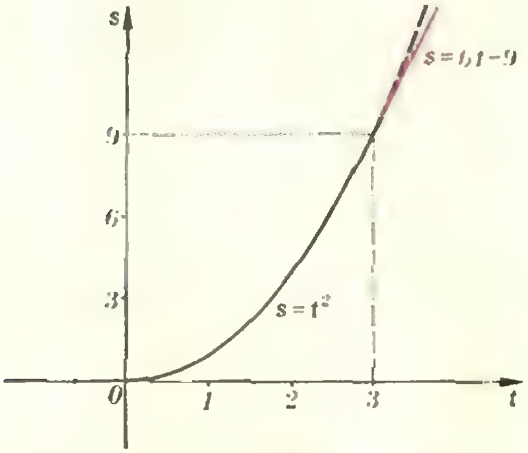


Рис. 7.

точке с абсциссой x_0, необходимо и достаточно (ср. с условиями, сформулированными перед задачей 3), чтобы выполнялись следующие два условия:

1) $f(x_0)=\varphi(x_0)$;
2) $f'(x_0)=\varphi'(x_0)$.

Задача 6. *Окружность радиуса 1 с центром на положительной полуоси Oy касается параболы $y=x^2$. Найти точку касания M и положение центра окружности C.*

Решение. Обозначим центр окружности через $C(0;\,a)$. Тогда уравнение окружности будет иметь вид $x^2+(y-a)^2=1$.

Нас интересует касание параболы с нижней полуокружностью (рис. 5, 6) уравнение которой имеет вид $y=a-\sqrt{1-x^2}$. Обозначим абсциссу точки касания через x_0. Используя условия 1), 2), получаем

$$\begin{cases} a-\sqrt{1-x_0^2}=x_0^2, \\ \dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=2x_0, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} \sqrt{1-x_0^2}=a-x_0^2, \\ x_0\left(1-2\sqrt{1-x_0^2}\right)=0. \end{cases}$$

Одно решение, очевидно, $x_0=0$, $a=1$ (рис. 6). Второе уравнение имеет еще два корня $x_0=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Им соответствует одно и то же значение $a=\dfrac{5}{4}$.

Таким образом, мы получаем более интересный случай: окружность с центром в точке $C\left(0;\,\dfrac{5}{4}\right)$, касающуюся параболы в точках $M_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,\dfrac{3}{4}\right)$ и $M_2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\,\dfrac{3}{4}\right)$ (рис. 5).

* * *

Задача 7. *Точка движется прямолинейно под действием постоянной силы с ускорением 2 м/с² и с нулевой начальной скоростью. Через 3 секунды после начала движения сила прекращает действовать, и точка начинает двигаться равномерно с набранной скоростью. Найдите закон движения точки и постройте график движения.*

Решение. Выберем систему координат так, чтобы в начальной момент точка находилась в начале координат: $s=0$ при $t=0$. Тогда при $0\leqslant t\leqslant 3$ имеем $s=t^2$. При $t\geqslant 3$ график движения — часть касательной к параболе $s=t^2$, проведенной в точке (3, 9) в сторону возрастания t (рис. 7). Поэтому его уравнение имеет вид

$$s-9=6(t-3)$$

или

$$s=6t-9.$$

Таким образом, закон движения определяется функцией

$$s=\begin{cases} t^2, \text{ если } 0\leqslant t\leqslant 3; \\ 6t-9, \text{ если } t\geqslant 3. \end{cases}$$

Упражнения

1. Число $x=1$ не является корнем уравнения $x^2-x=2x-\frac{x^2}{2}$, но является корнем уравнения, полученного приравниванием производных его левой и правой части. Объясните геометрический смысл указанного факта.

2. Постройте графики каких-нибудь функций f и φ в интервале $]a; b[$ так, чтобы при всех x из этого интервала выполнялись условия:

а) $f(x)>\varphi(x)$ и $f'(x)=\varphi'(x)$;

б) $f(x)>\varphi(x)$ и $f'(x)<\varphi'(x)$.

3. При каком значении a кривые $y=x^3-x+1$ и $y=3x^2-4x+a$ касаются друг друга?

4. Парабола, конгруэнтная неподвижной параболе $y=x^2$, движется так, что ось Ox все время остается ее осью симметрии. В каких точках подвижная парабола коснется неподвижной и где будет при этом ее вершина?

5. Парабола (с вершиной в точке A (—2, 0)), ось симметрии которой совпадает с осью Ox, касается окружности $x^2+y^2=1$. Найти уравнение параболы.

6. В плоскости xOy найти уравнение кривой, из любой точки которой парабола $y=x^2$ видна под углом в 45°.

7. Ракета движется прямолинейно по закону $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$. Через время t_1 после начала движения от нее отделяется некоторый предмет, который продолжает двигаться по инерции. В какой момент времени и какую постоянную скорость надо придать указанному предмету для того, чтобы, двигаясь дальше равномерно, он догнал ракету в момент t_2, имея при этом одинаковую с ней скорость? Приведите геометрическую интерпретацию задачи.

8. Космическая ракета запускается по прямой из некоторой точки пространства, в которой можно пренебречь силами тяготения других тел. Закон движения ракеты $s=\frac{at^2}{2}$, $t\geqslant 0$. Через сколько времени, считая от начала движения, надо отключить двигатели, чтобы ракета, двигаясь дальше по инерции с набранной скоростью, оказалась в момент t_1 на расстоянии s_1 от первоначальной точки? Какова геометрическая модель данной задачи?

Числовые ребусы наших читателей

1. Семь семерок. Найдите множимое и множитель в следующем примере на умножение:

```
×      ..7..
       .....
     ----------
      .7....
      ....7
    77....
    .....
  ....7.
  ----------
  ........7.
```

2. Дважды два — четыре. Чему равно ДВА?

```
   ×ДВА
    ДВА
  ------
    ••••
   •••В
  Е•••
 -------
  ЧЕТЫРЕ
```

(Здесь одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.)

Л. Мочалов

3. Сколько в сажени аршин?

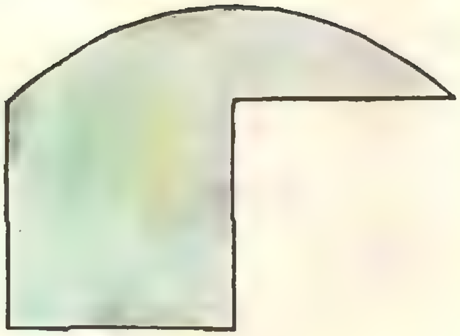
```
сажень |   ?
сж     |--------
------ |  аршин
 жж
 жс
 ----
   се
    б
  ----
    си
    си
   ----
     сь
     сь
    ----
```

Здесь зашифрован пример на деление: цифры заменены буквами. Про число, стоящее в делителе, ничего не известно.

Найдите делитель, и вы узнаете, во сколько раз сажень больше аршина.

Э. Рекстин

Квант для младших школьников



Задачи

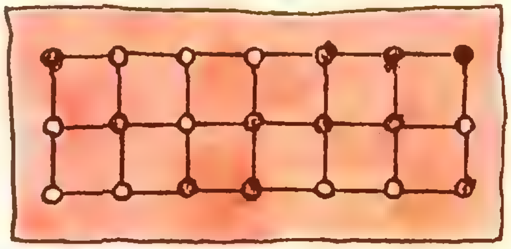
1. Несколько знатоков взялись за расшифровку числового ребуса ТАМТАМ + МРАК = КОШМАР, причем каждый из них получил верный ответ, отличный от ответов других. Знатоки исходили из того, что каждая буква означает некоторую цифру, причем разные цифры обозначены разными буквами. Сколько могло быть знатоков?

2. Докажите, что сумма любых двенадцати последовательных чисел натурального ряда не делится на 4.

3. Фигуру, изображенную на рисунке, разрежьте на две конгруэнтные части.

4. На столе стоят шесть стаканов. За один раз можно перевернуть любые пять из них. Можно ли, повторяя несколько раз эту операцию, поставить все шесть стаканов вверх дном? Попробуйте обобщить эту задачу на случай $2n$ стаканов.

5. В вершинах квадратной сетки, имеющей форму прямоугольника (см. рисунок), помещена 21 точка. Можно ли покрасить эти точки в два цвета так, чтобы ни одна четверка одноцветных точек не образовывала прямоугольник?



ТАМТАМ + МРАК = КОШМАР

В. МАЙЕР

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И... ТЕМПЕРАТУРА

Что такое проводники электричества? Какие проводники вы знаете? Что такое сопротивление проводника? Почему проводник обладает сопротивлением? Как сопротивление зависит от размеров проводника и от материала, из которого он изготовлен?

Наверное, вы сможете ответить на эти вопросы сразу. А теперь предлагаем вам еще один вопрос: *что будет происходить с сопротивлением при изменении внешних условий — температуры и давления?* Не торопитесь с ответом. Советуем вам прежде проделать несколько опытов.

1. Возьмите перегоревшую электрическую лампу (мощностью 100 Вт, на напряжение 220 В), батарейку (типа 3336Л, на 4,5 В), лампочку для карманного фонаря (на напряжение 3,5 В и ток 0,26 А), соединительные провода и спички. Ваша задача — исследовать зависимость сопротивления металлического проводника (спирали перегоревшей электролампы) от температуры.

Отрежьте кусок спирали длиной около 1 см; в концы этого куска вставьте медные проволочки так, чтобы между ними и спиралью был хороший контакт. Соберите цепь, состоящую из последовательно соединенных спирали, батарейки и лампочки.

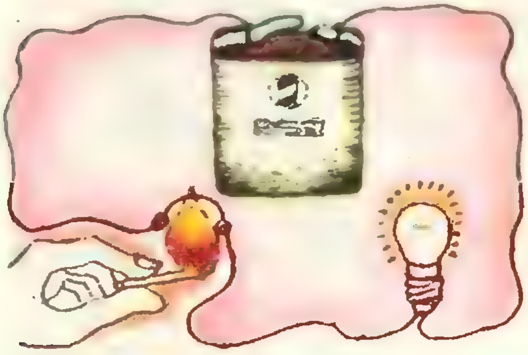


Рис. 1.

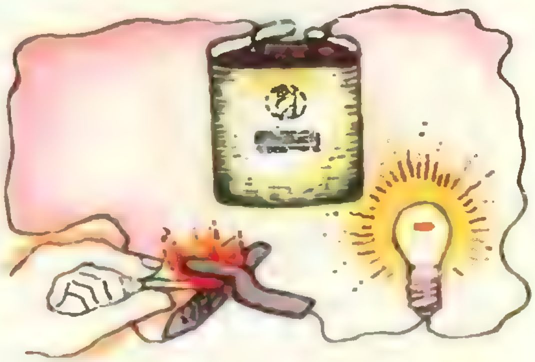


Рис. 2.

Теперь зажгите спичку и раскалите спираль докрасна — лампочка почти совсем погаснет (рис 1).

Значит, *при повышении температуры сопротивление металлического проводника увеличивается.*

2. Замените металлический проводник электролитом (раствором соли в воде) и проверьте, как его сопротивление зависит от температуры.

Вырежьте из жести две небольшие полоски и одну из них изогните так, чтобы между полосками был воздушный промежуток толщиной 1—3 мм. В этот промежуток введите несколько капель раствора соли. Концентрацию раствора подберите такой, чтобы при замыкании цепи лампочка, включенная последовательно с батарейкой и электролитом, горела едва заметно.

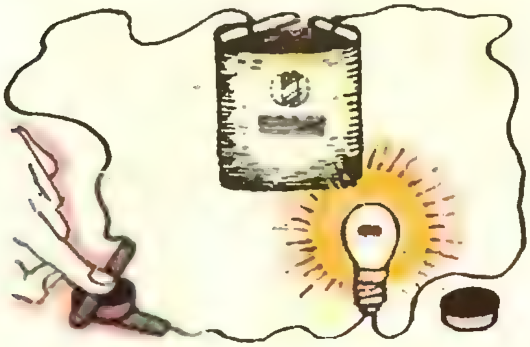


Рис. 3.

Нагрейте электролит (с помощью горящей спички), и вы увидите, что лампочка станет гореть ярче (рис. 2).

Следовательно, *при нагревании сопротивление электролита уменьшается.*

3. Воспользуйтесь схемой предыдущего опыта, только между полосками из жести положите таблетку карболена (активированного угля, он продается во всех аптеках) — лампочка не горит.

Нажмите пальцем на верхнюю полоску так, чтобы таблетка угля оказалась сжатой, — лампочка загорится (рис. 3).

Таким образом, *при увеличении давления сопротивление угля уменьшается.*

...и фокус не удался

Этот разговор произошел в поезде.

Когда обычные развлечения дальней поездки успели всем наскучить, пассажиру **А.** пришла в голову прекрасная идея.

А. Хотите, покажу фокус?

В. Нужны карты?

А. О, нет! Только бумага и карандаш.

Итак, напишите какое-нибудь четырехзначное число.

В. Готово!

А. Как угодно переставьте его цифры. Переставили? Теперь от бóльшего числа отнимите меньшее. В получившейся разности зачеркните какую-нибудь одну цифру.

В. Зачеркнул. Что дальше?

А. Сложите остальные цифры и назовите сумму.

В. Одну минуточку! Так... у меня получилось 16.

А. Вы зачеркнули двойку.

В., со словами: «Да вы настоящий телепат!», показал свою бумажку. На ней было написано:

$4975;\ 7594;\ 7594-4975=2619;\ 6+1+9=16.$

В. В чем секрет Вашего «фокуса»?

А. Это — простая арифметика. После того, как Вы назвали сумму 16, я взял первое число, кратное девяти и бóльшее этой суммы, то есть 18. Разность между подобранным числом и суммой есть зачеркнутая цифра. Если бы Ваша сумма оказалась *равной 19, то я назвал* бы восьмерку ($8=27-19$). Если бы у Вас получилось 8, то мой ответ был бы единица ($1=9-8$).

«Все понял!» — обрадовался **В.** и побежал показывать фокус в соседнем купе.

. . . .

В. Сколько вы получили в сумме?

С. Ровно 9.

В. Вы зачеркнули цифру 9.

Молча, **С.** показал свою запись. Раздосадованный **В.** прочел: $4353;\ 3345;\ 4353-3345=1008;\ 1+0+8=9.$

Объясните, почему у **В.** фокус не получился.

Н. Михайленко

С. Овчинников, И. Шарыгин

Решение неравенств с модулем

В этой заметке излагается прием, который, в некотором *смысле*, «автоматически» сводит решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, к решению *систем* и *совокупностей* неравенств, где переменные уже свободны от знака модуля.

Пусть даны несколько неравенств — скажем, для простоты, два неравенства с одной (и той же) переменной:

$$f(x) > 0, \qquad (1)$$

$$g(x) > 0. \qquad (2)$$

Обозначим множество решений неравенства (1) через A, неравенства (2) — через B.

Если требуется найти множество чисел, которые одновременно удовлетворяют неравенству (1) **и** неравенству (2), то есть найти пересечение $C = A \cap B$ множеств A и B, то неравенства (1), (2) соединяют фигурной скобкой

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

и называют *системой* неравенств («Алгебра и начала анализа 10», п. 123).

Если же требуется найти множество чисел, удовлетворяющих неравенству (1) **или** неравенству (2), то есть объединение $D = A \cup B$ множеств A и B, то неравенства (1), (2) соединяют квадратной скобкой

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array} \right.$$

и называют *совокупностью* неравенств *).

Повторим еще раз: когда ищут пересечение — говорят «система»; когда ищут объединение — говорят «совокупность». В таблице

Система	Совокупность
пересечение	объединение
и	или

сведены три пары соответствующих друг другу понятий **).

При решении задач, как мы сейчас увидим, часто приходится рассматривать комбинации систем и совокупностей; чтобы избегать в таких случаях ошибок, следует аккуратно пользоваться введенными выше обозначениями.

* * *

Обычный прием решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, — «раскрытие» модуля — состоит в следующем. Исходя из определения модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

множество допустимых значений переменной разбивают на непересекающиеся подмножества, на каждом из которых все функции, содержащиеся под знаком модуля, сохраняют знак. После этого решение исходной задачи сводится к решению совокупности систем неравенств.

Пусть, например, требуется решить неравенство

$$|x-1| + |x-2| > 3+x$$

Разобьем числовую ось на непересекающиеся промежутки $]-\infty; 1[$, $[1; 2[$ и $[2; +\infty[$. На каждом из этих промежутков выражения $x-1$ и $x-2$ сохраняют знак. «Раскрывая» модули, приходим к следующей совокупности систем неравенств:

---

*) Абсолютно аналогично определяются термины «система уравнений» и «совокупность уравнений» («Алгебра и начала анализа 10», п. 122).

**) Таблицу можно было бы продолжить парой терминов «конъюнкция — дизъюнкция»; об этих терминах см., например, «Квант», 1971, № 4, с. 15, или 1947, № 12, с. 14, или 1975, № 1, с. 29.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<1, \\ -(x-1)-(x-2)>3+x, \end{cases}\\ \begin{cases} 1\leqslant x<2, \\ (x-1)-(x-2)>3+x, \end{cases}\\ \begin{cases} x\geqslant 2, \\ (x-1)+(x-2)>3+x. \end{cases}\end{array}\right.$$

Множеством решений верхней системы является пересечение $]-\infty; 1[\bigcap]-\infty; 0[$, то есть промежуток $]-\infty; 0[$; средняя система решений не имеет; наконец, множество решений нижней системы есть пересечение $[2; +\infty[\bigcap];6 +\infty[$, то есть промежуток $]6; \infty[$. Объединяя (совокупность!) полученные множества, получим ответ: $]-\infty;0[\bigcup]6; +\infty[$.

При таком способе решения часто приходится рассматривать много случаев, а порой и подслучаев. Кроме того, иногда раскрытие модуля сопряжено с техническими трудностями (см. ниже пример 4).

* * *

В основе обещанного выше приема лежит простая теорема:

$$1)\ |f(x)|\leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\leqslant g(x), \\ f(x)\geqslant -g(x); \end{cases}$$

$$2)\ |f(x)|\geqslant g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\geqslant g(x), \\ f(x)\leqslant -g(x). \end{array}\right.$$

Она легко доказывается «раскрытием» модуля. Пусть, например, x_0 является решением неравенства $|f(x)|\leqslant g(x)$, то есть

$$|f(x_0)|\leqslant g(x_0). \qquad (3)$$

Тогда $g(x_0)\geqslant 0$. Если $f(x_0)\geqslant 0$, то $|f(x_0)|=f(x_0)$ и неравенство (3) принимает вид

$$f(x_0)\leqslant g(x_0). \qquad (4)$$

Поскольку $f(x_0)\geqslant 0$ и $g(x_0)\geqslant 0$,

$$f(x_0)\geqslant -g(x_0). \qquad (5)$$

Неравенства (4), (5) означают, что в рассматриваемом случае x_0 является решением системы

$$\begin{cases} f(x)\leqslant g(x), \\ f(x)\geqslant -g(x). \end{cases}$$

Если же $f(x_0)<0$, то $|f(x_0)|=-f(x_0)$ и неравенство (3) принимает вид $-f(x_0)\leqslant g(x_0)$, что равносильно неравенству (5). Неравенство (4) вытекает в этом случае из того, что $f(x_0)<0$, а $g(x_0)\geqslant 0$.

Закончите доказательство теоремы самостоятельно.

Теорема, конечно, остается справедливой при замене повсюду знака нестрогого неравенства $\leqslant$ на знак строгого неравенства $<$.

* * *

Пример 1. (Геогр. ф-т МГУ, 1977). *Решить неравенство*

$$2\,|x+1\,|>x+4.$$

Решение.

$$2\,|x+1\,|>x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2>x+4, \\ 2x+2<-x-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<-2. \end{array}\right.$$

Пример 2 (Геол. ф-т МГУ, 1977). *Решить неравенство*

$$|x-2\,|\leqslant 2x^2-9x+9.$$

Решение.

$$|x-2|\leqslant 2x^2-9x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\leqslant 2x^2-9x+9, \\ x-2\geqslant -2x^2+9x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-10x+11\geqslant 0, \\ 2x^2-8x+7\geqslant 0. \end{cases}$$

Решения неравенств, входящих в полученную систему, изображены разной штриховкой на рисунке 1. Беря их пересечение, получаем ответ:

$$\left]-\infty; \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right]\bigcup\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right[.$$

Вернемся к неравенству, которое в начале статьи было решено «раскрытием» модуля.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$|x-1\,|+|x-2\,|>3+x.$$

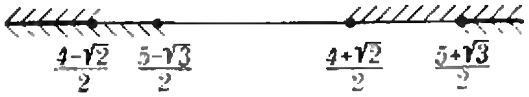


Рис. 1.

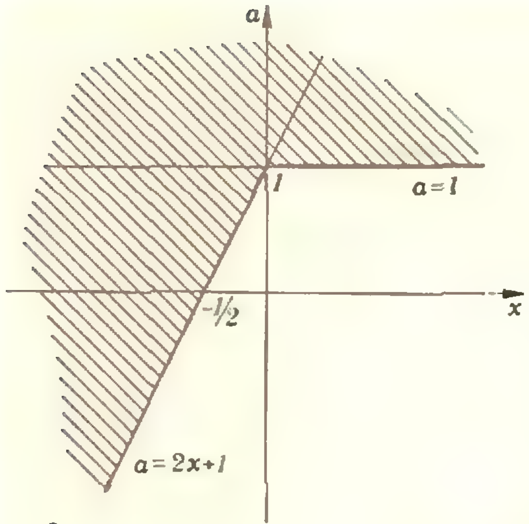


Рис. 2.

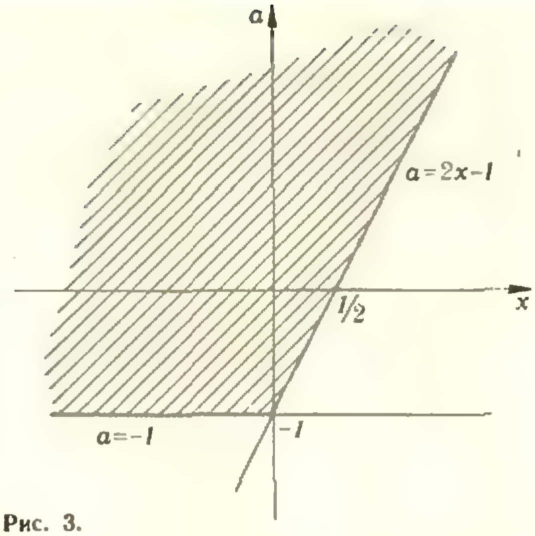


Рис. 3.

Решение. Дважды применяя теорему, имеем

$$|x-1|+|x-2|>3+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-1|>3+x-|x-2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1>3+x-|x-2|, \\ x-1<-3-x+|x-2| \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-2|>4, \\ |x-2|>2x+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-2>4, \\ x-2<-4, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-2>2x+2, \\ x-2<-2x+2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>4, \\ x-2<-4, \\ x-2>2x+2, \\ x-2<-2x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<-2, \\ x<-\frac{4}{3}, \\ x<0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>6, \\ x<0. \end{array}\right.$$

Ответ: $]-\infty;0[\ \cup \ ]6;+8[$.

Решения всех предыдущих задач несложно получить и с помощью «раскрытия» модуля. Следующий пример решить этим приемом довольно трудно, тогда как доказанная теорема позволяет решить его весьма просто.

Пример 4. *Решить неравенство*

$$||3^x+4x-9|-8|\leqslant 3^x-4x-1.$$

Решение. Опять дважды применяем теорему:

$$||3^x+4x-9|-8|\leqslant 3^x-4x-1 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |3^x+4x-9|\leqslant 3^x-4x+7, \\ |3^x+4x-9|\geqslant -3^x+4x+9 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3^x+4x-9\leqslant 3^x-4x+7, \\ 3^x+4x-9\geqslant -3^x+4x-7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3^x+4x-9\geqslant -3^x+4x+9. \\ 3^x+4x-9\leqslant 3^x-4x-9 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 2, \\ 3^x\geqslant 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3^x\geqslant 9, \\ x\leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\leqslant 2, \\ x\geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2. \\ x\leqslant 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Таким образом, искомое множество равно $[0; 2]\cap(]-\infty; 0]\cup[2;+\infty[)$.

Ответ: $[0, 2]$.

Мы закончим эту заметку неравенством с параметром.

Пример 5. *Решить неравенство*

$$|1-|x||<a-x.$$

Решение.

$$1-|x||<a-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-|x|<a-x, \\ 1-|x|>-a+x \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

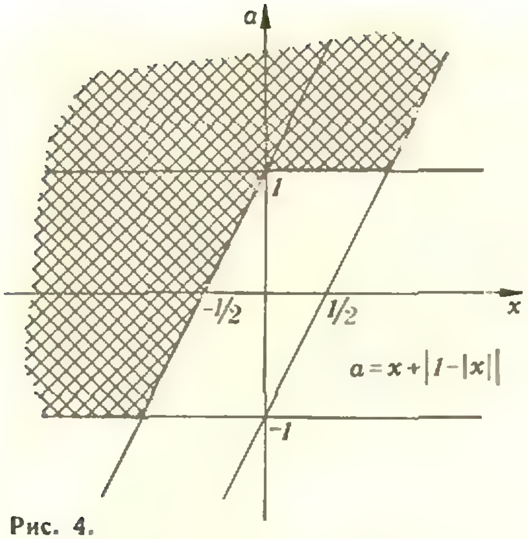


Рис. 4.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x|>1-a+x, \\ |x|<1+a-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x>1-a+x, \\ x<-1+a-x, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x<1+a-x, \\ x>-1-a+x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a>1, \\ x<\dfrac{a-1}{2}, \end{array}\right. \\ \begin{cases} x<\dfrac{a+1}{2}, \\ a>-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

В принципе полученная комбинация неравенств позволяет выписать ответ. Мы, однако, для окончательного решения воспользуемся приемом, который вообще часто оказывается полезным при решении задач с параметрами *).

Рассмотрим координатную плоскость, по одной оси которой будем откладывать значения x, а по другой — значения a. На рисунке 2 изображено множество решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} a>1, \\ x<\dfrac{a-1}{2}, \end{array}\right.$ а на рисунке 3 — множество решений системы $\begin{cases} x<\dfrac{a+1}{2}, \\ a>-1. \end{cases}$

На рисунке 4 заштриховано пересечение двух этих множеств, то есть множество решений системы, равносильной исходному неравенству. Из этого рисунка уже совсем легко выписать ответ: для $a\in\,]-\infty;\ -1]$ решений нет, для $a\in\,]-1;\ +1]$

имеем $x\in\left]-\infty;\dfrac{a-1}{2}\right[$,

для $a\in\,]1;\ +\infty[$

имеем $x\in\left]-\infty;\dfrac{a+1}{2}\right[$.

* *
*

Внимательный читатель может заметить следующее: если уж авторы прибегают к плоскости Oxa, то не проще ли было с самого начала изобразить на этой плоскости график функции

$$a=x+|1-|x||$$

и, рассматривая область над этим графиком, выписать ответ. Такой читатель, безусловно, прав. (Красная линия на рисунке 4 и есть график функции $a=x+|1-|x||$.)

Метод, использующий координатную плоскость, одна из осей которой — ось значений параметра, является очень сильным, и с его помощью решаются многие трудные задачи.

Упражнения

Решить следующие неравенства (задачи 1—4):

1. (Биофак МГУ, 1968) $|3x+2|\leqslant x^2+x$.

2. (Физфак МГУ, 1974) $3|x-1|>(x-1)^2+1$.

3. (Геогр. ф-т МГУ, 1977)

а) $3|x-1|\leqslant x+3$;

б) $4|x+2|<2x+10$;

в) $3|x+1|\geqslant x+5$.

4. (Геол. ф-т МГУ, 1977)

а) $3x^2-|x-3|>9x-2$;

б) $x^2+4\geqslant|3x-2|-7x$;

в) $x^2-|5x-3|-x<2$.

5. (Отд. полит. экон. эконом. ф-та МГУ, 1977)

а) Определить, при каких a неравенство $3-|x-a|>x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

б) Определить, при каких a неравенство $2>|x+a|+x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

---

*) См. «Квант», 1970, № 9, с. 19.

Ю. Зайчиков

Сила Лоренца и ее работа

Как известно, на любую заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца. Это происходит в машинах, вырабатывающих электрический ток, и электромоторах, в ускорителях заряженных частиц и телевизионных электронно-лучевых трубках, при движении различных частиц в магнитном поле Земли и т. д.

Вспомним основные свойства силы Лоренца. Ее модуль

$$|\vec{F}_л| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\alpha,$$

где q — заряд частицы, $\vec{v}$ — ее скорость, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля и α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Эта сила всегда перпендикулярна скорости частицы и магнитному полю. Направление силы удобно находить по правилу левой руки: если вектор $\vec{B}$ входит в ладонь, а четыре вытянутых пальца направлены по скорости $\vec{v}$, то отогнутый большой палец показывает направление силы Лоренца $\vec{F}_л$, действующей на положительный заряд (рис. 1, *а*), в случае отрицательного заряда направление силы — противоположное (рис. 1, *б*).

С помощью силы Лоренца можно довольно просто объяснить многие электромагнитные явления.

Рассмотрим несколько примеров.

1. В магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ влетает заряд $+q$; его скорость $\vec{v}$ перпендикулярна магнитному полю (рис. 2). Каким будет дальнейшее движение заряда?

Сила Лоренца, действующая на заряд, в любой момент перпендикулярна его скорости; следовательно, она не в состоянии изменить модуль скорости, но может изменить ее направление. В результате заряд, получив центростремительное ускорение $\vec{a}_ц$, будет двигаться по окружности. Нетрудно найти радиус R этой окружности: по второму закону Ньютона

$$|\vec{F}_л| = m|\vec{a}_ц|, \text{ или } q|\vec{v}||\vec{B}| = m\frac{|\vec{v}|^2}{R},$$

откуда

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{q|\vec{B}|}$$

(m — масса заряженной частицы).

Заметим, что в этом случае сила Лоренца, перпендикулярная скоро-

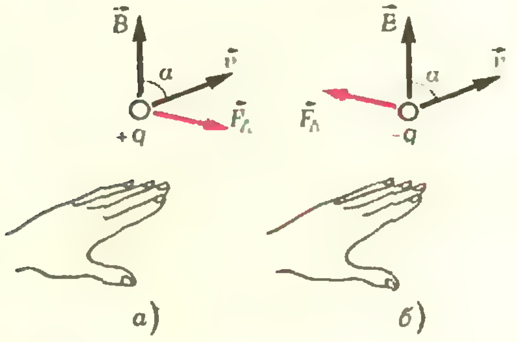


Рис. 1.

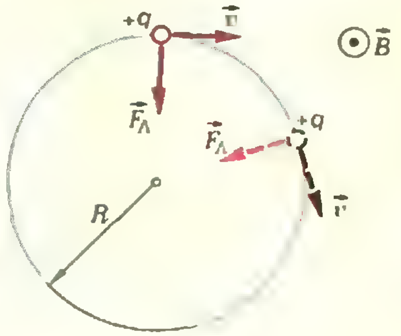


Рис. 2.

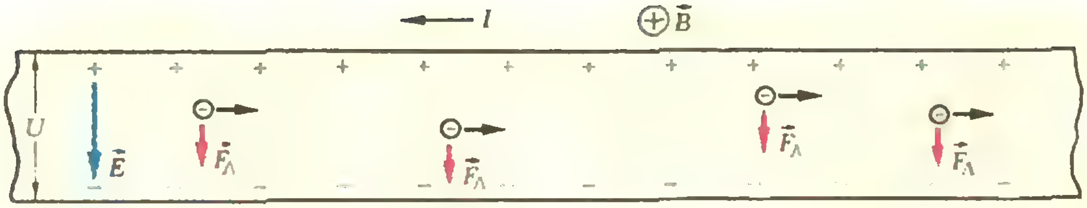


Рис. 3.

сти (а значит, и перемещению) заряда, работы не совершает — заряд движется по окружности с постоянной по модулю скоростью.

2. Выясним, что происходит с проводником с током в магнитном поле.

Для определенности рассмотрим металлический проводник. Как известно, в металлическом проводнике ток представляет собой упорядоченное движение свободных электронов. В магнитном поле на них будет действовать сила Лоренца, направление которой, как обычно, можно определить по правилу левой руки. Пусть ток по проводнику течет справа налево (электроны движутся слева направо), а магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости чертежа, тогда на каждый электрон действует сила Лоренца, направленная вниз (рис. 3).

Поскольку электроны свободны, они начнут перемещаться под действием этих сил. В результате на нижней стороне проводника образуется избыток отрицательных зарядов, а на верхней — их недостаток. Другими словами, в проводнике создается поперечное электрическое поле $\vec E$ (направленное в нашем случае сверху вниз) и возникает поперечная разность потенциалов U.

(Этот эффект называется *эффектом Холла*. Он был открыт Холлом в 1879 году и уже в следующем, 1880, году был объяснен Лоренцем.)

Движение электронов поперек проводника будет происходить до тех пор, пока возникшее электрическое поле не скомпенсирует действие силы Лоренца (рис. 4):

$$\vec F_{эл} = -\vec F_л,$$

или

$$e|\vec E| = e|\vec v||\vec B|$$

(здесь e — заряд электрона, $\vec v$ — средняя скорость упорядоченного движения электронов, $\vec B$ — индукция магнитного поля).

Отсюда нетрудно найти напряженность электрического поля и поперечную разность потенциалов:

$$|\vec E| = |\vec v||\vec B| \quad \text{и} \quad U = |\vec E|d = |\vec v||\vec B|d,$$

где d — ширина проводника.

С другой стороны, средняя скорость $\vec v$ связана с током I в проводнике:

$$I = en|\vec v|S, \text{ или } |\vec v| = \frac{I}{enS},$$

где n — число свободных электронов в единичном объеме проводника, S — площадь поперечного сечения проводника.

Тогда окончательно для разности потенциалов U получим:

$$U = |\vec v||\vec B|d = \frac{d}{enS}I|\vec B|.$$

Продолжим наши рассуждения по поводу поведения проводника с током в магнитном поле. Как было показано еще в 1820 году Ампером, на участок проводника длины Δl, по которому течет ток I (так называемый элемент тока $I\overrightarrow{\Delta l}$), со стороны магнитного поля $\vec B$, составляющего угол α с элементом тока, действует сила

$$|\vec F| = |I\overrightarrow{\Delta l}||\vec B|\sin\alpha.$$

Сила $\vec F$ перпендикулярна элементу

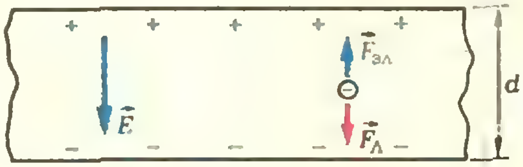


Рис. 4.

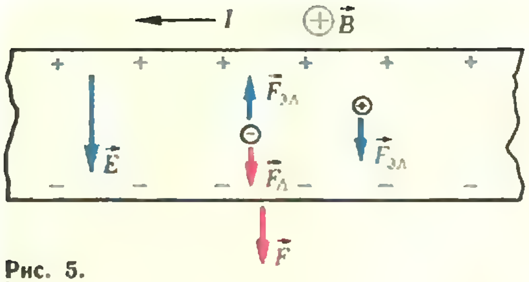


Рис. 5.

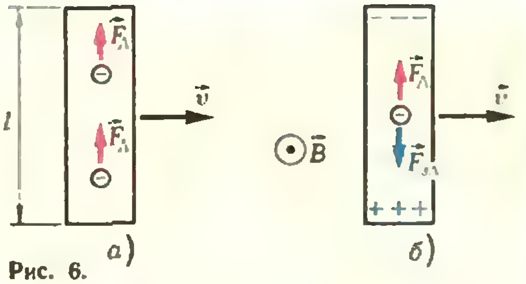


Рис. 6.

тока и магнитному полю, и ее направление определяется правилом левой руки (рис. 5).

Оказывается, происхождение этой силы, которую часто называют силой Ампера, легко можно объяснить с помощью силы Лоренца *). Из рисунка 5 видно, что сила Ампера $\vec{F}$ является просто суммой сил Лоренца $\vec{F}_{л}$, действующих на упорядоченно движущиеся электроны (создающие электрический ток). Причем электрическое поле $\vec{E}$, приостановившее поперечное перемещение электронов, вовсе не мешает возникновению этой суммарной силы, поскольку оно одинаково (но в противоположных направлениях) действует как на электроны, так и на положительные ионы, образующие кристаллическую решетку металла. Электрические силы ($\vec{F}_{эл}$) взаимно компенсируются, а силы Лоренца, действующие только на движущиеся электроны, в сумме дают силу Ампера. Таким образом сила Лоренца, действующая на движущиеся электроны, передается сплошному проводнику, и если ничто не удерживает проводник, он начнет ускоренно двигаться вниз.

3. Наконец, обсудим случай, когда незаряженный металлический проводник без тока движется в магнитном поле.

Как показывает опыт, на концах такого проводника возникает разность потенциалов, а если концы замкнуть, по цепи пойдет ток, называемый индукционным. (Именно по такому принципу работают самые распространенные генераторы, преобразующие энергию механического движения в энергию электрического тока.)

Почему и как возникает индукционный ток? Пусть незамкнутый проводник длины l движется со скоростью $\vec{v}$ перпендикулярно магнитному полю $\vec{B}$ (рис. 6). Свободные электроны проводника движутся вместе с ним; следовательно, на них будет действовать сила Лоренца, вызывающая перемещение электронов внутри проводника, в нашем случае — снизу вверх (рис. 6, *а*). Как и в эффекте Холла, это перемещение электронов быстро прекратится, так как скопление отрицательных зарядов вверху и их недостаток внизу создадут электрическое поле, компенсирующее действие силы Лоренца (рис. 6, *б*).

Если концы данного проводника соединить с каким-нибудь неподвижным проводником, по которому он будет скользить как по рельсам (рис. 7), то электроны, скопившиеся у верхнего конца, смогут перейти к нижнему концу не прямым путем, где им препятствует сила Лоренца, а обходным — по неподвижному проводнику, где этой силы нет. При этом разность потенциалов на концах проводника уменьшится, электроны внутри проводника вновь начнут сме-

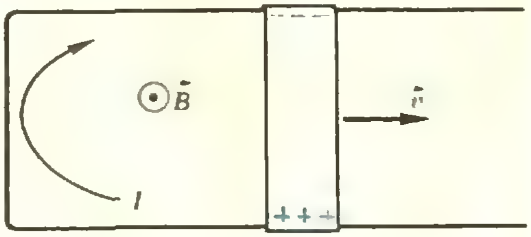


Рис. 7.

---

*) Можно даже вычислить силу Ампера, исходя из выражения для силы Лоренца, хотя исторически было как раз наоборот — Лоренц вывел свою формулу, опираясь на экспериментальный закон Ампера.

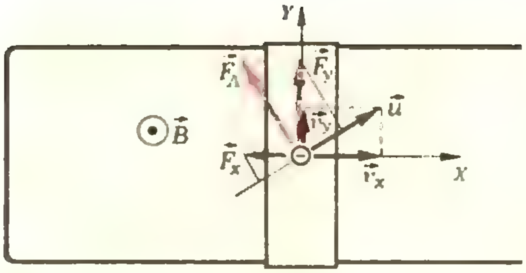


Рис. 8.

щаться вверх, непрерывно поддерживая прежнюю разность потенциалов.

Таким образом, в замкнутой цепи возникает непрекращающееся направленное движение электронов, то есть электрический ток. Роль источника тока выполняет подвижный проводник, внутри которого электроны перемещаются под действием силы Лоренца (играющей роль сторонней силы). Возникающая на концах проводника разность потенциалов обеспечивает дальнейшее перемещение электронов по внешней цепи.

Что можно сказать о работе силы Лоренца в этом случае? С одной стороны, сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряда, и поэтому она не может совершать работу. С другой стороны, как мы только что видели, именно благодаря силе Лоренца возникает разность потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле; получается, что сила Лоренца совершает работу.

Попробуем разобраться в этом противоречии, для чего рассмотрим более подробно процессы, происходящие внутри движущегося проводника.

Введем оси координат X и Y (рис. 8): ось X направим по движению проводника, а ось Y — вдоль проводника вверх. Обозначим через $\vec{v}_x$ скорость движения электрона вместе с проводником. Как только проводник пришел в движение, на электроны начали действовать силы Лоренца. Под их влиянием возникло перемещение электронов внутри проводника вдоль оси Y со скоростью $\vec{v}_y$. Результирующая скорость электрона

$$\vec{u}=\vec{v}_x+\vec{v}_y.$$

Сила Лоренца перпендикулярна именно этой скорости и направлена не вдоль проводника, как мы считали раньше, а под углом к нему.

Разложим силу Лоренца $\vec{F}_{\text{л}}$ на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ (см. рис. 8). Очевидно, что сила $\vec{F}_{\text{л}}$ работы не совершает, поскольку она перпендикулярна скорости электрона, а вот работы сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ отличны от нуля. При этом сила $\vec{F}_y$ совершает положительную работу, а $\vec{F}_x$ — равную по модулю, но отрицательную работу (их проекции на направление скорости $\vec{u}$ одинаковы по величине, но противоположны по знаку).

Хотя в сумме работа сил $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ равна нулю, работа каждой силы отлична от нуля и имеет определенный физический смысл. Силы $\vec{F}_y$ перемещают электроны вдоль проводника, создавая тем самым индукционный ток. Их суммарная работа, отнесенная к единице заряда, представляет собой электродвижущую силу индукции. Силы $\vec{F}_x$ тормозят движение проводника. Для того чтобы проводник двигался равномерно, на него извне должна действовать сила, направленная вдоль оси X и равная по модулю сумме всех сил $\vec{F}_x$ (силами трения пренебрегаем). Следовательно, суммарная работа сил $\vec{F}_x$ равна по модулю работе внешней силы, приложенной к проводнику.

Таким образом, при движении проводника в магнитном поле совершаются три равные по модулю работы: работа $A_{\text{вн}}$ внешней силы по равномерному перемещению проводника, работа A_x сил $\vec{F}_x$, тормозящих это перемещение, и работа A_y сил $\vec{F}_y$ по созданию индукционного тока в проводнике. При этом

$$A_{\text{вн}}=-A_x=A_y,$$

другими словами, внешние усилия, затраченные на движение проводника, как бы передаются электронам, вызывая их перемещение вдоль проводника, то есть электрический ток.

Московский физико-технический институт

Ниже публикуются образцы вариантов вступительных письменных экзаменов по математике и физике в 1978 году. На письменную работу как по математике, так и по физике отводится пять часов.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{\cos 2x}\cdot(4\cdot 3^{\sin^2 x}-9)=1.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_3(9x+18)}\leqslant\log_3(x+2).$$

3. В треугольнике ABC угол B прямой, медианы AD и BE взаимно перпендикулярны. Определить величину угла C.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}6\cos x+4\cos y=5,\\ 3\sin x+2\sin y=0.\end{cases}$$

5. Вдоль реки расположены пункты A, B, C (B между A и C). Скорость течения реки на участке AB вдвое больше, чем на участке BC, и на каждом из участков постоянна. Катер совершил три рейса: первый из A в C, второй из C в A и третий из A в B. В первых двух рейсах его скорость относительно воды была одна и та же, а в третьем рейсе в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем в первых двух. Первый рейс длился 7 часов, третий — 2 часа. Если скорость течения на участке AB была такой же, как и на участке BC, то первый рейс катер совершил бы за 6 часов (с прежней скоростью относительно воды). Сколько времени длился второй рейс? (Рейс — движение в одном направлении от начального пункта до конечного.)

6. Вершина A правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ совпадает с вершиной конуса, вершины B и C лежат на боковой поверхности этого конуса, а вершины B_1 и C_1 — на окружности его основания. Найти отношение объемов конуса и призмы, если $|AB_1|:|AB|=5$.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$3\cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}}-27^{2x}>0$$

2. Проверить, какие из чисел $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi n}{2}$, где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, являются решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos 2x}=6.$$

3. В разложении бинома $(1+x)^n$ по возрастающим показателям степеней x третье слагаемое в четыре раза больше пятого, а отношение четвертого слагаемого к шестому равно $\frac{40}{3}$. Найти n и x.

4. В окружность вписана трапеция $ABCD$. Диаметр, проведенный через вершину A, перпендикулярен боковой стороне CD. Через вершину C проведен перпендикуляр к основанию AD, пересекающий отрезок AD в точке M, а окружность в точке N так, что $|CM|:|MN|=\frac{5}{2}$. Найти величину угла при основании трапеции.

5. Вершины B, C, D параллелограмма $ABCD$ имеют соответственно координаты $(-3;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ -4)$ (BD — диагональ). Найти:

1) все значения a, для которых координаты вершины A являются решением системы неравенств

$$\begin{cases}2x-y-2a\leqslant 0,\\ 2x+6y+5a\leqslant 0;\end{cases}$$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BD являются решением этой системы.

6. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка P — середина ребра CC_1, точка Q — центр грани AA_1B_1B. Отрезок MN с концами на прямых AD и A_1B_1 пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.

Физика

Вариант 1

1. Шар висит на нити, опираясь о стенку, как показано на рисунке 1. Центр шара C лежит на одной вертикали с точкой подвеса O, нить образует с вертикалью угол α, а радиус, проведенный в точку крепления нити A, — угол β. При каких значениях коэффициента трения шара о стенку такое равновесие возможно? Считать, что $\alpha+\beta=\pi/2$.

2. В запаянной с одного конца горизонтально лежащей трубке находится воздух с относительной влажностью $r_0=0{,}8$, отделенный от атмосферы каплей ртути длиной $l=7{,}6$ см. Какой станет относительная влажность воздуха r, если трубку поставить вертикально открытым концом вниз? Температура поддерживается постоянной, внешнее атмосферное давление $p=760$ мм рт. ст. Ртуть из трубки при ее переворачивании не выливается.

3. Для измерения напряженности $E_З$ собственного электрического поля Земли у ее поверхности использовали две метал-

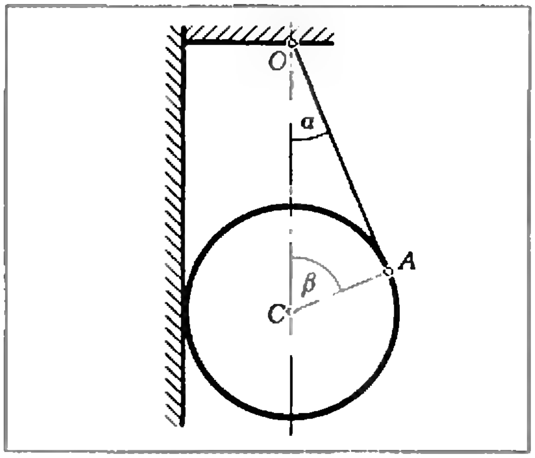


Рис. 1.

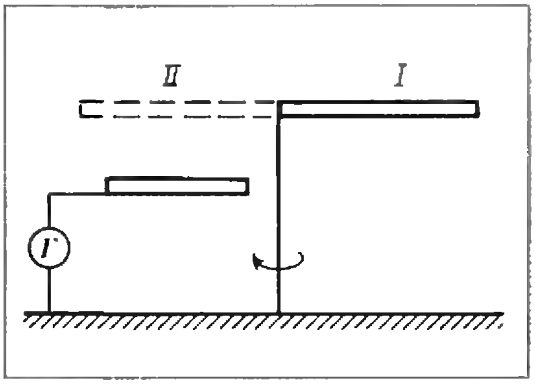


Рис. 2.

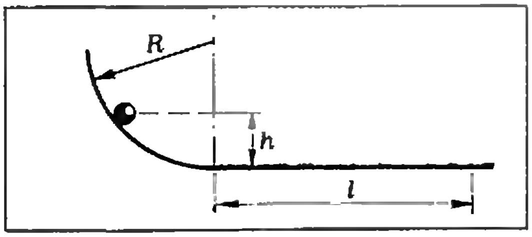


Рис. 3.

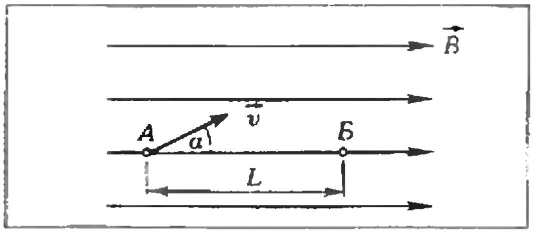


Рис. 4.

лические пластины (рис. 2). Нижняя пластина с площадью $S=1{,}2$ м^2 расположена на небольшом расстоянии от поверхности Земли и через гальванометр заземлена. Верхняя пластина соединена с Землей и может вращаться вокруг вертикальной оси. Сначала верхняя пластина занимает положение *I*. Затем ее поворачивают, и она полностью закрывает нижнюю пластину. За время поворота через гальванометр прошел заряд $Q=2{,}1\cdot10^{-9}$ Кл. Вычислить поле Земли $E_З$. Влиянием краевых эффектов пренебречь.

4. При фотографировании на фотопленке получаются (из-за конечной разрешающей способности пленки) резко изображенными не только те предметы (находящиеся на расстоянии d_0), на которые наведен объектив фотоаппарата, но также и предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния. То есть резкими получаются предметы, лежащие внутри некоторой области $d_1\div d_2$ ($d_1<d_0$, $d_2>d_0$, d_1 называется ближней границей глубины резкости, d_2 — дальней). Оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предмет, находящийся на расстоянии $d_0=10$ м, ближняя граница глубины резкости расположена на расстоянии $d_1=7{,}8$ м. Найти дальнюю границу.

Вариант 2

1. Выезд с горки на горизонтальную плоскость представляет собой дугу окружности радиуса $R=4$ м (рис. 3). Поверхность горки гладкая, а горизонтальная поверхность — шероховатая с коэффициентом трения $k=0{,}2$. Санки, съехав с горки, остановились на расстоянии $l=30$ м от ее конца. На какой высоте h человек в санках испытал двукратную перегрузку?

2. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t=108$°C и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c=1$ кал/(г·град), удельная теплота парообразования $\lambda=539$ кал/г. Теплообменом за время установления равновесия пренебречь.

3. Электрон влетает в однородное магнитное поле индукции $\vec B$. В точке A он имеет скорость $\vec v$, которая составляет с направлением поля угол α (рис. 4). При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке $Б$? Заряд электрона e, масса m, расстояние $|AБ|=L$.

4. Расстояние от заднего фокуса тонкой линзы до изображения в 9 раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Найти линейное увеличение.

Вариант 3

1. Два бруска массой $M=100$ г каждый, связанные нитью, соскальзывают с наклонной плоскости с углом $\alpha=30°$. Коэффициент трения нижнего бруска о плоскость $k_1=0{,}2$, верхнего — $k_2=0{,}5$. Определить натяжение нити.

2. В микрокалориметр теплоемкости $C=100$ Дж/К помещен образец изотопа кобальта с относительной атомной массой $A=61$. Масса образца $m=10$ мг. При распаде ядра ^{61}СО выделяется энергия $W=2\times10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0{,}06°$. Оценить период полураспада ^{61}СО. Число Авогадро $N_А=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

3. Какой заряд Q протечет через гальванометр после замыкания ключа K в схе-

ме, показанной на рисунке 5? ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$, емкость конденсаторов равна C.

4. Предмет и его прямое изображение, создаваемое тонкой линзой, расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы равно 4 см. Найти фокусное расстояние линзы.

Вариант 4

1. Тело без начальной скорости соскальзывает в яму, стенки которой гладкие и плавно переходят в горизонтальное дно (рис. 6). Длина дна $l=2$ м, коэффициент трения тела о дно ямы $k=0{,}3$. Глубина ямы $H=5$ м. На каком расстоянии от середины ямы тело остановится?

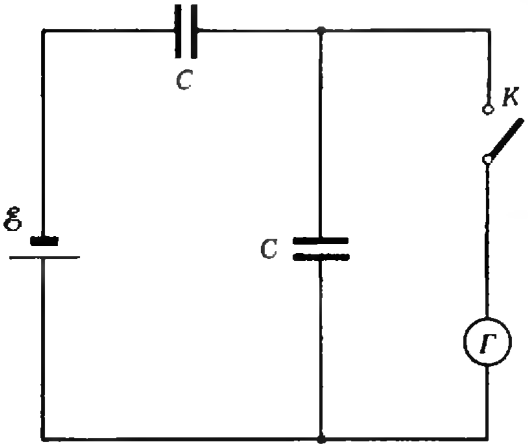


Рис. 5.

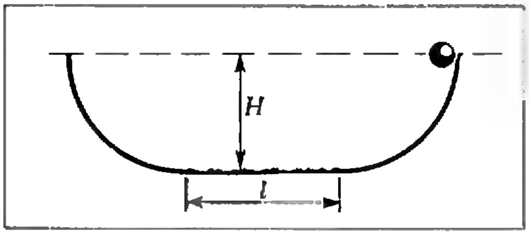


Рис. 6.

2. В камере сгорания реактивного двигателя объема $V=0{,}1$ м^3 при температуре $T=2000$ К давление равно $p=2\cdot10^6$ Н/м^2. Расход топлива $M=30$ кг/с, средняя молярная масса продуктов сгорания $\mu=21$ кг/кмоль. Определить время пребывания порции топлива в камере сгорания. Газовая постоянная $R=8{,}3\times10^3$ Дж/(кмоль·К).

3. Какой максимальный заряд можно сообщить шару из металлизированной ткани радиусом $R=2$ м и толщиной стенки $\Delta R=0{,}02$ см? Предел прочности на разрыв материала стенки $\sigma_{\text{пр}}=50$ Н/мм^2. Величиной изменения объема шара пренебречь.

4. С помощью тонкой линзы получают полуторакратно увеличенное действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на 12 см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.

С. Козел, Б. Федосов,
В. Чехлов, А. Шелагин

Приглашаем на малый мех-мат

Малый мех-мат (МММФ) — это заочная математическая школа при механико-математическом факультете МГУ, являющаяся отделением Всесоюзной заочной математической школы (ВЗМШ) *). Занимаясь на малом мех-мате, школьники 8—10 классов смогут углубить свои знания по важнейшим разделам школьной программы и подготовиться к поступлению на мех-мат МГУ или в другой ВУЗ. Многие задания, высылаемые учащимся МММФ, составлены на основе задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике на мех-мат. Разработка заданий, а также методических указаний ведется методическим советом МММФ, которым руководят профессора факультета.

На малом мех-мате обучаются школьники следующих областей: Астраханской, Брянской, Белгородской, Владимирской, Волгоградской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калужской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Липецкой, Московской, Оренбургской, Орловской, Пензенской, Пермской, Ростовской, Рязанской, Саратовской, Свердловской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ульяновской, Челябинской, Ярославской, Минской, Брестской, Витебской, Гомельской, Гродненской, Могилевской, а также: Башкирской АССР, Дагестанской АССР, Кабардино-Балкарской АССР, Калмыцкой АССР, Мордовской АССР, Северо-осетинской АССР, Татарской АССР, Удмуртской АССР, Чечено-Ингушской АССР, Чувашской АССР, Краснодарского края, Ставропольского края.

Прием на малый мех-мат проводится через систему областных олимпиад. Каждый участник областной олимпиады может подать заявление в оргкомитет олимпиады с просьбой о зачислении на малый мех-мат.

В случае, если Вы учитесь в 7-м классе, живете в одной из указанных областей и хотели бы учиться на малом мех-мате, Вы можете решить вступительную контрольную работу ВЗМШ и выслать ее в адрес малого мех-мата, так как школьники, проживающие в указанных областях, могут поступать как в соответствующие филиалы ВЗМШ, так и на малый мех-мат.

Для московских школьников работает Вечерняя математическая (7—9 классы) и Воскресная подготовительная (10 класс) школы. Вечерняя школа работает во все дни недели. Уточнить время работы школ можно по телефону 139-35-29.

---

*) См. «Квант», 1979, № 1 и с. 59 этого номера.

Новый прием в ВЗМШ

Вступительные контрольные работы (см «Квант» № 1, с. 58) семиклассники должны присылать по следующим адресам:

Область, республика	Адрес
Амурская область	675015. Благовещенск, ул. Ленина 104. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Башкирская АССР	452320. Башкирская АССР, Бирск, Интернациональная ул. 10. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Белорусская (кроме Витебской и Гомельской обл.), Латвийская, Литовская, Эстонская ССР, Карельская АССР, Архангельская, Калининградская, Ленинградская, Мурманская, Новгородская и Псковская области	197228. Ленинград, П-228, ул. Савушкина 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ, на конкурс.
Витебская область	210036. Витебск, 36, Московский просп. 33. Пединститут, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Владимирская область	600024. Владимир, просп. Строителей 11. Пединститут, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Вологодская область	162600. Вологодская обл., Череповец, ул. М. Горького 14. Пединститут, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Воронежская, Белгородская, Липецкая, Курская, Тамбовская области	394693. Воронеж. Университетская пл. 1. Университет. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Гомельская область	246000. Гомель, Советская ул. 108. Университет, мехмат, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Дагестанская АССР	367025. Махачкала, ГСП, Советская ул. 8. Дагестанский университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Донецкая область	340055. Донецк, Университетская ул. 24. Университет, мехмат, кафедра высшей математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс. ИЛИ 343200. Донецкая обл., Славянск, ул. Ленина 12. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Ивановская область	153025. Иваново, 25, ул. Ермака 39. Университет, кабинет математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Казахская ССР (кроме Целиноградской, Тургайской, Кокчетавской и Джезказганской областей)	417007. Уральск, просп. Ленина 162. Пединститут, физмат, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Калининская область	170002. Калинин, Садовый пер. 35. Университет, матфак. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Кировская область	610013. Киров, 13, ул. Ленина 111. Пединститут. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Коми АССР	167001. Сыктывкар, Октябрьский просп. 55. Университет, мехмат. ЗМШ, на конкурс.
Краснодарский край	350751. Краснодар, ГСП, ул. К. Либкнехта 149. Кубанский университет, комн. 117. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Красноярский край — районы: Идринский, Краснотуранский, Курагинский, Минусинский, Каратузский, Ермаковский, Шушенский; Хакасская АО	662600. Абакан, просп. Ленина 90. Пединститут, физмат, кафедра высшей математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.

Область, республика	Адрес
Красноярский край (остальные районы), Иркутская, Новосибирская, Тюменская области, Алтайский край	660075. Красноярск, 75, ул. Маерчака 6. Университет, матфак. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Куйбышевская область	443086. Куйбышев, ул. акад. Павлова 1. Университет, матфак, кафедра функционального анализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс
Магаданская область	685014. Магадан, Портовая ул. 13. Пединститут, физмат, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Мордовская АССР	430000. Саранск, Большевистская ул. 68. Мордовский университет, матфак. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Орловская область	302015. Орел, Комсомольская ул. 95. Пединститут, кабинет математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Приморский край	690600. Владивосток, ГСП, ул. Суханова 8. Дальневосточный университет. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Ростовская область	344009. Ростов-на-Дону, ул. Горького 88. Университет, мехмат, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Сахалинская область	693008. Южно-Сахалинск, просп. Ленина 290. Пединститут, кафедра матанализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Свердловская область	620083. Свердловск, просп. Ленина 51. Уральский университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Смоленская область	214000. Смоленск, ул. Пржевальского 4. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Таджикская ССР	734016. Душанбе, 16, просп. Ленина 17. Таджикский университет, мехмат, комн. 49. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Татарская АССР, Марийская АССР, Горьковская, Астраханская, Волгоградская области	420008. Казань, 8, ул. Ленина 18. Университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Тернопольская область	282009. Тернополь, ул. Карпенко 10. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Томская область	634044. Томск, 44, Комсомольский просп. 75. Пединститут, комн. 254. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Удмуртская АССР	426037. Ижевск, Красногвардейская ул. 71. Удмуртский университет, кафедра алгебры и топологии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Ульяновская, Саратовская, Пензенская области	432700. Ульяновск, 2, пл. 100-летия со дня рождения Ленина, д. 2. Пединститут, кафедра алгебры и геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Целиноградская, Тургайская, Кокчетавская и Джезказганская области	473021. Целиноград, 21, ул. Циолковского 6. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Черновицкая область	274012. Черновцы, 12, ул. Коцюбинского 2. Университет, канцелярия. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Читинская область	672007. Чита, 7, ул. Бабушкина 129. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Чувашская АССР	428015. Чебоксары, Энергетическая ул. 4. Чувашский университет, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Остальная территория СССР	117234. Москва, В-234, МГУ. Всесоюзная заочная математическая школа, на конкурс.

Школьники, живущие в центральной зоне РСФСР, могут поступать как в соответствующие филиалы ВЗМШ, так и на малый мехмат (см. с. 58)

VI Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов

С 9 по 16 июля 1978 года в Новосибирском академгородке проходил VI Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов. На слете, посвященном 60-летию ВЛКСМ, были подведены итоги деятельности коллективов юных техников всех областей, краев и автономных республик РСФСР за последние два года, прошедшие со времени V Всероссийского слета.

Участники привезли на слет около 700 экспонатов и техническую документацию к ним. Решением жюри 189 лучших экспонатов были допущены к защите на заседаниях пяти секций слета:

1. Юные техники — школе.
2. Юные рационализаторы и конструкторы — промышленности.
3. Юные рационализаторы и конструкторы — сельскому хозяйству.
4. Юные рационализаторы и конструкторы — строительству и транспорту.
5. Юные конструкторы — армии, авиации и флоту.

Все защиты обязательно сопровождались демонстрацией представленного технического устройства, показом чертежей, схем, таблиц, фотографий, диапозитивов. При оценке учитывались целесообразность и актуальность проделанной работы, рациональность пути решения технической задачи, а также умение выступать публично и отвечать на вопросы членов жюри и всех присутствующих. А вопросов было много: только ученики задали своим товарищам более 1500 вопросов.

Если на первых слетах юные техники представляли в основном модели-игрушки, модели-копии, то теперь многие их работы имеют непосредственное отношение к народному хозяйству нашей страны. Достаточно сказать, что на 100 технических устройств, представленных на слет, выданы удостоверения о рационализаторском предложении, а 48 из них уже внедрены и успешно работают.

Например, электронно-натяжное устройство для намотки провода, сконструированное учениками школы № 22 г. Воронежа Сергеем Боевым и Юрием Максимовым, используется на Воронежском заводе «Электроприбор». Силами Воронежской станции юных техников было изготовлено для завода 25 таких устройств.

Впервые на слет было представлено описание изобретения — нового способа выращивания помидоров. Один из авторов изобретения — ученик школы № 75 г. Владивостока Андрей Кудра.

Ученица школы № 32 г. Горького Елена Грушко предложила медицинскую банку, представляющую собой пластмассовый цилиндр с поршнем. Для этих банок не надо ни спирта, ни огня. Такие банки уже применяются в детском отделении городской больницы.

Ребята из Ижевской станции юных техников сконструировали электролобзик и пылеулавливающее устройство к нему. Эти приборы были созданы на основе тщательного анализа существующих аналогичных приборов и целой серии собственных моделей. Представленные на слет модели (их защищал ученик школы № 62 г. Ижевска Игорь Чехомов) рекомендованы к выпуску промышленными предприятиями для школ и различных технических кружков.

Юные радиолюбители Новосибирской областной станции юных техников создали целый ряд интересных электронных приборов для нужд сельского хозяйства. Так, разработанная ими «трость агронома» для определения влажности земли, зерна, воздуха и т. д. уже выпускается Новосибирским заводом радиодеталей.

По итогам слета 30 его участников награждены дипломами и памятными подарками журнала «Моделист-конструктор», 41 участник — авторскими свидетельствами и дипломами журнала «Юный техник» и 5 участников — дипломами журнала «Радио».

Самой представительной секцией слета была секция «Юные техники — школе». Ученики предложили большое число оригинальных приборов для школьных учебных кабинетов. Например, для кабинета физики разработаны следующие приборы, получившие одобрение членов жюри:

1. Четыре прибора по механике, с помощью которых можно демонстрировать относительность движения, принцип независимости движений, изучать законы равноускоренного движения. Свои проекты защищали ученики школы № 43 г. Шахты Татьяна Перевертайло, Сергей Шикунов, Юрий Мамчур и Ирина Иванова.

2. Универсальный прибор «Вращающийся диск на самодвижущейся тележке», позволяющий продемонстрировать более десятка интересных опытов по кинематике и динамике в инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Прибор создан группой учеников школы № 62 г. Кемерово, защищал прибор Володя Цыганков.

3. Две «Дороги на воздушных подушках», так необходимые школам для демонстрации практически всех законов механи-

ки. Эти приборы, совершенно различные по техническому решению, изготовили ученики школы № 42 г. Люберцы (защищал Сергей Чеперигин) и школы № 118 г. Волгограда (защищал Игорь Науменко).

4. Комплект автоматов для кабинета физики сельской школы, созданный учениками Медновской санаторной школы-интерната Калининской области (защищал Михаил Пиккин).

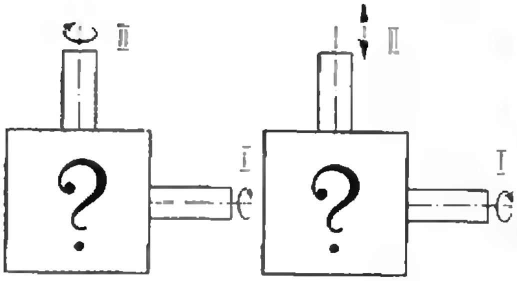
5. Комплект приборов по астрономии, созданный членами кружка при Новосибирском дворце пионеров (защищали Евгений Бакшанский и Александр Щетников).

6. Школьный телецентр, представленный юными конструкторами Новосибирской областной станции юных техников (защищал Юрий Малов).

Интересный «Универсальный прибор по стереометрии» для кабинета математики продемонстрировал ученик школы № 13 г. Владимира Андрей Чебуханов. С помощью этого прибора можно быстро собрать различные объемные фигуры и показать всевозможные сечения в них.

Заметим, что в целом уровень защит был довольно высоким. Однако некоторые докладчики, уверенно поясняя технические принципы устройства своих моделей, значительно слабее представляли себе физические явления и процессы, которые они моделировали.

Большой простор для фантазии был предоставлен участникам конкурса фантастических проектов, которым завершился слет. Бо́льшая часть проектов посвящалась космической теме, хотя были и земные проекты. Победителем конкурса стал Слава Хренин из г. Ульяновска. Он прокомментировал 106-й слет юных техников, происходящий на Марсе в 2178 году!



Придумайте возможные схемы «черного ящика», с помощью которых можно преобразовать движения:

а) вращательное движение горизонтального вала I во вращательное движение вертикального вала II;

б) вращательное движение горизонтального вала I в возвратно-поступательное движение вертикального вала II.

Все участники слета во время его работы выполняли «домашнее задание» — придумать как можно больше вариантов решения технической задачи, представленной на рисунке. Обладатель четырех медалей ВДНХ, ученик школы № 18 г. Ярославля Сергей Медовников пока является рекордсменом: он предложил 49 решений этой задачи. А сколько придумаете вы?

В. Орлов

Выступает Татьяна Бойчук (г. Ростов), получившая спецприз за лучшую защиту.

Александр Щетников (г. Новосибирск) демонстрирует комплект приборов по астрономии.

Елена Грушко (г. Горький) рассказывает о своей работе.

Во время защиты работ не было равнодушных.

Московский инженерно-физический институт
(*см. «Квант» № 1*)

Математика

Вариант I

1. Обозначим необходимое количество пресной воды через x кг; тогда из условий задачи:

$$30\cdot\frac{5\%}{100\%}\cdot(x+30)^{-1}\cdot 100\% = p\%;$$

решая это уравнение, находим ответ: если $p\in\,]0;\,5]$, то нужно добавить

$$30\left(\frac{5}{p}-1\right)\text{кг}$$

пресной воды. В случае, когда $p\notin\,]0;\,5]$, задача не имеет решения.

2. Так как боковые ребра пирамиды $SABCD$ (см. рисунок) составляют с плоскостью основания равные углы, то ортогональная проекция O_1 вершины пирамиды S на плоскость основания $(ABCD)$ есть центр окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$.

Сечение описанной сферы плоскостью основания пирамиды $(ABCD)$ есть окружность, описанная около прямоугольника $ABCD$. Следовательно, центр O описанной сферы принадлежит прямой (SO_1).

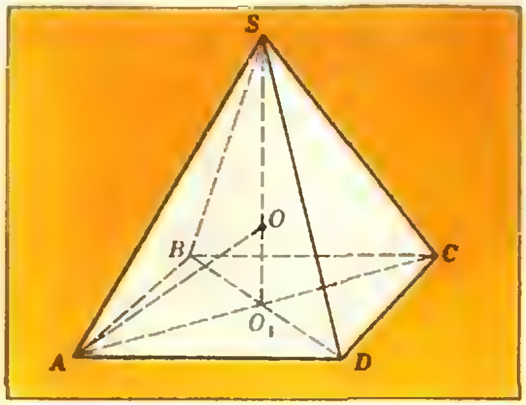
Треугольник ASC равнобедренный, так как $\widehat{SAC}=\widehat{SCA}$. Сторона основания $[AC]$ этого треугольника является в то же время диагональю прямоугольника $ABCD$, поэтому

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2+|BC|^2} = 5. \qquad (1)$$

Так как центр сферы, описанной около пирамиды, принадлежит плоскости (ASC), то радиус окружности, описанной около треугольника ASC, равен $R=6{,}5$.

Из прямоугольного треугольника AOO_1 имеем

$$(|SO_1|-R)^2 = R^2-\left|\frac{|AC|}{2}\right|^2, \qquad (2)$$



откуда

$$|SO_1| = R\pm\sqrt{R^2-\left|\frac{|AC|}{2}\right|^2} = 6{,}5\pm 6. \quad (3)$$

а) Центр описанной сферы O принадлежит пирамиде $SABC$. При этом в формуле (3) следует выбрать знак плюс. Длина бокового ребра определяется из прямоугольного треугольника ASO_1:

$$|AS| = \sqrt{|SO_1|^2+R^2} = \sqrt{212{,}5}.$$

Из треугольника BSC, по теореме косинусов, находим

$$\cos(\widehat{BSC}) = \frac{|BS|^2+|CS|^2-|BC|^2}{2\,|BS|\cdot|CS|} = \frac{309}{325},$$

$$\widehat{BSC} = \arccos\frac{309}{325}.$$

б) Центр описанной сферы точки O не принадлежит пирамиде $SABC$. В формуле (3) следует выбрать знак минус. Вычисления, аналогичные предыдущему случаю, дают

$$\widehat{BSC} = \pi-\arccos\left(-\frac{3}{13}\right) = \arccos\frac{3}{13}.$$

Ответ. $\left\{\arccos\frac{309}{325};\ \arccos\left(\frac{3}{13}\right)\right\}$.

3. Определим значение неизвестного параметра a, входящего в уравнение параболы, из условия

$$(4x^2+ax+2)'\,\big|_{x=-5} = \operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg}20).$$

Выполнив действия, указанные в левой части равенства и упростив правую часть по формулам приведения, получим $40-a=20$, откуда $a=20$.

Определим абсциссы точек пересечения параболы и прямой из уравнения

$$4x^2+20x+2=-8x-46.$$

Получим

$$x_1=-4,\quad x_2=-3.$$

Площадь рассматриваемой фигуры определяется интегралом

$$\int\limits_{-4}^{-3}[-8x-46-(4x^2+20x+2)]\,dx =$$

$$=-4\int\limits_{-4}^{-3}(x^2+7x+12)\,dx = 2/3.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$ кв. ед.

4. Уравнение определено при всех действительных x, для которых $\cos 6x\neq 0$. Рассмотрим два случая:

а) $x\geqslant 0$; уравнение принимает вид

$$\sin 6x\cdot\cos 5x+\cos 6x\cdot\sin 5x = 0. \qquad (1)$$

Используя формулу синуса суммы, преобразуем (1) к виду

$$\sin 11x = 0 \quad \text{или} \quad x = \frac{n\pi}{11}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

б) Если $x<0$, то $|x| = -x$ и, учитывая нечетность функции тангенс, получим

$$\sin 6x \cdot \cos 5x - \cos 6x \cdot \sin 5x = 0,$$

откуда

$$x = k\pi, \quad -k \in \mathbf{N}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\cos\frac{6n\pi}{11} \neq 0,\ n \in \mathbf{Z} \text{ и } \cos 6\pi k \neq 0,\ -k \in \mathbf{N}.$$

Ответ $\left\{\frac{n\pi}{11} \mid n \in \mathbf{Z};\ k\pi \mid -k \in N\right\}$.

Вариант 2

1. 164850.

2. При $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \neq \beta$ два решения: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{V}{\sin|\alpha-\beta|}$; при $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha = \beta$, одно решение: $\frac{V}{\sin(\alpha+\beta)}$;

здесь

$$V = \frac{4a^3}{75}\sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

3. $\{(15; -12)\}$.

4. $\left\{-6\pi; -\frac{9\pi}{2}; 0\right\}$.

Вариант 3

1. $\frac{tV \pm \sqrt{tV(tV-2000)}}{2t}$ при $tV \in [2000; \infty[$ (иначе решений нет).

2. Площадь сечения равна

$$\frac{a^2 \sin\psi \cdot \sin(\gamma \pm \psi)}{4\sqrt{3} \cdot \sin^2\gamma \cdot \sin^2\alpha/2}$$

$$\text{при } \gamma \in \left[\psi; \frac{\pi}{2}\right], \quad \alpha \in \left]0; \frac{2\pi}{3}\right[;$$

$$\frac{a^2 \sin\psi \cdot \sin(\gamma - \psi)}{4\sqrt{3}\ \sin^2\gamma \sin^2\alpha/2}$$

$$\text{при } \gamma \in]\psi; \varphi[, \quad \alpha \in \left]0; \frac{2\pi}{3}\right[;$$

0 в остальных случаях; здесь $\varphi = \arccos\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha/2}{\sqrt{3}}\right)$, $\psi = \arccos\left(\frac{2\sin\alpha/2}{\sqrt{3}}\right)$.

3. $(9 - 8\ln 2)$ кв. ед.

4. $\left\{\arcsin\frac{1}{14} + 2n\pi \mid n \in \mathbf{Z}\right\}$.

Физика

1. $|\vec{v}_{\min}| = \sqrt{\frac{M\ q\ l}{m+M}} \approx 1{,}4$ м/с.

2. $|\vec{F}_{д}| = \left(\frac{n}{k} - 1\right)\left(p_0 S + Mg\right) = 15$ Н.

3. $A = \frac{q(q_1 - q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -6 \cdot 10^{-6}$ Дж.

4. $|\vec{B}| = \frac{\mathscr{E}\tau}{NS} = 1{,}5$ Т;

$$Q = \frac{\mathscr{E}^2\tau}{RN^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

5. $x \approx 2F(n-1)\alpha = 1$ см.

Как быть?

(см. с. 22)

Поскольку функция $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x$ является первообразной для функции f, любая другая первообразная для f — в частности, $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x$, имеет вид $F_1(x) + C$. Для F_2 константа C находится из равенства $-\frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$. Подставляя, например, $x = 0$, получаем $C = -\frac{1}{2}$. Итак, $F_2(x) = F_1(x) - \frac{1}{2}$.

Разумеется, верно также, что любая первообразная для f имеет вид $F_2(x) + C$. В частности, $F_1(x) = F_2(x) + \frac{1}{2}$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

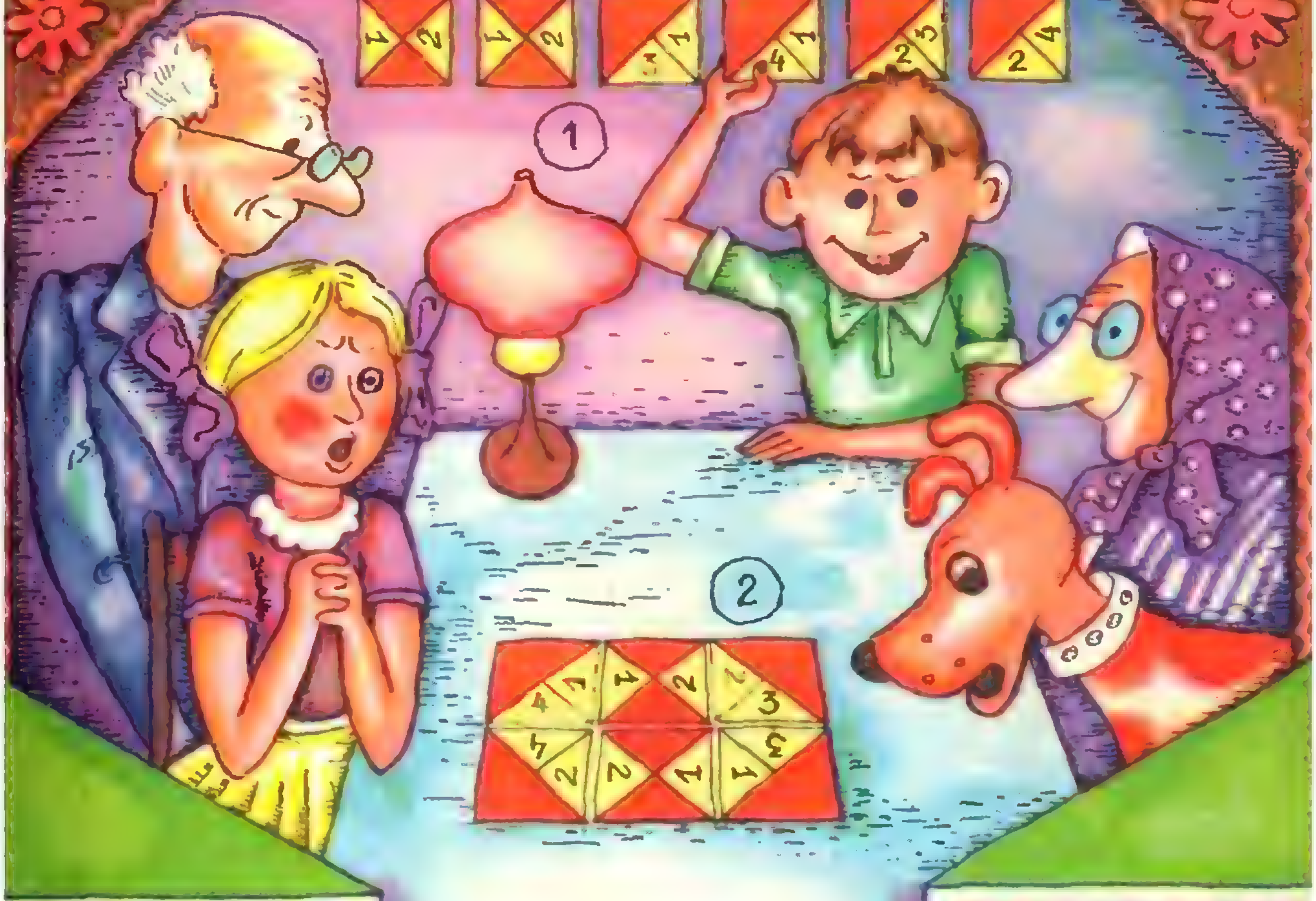
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/XI-78
Подписано в печать 12/I-79
Бумага 70×108 1/16. Физ.печ.л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,15 Т-01855
Цена 30 коп. Заказ 2789 Тираж 285 459 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

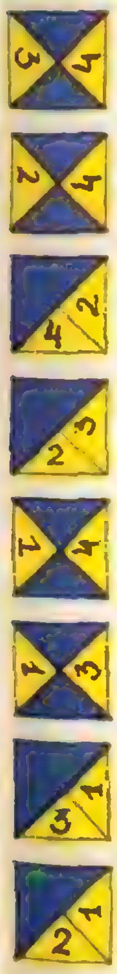


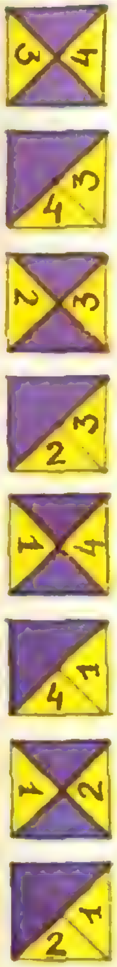
Квадраты и шестиугольники

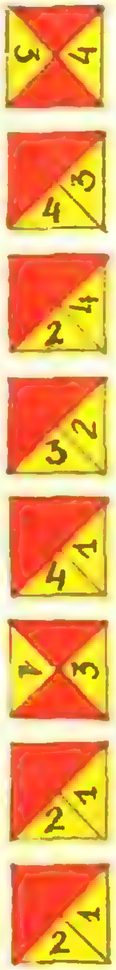
Каждый квадрат разделен на четыре части, каждый шестиугольник — на шесть. В двух частях (и у квадратов, и у шестиугольников) размещены две цифры: 1, 2, 3 или 4 (различные!). Оставшиеся части пусты (эти части на рисунках закрашены). В каждой задаче требуется использовать все фигурки данного набора. При этом фигурки должны быть уложены по «доминошным» правилам: граничащие по стороне фигурки должны соприкасаться либо частями с одинаковыми цифрами, либо закрашенными частями. Кроме того, нужно, чтобы не было «висячих» частей с цифрами (т. е. не соединенных с другими). Например, набор из шести квадратов, изображенный на рисунке 1, сложен по правилам на рисунке 2.

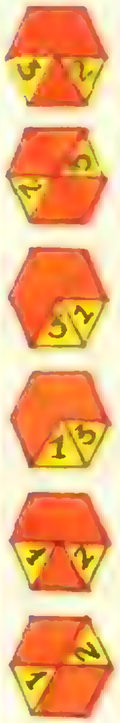
Попробуйте найти правильные расположения для наборов, приведенных на рисунках 3—8. Первая задача — довольно простая, вторая и третья немного сложнее. Задачи с шестиугольниками — гораздо сложнее, поэтому не отчаивайтесь, если вам не сразу удастся это сделать.

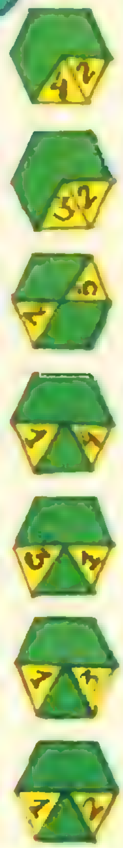
С. Недвига

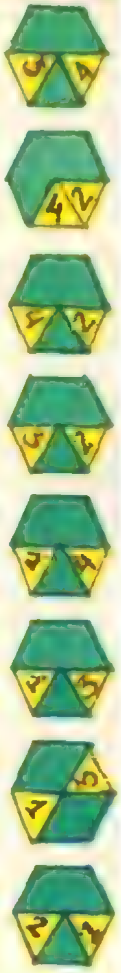

3

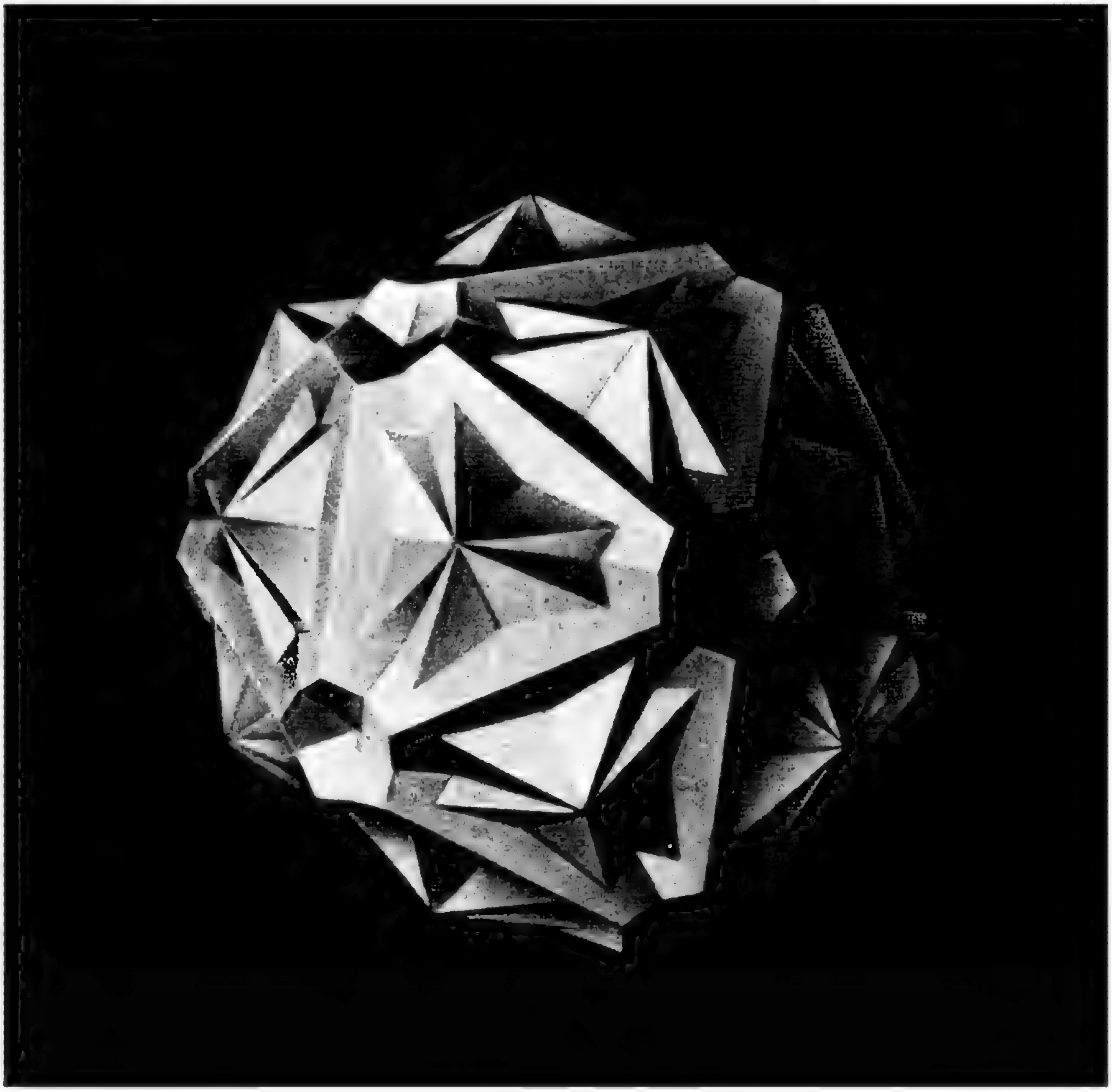

4


5


6


7


8



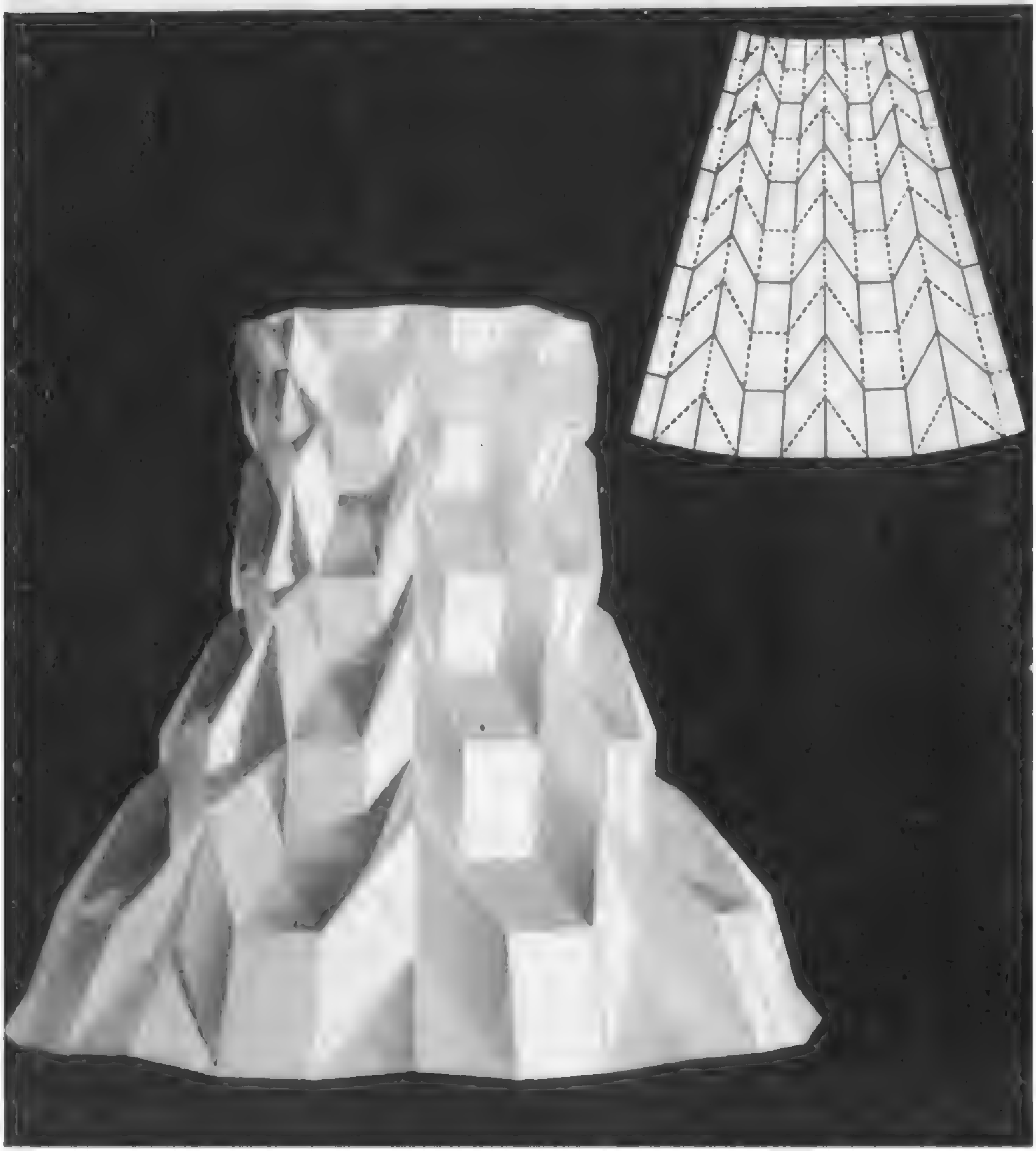
На этом рисунке показан замысловатый, но красивый многогранник — объединение пяти додекаэдров, расположенных, в некотором смысле, «максимально симметрично». Вершины этих 5 додекаэдров (их 5×20=100) распадаются на два типа — одиночные (их 60, в них сходятся по три ребра нашего многогранника, а сами вершины группируются в виде 12 маленьких пятиугольников) и сдвоенные (их 20=40 : 2, в каждой из них сходится 12 ребер). Попробуйте найти пять вершин одной грани одного додекаэдра (две сдвоенные, три одиночные). Найдите на рисунке остальные видимые грани этого додекаэдра; найдите грань какого-либо другого додекаэдра. Убедитесь, что любые два додекаэдра имеют ровно две общие вершины и получаются друг из друга поворотом вокруг оси, соединяющей эти вершины. Модель сконструирована В. Гамаюновым.

Цена 30 коп.

Индекс 70465

На этом рисунке показана модель многогранника, сделанная из листа бумаги одними изгибаниями, без разрезов и склеек. В правом верхнем углу показана схема изгибаний для куска поверхности: пунктир обозначает линии изгиба в одну сторону, сплошные линии — в другую

Модель изготовил А. Волков.



НОМЕР
3

Основан в 1970 году

КВАНТ

3
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство „Наука"
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

100 лет со дня рождения Эйнштейна

3 Обращение в защиту мира
4 *Я. Смородинский.* Альберт Эйнштейн (1879—1979)
13 *А. Эйнштейн.* Автобиографические заметки
16 Эйнштейн глазами современников
19 *А. Эйнштейн.* E=mc²: настоятельная проблема нашего времени

Математический кружок

22 *Н. Вагутен.* Арифметические препятствия
31 **Победители конкурса «Кванта»**

Задачник «Кванта»

32 Задачи М551—М555; Ф563—Ф567
34 Решения задач М504,М506,М507;Ф513, Ф516, Ф517

По страницам школьных учебников

41 *В. Рыжик.* Где ошибка?

«Квант» для младших школьников

42 Задачи
43 *А. Савин.* Число — буква — число

Практикум абитуриента

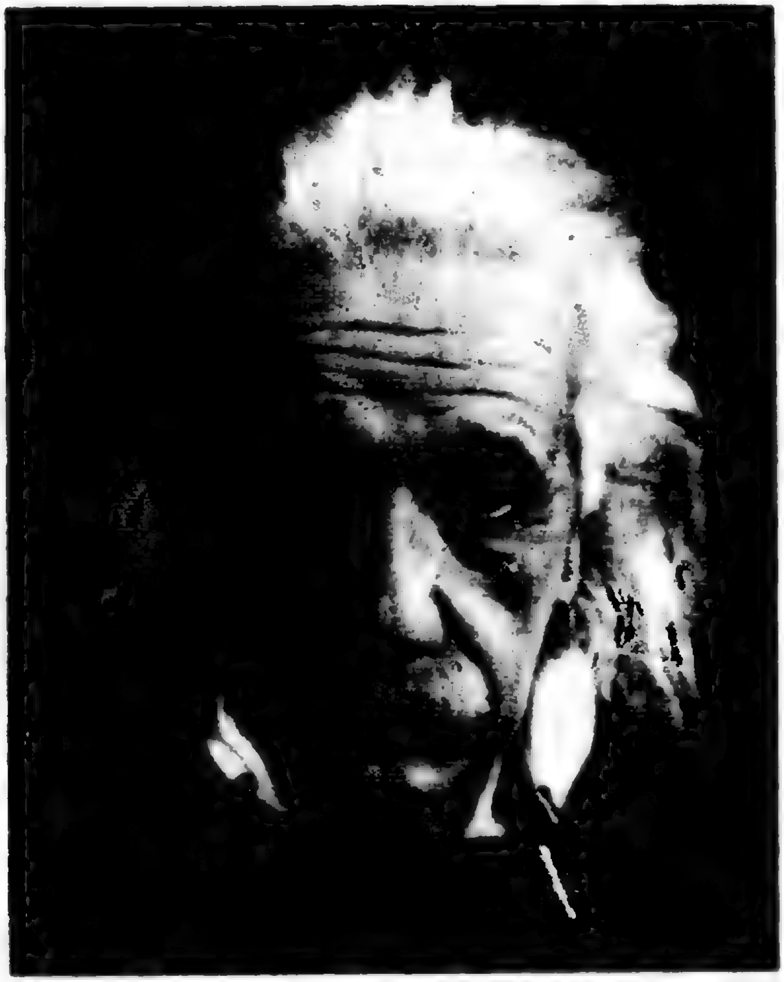
45 *Л. Асламазов.* Работа и мощность электрического тока
51 *С. Сефибеков.* Доказательство геометрических неравенств
54 *А. Васильев, А. Пономаренко.* Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Хроника НОУ

56 *Т. Кузнецова.* 15 лет Челябинскому НОУ
57 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка *(с. 50)*
Смесь *(с. 40, 44, 55.)*

На первой
странице обложки
вы видите рисунок
М. Эшера «Бельведер».
В его основе лежит
идея «перепутанного куба»,
двумерное
изображение которого
не отличается от обычного

© Главная редакция физико-математической литературы
издательства «Наука», «Квант», 1979



14 марта исполняется 100 лет со дня рождения Альберта Эйнштейна, которого В. И. Ленин отнес к великим преобразователям естествознания. С именем Эйнштейна связано начало революции в физике, которой ознаменовался XX век. Идеи созданной им теории относительности в корне изменили взгляды на физические явления, происходящие как в микромире, так и во всей Вселенной. Философский смысл этих открытий, их диалектический характер полностью раскрылись лишь в наши дни.

Эйнштейн внес свой вклад во многие разделы физики. Он был одним из создателей современных квантовых представлений о природе излучения и заложил основы теории лазеров. Его теория броуновского движения привела к окончательному утверждению молекулярной теории строения веществ.

Альберт Эйнштейн не был кабинетным ученым, равнодушным к судьбе человечества. Он необычайно остро воспринимал все, что происходило вокруг него. Покинув в 1933 г. нацистскую Германию, он активно выступал против войны, за взаимопонимание между народами.

Эйнштейн был одним из первых, кто увидел опасность развития ядерного оружия. В своих выступлениях и статьях он стремился сделать все, что было в его силах, чтобы остановить гонку вооружений и прекратить проповедь войны. Когда он умер, на столике возле его больничной кровати нашли неоконченную рукопись, посвященную проблемам разоружения и всеобщего мира.

В этом номере мы помещаем материалы, цель которых — представить нашим читателям Альберта Эйнштейна и как ученого, и как человека.

Обращение в защиту мира

Советский Союз всегда был в передовых рядах борцов за всеобщее разоружение, за прочный мир между народами. Наша страна создала атомное оружие не для нападения или шантажа. Его создание лишило американских империалистов каких-либо надежд на монополию в области атомного оружия, привело к установлению стратегического равновесия сил и открыло человечеству путь к переговорам о запрещении испытаний атомных и водородных бомб. Советский Союз настаивает на прекращении производства и совершенствования всех видов оружия массового уничтожения. В этой борьбе нас поддерживает все прогрессивное человечество.

Альберт Эйнштейн активно боролся за мир. Он стремился привлечь как можно больше научных работников в ряды сторонников мира. В декабре 1954 г. по английскому радио было передано обращение к ученым всего мира, подписанное одиннадцатью выдающимися учеными. Одним из них был Альберт Эйнштейн.

В обращении, которое не утратило актуальности и сегодня, в частности, говорилось:

...В трагической ситуации, перед которой находится человечество, мы считаем, что ученым следует собраться на конференцию, чтобы оценить опасность, возникшую в результате развития оружия массового уничтожения, и обсудить возможность принятия решения в духе предложенной ниже резолюции...

Мы должны научиться мыслить по-новому. Нам нужно перестать спрашивать себя, какие шаги обеспечат военную победу той группировке, которую мы предпочитаем, потому что таких шагов уже нет; нам нужно задавать себе другой вопрос: какие шаги необходимо предпринять, чтобы избежать военной конфронтации, результатом которой будет неизбежная катастрофа для всех сторон.

Широкая общественность и даже многие люди, занимающие авторитетные посты, не поняли, с чем была бы связана ядерная война. Общественность по-прежнему думает в терминах уничтожения городов. Конечно, новые бомбы более мощны, чем старые, и в то время как одна атомная бомба смогла стереть с лица Земли Хиросиму, одна водородная бомба сможет уничтожить такие крупные города как Лондон, Нью-Йорк, Москва.

Из достоверных источников известно, что можно изготовить бомбу, в 2500 раз более мощную, чем та, которая уничтожила Хиросиму. Такая бомба, если она взрывается около земли или под водой, посылает радиоактивные частицы в верхние слои атмосферы. Они постепенно опускаются и достигают поверхности Земли в форме смертоносной пыли или дождя. Эта пыль и поразила японских рыбаков и их улов.

Никто не знает, как будут распространяться смертоносные радиоактивные частицы, но авторитетные специалисты утверждают, что война с применением водородных бомб может положить конец существованию человечества. Имеется опасение, что, если будет использовано много водородных бомб, наступит всеобщая смерть, скоротечная для меньшинства, медленные мучения, болезни и неизбежная гибель — для большинства.

Много предостережений было высказано выдающимися учеными и специалистами по военной стратегии. Никто из них не утверждает, что наихудшие результаты неизбежны. Но они утверждают, что эти результаты возможны и что никто не может быть уверен, что они не будут реализованы. Мы до сих пор не обнаружили, что эти точки зрения экспертов зависят от их политических взглядов или предрассудков. Они зависят, как показали наши исследования, от широты познаний данного эксперта. Мы убедились, что те, кто знает больше всего, наиболее мрачно настроены.

Проблема, которую мы ставим перед вами, выглядит так: положим ли мы конец человечеству или же человечество откажется от войны?

Мы предлагаем будущему конгрессу и, через него, всем ученым мира и мировой общественности подписаться под следующей резолюцией:

«В связи с тем фактом, что в любой будущей войне ядерное оружие обязательно будет использовано и что такое оружие угрожает самому существованию человечества, мы настойчиво призываем правительства всех стран мира понять и публично признать, что их цели не могут быть осуществлены с помощью мировой войны, и мы настойчиво призываем их найти мирные средства для решения всех спорных вопросов между ними».

Я. Смородинский

Альберт Эйнштейн

(1879—1979)

Сто лет назад в немецком городе Ульме появился на свет ребенок, которому суждено было совершить одно из самых замечательных открытий в истории естествознания — ему суждено было стать отцом теории относительности: 14 марта 1879 года родился Альберт Эйнштейн.

Не было в истории науки другой теории, которая выдержала столько споров, рассеяла такое упорное недоверие, как теория относительности. Очень немногие современники Эйнштейна смогли сразу принять новое учение — так оно отличалось от всего, что знали физики девятнадцатого века. И прошло немало времени, прежде чем теория относительности стала основой всей науки о природе.

Но слава Эйнштейна основывается не только на одном этом открытии. Когда в 1922 г. ему присуждалась Нобелевская премия, теория относительности еще не была признана всеми, и премией было увенчано открытие законов фотоэффекта. Нам сейчас трудно понять нерешительность Нобелевского комитета, но и работа о фотоэффекте открыла новую эпоху физики. Эта работа доказывала существование кванта света —фотона.

Эйнштейна всегда интересовали самые общие вопросы физики, он пытался понять, как устроен наш мир, старался найти глобальные законы, которые им управляют. «Меня выводят из себя ученые, — говорил он, — которые берут доску, выбирают в ней самое тонкое место и уже там, где сверлить легко, проделывают очень много дырочек». Сам Эйнштейн тратил свои силы только там, где сверлить было трудно.

Попробуем рассказать о его работах и о разных эпизодах из жизни великого физика в серии коротких, не очень связанных между собой тринадцати очерков.

I. Первые работы

Свою первую работу Эйнштейн напечатал в 1901 г. Копии ее он посылал в разные лаборатории, пытаясь устроиться на работу после окончания Цюрихского политехникума. Эти попытки оказались безуспешными. (Через много лет те, кто не откликнулся на его просьбы, принимали его с величайшими почестями.) Лишь в июне 1902 г., через два года после окончания политехникума, Эйнштейн смог получить место технического эксперта в Швейцарском патентном бюро.

К началу 1905 г. у Эйнштейна было уже шесть опубликованных работ. Сам Эйнштейн впоследствии невысоко оценивал свои первые научные труды. Первая его работа, действительно, была довольно элементарным исследованием сил, действующих между молекулами в капиллярных явлениях. Следующие четыре работы были посвящены тепловым явлениям. В них Эйнштейн развивает общую теорию этих явлений. Работы эти имели бы исключительно важное значение, если бы... общая теория тепловых явлений не была сформулирована несколько раньше Гиббсом. Молодой Эйнштейн плохо был знаком с научной литературой и не знал о работах великого американца.

Шестая работа называлась «Новое определение размеров молекул». Она была прислана в редакцию немецкого физического журнала «Annalen der Physik» («Анналы физики»), в котором были опубликованы и предыдущие пять статей Эйнштейна, 30 апреля 1905 г. Работа была посвящена диффузии в жидкостях, и в ней, по существу, были заложены первые идеи теории броуновского движения

Эту работу Эйнштейн защитил как диссертацию на степень доктора философии (так тогда называлась ученая степень).

II. Золотой год

1905 г. — год первой русской революции — оказался золотым годом в истории физики. В этом году в журнале «Annalen der Physik» появляются одна за другой еще четыре работы Эйнштейна. В первой из них была создана теория фотоэффекта. Во второй — теория броуновского движения. В третьей были получены основные формулы механики и электродинамики в специальной теории относительности. В четвертой статье была получена одна из самых знаменитых формул XX века — формула, связывающая массу и энергию.

Каждая из этих работ обеспечивала их автору бессмертие. И эти открытия были сделаны человеком, который работал в полном одиночестве, не встречался с учеными-физиками, а о своих идеях рассказывал лишь близким друзьям.

С этих работ Эйнштейна начался новый век в физике.

III. Фотоэффект

В 1900 г. Планк выдвинул гипотезу о том, что атомы испускают свет отдельными порциями — квантами, энергия которых пропорциональна частоте света:

$$E = h\nu. \qquad (1)$$

Такое предположение о характере излучения атомов позволяло объяснить некоторые закономерности излучения нагретого тела.

Эйнштейн пошел дальше Планка. Один из вопросов, который он разбирал, был вопрос об ионизации газов светом. Было известно, что свет с большой длиной волны не ионизует атом: существует некоторая критическая длина волны λ_0 такая, что только свет с длиной волны $\lambda < \lambda_0$ может ионизовать атом (для разных атомов λ_0 разная). Загадочность этого явления исчезает, если предположить, что сам по себе свет состоит из порций — квантов, и энергия этих световых квантов связана с частотой света тем же соотношением $E = h\nu$. Если перейти от частоты ν к длине волны $\lambda = c/\nu$, то соотношение (1) примет вид $E = hc/\lambda$. Так что свет с длиной волны $\lambda < \lambda_0$ — это кванты, энергия которых $E < E_0 = hc/\lambda_0$, где E_0 — энергия ионизации атома.

Основываясь на предположении о квантовом характере света, Эйнштейн создал теорию фотоэффекта, объясняющую основные его законы: существование для каждого вещества минимальной частоты света, ниже которой фотоэффект не возникает, и независимость кинетической энергии вылетающих под действием света электронов от интенсивности света.

Если электрон находится вблизи поверхности тела и для того чтобы вырваться за его пределы ему надо совершить работу P (против сил притяжения к положительным зарядам), то под действием света с частотой ν (и соответственно, с энергией квантов $h\nu$) он вылетит с кинетической энергией

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - P.$$

Если энергия квантов света $E = h\nu \leqslant P$, то $v = 0$ — фотоэффект не возникает. Максимальная энергия электронов, вылетающих из тела под действием света, не зависит от интенсивности света — она определяется только частотой падающего света.

К формуле фотоэффекта Эйнштейн пришел, размышляя над различием между описанием частиц и света: «... может оказаться, что теория света, оперирующая непрерывными пространственными функциями, приведет к противоречию с опытом, когда ее будут применять к явлениям возникновения и превращения света», — писал он в начале работы под странным названием «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света» *), полученной редакцией упомянутого журнала 18 марта 1905 г.

Еще много лет Эйнштейн продолжал обсуждать вопрос о том, состоит

---

*) Эвристический — значит относящийся к изобретению, открытию, а также приводящий к открытию новых идей.

Эйнштейн — технический эксперт Швейцарского патентного бюро (Берн, 1903 г.).

ли электромагнитное поле из квантов или же, как думал Планк, дело только в том, что атом излучает и поглощает свет порциями, как автомат, который отмеряет порциями воду или бензин.

Правильной оказалась точка зрения Эйнштейна. В его работе о фотоэффекте родилось понятие об элементарной частице — кванте света. Первой элементарной частицей был электрон, второй стал квант света — фотон. С тех пор список элементарных частиц непрерывно пополняется.

IV. Броуновское движение

«О движении взвешенных частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты» — так называлась вторая работа «золотого года» (она поступила в редакцию 11 мая).

Эйнштейн сравнивает между собой движение молекулы в жидкости и движение маленького плавающего внутри этой жидкости (как говорят, «взвешенного») шарика. И молекула, и микроскопический шарик, подвергаясь ударам других молекул, движутся в жидкости хаотически. Рассматривая это сходство более подробно, Эйнштейн, исходя из самых общих законов кинетической теории, показал, что средние кинетические энергии хаотически движущихся молекулы и шарика должны быть одинаковы.

«...согласно молекулярной теории тепла, тела размерами порядка 1/1000 мм, взвешенные в жидкости, совершают видимое беспорядочное движение, обязанное тепловому движению молекул. Такое движение на самом деле наблюдалось биологами, которые называют его броуновским движением» (из письма Эйнштейна к его другу Габихту весной 1905 г.).

Шарик в жидкости, двигаясь беспорядочно, будет все же медленно перемещаться в жидкости, «диффундируя» в ней (как молекула). Эйнштейн показал, что среднее значение квадрата перемещения шарика пропорционально времени.

Подробную теорию броуновского движения Эйнштейн опубликовал немного позже (в 1906 г.) в другой статье. В ней он сообщает, что броуновское движение, которое наблюдали другие физики, действительно хорошо описывается его формулами. Эта работа Эйнштейна положила конец многолетним спорам о реальности существования молекул.

V. Рождение теории относительности

Многие крупнейшие физики и математики (особенно Лоренц и Пуанкаре) думали о том, как надо описывать оптические явления в движущейся системе координат. Свои взгляды на этот вопрос Эйнштейн изложил в статье «К электродинамике движущихся тел». Она поступила в редакцию 30 июля 1905 г.

В механике все инерциальные системы равноправны (принцип Галилея). Эйнштейн начинает статью с более широкой гипотезы: «... для всех координатных систем, для которых справедливы уравнения механики, справедливы одни и те же электродинамические и оптические законы...». И дальше он описывает свою теорию так: «Это предположение (содержание которого в дальнейшем будет называться «принципом относительности») мы намерены превратить в предпосылку и сделать, кроме того, добавочное допущение, находящееся с первым лишь в кажущемся противоречии, а именно, что свет в пустоте всегда распространяется с определенной скоростью v, не зависящей от состояния движения излучающего тела...».

Один из главных выводов теории, который никак не хотели принять ее критики, состоял в том, что длительность любого физического процесса и интервал между двумя событиями оказываются разными с точки зрения систем отсчета, которые движутся с разными скоростями. Короче говоря, *в разных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, время течет по-разному*. Сейчас это — твердо установленный факт. Мезоны, «родившиеся» в верхних слоях атмосферы на высоте, скажем, 10 км, доходят до поверхности Земли. Двигаясь со скоростью, близкой к скорости света, мезоны проходят это расстояние приблизительно за 10^{-4} с, хотя в покое мезон распадается за время $2\cdot10^{-6}$ с. С точки зрения теории относительности все ясно: в системе, где мезон покоится, еще не успели пройти $2\cdot10^{-6}$ с. Остановившись в приборе на Земле, мезон распадается (именно так и был он открыт). Таких примеров можно привести сейчас много. Открытие Эйнштейна прочно вошло в фундамент современной физики.

В кабинете Эйнштейна висели три портрета: Ньютона, Фарадея и Максвелла. В своей теории относительности он объединил в единую науку механику, созданную Ньютоном, и теорию электричества и магнетизма, созданную Фарадеем и Максвеллом.

VI. Эйнштейн о себе

«Иногда меня спрашивают, как я создал теорию относительности. Я думаю, что это произошло по следующей причине. Нормальный взрослый человек никогда не размышляет о проблемах пространства и времени. О таких вещах он думает лишь в детстве. Мое же умственное развитие оказалось замедленным, и я принялся размышлять о пространстве и времени, лишь достигнув зрелого возраста. Естественно, что мне удалось глубже проникнуть в проблему, чем ребенку с обычными способностями...».

VII. Масса и энергия

В работе, о которой мы только что говорили, Эйнштейн получил выражение для массы движущегося электрона — формулы, определяющие связь между массой электрона и его скоростью.

Если сила перпендикулярна скорости электрона (электрон движется по окружности), то он ведет себя так, как будто его масса («поперечная масса») равна $\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, где m_0 — масса покоя электрона (ньютоновская масса), v — его скорость. Величину $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ называют сейчас лоренцевым фактором. Если сила направлена вдоль скорости электрона (электрон движется прямолинейно), то он ведет себя так, как будто его масса («продольная масса») равна $m_0\gamma^{3/2}$.

Если над электроном производится работа (например, если он движется в электрическом поле), то его энергия возрастает. Эйнштейн показал, что кинетическая энергия K электрона связана с его скоростью соотношением

$$K = m_0(\gamma - 1)c^2.$$

Величину m_0c^2 называют энергией покоя, величину

$$W = m_0\gamma c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (2)$$

— полной энергией электрона. Так что кинетическая энергия электрона равна разности полной энергии и энергии покоя.

Для тех, кто знает элементы дифференциального исчисления, приведем вывод формулы (2). *Полное* изменение энергии, очевидно, равно работе, то есть произведению силы на перемещение (напомним, что электрон движется прямолинейно):

$$\Delta W = f\Delta x = ma\Delta x,$$

где a — ускорение электрона. Заменяя a на отношение $\Delta v/\Delta t$ и вспоминая, что $v = \Delta x/\Delta t$, получим:

$$\Delta W = m\frac{\Delta v}{\Delta t}\Delta x = m\Delta v \cdot v,$$

или, заменяя приращение дифференциалами,

$$dW/dv = mv.$$

Если мы подставим $m = m_0\gamma^{3/2}$ и решим это простое уравнение, то получим формулу (2). Поэтому с W согласуется формула для продольной массы. Напомним, что сила, перпендикулярная скорости, не совершает работы!

27 сентября 1905 г. в редакцию того же журнала пришла совсем маленькая заметка Эйнштейна «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?». Если раньше говорилось об изменении массы тела с ростом скорости, то в этой заметке было доказано, что любое изменение энергии тела изменяет и его массу: «Масса тела есть мера содержащейся в нем энергии; если энергия изменяется на величину L, то масса меняется, соответственно, на величину $L/(9 \cdot 10^{16})$, причем здесь энергия измеряется в джоулях, а масса — в килограммах».

Этим и устанавливается формула $E = mc^2$, как ее пишут сейчас (размерность c — м/с).

Новую формулу было очень трудно проверить в то время. В следующей работе Эйнштейн, предлагая способ измерения отношения продольной и поперечной масс, замечает: «Автор не в состоянии сам поставить подобный эксперимент и будет рад, если кто-нибудь из физиков заинтересуется предложенным методом». Сейчас формулы теории относительности проверены на ускорителях, во многих приборах, но в начале века надо было понять всю глубину теории, чтобы в них поверить.

VIII. Работа Бозе

В 1900 г. Планк объяснил, каковы закономерности распределения интенсивности света в спектре нагретого тела. Для этого ему пришлось сделать предположение, что свет излучается и поглощается квантами. Как мы уже говорили, через пять лет Эйнштейн доказал, что кванты существуют в свободном виде и поведение их очень похоже на поведение частиц. С такой точки зрения предложенную Планком формулу можно понимать как формулу, которая определяет, сколько квантов с определенным значением энергии вылетает из нагретого тела. Свет с этой точки зрения можно рассматривать как фотонный газ, а распределение энергии между отдельными фотонами этого газа («сколько фотонов имеют данную энергию?») описывается формулой Планка. Но никто, даже сам Эйнштейн, не воспользовался в то время этой идеей.

В 1924 г. Эйнштейн получил письмо от физика из Дакки (сейчас это столица Народной республики Бангладеш). К письму была приложена статья, в которой идея Эйнштейна о квантах была использована самым решительным образом. Не вдаваясь в обсуждение тонких вопросов, автор статьи Бозе, принимая безоговорочно гипотезу световых квантов и рассматривая их собрание как идеальный газ, вывел формулу для распределения квантов по энергиям совсем так, как выводят формулы для идеального газа в кинетической теории. При этом Бозе считал (хотя и не подчеркнул этого в своей работе), что кванты абсолютно тождественны, если они имеют одинаковые энергии. Формула Планка получилась совершенно строго. Это означало, что гипотеза Эйнштейна о реальности квантов на самом деле доказывалась уже формулой Планка, но никто этого до Бозе не смог заметить. Эйнштейн был в восторге от того, что с квантами можно обращаться как с атомами. Он перевел статью Бозе на немецкий язык и сам послал ее в журнал, где она и была напечатана. В примечании Эйнштейн написал: «Вывод формулы Планка, предложенный Бозе, является большим достижением. Использованный им метод дает также квантовую теорию идеального газа, которую я изложу в другом месте». Он увидел в формуле Бозе нечто совершенно новое, что привело его к новому открытию.

IX. Статистика Бозе — Эйнштейна

Идея, которая возникла у Эйнштейна, когда он читал статью Бозе, состояла в том, что если, пользуясь гипотезой о тождественности фотонов с одинаковыми энергиями, можно было вывести формулу Планка, то можно попытаться применить тот же метод к идеальному квантовому одноатомному газу, атомы которого имеют отличную от нуля массу.

Результат был великолепен. Сразу же получились формулы, описывающие все тепловые свойства такого газа, и можно было, продолжив аналогию с фотонами, задуматься о неожиданных волновых свойствах частиц, о которых в 1924 г. написал в своей диссертации Луи де Бройль.

В 1924 г. на физической конференции в австрийском городе Инсбруке Эйнштейн обратил внимание на то, что из теории де Бройля следует существование явлений дифракции и интерференции в молекулярных пучках.

В теории одноатомного газа он эффективно использовал идею квантов для вывода уравнения состояния квантового идеального газа и изучения других его свойств.

Новая теория получила название статистики Бозе — Эйнштейна. Она была создана на год раньше, чем появилась законченная квантовая механика. Дальнейшее развитие теории привело к созданию теории сверхтекучести гелия и многих других удивительных явлений в квантовом мире. Но Эйнштейн сам не был удовлетворен. Он продолжал считать, что метод Бозе «...ни в коей мере не является бесспорным, но кажется обоснованным лишь благодаря успеху в случае излучения...». Хотя Эйнштейн был первым, кто ввел гипотезу квантов в теорию света, он до конца своих дней не мог примириться с двойственной природой частиц и излучения, стараясь найти другое описание реальности. Так до конца своих дней основоположник теории квантов и не смог примириться с современной квантовой физикой.

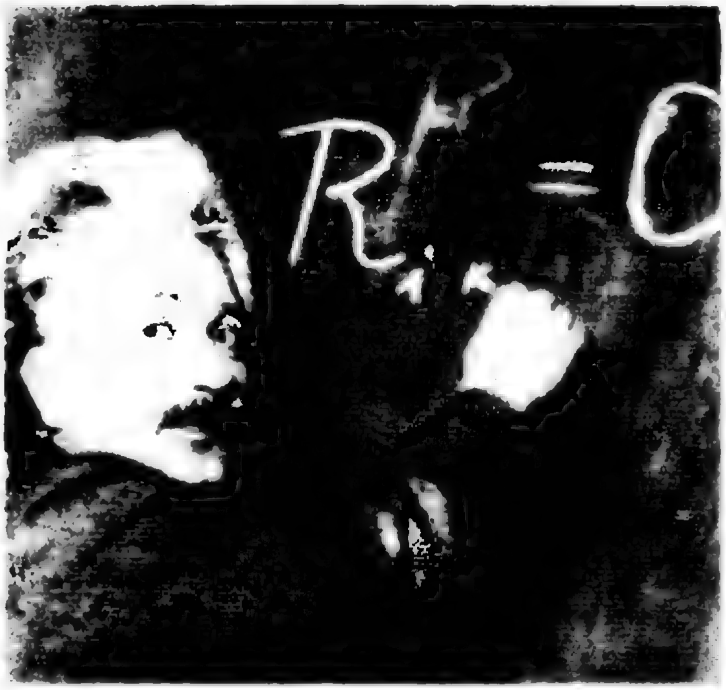
X. Вынужденное и спонтанное излучение

В 1916 г. размышления Эйнштейна еще раз привели его к замечательным результатам.

Вопрос, который интересовал Эйнштейна, был по существу прост. Надо было понять, как гипотеза квантов должна изменить представления о законах испускания и поглощения света.

Если свет состоит из квантов — фотонов, то почти очевидно, что вероятность поглотить свет заданной частоты должна быть тем больше, чем больше квантов этой частоты существует в потоке света. Чем же определяется вероятность излучения света данной частоты?

Ответ, данный Эйнштейном на этот вопрос, станет понятней, если мы рассмотрим следующий пример из области механических колебаний. Как будет вести себя колеблющаяся струна, если около нее будет непрерывно



◄ **Эйнштейн на лекции (США, 1932 г.).**

► **Страница из письма Эйнштейна немецкому астроному Халле, в котором обсуждается вопрос о возможности наблюдения отклонения световых лучей в поле тяжести Солнца.**

колебаться с той же частотой другая струна? Если колебания струн будут в фазе — размах колебаний первой струны возрастет; если колебания будут в противофазе — колебания первой струны затухнут. Оба процесса будут тем интенсивнее, чем с большей амплитудой колеблется струна-«донор», колебания которой поддерживаются каким-то источником энергии. (Если струны-донора нет, то колебания первой струны будут затухать, даже если нет трения, и вся ее энергия уйдет на создание звука в воздухе.)

Анализ аналогичной ситуации для света и атома привел Эйнштейна к выводу, что если вероятность поглотить квант пропорциональна числу имеющихся в луче света квантов, то вероятность испустить квант состоит из двух слагаемых. Одно из них описывает индуцированное излучение — излучение, которое обусловлено воздействием на атом света (который «раскачивает» атом). Эта часть пропорциональна числу имеющихся в луче света квантов. Второе слагаемое не зависит от числа квантов и не обращается поэтому в нуль для атома в вакууме. Это слагаемое описывает так называемое спонтанное, то есть самопроизвольное, излучение.

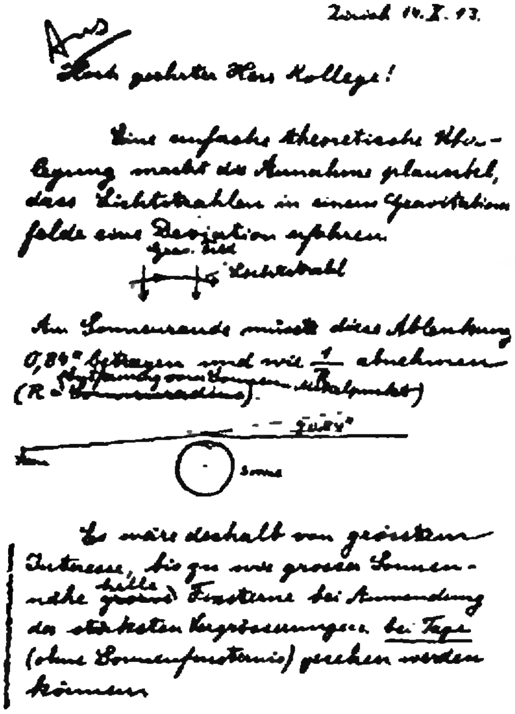
Если в среду попадает мощный световой поток, то есть большое количество квантов, индуцированное излучение преобладает, становясь очень интенсивным.

С индуцированным излучением связан принцип работы лазера. Эффект, предсказанный Эйнштейном в 1916 г., стал сейчас основным для огромного количества лазерных приборов и установок.

XI. Общая теория относительности и отклонение света в поле Солнца

Об общей теории относительности, или о теории тяготения, рассказывать трудно. Очень немногие поняли ее фундаментальное значение. Академик Ландау любил говорить, что хотя он сам глубоко понимает общую теорию относительности Эйнштейна, он не может себе представить, как можно было до нее догадаться.

Но один из вопросов, с которого начал Эйнштейн, совсем прост: как влияет поле тяжести, например, поле Солнца, на распространение света? Как кто-то вспомнил много позже, этим вопросом интересовались еще в 18 веке, и тогда же был получен первый ответ. Ответ был тоже прост. Если согласиться с Ньютоном, что



Zürich 14. X. 13.

Ans

Hoch geehrter Herr Kollege!

Eine einfache theoretische Überlegung macht die Annahme plausibel, dass Lichtstrahlen in einem Gravitationsfelde eine Deviation erfahren.

Grav. feld
Lichtstrahl

Am Sonnenrande müsste diese Ablenkung 0,84" betragen und wie $\frac{1}{R}$ abnehmen (R = ~~Sonnenradius~~ Abstand vom Sonnenmittelpunkt).

0,84"
Sonne

Es wäre deshalb von grösstem Interesse, bis zu wie grosser Sonnennähe ~~grosse~~ helle Fixsterne bei Anwendung der stärksten Vergrösserungen bei Tage (ohne Sonnenfinsternis) gesehen werden können.

свет есть поток корпускул, то корпускулы должны пролетать около Солнца как кометы. Траекторию кометы, которая проходит около Солнца, сосчитать нетрудно. Расчет дает, что она отклонится от прямой на 0,85″. Это малое отклонение было сосчитано еще в 1801 году немецким астрономом Зольднером.

В 1915 г. Эйнштейн получил другой результат: согласно созданной им теории тяготения отклонение в поле Солнца должно составлять 1,7″. «Удвоение» эффекта было следствием того, что около Солнца перестают действовать законы геометрии Евклида и в результате изменяется сам закон всемирного тяготения Ньютона. Тела около Солнца притягиваются к нему сильнее, чем это следует из закона всемирного тяготения.

В 1915 г. Эйнштейн уже не был никому не известным экспертом. К его словам прислушивался весь мир. И хотя в Европе бушевала война, астрономы начали обсуждать, как наблюдать предсказанное отклонение. Ведь в 1919 г. должно было произойти солнечное затмение, во время которого можно было бы проверить, существует ли эффект, предсказанный Эйнштейном. Затмение ожидалось 29 мая, когда вблизи Солнца проходят лучи света от многих очень ярких звезд. В апреле две экспедиции покинули Англию. Одна направилась в Бразилию, вторая — на остров Принсипи вблизи западного берега Африки. 29 мая на острове все утро шел дождь, но перед самым затмением небо прояснилось, и экспедиция смогла начать фотографирование. Все же погода сделала свое дело: облака заслонили звезды, и когда спустя шесть дней снимки были обработаны, только один снимок дал хорошие подтверждения эффекта Эйнштейна. Снимки из Бразилии обрабатывались в Англии. Только четыре месяца спустя, 22 сентября (обычные почтовые связи были нарушены войной!), пришла телеграмма от Лоренца из Голландии: «Эддингтон обнаружил смещение звезд у края Солнца...». Конечно, никакое наблюдение не может доказать теорию окончательно, но с тех пор в теории Эйнштейна мало кто сомневался. Лишь небольшая группа старых физиков пыталась (и с большим упорством) отрицать ее выводы.

Но время классической физики прошло. Сейчас существует много фактов, подтверждающих общую теорию относительности. Самое главное для физиков нашего времени — это то, что без этой теории нельзя понять, как развивается Вселенная.

XII. Эволюция Вселенной

Наверное, самое величественное в здании, построенном Эйнштейном, — это его космологические работы. В 1917 г. была опубликована работа под названием «Вопросы космологии и общая теория относительности».

Эта работа выделяется своей смелостью. Подобно Ньютону, который объявил о том, что закон падения тел на Земле тот же, что и законы, управляющие движением небесных тел, Эйнштейн заявил, что законы общей теории относительности, проверенные в пределах Солнечной системы, справедливы для всей Вселенной. Он написал и решил уравнения Вселенной. Решение, которое Эйнштейн получил, было удивительным: Вселенная оказалась замкнутой...

Однако при анализе этих уравнений Эйнштейн не учел всех возможных решений. Пять лет спустя советский физик А. Фридман показал, что уравнения Эйнштейна имеют другие решения, но эти решения не статические — Вселенная расширяется. Эйнштейн сначала не поверил Фридману и объявил, что тот ошибся. В Берлине в это время находился советский физик Ю. Крутков, который смог убедить Эйнштейна в его неправоте, и 31 мая 1923 г. Эйнштейн опубликовал маленькую заметку: «...я считаю — писал он — результаты Фридмана правильными и проливающими новый свет. Оказывается, уравнения поля допускают наряду со статическими также и динамические (т. е. переменные относительно времени) центрально-симметричные решения для структуры пространства».

Решение Фридмана не требовало, чтобы Вселенная была обязательно замкнута. Современные данные указывают скорее на то, что Вселенная бесконечно расширяется, причем скорость ее расширения растет с расстоянием примерно по закону

$$v = \frac{R}{T},$$

где T —постоянная, равная $2 \cdot 10^{10}$ лет. Этот закон носит имя открывшего его астронома Хаббла, а постоянную $H = 1/T$ называют постоянной Хаббла. Расширение Вселенной подтверждено многими наблюдениями, а закон Хаббла проверен до расстояний, которые свет проходит за 10—12 миллиардов лет.

Так Эйнштейн завершил «покорение» законов Вселенной, начатое Ньютоном. Человек на Земле понял законы, которыми управляется космос. «Самое непонятное в природе — это то, что ее можно понять», — сказал Эйнштейн.

XIII. Гравитационные волны

О гравитационных волнах скажем лишь совсем коротко.

Первым, кто понял, что гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света, был Пуанкаре. Существование волн тяготения было простым следствием уравнений общей теории относительности. Эта теория не отвергала того, что никакой сигнал не может быть передан со скоростью, большей скорости света. В 1937 г. (вместе с Розеном) Эйнштейн исследовал теоретически гравитационные волны — эту его работу продолжают и сейчас многие теоретики. Гравитационные волны пока не обнаружены экспериментально, но по-видимому, не очень далек тот день, когда на Земле зарегистрируют гравитационный сигнал от какой-нибудь великой космической катастрофы — рождения сверхновой звезды или еще чего-нибудь в этом роде.

Эпилог

Мы кончаем на 1937 г. Эйнштейн не перестал работать; он до самой своей смерти 18 апреля 1955 г. все больше и больше погружался в новые теории, о которых рассказать невозможно. Он хотел найти еще более общие законы, чем законы тяготения — он работал над тем, что он сам называл единой теорией поля. Последние слова в его последней научной статье были: «... сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории».

К работам последних лет Эйнштейна относились по-разному. Многие считали, что успех ему изменил, и все, что он делал в эти годы, было неверным. Многие даже считали, что и сама задача безнадежна. Так ли это? Можно лишь сказать, что сейчас такое мнение уже не кажется бесспорным. Все чаще на страницах журналов появляются слова «единая теория поля». Конечно, время течет, и новый путь — совсем не тот, которым шел Эйнштейн.

Но глубокие идеи Эйнштейна не исчезают.

«Все, что исходило из его в высшей степени великого интеллекта, было столь ясным и красивым, как хорошие произведения искусства» — эти слова, написанные Эйнштейном в память Лоренца, в полной мере относятся к нему самому.

Автобиографические заметки

В 1949 году Альберт Эйнштейн написал «Автобиографические заметки». В них он рассказал об основных научных принципах, которыми руководствовался в своем творчестве. Незадолго до смерти, в 1955 году, Эйнштейн написал также очень краткие «Автобиографические наброски» — воспоминания о студенческих годах и о том, как зарождалась общая теория относительности. Мы помещаем здесь выдержки из этих работ, касающиеся раннего периода жизни великого ученого.

...В 1895 г. в шестнадцатилетнем возрасте я приехал из Италии в Цюрих, после того как без школы и без учителя провел год в Милане у родителей. Моей целью было поступление в политехникум, хотя я не совсем ясно представлял себе, как это можно осуществить. Я был своенравным, но скромным молодым человеком, который приобрел свои необходимые знания спорадически, главным образом путем самообразования. Я жаждал глубоких знаний, но обучение не казалось мне легкой задачей: я был мало приспособлен к заучиванию и обладал плохой памятью. С чувством вполне обоснованной неуверенности я явился на вступительный экзамен на инженерное отделение. Экзамен показал мне прискорбную недостаточность моей подготовки, несмотря на то, что экзаменаторы были снисходительны и полны сочувствия. Я понимал, что мой провал был вполне оправдан. Отрадно было лишь то, что физик Г. Вебер сказал мне, что я могу слушать его коллег, если останусь в Цюрихе. Но ректор, профессор Альбин Герцог, рекомендовал меня в кантональную школу в Аарау, где после годичного обучения я сдал экзамен на аттестат зрелости. Эта школа оставила след благодаря своему либеральному духу и скромной серьезности учителей, которые не опирались на какие-либо показные авторитеты; сравнение с шестилетним обучением в авторитарно управляемой немецкой гимназии убедительно показало мне, насколько воспитание в духе свободы и чувства личной ответственности выше воспитания, которое основано на муштре, внешнем авторитете и честолюбии. Настоящая демократия не является пустой иллюзией.

В том же году в Аарау у меня возник вопрос: если бы можно было погнаться за световой волной со скоростью света, то имели бы мы перед собой не зависящее от времени волновое поле? Такое все-таки кажется невозможным! Это был первый детский мысленный эксперимент, который относился к специальной теории относительности. Открытие не является делом логического мышления, даже если конечный продукт связан с логической формой.

1896—1900 гг. — обучение на отделении преподавателей специальных дисциплин швейцарского политехникума. Вскоре я заметил, что довольствуюсь ролью посредственного студента. Для того чтобы быть хорошим студентом, нужно обладать легкостью восприятия, готовностью сконцентрировать свои силы на всем том, что читается на лекции, любовью к порядку, чтобы записывать и затем добросовестно обрабатывать преподносимое на лекциях. Всех этих качеств мне основательно недоставало, как я с сожалением установил... Некоторые лекции я слушал с большим интересом. Но обыкновенно я много «прогуливал» и со священным рвением штудировал дома корифеев теоретической физики... Это широкое самостоятельное обучение было простым продолжением более ранней привычки; в нем принимала участие сербская студентка Милева Марич, которая позднее стала моей женой. Однако в физической лаборатории профессора Г. Вебера я работал со рвением и страстью. Захватывали меня также лекции профессора Гейзера по дифференциальной геометрии, которые были настоящими шедеврами педагогического искусства и очень помогли мне позднее в борьбе, развернувшейся вокруг общей теории относительности. Но высшая математика еще мало интересовала меня в студенческие годы. Мне ошибочно казалось, что это настолько разветвленная область, что можно легко растратить всю свою энергию в далекой провинции. К тому же по своей наивности я считал, что для физики достаточно твердо усвоить элементарные математические понятия и иметь их готовыми для применения, а остальное состоит в бесполезных для физики тонкостях, — заблуждение, которое только позднее я с сожалением осознал. У меня, очевидно, не хватало математических способностей, чтобы отличить центральное и фундаментальное от периферийного и не принципиально важного.

В эти студенческие годы развилась настоящая дружба с товарищем по учебе Марселем Гроссманом. Раз в неделю мы торжественно шли с ним в кафе «Метрополь» на набережной Лиммат и разговаривали не только об учебе, но и, сверх того, о всех вещах, которые могут интересовать молодых людей с открытыми глазами. Он не был таким бродягой и чудаком, как я, но был связан со швейцарской средой и в пределах возможного не потерял внутренней самостоятельности. Кроме того, он обладал в избытке как раз теми данными, которых мне не хватало: быстрым восприятием и порядком во всех отношениях. Он не только посещал все лекции, которые мы считали важными, но и обрабатывал их так замечательно, что если бы его тетради перепечатать, то их вполне можно было бы издать. Для подготовки к экзаменам он одалживал мне эти тетради, которые служили для меня спасательным кругом; о том, как мне жилось бы без них, лучше не гадать...

Для меня не подлежит сомнению, что наше мышление протекает в основном, минуя символы (слова), и к тому же бессознательно. Если бы это было иначе, то почему нам случается иногда «удивляться», притом совершенно спонтанно, тому или иному восприятию? Этот «акт удивления», по-видимому, наступает тогда, когда восприятие вступает в конфликт с достаточно установившимся в нас миром понятий. В тех случаях, когда такой конфликт переживается остро и интенсивно, он в свою очередь оказывает сильное влияние на наш умственный мир. Развитие этого умственного мира представляет собой в известном смысле преодоление чувства удивления — непрерывное бегство от «удивительного», от «чуда».

Чудо такого рода я испытал ребенком 4 или 5 лет, когда мой отец показал мне компас. То, что эта стрелка вела себя так определенно, никак не подходило к тому роду явлений, которые могли найти себе место в моем неосознанном мире понятий (действие через прикосновение). Я помню еще и сейчас — или мне кажется, что я помню, — что этот случай произвел на меня глубокое и длительное впечатление. За вещами должно быть что-то еще, глубоко скрытое. Человек так не реагирует на то, что он видит с малых лет. Ему не кажутся удивительными падение тел, ветер и дождь, он не удивляется на луну и на то, что она не падает, не удивляется различию между живым и неживым.

В возрасте 12 лет я пережил еще одно чудо совсем другого рода: источником его была книжечка по евклидовой геометрии на плоскости, которая попалась мне в руки в начале учебного года. Там были утверждения, например, о пересечении трех высот треугольника в одной точке, которые, хотя и не были сами по себе очевидны, могли быть доказаны с уверенностью, исключавшей как будто всякие сомнения. Эта ясность и уверенность произвели на меня неописуемое впечатление. Меня не беспокоило то, что аксиомы должны быть приняты без доказательства. Вообще мне было вполне достаточно, если я мог в своих доказательствах опираться на такие положения, справедливость которых представлялась мне бесспорной. Я помню, например, что теорема Пифагора была мне показана моим дядей еще до того, как в мои руки попала священная книжечка по геометрии. С большим трудом мне удалось «доказать» эту теорему при помощи подобных треугольников; при этом мне казалось, однако, «очевидным», что отношение сторон прямоугольного треугольника должно полностью определяться одним из его острых углов. Вообще мне казалось, что доказывать нужно только то, что не «очевидно» в этом смысле. И предметы, с которыми имеет дело геометрия, не казались мне другой природы, чем «видимые и осязаемые» предметы, т. е. предметы, воспринимаемые органами чувств. Это примитивное понимание основано, конечно, на том, что бессознательно учитывалась связь между геометрическими понятиями и наблюдаемыми предметами (длина — твердый стержень и т. п.)...

Хотя это выглядело так, будто путем чистого размышления можно получить достоверные сведения о наблюдаемых предметах, но такое «чудо» было основано на ошибке. Все же тому, кто испытывает это «чудо» в первый раз, кажется удивительным самый факт, что человек способен достигнуть такой степени надежности и чистоты в отвлеченном мышлении, какую нам впервые показали греки в геометрии...

В возрасте 12—16 лет я ознакомился с элементами математики, включая основы дифференциального и интегрального исчислений. При этом, на мое счастье, мне попались книги, в которых обращалось не слишком много внимания на логическую строгость, зато хорошо была выделена везде главная мысль. Все это занятие было поистине увлекательно; в нем были взлеты, по силе впечатления не уступавшие «чуду» элементарной геометрии, — основная идея аналитической геометрии, бесконечные ряды, понятия дифференциала и интеграла. Мне посчастливилось также получить понятие о главнейших результатах и методах естественных наук по очень хорошему популярному изданию, в котором изложение почти везде ограничивалось качественной стороной вопроса (бернштейновские естественнонаучные книги для народа — труд в 5—6 томов); книги эти я читал, не переводя дыхания. К тому времени, когда я в возрасте 17 лет поступил в Цюрихский политехникум в качестве студента по физике и математике, я уже был немного знаком и с теоретической физикой.

Эйнштейн — ученик кантональной школы в Аарау (1895 г.).

Там у меня были прекрасные преподаватели (например, Гурвиц, Минковский), так что, собственно говоря, я мог бы получить солидное математическое образование. Я же большую часть времени работал в физической лаборатории, увлеченный непосредственным соприкосновением с опытом. Остальное время я использовал главным образом для того, чтобы дома изучать труды Кирхгофа, Гельмгольца, Герца и т. д. Причиной того, что я до некоторой степени пренебрегал математикой, было не только преобладание естественнонаучных интересов над интересами математическими, но и следующее своеобразное чувство. Я видел, что математика делится на множество специальных областей и каждая из них может занять всю отпущенную нам короткую жизнь. И я увидел себя в положении буриданова осла, который не может решить, какую же ему взять охапку сена. Дело было, очевидно, в том, что моя интуиция в области математики была недостаточно сильна, чтобы уверенно отличить основное и важное от остальной учености, без которой еще можно обойтись. Кроме того, и интерес к исследованию природы, несомненно, был сильнее; мне как студенту не было еще ясно, что доступ к более глубоким принципиальным проблемам в физике требует тончайших математических методов. Это стало мне выясняться лишь постепенно, после многих лет самостоятельной научной работы. Конечно, и физика была разделена на специальные области, и каждая из них могла поглотить короткую трудовую жизнь, так и не удовлетворив жажды более глубокого познания. Огромное количество недостаточно увязанных эмпирически фактов действовало и здесь подавляюще. Но здесь я вскоре научился выискивать то, что может повести в глубину, и отбрасывать все остальное, все то, что перегружает ум и отвлекает от существенного...

Эйнштейн глазами современников

Много книг и статей написано об Эйнштейне. Он оставил глубокий след в памяти всех, с кем дружил, работал и встречался. Мы помещаем здесь высказывания выдающихся физиков разных стран: датчанина Нильса Бора, швейцарца Вильгельма Паули, советского физика Абрама Федоровича Иоффе, поляка Леопольда Инфельда, немцев Арнольда Зоммерфельда, Макса Лауэ и Макса Борна, американца Роберта Оппенгеймера, — которые помогут нашим читателям лучше представить себе этого замечательного человека и оценить его вклад в развитие науки. Приводится также высказывание первого советского комиссара просвещения Анатолия Васильевича Луначарского, который встречался с Эйнштейном в 1922 году.

«... Человечество всегда будет в долгу перед Эйнштейном за устранение ограничений нашего мировоззрения, которые были связаны с примитивными представлениями об абсолютном пространстве и времени. Он дал нам картину мира, характеризующуюся единством и гармонией, которые превосходят самые смелые мечты прошлых лет...»

Нильс Бор

«...Как ученый, Эйнштейн — величина одного порядка с Исааком Ньютоном... Подобно тому, как во времена Ньютона современники не могли предугадать богатство и глубину всех последствий его влияния, так же мало мы можем представить себе, какое влияние наследство Эйнштейна окажет на ход истории. Это покажет время...»

Макс Лауэ

«...С глубокомыслием и последовательностью философского мышления, не встречавшимися никогда до сих пор в умах

Ирэн Жолио-Кюри и Альберт Эйнштейн.

естествоиспытателей, с математической силой, которая напоминает Гаусса и Римана, Эйнштейн возвел в течение десяти лет здание, перед которым мы, следившие из года в год за его работой с напряженным вниманием, стоим, чувствуя изумление и головокружение...»

Арнольд Зоммерфельд

«...Я встречал в своей жизни многих ученых, более способных, чем я. Я восхищался их интеллектом, быстротой, с которой они решали проблемы, их блистательной диалектикой и тем, что они преодолевали трудности, непреодолимые для меня. В такие моменты переживаешь удивительное чувство восхищения и унижения, потому что не может быть неомраченной радость, когда видишь, как другой одолел препятствия, казавшиеся тебе неодолимыми. Но ни разу не возникло у меня и тени этого досадного чувства, когда я работал с Эйнштейном...»

Леопольд Инфельд

«...Жизнь его, устремленная в будущее, будет всегда напоминать нам о редком в наше время идеале человека, мыслителя и созерцателя, чьи помыслы были безраздельно отданы великим проблемам строения Вселенной...

...Для нового мышления, введенного в физику Эйнштейном, характерен непредвзятый, строящийся в конечном счете на эмпирически проверяемых принципах анализ традиционных фундаментальных понятий. При этом некоторые гипотезы оказываются излишними и слишком узкими, а некоторые понятия удается вообще исключить...»

Вильгельм Паули

«...Эйнштейн был передовым ученым и высоко ценил построение социализма в нашей стране, осуществляющего заветные мечты лучших людей всех времен. В борьбе двух миров — коммунизма и капитализма — он был на нашей стороне и на мой прямой вопрос дал недвусмысленный ответ...»

Абрам Федорович Иоффе

«... И после войны он неустанно поднимал свой голос в защиту свободы и мира, прежде всего — против дальнейшего использования атомной бомбы. При этом, как старый борец за свободу, он выступил против преследований за убеждения, предпринятых в Соединенных Штатах под эгидой сенатора Маккарти...»

Макс Лауэ

«...В частной жизни Эйнштейн был скромным человеком, чуждавшимся почестей. Я помню, как, узнав о предполагавшемся приходе группы его почитателей, он предложил скрыться от них и уйти часа на три в парк. Помню, как однажды Эйнштейн договорился, что придет за мной к знакомым, где его игре на скрипке должны были аккомпанировать на рояле. Хозяева квартиры хотели воспользоваться этим, чтобы продемонстрировать своим гостям знаменитого Эйнштейна. Но, увидев посторонних, он надел шапку и остался только при условии, что все двери будут заперты и никого, кроме аккомпаниа-

Эйнштейн, Эренфест (сидят слева), Ланжевен (сидит в центре), Камерлинг-Оннес (стоит слева) и Вайс. (Лейден, 1902 г.)

торши, в комнате не будет. А игра Эйнштейна была чрезвычайно музыкальной и выразительной...»

Абрам Федорович Иоффе

«... В его маленькой комнате не было никаких покрывал, ковров, картин — только кровать, стол, стул, книжный шкаф с несколькими книгами и несколько пачек оттисков. Любое имущество было ему в тягость, и в стремлении к обладанию собственностью он видел самую глубокую основу для ссор и войн между людьми...»

Макс Борн

«...Эйнштейн был... по моему впечатлению... человеком одиноким... У него были, конечно, бесчисленные ученики, если под этим понимать людей, которые, читая его книги или слушая его лекции, учились у него новому взгляду на физику, на природу нашего мира, учились новому мировоззрению. Но он не создал школы. У него было мало студентов, о которых бы он заботился как о своих учениках и последователях. В нем всегда жил дух ученого-одиночки, резко отличавший его от научных коллективов, столь популярных в наши дни. Не было в нем духа сотрудничества, под знаком которого протекает развитие некоторых других наук. В последние годы Эйнштейн работал вместе с некоторыми сотрудниками. Они обычно назывались его помощниками... Сотрудники дали Эйнштейну то, чего ему не хватало в молодости...»

Роберт Оппенгеймер

«...Глаза у Эйнштейна близорукие, рассеянные. Кажется, что уже давно и раз навсегда больше половины его взоров обратились куда-то внутрь. Кажется, что значительная часть зрения Эйнштейна постоянно занята вместе с его мыслью каким-то начертанием исчислений. Глаза поэтому полные абстрактной думой и кажутся даже немного грустными. Между тем в общежитии Эйнштейн чрезвычайно веселый человек. Он любит пошутить... он смеется добродушным, совершенно детским смехом. При этом на мгновение глаза его делаются совершенно детскими. Его необыкновенная простота создает обаяние, что так и хочется как-то приласкать его, пожать ему руку, похлопать по плечу — и сделать это, конечно, с огромным уважением. Получается какое-то чувство нежного участия, признания большой беззащитной простоты и вместе с тем чувство беспредельного уважения...»

Анатолий Васильевич Луначарский

А. *Эйнштейн*

$E = mc^2$: настоятельная проблема нашего времени

Чтобы понять принцип эквивалентности массы и энергии, мы должны обратиться к двум законам сохранения (или «баланса»), игравшим независимо один от другого выдающуюся роль в дорелятивистской физике. Мы имеем в виду законы сохранения энергии и импульса. Первый из них, выдвинутый Лейбницем еще в XVII в., рассматривался в XIX в. по существу как следствие принципов механики.

Рассмотрим, например, маятник, который качается между точками A и B. В этих точках его масса m расположена выше наиболее низкой точки траектории C на величину h (рис. 1). С другой стороны, в точке C разность высот исчезает, но вместо этого масса приобретает скорость v. Дело обстоит так, как если бы разность высот могла бы целиком превращаться в скорость, и наоборот. Точное соотношение должно иметь вид $mgh = \frac{m}{2}v^2$, где g — ускорение, сообщаемое силой земного тяготения. Интересно, что это соотношение не зависит ни от длины маятника, ни от пути, по которому движется масса.

Значение этого факта заключается в том, что в процессе колебания нечто сохраняется и это нечто есть энергия. В точках A и B это — энергия положения, или «потенциальная» энергия; в точке C это — энергия движения, или «кинетическая» энергия. Если такой взгляд справедлив, то сумма $mgh + \frac{m}{2}v^2$ должна иметь одно и то же значение при любом положении маятника, если под h понимать высоту, на которой находится масса m над C, а под v — скорость в этой же точке траектории маятника. И эта сумма действительно сохраняется. Обобщение этого принципа приводит нас к закону сохранения механической энергии. Но что происходит, когда трение останавливает маятник?

Ответ дает изучение тепловых явлений. Анализ этих явлений, основанный на предположении, что тепло есть неуничтожаемая субстанция, перетекающая из более горячего тела в более холодное, приводит нас, казалось бы, к закону «сохранения тепла». С другой стороны, с незапамятных времен было известно, что тепло может создаваться трением, как, например, при добывании огня трением палочек у индейцев. Физики долго не могли объяснить этот способ «добывания» тепла. Их трудности были преодолены лишь тогда, когда было установлено, что на создание любого заданного количества тепла нужно затратить в точности пропорциональное количество механической энергии. Таким образом, мы приходим к принципу «эквивалентности работы и тепла». В нашем маятнике, например, механическая энергия благодаря трению постепенно превращается в тепло.

Таким образом, законы сохранения механической и тепловой энергии слились в единый закон. Это привело физиков к мысли о возможности

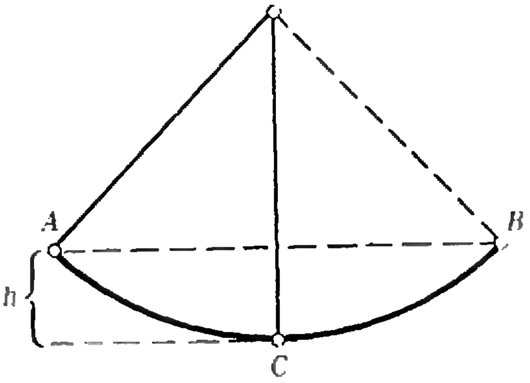


Рис. 1.

дальнейшего расширения закона сохранения энергии — применительно к химическим и электромагнитным процессам и вообще ко всем процессам. Оказалось, что в нашей физической системе именно полная сумма энергий остается постоянной независимо от характера возможных превращений.

Теперь о принципе сохранения массы. Масса определяется как противодействие тела ускорению (инертная масса). Она определяется также весом тела (тяжелая масса). То обстоятельство, что два столь различные определения приводят к одному и тому же значению массы тела, само по себе является поразительным. Согласно принципу сохранения (а именно: масса остается неизменной при любых физических или химических превращениях), масса является существенной (ввиду своей неизменности) характеристикой материи. Нагревание, плавление, испарение, образование химических соединений не должны изменять полной массы.

Физики считали этот принцип справедливым еще несколько десятилетий тому назад. Однако он оказался несостоятельным перед лицом специальной теории относительности. Поэтому он слился с законом сохранения энергии, подобно тому, как примерно шестьюдесятью годами раньше закон сохранения механической энергии объединился с законом сохранения тепла. Мы могли бы сказать, что закон сохранения энергии, поглотив ранее закон сохранения тепла, включил теперь в себя и принцип сохранения массы и управляет всем единолично.

Эквивалентность массы и энергии принято выражать (хотя это и не совсем точно) формулой $E = mc^2$, где c — скорость света, составляющая около 186 000 миль/сек, E — энергия, содержащаяся в покоящемся теле, m — его масса. Энергия, соответствующая массе m, равна этой массе, умноженной на квадрат чудовищно большой скорости света, т. е. на единицу массы приходится огромное количество энергии.

Но если каждый грамм вещества содержит столь большое количество энергии, то почему это обстоятельство так долго оставалось незамеченным? Ответ достаточно прост: до тех пор пока энергия не выходит наружу, она остается незамеченной. Дело обстоит так же, как со сказочно богатым человеком, который никогда не тратит ни цента: никто не может сказать, насколько он богат.

Мы можем теперь разрешить это соотношение относительно m и сказать, что увеличение энергии тела на величину E должно сопровождаться увеличением его массы на величину E/c^2. Я легко могу сообщить некоторому телу энергию, нагрев, например, его на десять градусов. Так почему же никогда не замечалось увеличения массы, или увеличения веса, связанного с этим изменением? Дело в том, что в приращении массы огромный множитель c^2 входит в знаменатель дроби. Увеличение массы слишком мало, чтобы его можно было измерить непосредственно даже самыми чувствительными весами.

Чтобы увеличение массы было измеримым, изменение энергии, приходящееся на единицу массы, должно быть невероятно большим. Нам известно только одно явление, где освобождается такого порядка количество энергии в расчете на единицу массы; это — радиоактивный распад. Схематически процесс идет следующим образом: атом с массой M расщепляется на два атома с массами M' и M'', которые разлетаются с огромной кинетической энергией. Если мы остановим эти атомы, т. е. заберем у них энергию движения, то они в совокупности будут обладать гораздо меньшей энергией, чем исходный атом. Согласно принципу эквивалентности, суммарная масса $M' + M''$ продуктов распада должна быть несколько меньше, чем первоначальная масса M распадающегося атома, что противоречит старому принципу сохранения массы. Относительная разность этих масс составляет примерно десятую долю процента.

Сейчас мы не можем реально измерять вес отдельного атома. Однако существуют косвенные методы, позволяющие точно измерить вес атомов. Мы можем также определить кинетические энергии, передаваемые продуктам распада M' и M''. Таким образом, оказалось возможным провести проверку и подтвердить соотношение эквивалентности. Кроме того, этот принцип позволяет нам рассчитать заранее по известным с большой точностью атомным весам, какое именно количество энергии должно выделиться при любом интересующем нас атомном распаде. Конечно, этот принцип ничего не говорит о том, когда (или каким образом) произойдет распад.

Происходящие события можно проиллюстрировать на нашем примере с богачом. Атом M — это богатый купец, который при жизни не расстается с деньгами (с энергией). Но по завещанию он передает свое состояние сыновьям M' и M'' при условии, что они выделят для общества некую малую часть, меньшую одной тысячной всего имущества (энергии или массы). Сыновья владеют вместе несколько меньшим состоянием, чем владел отец (суммарная масса $M' + M''$ немного меньше, чем масса M радиоактивного атома). Но часть, переданная обществу, хотя и относительно мала, все же настолько огромна (если рассматривать ее как кинетическую энергию), что несет с собой большую угрозу зла. Предотвращение этой угрозы стало настоятельной проблемой современности.

Эта работа была написана Эйнштейном в 1946 году. Русский перевод статьи впервые был опубликован во II томе «Собрания научных трудов» Альберта Эйнштейна (М., «Наука», 1966).

Эйнштейн писал:

До конца жизни я буду думать о том, что такое свет!

◆

С тех пор, как за теорию относительности принялись математики, я ее уже сам больше не понимаю.

◆

Если вы хотите узнать у физиков-теоретиков что-нибудь о методах, которыми они пользуются, я советую вам твердо придерживаться следующего принципа: не слушайте, что они говорят, а лучше изучайте их работы

◆

Работать — значит думать. Поэтому точно учесть рабочий день не всегда легко. Обычно я работаю от четырех до шести часов в день. Я не слишком прилежен.

◆

Стыдно должно быть тому, кто пользуется чудесами науки, воплощенными в обыкновенном радиоприемнике, и при этом ценит их так же мало, как корова те чудеса ботаники, которые она жует.

◆

Открытие цепных атомных реакций так же мало грозит человечеству уничтожением, как изобретение спичек; нужно только сделать все для устранения возможности злоупотребления этим средством

Н. Вагутен

Арифметические препятствия

Во многих математических теориях и прикладных задачах, а также в математических *играх* и *головоломках* возникают вопросы такого рода: можно ли перейти от одной позиции к другой с помощью некоторых «допустимых» операций (ходов)? Как найти нужную цепочку *ходов, если она* существует, или доказать, что переход невозможен? В этой статье мы разберем несколько задач такого типа. Их объединяет еще и внешнее сходство: в каждой из них фигурируют целые числа, а «препятствия» переходам, как правило, имеют арифметическую природу.

Примеры, с которых начинается обсуждение каждой задачи, вполне доступны даже ученикам младших классов. Упражнения «со звездочкой» и доказательства общих результатов требуют от читателя серьезных размышлений. Заканчивается статья трудными олимпиадными задачами, последняя из которых примыкает к неэлементарной, бурно развивающейся сейчас теории арифметических групп.

1. Задача о коне

Задача 1. *Даны натуральные числа m и n. На одном из полей бесконечной шахматной доски стоит фигура, которая ходит «буквой Г» на m полей в одном из направлений и на n в перпендикулярном; назовем ее $\{m; n\}$-конем. На какие поля доски этот конь может попасть?*

Обычный шахматный конь ($\{1; 2\}$-конь) может из любого начального поля O попасть на любое другое: за три хода он может *попасть на соседнее с O поле*, а такими элементарными шагами можно, конечно, прийти куда угодно.

А вот $\{1; 3\}$-конь, несколько ходов которого показаны на рисунке 1, *никак не может попасть* на соседнее (по горизонтали) с начальным поле. На шахматной доске очень легко объяснить, что препятствует такому переходу: $\{1; 3\}$-конь всегда ходит *по полям одного цвета*. С другой стороны, нетрудно показать, что $\{1; 3\}$-конь может обойти все поля одного цвета: за три хода он может сдвинуться по диагонали на соседнее *поле того же цвета (рис. 1)*, а такими элементарными шагами уже легко обойти все одноцветные поля.

Попробуйте решить задачу 1 для чисел

а) 2 и 5; б) 3 и 7; в) 10 и 25; г) 19 и 79.

Оказывается, $\{m; n\}$-конь может попасть на любое поле в том и только том случае, когда m и n имеют *разную четность и их наибольший общий делитель* равен 1.

Полный ответ к задаче 1 приведен в конце пункта 3 (упражнение 10). Сейчас мы займемся более простым вопросом. *Результат, который* мы получим, полезен и для задачи о коне, и для более серьезных математических задач.

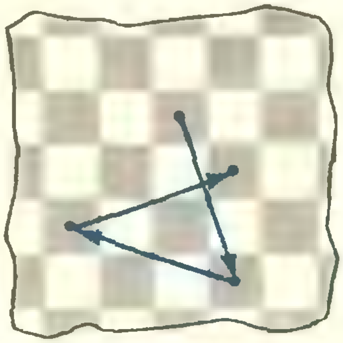


Рис. 1. $\{1; 3\}$-конь может попасть на соседнее (по диагонали) поле того же цвета; такими шагами он может обойти все одноцветные поля.

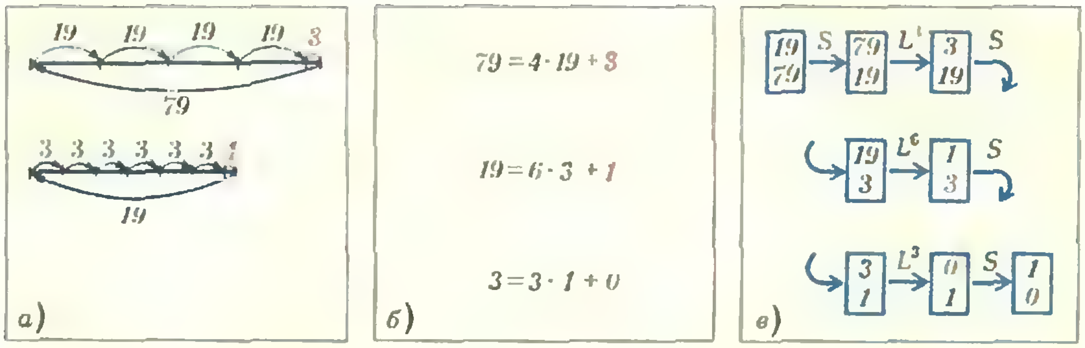

19 19 19 19 3
79
3 3 3 3 3 3 1
19
а)
79 = 4·19 + 3
19 = 6·3 + 1
3 = 3·1 + 0
б)
19 79 S 79 19 L⁴ 3 19 S
19 3 L⁶ 1 3 S
3 1 L³ 0 1 S 1 0
в)

Рис. 2. Числа 19 и 79 взаимно просты, поэтому после нескольких делений с остатком получается остаток 1 = НОД (19, 79).

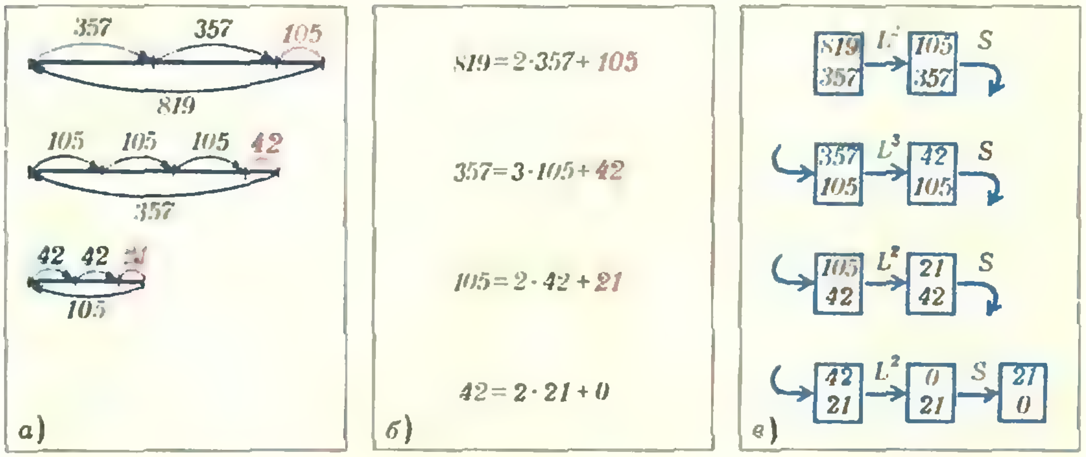

357 357 105
819
105 105 105 42
357
42 42 21
105
а)
819 = 2·357 + 105
357 = 3·105 + 42
105 = 2·42 + 21
42 = 2·21 + 0
б)
819 357 L² 105 357 S
357 105 L³ 42 105 S
105 42 L² 21 42 S
42 21 L² 0 21 S 21 0
в)

Рис. 3. Чтобы найти НОД (819, 357) = 21 с помощью алгоритма Евклида, надо сделать четыре шага.

2. Представление НОД

Задача 2. *Даны натуральные числа a и b. За один ход разрешается прибавить к некоторому целому числу одно из чисел a, b или вычесть из него одно из этих чисел. Можно ли таким образом из числа 0 получить число c?*

В этой задаче множество «позиций» — это множество **Z** всех целых точек числовой прямой.

Начнем с конкретного примера. Предположим, что у покупателя и кассира есть только купюры в 10 и 25 рублей, причем (чего не бывает в математических задачах!) в неограниченном количестве. Ясно, что покупатель может заплатить кассиру c рублей в том и только том случае, когда c кратно 5.

Еще пример. Пусть на множестве **Z** разрешены ходы ±19 и ±79. С помощью этих ходов можно получить любое целое число: их комбинация позволяет сдвинуться на расстояние 3, а затем и на расстояние 1 (рис. 2, *а*).

Более сложный пример: $a=819$, $b=357$. В этом случае тем же приемом удается найти кратчайший сдвиг — на 21 (рис. 3, *а*). Таким образом, здесь можно устроить переход на любое расстояние, кратное 21. С другой стороны, и a, и b делятся на 21, поэтому никакие другие переходы невозможны.

Заметим, что 21 — наибольший общий делитель чисел 819 и 357 (проверьте это!).

Упражнение 1. а) Докажите, что если у покупателя и кассира есть (в неограниченном количестве) трешки и пятерки, то покупатель может заплатить любое число рублей.

б) Можно ли перейти от 0 к 1000, если $a=123$, $b=456$? если $a=589$, $b=1984$?

в) Какие переходы возможны при $a=18$, $b=81$?

Теперь сформулируем ответ к задаче 2 в общем виде. *Пусть наиболь-*

ший общий делитель (НОД) чисел a и b равен d. Тогда переход от 0 к c возможен в том и только том случае, когда число c делится на d. Попробуйте доказать это.

В несколько иной форме мы получим этот результат в следующем пункте.

Упражнения

2. Докажите, что ответ к задаче 2 не изменится, если число a *разрешается* только прибавлять, а b — только вычитать.

3. Можно ли на чашечных весах с помощью гирь 36 г и 60 г (эти гири имеются в неограниченном количестве, и их можно класть на обе чашки весов) отвесить а) 150 г; б) 132 г?

3. Алгоритм Евклида

В следующей задаче позициями будут пары целых чисел.

Задача 3. *Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку: первый автомат, прочитав карточку с парой $(x; y)$, выдает карточку $(x-y; y)$, второй — карточку $(x+y; y)$, третий — карточку $(y; x)$.*

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел (1; 2). *Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку* (19; 79)? (819; 357)?

Какие вообще карточки можно получить, если первоначально имеется карточка с парой чисел $(a; b)$?

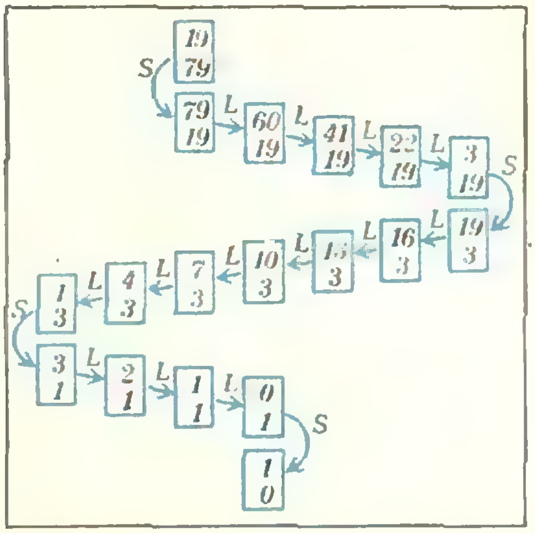


Рис. 4. Каждый «марш» этой лестницы — один шаг алгоритма Евклида.

Обозначим операции, которые проделывают автоматы, соответственно, через L, R и S. Начнем опять с числовых примеров.

Пару (19; 79) из пары (1; 2) операциями L, R, S получить можно. Чтобы осуществить нужный переход, удобнее не подниматься от (1; 2) к (19; 79), а спускаться в обратном направлении (рис. 4).

Записав получившуюся цепочку в обратном порядке (и, конечно, заменяя при этом L и R), получим «подъем» от (1; 2) к (19; 79).

На рисунке 4 «спуск» от (19; 79) к (1; 2) *мы продолжили до пары* (1; 0); сокращенная запись этого «спуска» приведена на рисунке 2, *в* (L^k означает, что операция L проделывается k раз подряд). Собственно говоря, тот же спуск мы уже проделывали в соответствующем примере к предыдущей задаче (рис. 2, *а*).

Спуск, начинающийся с пары (819; 357), сокращенно записан на рисунке 3, *в* — запишите его подробно. Здесь пара (1; 2) (или 1; 0) не получается. И не удивительно — тому есть препятствие: *все получаемые числа делятся на 21.* В каком бы порядке мы ни применяли операции L, R, S, избавиться от этого препятствия не удастся, поскольку, как нетрудно доказать, эти операции сохраняют общие делители чисел на карточке: НОД $(x-y, x)=$ НОД $(x+y, y)=$ НОД (x, y). Поэтому перейти от пары $=$(819; 357) к паре (1; 2) или обратно нельзя.

Упражнение 4. Можно ли с помощью операций L, R, S перейти а) от пары (1; 10) к паре (5; 25)? б) от (18; 81) к (36; 63)? в) от (589; 1984) к (31; 1953)?

Теперь мы можем сформулировать ответ на последний, общий вопрос задачи 3: *пару $(a; b)$ можно перевести в пару $(p; q)$ в том и только в том случае, когда* НОД $(a; b)=$ НОД $(p; q)$. Это условие необходимо, поскольку, как мы уже говорили, наши операции сохраняют НОД. Но оно также и достаточно: если НОД $(a, b)=$ $=$НОД $(p, q)=d$, то *каждую из этих пар операциями* L, R, S можно привести к паре $(d; 0)$; проделав спуск от $(a; b)$ к $(d; 0)$ и затем подъем от $(d; 0)$ к $(p; q)$, мы получим цепочку от $(a; b)$ к $(p; q)$.

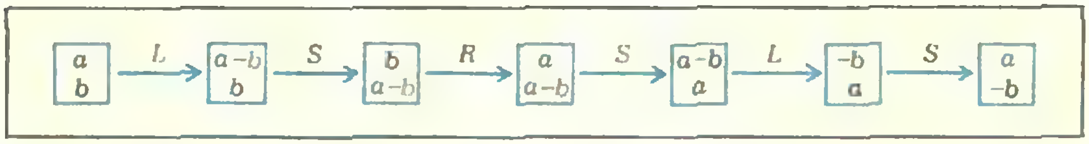


Рис. 5. Операциями L, R, S можно поменять знак у одного числа на карточке.

Покажем, почему от любой пары $(a;\ b)$ можно перейти к паре $(d;\ 0)$. Заметим, что если один из элементов пары отрицателен, то его легко сделать положительным (рис. 5). А пару $(a;\ b)$ с натуральными a и b можно привести к паре $(d;\ 0)$ тем же способом, который мы применили в примерах: на каждом шаге (кроме перестановок-симметрий) больший элемент пары уменьшается до тех пор, пока мы не придем к финалу $\to (d;\ d) \to (0;\ d) \to (d;\ 0)$.

Решая задачу 3, мы получили удобный способ отыскания наибольшего общего делителя двух чисел: от пары $(a;\ b)$, где $a>b>0$, переходим к паре $(b;\ r)$, где r — остаток от деления a на b, и повторяем эту операцию до тех пор, пока не получим пару $(d;\ 0)$. *Последний не равный нулю остаток d и есть НОД $(a;\ b)$* (рис. 2, *б*, 3, *б*). Этот способ называется *алгоритмом Евклида*.

Упражнения

5. Докажите, что из пары (1357; 2468) нельзя получить пару (1234; 5678); из пары (123; 457) нельзя получить (7890; 1979).

6. Приведите примеры, показывающие, что операции задачи 3 не перестановочны: $LS \neq SL$, $RS \neq SR$ (разумеется, $LR=RL$).

7. Найдите с помощью алгоритма Евклида НОД (589, 1984), НОД (123456789, 987654321).

Целочисленной решеткой $\mathbf{Z}^2$ называется множество всех точек плоскости с целыми координатами.

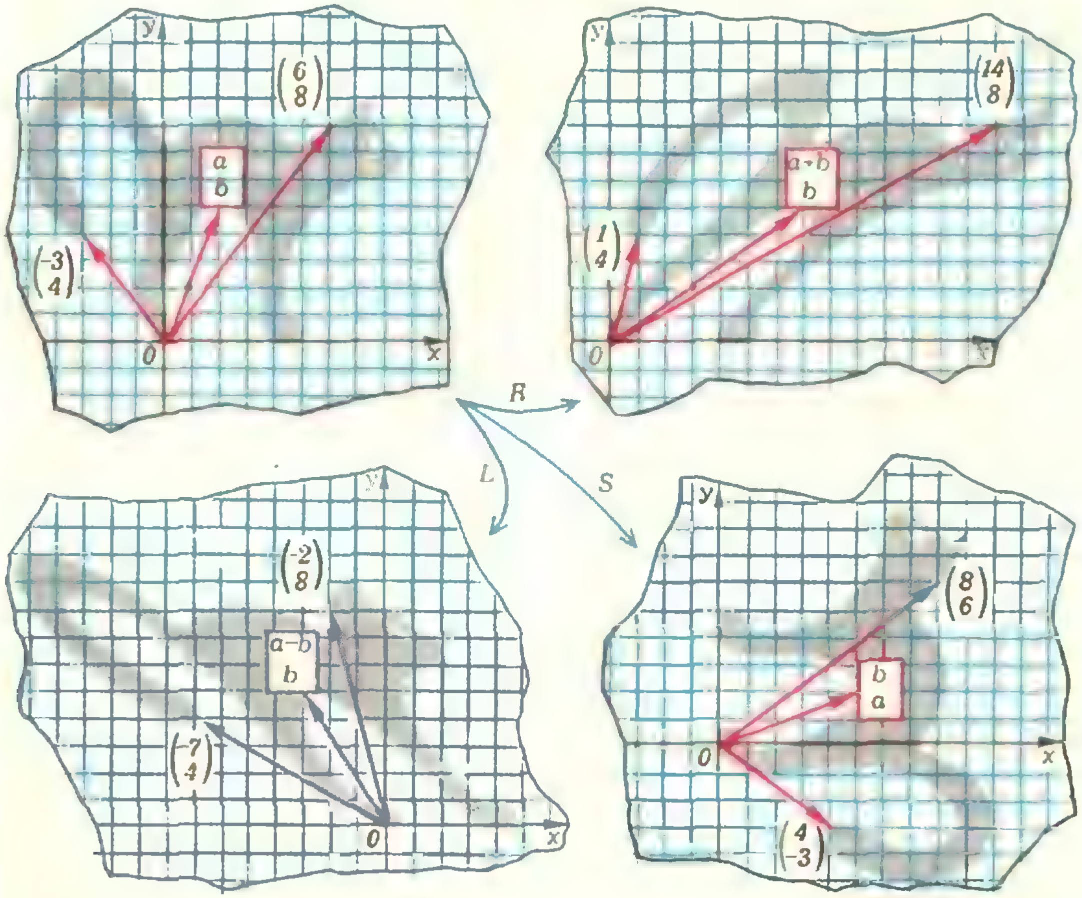


Рис. 6. «Левый перекос» $L(x;\ b) \to (x-b;\ b)$, «правый перекос» $R(x;\ b) \to (x+b;\ b)$, «симметрия» $S(x;\ b) \to (b;\ x)$ — линейные преобразования плоскости, осуществляющие взаимно однозначные отображения целочисленной решетки $\mathbf{Z}^2$ на себя.

Следующее упражнение и рисунок 6 проясняют геометрический смысл задачи 3:

8. Докажите, что если отрезок OA, где O — начало координат, A — узел целочисленной решетки Z^2, разбивается другими узлами на d частей, то операциями L, R и S узел A можно перевести в узлы $(d; 0)$ и $(-d; 0)$ и нельзя перевести ни в какие другие точки оси Ox

Упражнения 9 и 10 обобщают задачи 1 и 2:

9*. Пусть заданы n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что целое число c можно получить из 0 ходами $\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_n$ тогда и только тогда, когда c делится на НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

10*. а) Пусть на плоскости Oxy заданы n векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ с целочисленными координатами. Докажите, что множество точек D плоскости, в которые можно попасть из точки O ходами $\pm\vec{v}_1, \pm\vec{v}_2, \ldots, \pm\vec{v}_n$, представляет собой множество вершин некоторой косоугольной решетки (так называется множество вершин параллелограммов, на которые два семейства равноотстоящих параллельных прямых разрезают плоскость).

б) Пусть вместе с каждым вектором $\vec{v}_i$ в семействе векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ имеется равный ему по длине и перпендикулярный. Тогда множество «достижимых» точек D будет множеством вершин некоторой квадратной решетки.

Теперь уже нетрудно найти ответ к задаче 1: пусть $m=dm_1$, $n=dn_1$, где $d=$ НОД (m, n); тогда, если m_1+n_1 нечетно, достижимы все поля $(dx; dy)$, где x и y — произвольные целые числа (решетка с шагом d); если же m_1+n_1 четно — поля $(dx; dy)$, где $x \in Z$, $y \in Z$ и $x+y$ четно (решетка с шагом $d\sqrt{2}$, повернутая на угол 45° по отношению к линиям доски).

4. Некоторые итоги

В заключительной части статьи мы познакомим вас еще с двумя довольно трудными задачами. Но прежде, оглянувшись назад, попробуем высказать общие соображения, которые помогли нам — и помогут в дальнейшем — выяснять, возможен ли переход от одной «позиции» к другой, и назовем математические «имена» тех понятий, которые встретились нам в задачах.

1°. Чтобы доказать невозможность того или иного перехода, мы обнаруживали некоторое препятствие — характеристику позиции, сохраняющуюся (как говорят, *инвариантную*) при всех допустимых ходах, но различную для начальной и конечной позиций; таким образом, доказательство невозможности того или иного перехода сводилось к отысканию подходящего *инварианта*. Таким инвариантом в задаче о $\{1; 3\}$-коне является цвет поля, в задаче 2 — остаток от деления числа на НОД (a, b), в задаче 3 — НОД пары чисел на карточках. Подробнее об этом можно прочесть в «Кванте» 1974, № 2 (с. 26), 1976, № 2 (с. 32) и 1976, № 12 (с. 19).

2°. Чтобы построить цепочку переходов на решетке, часто бывает полезно найти какой-то элементарный «ключевой» ход (или комбинацию ходов), либо свести дело к какой-то простейшей *канонической* позиции,— а затем уже сформулировать общее правило (алгоритм) отыскания переходов. Так, в задаче о $\{1; 3\}$-коне достаточно научиться делать ход по диагонали, в задаче 2 — сдвиг на $d=$НОД (a, b), в задаче 3 — «спуск» к канонической позиции $(d; 0)$.

3°. Во всех рассмотренных пока задачах переходы были обратимы: если от позиции A можно было перейти к позиции B, то можно было вернуться и обратно — от B к A. В таких задачах все множество позиций разбивается на *классы эквивалентности:* внутри одного класса от каждой позиции можно перейти к любой другой, а никакие переходы между позициями из различных классов невозможны.

Сейчас мы рассмотрим задачу, в которой такой обратимости нет, но зато в ней прекрасно работают соображения 1° и 2°

5. Избавление от двоек

Задача 4. *Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом: первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a+1; b+1)$; второй автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только в том случае, когда оба числа a и b четны); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$.*

Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел (5; 19). Можно ли, используя автоматы в *любом порядке, получить карточку а) (1; 50)? б) (1; 100)?*

в) Пусть первоначально имеется карточка (a; b), $a<b$, а мы хотим получить карточку (1; n). При каких n это можно сделать?

Эта задача предлагалась на XII Всесоюзной математической олимпиаде ученикам 8—10 классов*). Впрочем, даже пятиклассникам хватит знаний, чтобы решать ее.

Обозначим операции, которые выполняют наши новые автоматы, соответственно, через *I*, *H* и *T*. На рисунке 7 показано, как из карточки (5; 19) получить «простейшую» карточку (1; 8) и затем — карточку (1; 50) (вместо «*k* раз применить операцию *I*» мы снова пишем I^k). Таким образом, в задаче а) ответ утвердительный.

А вот карточку (1; 100), про которую спрашивается в задаче б), из карточки (5; 19) получить не удастся. Препятствие можно обнаружить, внимательно изучив тот же рисунок 7: *разность чисел на каждой карточке делится на 7*. В каком бы порядке мы ни применяли автоматы, избавиться от этого свойства не удастся — его сохраняют операции *I*, *H* и *T*. (Для *I* это очевидно. Для *H*: если *a* и *b* — четные и $b-a$ делится на 7, то и $b/2-a/2$ делится на 7. Для *T*: если разности $b-a$ и $c-b$ делятся на 7, то и $c-a=(c-b)+(b-a)$ делится на 7.) Но разность $100-1=99$ на 7 не делится, так что ответ к б) отрицательный.

Упражнение 11. Можно ли, используя автоматы *I*, *H* и *T*, а) из карточки (3; 33) получить карточки (5; 29), (1; 101), (1; 1978)?

б) Из карточки (5; 29) получить (3; 33), (1; 100), (1; 1979)?

Сформулируем теперь ответ на последний, общий вопрос в) задачи 4: *из карточки (a; b), в которой $b-a=2^m d$, где $d>0$ и нечетно, можно получить те и только те карточки (p; q), в которых разность $p-q>0$ делится на d*. Таким образом, можно избавиться от всех двоек в разложении $b-a$, но нечетный делитель разности $b-a$ служит непреодолимым препятствием.

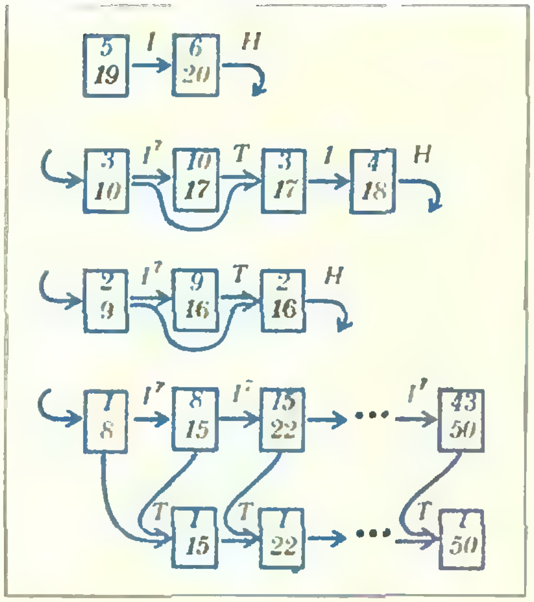

5
19
I
6
20
H
3
10
I^7
10
17
T
3
17
I
4
18
H
2
9
I^7
9
16
T
2
16
H
1
8
I^7
8
15
I^7
15
22
I^7
43
50
T
1
15
T
1
22
T
1
50

Рис. 7. С помощью операций I^q (увеличение на q), H (деление пополам), T («транзитивный» переход) из $\boxed{\begin{matrix}5\\19\end{matrix}}$ получаем $\boxed{\begin{matrix}1\\50\end{matrix}}$

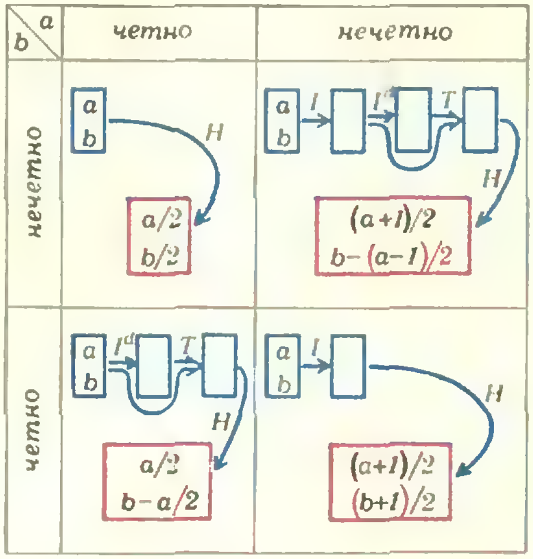

a
b
четно
нечетно
нечетно
четно
a
b
H
a/2
b/2
a
b
I
I^a
T
H
(a+1)/2
b−(a−1)/2
a
b
I^a
T
H
a/2
b−a/2
a
b
I
H
(a+1)/2
(b+1)/2

Рис. 8. Большее число b на карточке $\boxed{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}$ можно уменьшить ($d=b-a$; $a>1$ или $a=1$, b нечетно).

В самом деле, как мы уже говорили (для $d=7$), из карточек, у которых разность делится на нечетное число *d*, с помощью операций *I*, *H*, *T* получаются только карточки, обладающие тем же свойством. С другой стороны, от карточки (a; b), где $b-a=2^m d$ (*d* нечетно), можно перейти к карточке (1; $d+1$). (Один шаг такого перехода показан на рисунке 8.) Получив карточку (1; $d+1$), легко изготовить любую карточку (1; $kd+1$) (как в задаче а) — из карточки (1; 8)) и затем — любую карточку $(l;\ kd+l)$ с разностью чисел, кратной d.

---

*) См. также задачу М516 из Задачника «Кванта» («Квант», 1978, № 8).

Упражнения

12. а) Предположим, что автомат, выполняющий операцию T, сломался. Какие карточки можно получить из (5; 19)? (5; 29)?

б) Пусть сломался автомат, выполняющий операцию H. Какие карточки можно получить из карточки $(a;\ b)$?

13*. Какие карточки можно получить операциями I, H, T из n данных карточек $(a_1;\ b_1),\ (a_2;\ b_2), \ldots, (a_n;\ b_n)$?

Задача 4 выглядит довольно искусственной. Поэтому, возможно, вам будет интересно узнать, что она возникла из леммы в одной серьезной математической книге (С. Улам, «Нерешенные математические задачи», М., «Наука», 1964, с. 60).

6. Пары векторов

Следующая задача продолжает задачу 3*). Здесь фигурируют те же три операции L, R и S, но в задаче 3 они применялись к парам целых чисел, а теперь «позициями» будут пары векторов $(a;\ b)$ и $(c;\ d)$ с целыми координатами, и эти операции будут применяться одновременно к обоим векторам пары. Координаты обоих векторов удобно записывать в два столбика — получится табличка $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ из четырех чисел; такие таблички в математике называются *матрицами*.

Задача 5. *С матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ разрешается проделывать следующие операции:*

$$L:\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$R:\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$S:\ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

Можно ли этими операциями из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ получить следующие матрицы: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Какие вообще матрицы можно получить из данной матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$?

Будем называть две матрицы *эквивалентными*, если одну из них операциями L, R и S можно перевести в другую (здесь переходы обратимы, так что все матрицы разбиваются на классы эквивалентных).

В решении очень трудной задачи 5 нам встретится несколько препятствий. Будем преодолевать их последовательно.

а) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ не эквивалентны; второй вектор $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ никак нельзя перевести в $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, поскольку НОД $(5, 7) \neq$ НОД $(3, 9)$. Вообще, из результата задачи 3 сразу вытекает условие, необходимое для эквивалентности двух матриц

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}:$$

$$\begin{cases} \text{НОД}\,(a, b) = \text{НОД}\,(p, q), \\ \text{НОД}\,(c, d) = \text{НОД}\,(r, s). \end{cases} \qquad (*)$$

Однако, как мы сейчас увидим, это условие не достаточно для эквивалентности матриц. Во всяком случае, если это условие выполнено, мы можем разделить каждый столбец матрицы на его НОД и далее рассматривать такие *сокращенные* матрицы (ведь НОД каждого столбца сохраняется при всех операциях) *).

б) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ не эквивалентны, потому что при любом преобразовании L, R, S из матрицы

---

*) Вместе они составляют содержание задачи М420 из Задачника «Кванта» («Квант», 1976, № 12), решение которой еще не публиковалось

*) Термин «сокращенная» естественно возникает, если смотреть на матрицу $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ как на пару дробей $\left(\frac{a}{b};\ \frac{c}{d}\right)$ (как в условии задачи М420).

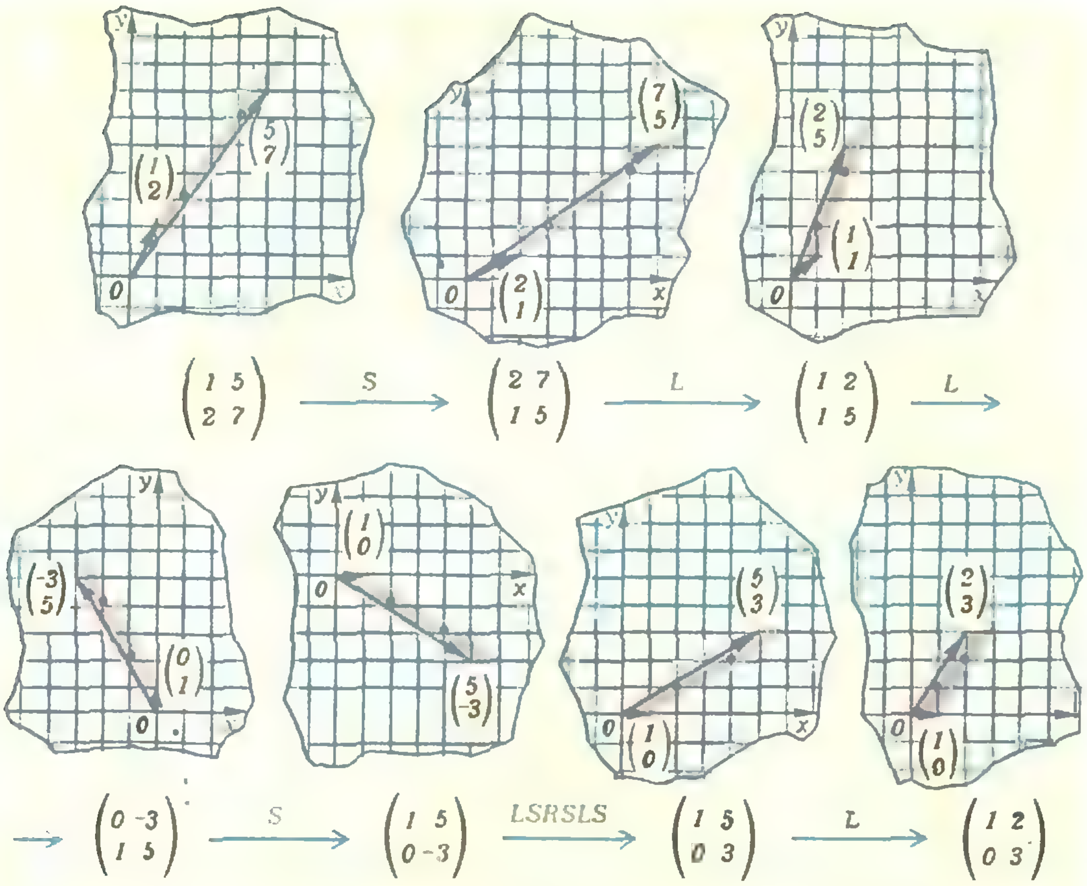


Рис. 9. Приведение к каноническому виду. При всех преобразованиях L, R, S сохраняется площадь параллелограмма и расположение узлов целочисленной решетки внутри него.

$\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ получится матрица с одинаковыми столбцами $\begin{pmatrix}p&p\\q&q\end{pmatrix}$.

в) Матрицы $\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ тоже не эквивалентны; тут возникает новое препятствие: величина

$$\Delta=\Delta\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=|ad-bc|.$$

Она сохраняется при всех преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$. Проверим это для L: $(a-b)d-b(c-d)=ad-bc$. (Для R и S проведите проверку сами.) Поскольку $\Delta\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}=3$, а $\Delta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1$, эти матрицы не эквивалентны. Заметим, что

$$\Delta\begin{pmatrix}p&p\\q&q\end{pmatrix}=0.$$

Величина $ad-bc$ очень часто возникает в разных задачах про матрицы и называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

г) Матрицы $\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ эквивалентны: цепочка преобразований, приводящих первый вектор $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ к каноническому виду $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, и небольшие дополнительные ухищрения приводят к цели (рис. 9). На рисунке 9 хорошо виден и наш инвариант Δ: это — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$.

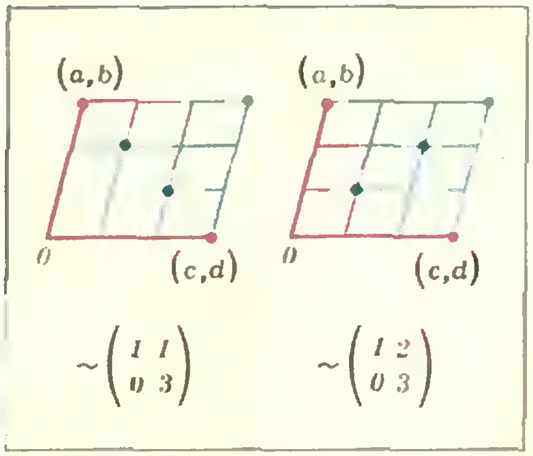

(a,b)
(c,d)
0
(a,b)
(c,d)
0
$\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$
$\sim\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$

Рис. 10. В параллелограммах для матриц $\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ расположение узлов целочисленной решетки различно.

Осталось еще выяснить,

д) эквивалентны ли матрицы $\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$. Оказывается, нет, хотя указать препятствие здесь не так просто. Его геометрический смысл ясен из рисунков *9* и *10*.

Теперь мы можем дать ответ на общий вопрос задачи 5. Любую сокращенную матрицу операциями L, R, S *можно преобразовать к каноническому виду*

$$\begin{pmatrix}1&r\\0&\Delta\end{pmatrix},\quad \text{где } 0\leqslant r<\Delta, \qquad (1)$$
$$\text{НОД}\,(r,\Delta)=1,$$

или

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\ (\text{если } \Delta=0). \qquad (2)$$

Две матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены условия (*) и соответствующие сокращенные матрицы имеют один и тот же канонический вид. (Несколько иначе критерий эквивалентности сформулирован *в упражнении 20*.)

В самом деле, любую сокращенную матрицу можно преобразовать к каноническому виду так же, как раньше мы преобразовали матрицу $\begin{pmatrix}1&5\\2&7\end{pmatrix}$ (см. рис. 9). Тот факт, что r является инвариантом, вытекает из упражнений 14, 15.

Упражнения

14*. *Пусть матрица* $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ имеет канонический вид (1). Тогда внутри параллелограмма $OABC$, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}=(a;\,b)$ и $\overrightarrow{OC}=(c;\,d)$, лежит $\Delta-1$ *целая точка. Все эти точки* M_1, $M_2,\ldots,M_{\Delta-1}$ могут быть получены при помощи векторных равенств:

$$\overrightarrow{OM_j}=\{j/\Delta\}\,\overrightarrow{OC}+\{j\,(1-r/\Delta)\}\,\overrightarrow{OA},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

15. Пусть НОД $(a,\,b)=$ НОД$(c,\,d)=1$, $\Delta=|ad-bc|\neq0$. Тогда существует единственное r такое, что $0\leqslant r<\Delta$, НОД$(r,\Delta)=1$ и оба числа $ra-c$, $rb-d$ делятся на Δ, причем это r сохраняется *при преобразованиях* L, R, S матрицы $\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

Это упражнение удобно для конкретных вычислений числа r, если Δ невелико.

16. Какие матрицы среди следующих эквивалентны, а какие — нет:

$$\begin{pmatrix}5&1\\7&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-5\\2&7\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\3&9\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&3\\4&8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4&7\\5&8\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}6&14\\17&39\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}5&13\\19&50\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}19&1\\79&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}39&60\\50&77\end{pmatrix}?$$

17. *Выше мы не рассматривали матрицы, у которых один из столбцов нулевой. В каком случае такие матрицы эквивалентны?*

18. Докажите, что любые две матрицы, *у которых* $\Delta=1$, эквивалентны.

19*. Сколько существует всего классов неэквивалентных матриц с $\Delta=3$, $\Delta=4$, $\Delta=5$, $\Delta=10$, $\Delta=12$? Сколько среди них сокращенных? Нарисуйте для каждого *класса* матриц расположение узлов в соответствующем параллелограмме (как на рисунке 10).

20. Докажите, что для любой матрицы существует единственная эквивалентная ей матрица $\begin{pmatrix}k&l\\0&m\end{pmatrix}$, где $k\geqslant0$, $m\geqslant0$, $l\geqslant0$ и $l<m$ при $m\neq0$.

Другой возможный подход к задачам 3 и 5 — выяснить, какие вообще преобразования целочисленной решетки можно получить композициями операций L, R, S (подобно тому, как в задаче 2 мы выяснили, какие вообще сдвиги можно получить композициями сдвигов $\pm a$, $\pm b$). Оказывается, все эти преобразования решетки имеют вид $(x;\,y)\to(ax+by;\ cx+dy)$, где a, b, c, d — целые числа и $|ad-bc|=1$. Но это уже — тема отдельной статьи, посвященной линейной алгебре.

Победители конкурса «Кванта»

В прошлом году редакция получила свыше 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуется список школьников — победителей нашего конкурса решения задач.

В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители получили право участвовать в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1979 года.

Математика

К. АБДУХАЛИКОВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. АГАЕВ — с. Покровка АзССР, 9 кл.
В. АЙРИЯН — г. Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
А. БАДАЛЯН — пос. Берд АрмССР, 10 кл.
А. БАЛИНСКИЙ — г. Львов, с. ш. № 11, 9 кл.
В. БОЛОТНИКОВ — г. Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
О. ГОРДИЕНКО — г. Павлодар, с. ш. № 3, 10 кл.
М. ГОРЕЛОВ — г. Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
Г. ГРАБАРНИК — г. Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
В. ГУБА — г. Вологда, с. ш. № 8, 10 кл.
О. ДМИТРИЕВ — г. Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Р. ИЗМАЙЛОВ — г. Баку, с. ш. № 134, 10 кл.
Ф. КАБДЫКАИРОВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. КАПЛАН — г. Сумгаит, с. ш. № 11, 9 кл.
Г. КАРАГУЛЯН — г. Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
А. КЕЛАРЕВ — г. Свердловск, с. ш. № 141, 9 кл.
С. КУЗНЕЦОВ — г. Ангарск, с. ш. № 10, 10 кл.
Е. КУЗЬМИН — г. Череповец, с. ш. № 4, 10 кл.
А. КУЛЕСКО — г. Донецк, шк.-инт. № 10, 10 кл.
Ю. ЛАПУСТА — г. Тернополь, с. ш. № 3, 10 кл.
Р. МЕШОЙРЕР — г. Москва, с. ш. № 444, 10 кл.
Д. МИНДЛИН — г. Ташкент, с. ш. № 5, 10 кл.
Б. НАДЕЖДИН — г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. НОВИКОВ — г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
А. ОПАРИН — г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. ПОПЕЛЮХИН — г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
М. СЕВРЮК — г. Москва, с. ш. № 2, 10 кл.
Ф. СУКОЧЕВ — г. Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
О. ТАВГЕНЬ — г. Минск, с. ш. № 54, 10 кл.
К. ТАТАЛЯН — г. Ереван, с. ш. № 8, 10 кл.
В. УМАНСКИЙ — г. Баку, с. ш. № 134, 10 кл.
С. ХОСИД — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.

Физика

А. БАРЗЫКИН — пос. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
М. ГАВРИЛОВ — пос. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
К. ЖУКОВ — г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Е. ЗУДИН — г. Александров, с. ш. № 4, 10 кл.
В. ЛАШКИН — г. Киев, с. ш. № 96, 10 кл.
Д. ЛЮДМИРСКИЙ — г. Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. МОГИЛЬНЕР — г. Свердловск, с. ш. № 105, 10 кл.
И. ОМЕЛЯН — г. Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
Т. ПАВЕЛКИНА — г. Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
С. ПРЯДКИН — г. Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. РОМАНОВСКИЙ — г. Лида, с. ш. № 1, 10 кл.
С. ШИШКОВ — г. Москва, с. ш. № 179, 9 кл.
М. ЭФРОИМСКИЙ — г. Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.

задачник кванта

Задачи

М551—М555; Ф563—Ф567

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М551, М552» или «Ф563». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М551. а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?

б)* Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.

Московская городская математическая олимпиада

М552. а) Найдите хотя бы одну пару (p, q) целых чисел, отличных от нуля, для которой трехчлены $x^2 + px + q$ и $x^2 + qx + p$ имеют целые корни.

б) Найдите все такие пары (p, q).

Э. Туркевич

М553*. Дан треугольник ABC, причем $|BC| < |AC| < |AB|$. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE такие, что $|BD| = |CE| = |BC|$. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, вписанной в него.

С. Мейдман

М554*. Назовем натуральное число n *хорошим*, если существуют такие натуральные числа a_1, a_2, ..., a_k (не обязательно различные), что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n,$$

и

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Известно, что все числа между 33 и 73 — хорошие. Докажите, что все числа, большие 73, — тоже хорошие.

Математическая олимпиада США (1978 г.)

М555. Рассмотрим пересечение

а) двух;

б) трех

цилиндров одинакового радиуса r, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение? Каков его объем?

С. Пухов

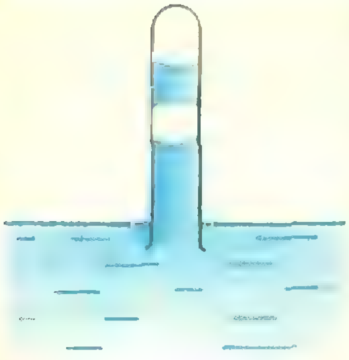


Рис. 1.

Ф563. Посередине барометрической трубки имеется столбик воздуха (рис. 1). Площадь сечения трубки $s = 0{,}3$ см². При температуре $t = 0$°С длина столбика равна $l_0 = 10$ см. Какой станет длина этого столбика при $t = 20$°С?

Ф564. Автомобиль движется по повороту дороги радиуса R. Внезапно водитель увидел на дороге препятствие и начал тормозить. Какое расстояние автомобиль пройдет до остановки, если его скорость равна v_0, коэффициент трения колес о дорогу k и автомобиль тормозит с максимально возможным постоянным ускорением?

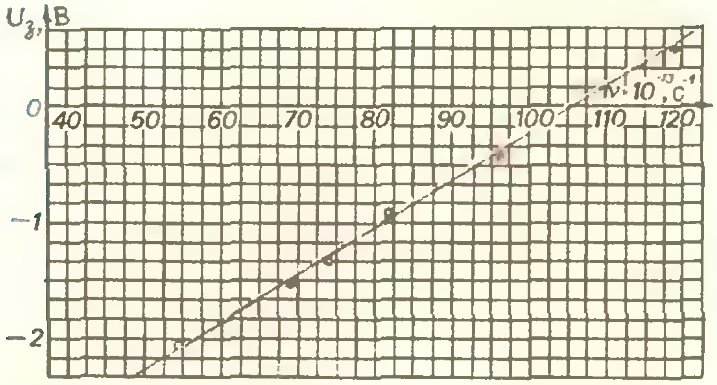


Рис. 2.

Ф565. На рисунке 2, взятом из работы Милликена, приведена зависимость задерживающего напряжения от частоты света в опытах по фотоэффекту. Определить из этого графика отношение постоянной Планка h к заряду электрона e.

Ф566. Атом, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), испускает фотон под малым углом α к направлению своего движения. Доказать, что если ω_0 — частота излучения покоящегося атома, а ω — частота волны фотона, то для видимого света $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx \frac{v}{c}\cos\alpha$ (формула Доплера).

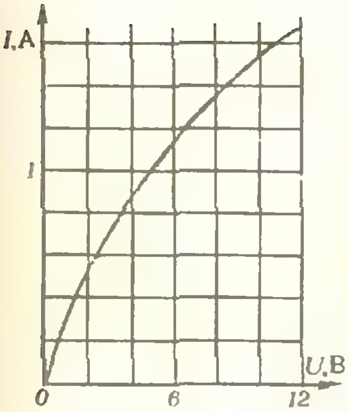


Рис. 3.

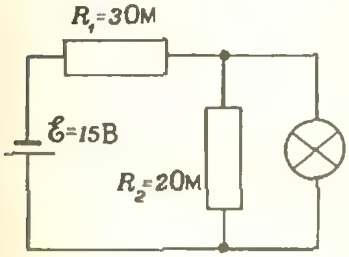


Рис. 4.

Ф567. На рисунке 3 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку включают в цепь, показанную на рисунке 4. Найти мощность, выделяющуюся на лампочке.

Решения задач

М504, М506, М507; Ф513, Ф516, Ф517

М504. *На шахматную доску $n\times n$ клеток уложено k плиток размером 2×1, причем так, что положить $(k+1)$-ю плитку, не перемещая уже имеющихся плиток, нельзя. Докажите, что свободных клеток осталось не более чем*

- *а)* $(n^2+n+1)/3$;
- *б)* $(n^2+2)/3$;
- *в)* $n^2/3$.

Можно ли получить для некоторых n еще более точную оценку?

Пусть свободных клеток x.

а) Сопоставим каждой свободной клетке, не лежащей на верхней горизонтали доски, плитку, «накрывающую» ее сверху (рис. 1). Ясно, что каждая плитка сопоставлена не более чем одной клетке (так что количество свободных клеток, не лежащих на верхней горизонтали доски, не больше общего количества $\frac{n^2-x}{2}$ плиток, уложенных так, как сказано в задаче). Пусть на верхней горизонтали доски x_1 свободных клеток; тогда $x_1 \leqslant \frac{n+1}{2}$. Имеем

$$x - x_1 \leqslant \frac{n^2-x}{2},$$

то есть

$$3x \leqslant n^2 + 2x_1 \leqslant n^2+n+1,$$

откуда

$$x \leqslant (n^2+n+1)/3.$$

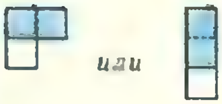


Рис. 1.

б) Обозначим через x_1 количество свободных клеток *внутри* доски, через x_2 — количество свободных клеток *на границе* доски, не считая угловых клеток; наконец, через x_3 обозначим количество свободных *угловых* клеток доски. Тогда $x=x_1+x_2+x_3$. Через y_1 обозначим количество расположенных строго внутри доски плиток; через y_2 — количество плиток, выходящих на края доски хотя бы одной клеткой; тогда $y_1+y_2=\frac{n^2-x}{2}$.

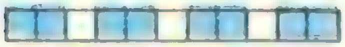


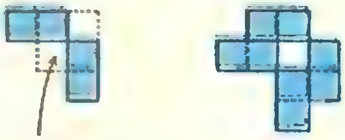
Рис. 2.

Подсчитаем, сколько имеется пар: *свободная клетка — граничащая с ней плитка.* С одной стороны, их $4x_1+3x_2+2x_3$. С другой стороны, поскольку плитки уложены так, что добавить ни одной уже нельзя, этих пар не более чем $4y_1+3y_2$ (каждая плитка, выходящая на край доски, граничит не более чем с тремя клетками, а каждая плитка строго внутри доски — не более чем с четырьмя). Поэтому

$$4x_1+3x_2+2x_3 \leqslant 4y_1+3y_2. \qquad (1)$$

Поскольку каждые две свободные клетки на границе доски разделяются плиткой, имеем

$$x_2+x_3 \leqslant y_2. \qquad (2)$$



Эта клетка обязательно свободная

Рис. 3.

Складывая неравенства (1) и (2), получаем

$$4x_1+4x_2+3x_3 \leqslant 4(y_1+y_2),$$

или

$$x - \frac{1}{4}x_3 \leqslant \frac{n^2-x}{2}.$$

Но $x_3 \leqslant 4$; значит, $x \leqslant \frac{n^2-x}{2}+1$ или $3x \leqslant n^2+2$, откуда $x \leqslant (n^2+2)/3$.

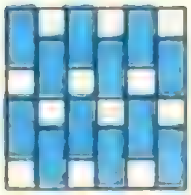


Рис. 4.

в) Заметим, что если неравенство (1) — строгое, то мы получим то, что надо в пункте в): строгое неравенство $x < \frac{n^2-x}{2}+1$ равносильно такому нестрогому: $x \leqslant \frac{n^2-x}{2}$, откуда $x \leqslant \frac{n^2}{3}$. Поэтому, если допустить, что $x > \frac{n^2}{3}$, то во всяком случае нужно, чтобы к каждой плитке обязательно прилегало максимально возможное число свободных клеток. В частности, к любой стороне плитки длины 1, не упирающейся в край доски, должна прилегать свободная клетка. Поэтому плитки должны располагаться «рядами» (рис. 2), причем «ряды» не могут ни упираться друг в друга, ни пересекаться друг с другом, поскольку и в том и другом случае возникает картинка, изображенная на рисунке 3,— до тех пор, пока не достигнем края. Значит, все «ряды» должны быть параллельны, что возможно лишь тогда, когда n делится на 3. В этом случае число плиток равно $n^2/3$ (соответствующий пример изображен на рисунке 4). Итак, для досок $n\times n$, где $n=3k$, оценка $\frac{n^2}{3}$ — точная.

С. Фомин

◆

М506. *Докажите, что для положительных a, b, c и d справедливо неравенство:*
$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\geqslant a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$.

Не ограничивая общности, можно считать, что $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$. Сложив три очевидных неравенства

$$a\,(a-b)\,(a-c)\,(a+2d)\geqslant 0,$$
$$a\,(a-b)\,(a+2c)\,(a-d)\geqslant 0,$$
$$a\,(a+2b)\,(a-c)\,(a-d)\geqslant 0,$$

получим

$$3a^4-3a^2\,(bc+bd+cd)+6\,abcd\geqslant 0,$$

или

$$a^4-a^2\,(bc+bd+cd)+2\,abcd\geqslant 0. \qquad (1)$$

С другой стороны, неравенство

$$b^4+c^4+d^4-a^2\,(b^2+c^2+d^2-bc-bd-cd)-\\-b^2c^2-b^2d^2-c^2d^2\geqslant 0 \qquad (2)$$

эквивалентно очевидному

$$[(b+c)^2-a^2]\,(b-c)^2+[(b+d)^2-a^2](b-d)^2+\\+[(c+d)^2-a^2]\,(c-d)^2\geqslant 0.$$

Сложив неравенства (1) и (2), получим утверждение задачи.

Приведем решение этой задачи, использующее математический анализ. Нам понадобится следующая геометрически очевидная

Лемма. *Если функция f имеет неотрицательную производную в каждой точке луча $[x_0;+\infty[$, то она — неубывающая на этом луче.*

Заметим, что *если какие-то два из чисел a, b, c, d совпадают, то доказываемое неравенство справедливо*. В самом деле, пусть например, $a=d$. Тогда наше неравенство можно переписать так:

$$a^4+2\,(bc-b^2-c^2)\,a^2+b^4+c^4-b^2c^2\geqslant 0. \qquad (3)$$

Левая часть неравенства (3) — квадратный трехчлен относительно a^2 с неположительным дискриминантом $-2\,bc\,(b-c)^2$, поэтому (3) справедливо.

Перепишем теперь требуемое неравенство в таком виде:

$$d^4-(a^2+b^2+c^2)\,d^2+2\,abcd+\\+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2\geqslant 0 \qquad (4)$$

и рассмотрим левую часть (4) как функцию от d; обозначим эту функцию через f. Нам нужно доказать, что $f\,(d)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$ (и $0<a\leqslant b\leqslant c$). Имеем:

$$f'\,(d)=4\,d^3-2\,(a^2+b^2+c^2)\,d+2\,abc,$$

так что $f'\,(c)=2c^3-2\,(a^2+b^2)\,c+2\,abc\geqslant 0$ $(0<a\leqslant b\leqslant c)$.

Далее,

$$f''\,(d)=12\,d^2-2\,(a^2+b^2+c^2)\geqslant 0$$

при $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$. Поэтому по лемме $f'\,(d)\geqslant f'(c)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$. Используя то, что $f\,(c)\geqslant 0$ (см. замечание выше) и $f'(d)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$, и снова применяя лемму, получим нервенство $f\,(d)\geqslant 0$ при $d\geqslant c$, которое и требовалось.

Интересное обобщение этого неравенства придумал *Ф. Шлейфер* (Рязань): для любых $a_1,\ldots,a_n$

$$(n-1)\,(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+\\+n\sqrt[n]{a_1^2\cdot a_2^2\cdot\ldots\cdot a_n^2}\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2.$$

При $n=4$, $a_1=a^2$, $a_2=b^2$, $a_3=c^2$, $a_4=d^2$ получим утверждение нашей задачи.

В. Сендеров, Э. Туркевич

M507. *Пусть* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2n$ *— конечная последовательность натуральных чисел* $(n \geqslant 6)$.

а) Докажите, что

$$\min [a_i, a_j] \leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

где $[a_i, a_j]$ *означает наименьшее общее кратное чисел* a_i *и* a_j, *а минимум берется по всем парам различных чисел* a_i, a_j.

б) Докажите, что

$$\max (a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c,$$

где c *не зависит от* n, *а* (a_i, a_j) *означает наибольший общий делитель* a_i *и* a_j. *Оценки в задачах а) и б) нельзя улучшить (то есть коэффициент 6 заменить меньшим, а* $\frac{38}{147}$ *— бо́льшим).*

Ниже будет доказано более общее утверждение. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 2n$.

а) Докажем, что требуемое неравенство выполняется при $n \geqslant 5$. Пусть среди элементов последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется число $a \leqslant n$. Если число $2a$ также принадлежит данной последовательности, то

$$\min [a_i, a_j] \leqslant [a, 2a] = 2a \leqslant 2n < 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

что дает решение задачи. Если же $2a$ не принадлежит последовательности, то выбросим из нее число a и заменим его на $2a$. Ясно, что $\min [a_i, a_j]$ для новой последовательности не меньше, чем для исходной. Применив это же рассуждение к каждому элементу $a \leqslant n$, мы придем в конце концов к последовательности $n+1, n+2, \ldots, 2n$, причем $\min [a_i, a_j]$ для этой последовательности не меньше соответствующего минимума для любой другой последовательности, из которой она была получена, в частности — для исходной.

Докажем теперь, что для последовательности $n+1, n+2, \ldots, 2n$ при $n \geqslant 5$ выполняется равенство $\min [a_i, a_j] = 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. В самом деле, если $n = 2k$ или $n = 2k+1$, возьмем следующие числа: $a = 2k+2$, $b = 3k+3$. Тогда при $n \geqslant 5$

$$n+1 \leqslant a < b \leqslant 2n$$

и

$$[a, b] = 6k+6 = 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right).$$

А теперь проверим, что для любой пары чисел c, d, удовлетворяющей условию $n+1 \leqslant c < d \leqslant 2n$, выполняется неравенство $[c, d] \geqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Действительно, $[c, d] = pd = qc$, где $q > p > 1$. При этом либо $p = 2$ и $q \geqslant 3$, либо $q \geqslant 4$. В первом случае c — число четное, тем самым $c \geqslant 2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$ и $[c, d] = qc \geqslant 3c \geqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Во втором случае $[c, d] = qc \geqslant 4(n+1) > 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. Этим завершается доказательство утверждения а).

б) Рассмотрим более общую задачу: *пусть* $a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqslant B$ *— последовательность натуральных чисел; требуется оценить снизу* $\max (a_i, a_j)$. Для этого полезно решать обратную задачу: *пусть* A, B *— положительные (не обязательно целые) числа; определить максимальное* k, *для которого найдется последовательность из* k *различных натуральных чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *такая, что*

(1) *каждый элемент последовательности не превосходит* B;

(2) $(a_i, a_j) \leqslant A$ *для любых различных элементов* a_i, a_j.

Будем обозначать это максимальное количество через $k(A, B)$. Для решения исходной задачи нужно подобрать A так, чтобы $k(A, 2n)$ примерно равнялось n. Действительно, если для какого-то A

$$k(A, 2n) < n,$$

то для любой последовательности $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 2n$ будет $\max (a_i, a_j) > A$; если же $k(A, 2n) \geqslant n$, то найдется последовательность $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 2n$ такая, что $\max (a_i, a_j) \leqslant A$.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — последовательность, удовлетворяющая условиям (1) и (2). Если у какого-то элемента a_i этой последовательности найдется собственный (то есть не совпадающий с a_i) делитель $d > A$, то в силу условия (2) d не является элементом последовательности. Тогда, заменяя

a_i на d, мы получим новую последовательность той же длины, также удовлетворяющую условиям (1) и (2). Поступая таким же образом, мы получим в конце концов последовательность, в которой никакой элемент не имеет собственных делителей, больших A. Такую последовательность назовем *несократимой*.

Рассмотрим теперь множество M всех натуральных чисел, которые не превосходят B и не имеют собственных делителей, бо́льших A. M является несократимой последовательностью, удовлетворяющей условиям (1) и (2), и любая другая несократимая последовательность содержится в M. Поэтому ясно, что $k(A, B)$ просто равно числу элементов множества M.

Чтобы подсчитать число элементов множества M, сосчитаем отдельно число четных элементов, число нечетных элементов, делящихся на 3, и т. д. Более точно, пусть M_2 состоит из всех четных элементов множества M, M_3 состоит из всех нечетных элементов из M, делящихся на 3, M_5 состоит из всех элементов M, делящихся на 5, но не делящихся ни на 2, ни на 3. И вообще, для любого простого числа p множество M_p состоит из тех элементов множества M, которые делятся на p и не имеют простых делителей, меньших p.

Подсчитаем число элементов множества M_p. Любой элемент из M_p имеет вид pc, где $c \leqslant A$ (так как M — несократимое множество), $pc \leqslant B$ и c не имеет простых делителей, меньших p. Если $pA \leqslant B$, то условие $pc \leqslant B$ можно не принимать во внимание, и число элементов M_p равно количеству натуральных $c \leqslant A$, не имеющих простых делителей, меньших p (такое число будем обозначать через $m_p(A)$). Если же $pA > B$, то число элементов M_p равно $m_p\left(\frac{B}{p}\right)$ и не превосходит $m_p(A)$.

Зафиксируем простое число p. Множества $M_2, M_3, M_5, \ldots, M_p$, вообще говоря, не исчерпывают множества M. Обозначим через N множество всех оставшихся элементов M. Они не имеют делителей среди чисел $2, 3, 5, \ldots, p$, поэтому их количество не превосходит числа $m_q(B)$, где q — следующее за p простое число. Таким образом,

$$k(A, B) \leqslant m_2(A) + m_3(A) + \ldots + m_p(A) + m_q(B).$$

Если $pA \leqslant B < qA$, то это неравенство превращается в равенство. Действительно, ясно, что каждое M_r содержит ровно $m_r(A)$ элементов. С другой стороны, каждое число $c \leqslant B$, которое не имеет делителей, меньших q, не имеет тем самым делителей, бо́льших A (если $c = df$, где $d > A$ и $c \leqslant B < qA$, то $f < q$), и поэтому входит в N; следовательно, N содержит $m_q(B)$ элементов.

Теперь займемся оценкой чисел вида $m_r(C)$. Во-первых, $m_2(C)$ равно количеству всех натуральных $l \leqslant C$, то есть равно $[C]$, и отличается от C меньше, чем на 1. Далее, $m_3(C) = m_2(C) - m_2\left(\frac{C}{2}\right)$ (количество всех $l \leqslant C$ минус количество четных $l \leqslant C$). Поскольку $m_2(C)$ и $m_2\left(\frac{C}{2}\right)$ отличаются от C и $\frac{C}{2}$ меньше, чем на 1, то $m_3(C)$ отличается от $C\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ меньше чем на 2.

Рассуждая таким же образом, мы получим, что если p и q ($p < q$) — два соседних простых числа, то $m_q(C) = m_p(C) - m_p\left(\frac{C}{p}\right)$, откуда индукцией получается, что $m_q(C)$ отличается от числа $C\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ меньше, чем на 2^{i-1}, где i — номер простого числа q. Иначе говоря, обозначив через Z_q произведение всех чисел вида

$\left(1-\frac{1}{r}\right)$, где r — простое число, меньшее q (и положив $Z_2=1$), получим

$$|m_q(C)-C\cdot Z_q|\leqslant 2^{i-1}$$

(i — номер простого числа q). Таким образом, для числа $k(A, B)$ верны следующие оценки

$$k(A, B)\leqslant m_2(A)+\ldots+m_p(A)+m_q(B)<A(Z_2+Z_3+\ldots+Z_p)+B\cdot Z_q+1+2+\ldots+2^{i-1}=A(Z_2+\ldots+Z_p)+B\cdot Z_q+(2^i-1);$$

если же $pA\leqslant B\leqslant qA$, то

$$k(A, B)=m_2(A)+\ldots+m_p(A)+m_q(B)>A(Z_2+\ldots+Z_p)+B\cdot Z_q-(2^i-1). \qquad (3)$$

Вернемся теперь к исходной задаче и выясним, при каких A $k(A, 2n)\leqslant n$. Для этого достаточно решить относительно A неравенство

$$A(1+Z_3+\ldots+Z_p)+2n\cdot Z_q+(2^i-1)\leqslant n.$$

Беря p равным 3,5 или 7, мы получим, соответственно,

$$A\leqslant\frac{2}{9}n-\frac{14}{3}, \qquad A\leqslant\frac{14}{55}n-\frac{90}{11},$$

$$A\leqslant\frac{38}{147}n-\frac{310}{21}.$$

При $p=7$ появляется таинственный множитель $\frac{38}{147}$, самый большой из трех. Брать $p\geqslant 11$ бессмысленно, так как $11\cdot\frac{38}{147}n>2n$, и неравенства для $k(A, 2n)$ будут менее точными. Итак, мы доказали, что при $n\geqslant 2$ для любой последовательности $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$

$$\max(a_i, a_j)>\frac{38}{147}n-\frac{310}{21}.$$

Чтобы доказать, что коэффициент $\frac{38}{147}$ нельзя увеличить, возьмем $A=\frac{38}{147}n+\frac{310}{21}$. Тогда при $n\geqslant 543$ будет $7A\leqslant 2n<11A$, и, используя неравенство (3), получаем $k(A, 2n)\geqslant n$. Следовательно, при $n\geqslant 543$ всегда найдется последовательность $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$, для которой $\max(a_i, a_j)\leqslant\frac{38}{147}n+\frac{310}{21}$.

Если оценить $m_r(C)$ слегка аккуратней, то можно получить более точные неравенства: при $n\geqslant 2$ для любой последовательности $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$

$$\max(a_i, a_j)\geqslant\frac{38}{147}n-\frac{73}{49};$$

и, кроме того, существует последовательность $a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant 2n$, для которой

$$\max(a_i, a_j)\leqslant\frac{38}{147}n+\frac{73}{49}$$

(замечательно то, что константу $\frac{73}{49}$ в этих неравенствах уменьшить уже нельзя).

Д. Бернштейн

Ф513. *В ясный солнечный день, когда Солнце находится высоко над горизонтом, получите на гладком экране, например, на белой стене, тень от ровного края куска картона. Если теперь поднести к листу картона палец так, как это показано на рисунке 5, то на экране навстречу тени пальца из тени, отбрасываемой листом картона, высунется тень второго пальца. Проведите такой опыт и объясните его результат.*

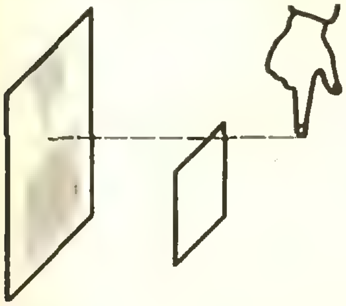


Рис. 5.

Привлечь для описания явления понятие дифракции невозможно, так как размеры дифракционной картины при таких расстояниях малы.

Решение задачи возможно только тогда, когда мы учтем, что Солнце — не точечный источник света, а обладает конечными угловыми размерами.

Чтобы понять, как появляется встречная тень, обратимся к рисунку 6.

Так как Солнце как источник света имеет некоторые угловые размеры (около половины градуса), то тени от всех предметов в солнечный день размыты. Степень размытия края тени зависит от расстояния от предмета до поверхности, где наблюдается тень. Хотя в приведенном опыте кажется, что край тени предмета резко очерчен, на самом деле это не так. Кроме области полной тени есть еще и область полутени. Когда палец, приближаясь к предмету, перекрывает часть лучей, попадающих в область полутени, на экране появляется встречная тень. Слияние тени и встречной тени при дальнейшем движении пальца вниз происходит на границе полутени и освещенной части экрана.

Измерив расстояния между предметом и экраном, между пальцем и предметом и размер встречной тени перед слиянием с прямой тенью, можно на основе простых геометрических соображений оценить угловой размер Солнца.

Г. Соловьянюк

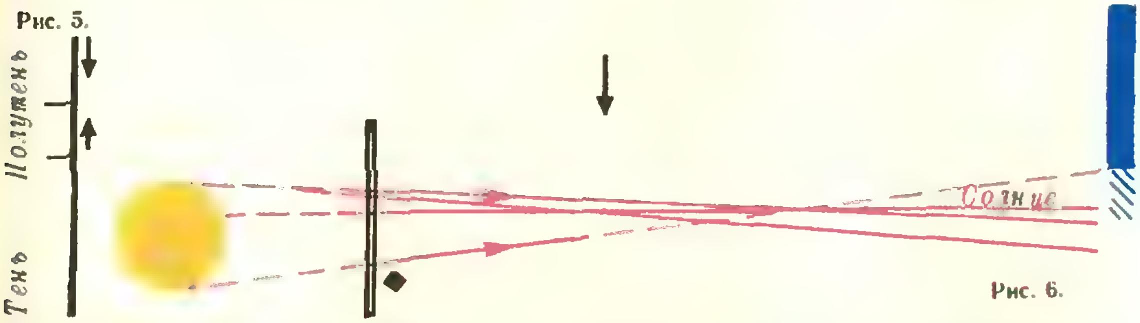


Рис. 6.

Ф516. *Тяжелый диск радиуса R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены (рис. 7). Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?*

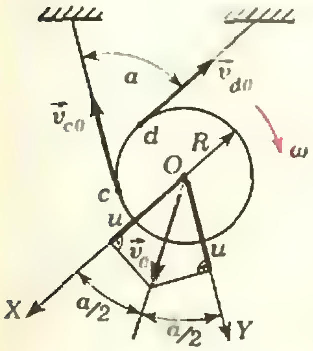


Рис. 7.

Рассмотрим движение точек c и d, в которых нити касаются диска, в системе координат, начало которой совпадает с точкой O, в которой находится центр диска, когда угол между нитями равен α, а оси OX и OY составляют угол α друг с другом и параллельны нитям (рис. 7). В этой системе координат (как и в любой неподвижной системе) скорости точек c и d равны соответственно

$$\vec v_c = \vec v_0 + \vec v_{co}, \quad \vec v_d = \vec v_0 + \vec v_{do},$$

где $\vec v_0$ — скорость центра диска, $\vec v_{co}$ и $\vec v_{do}$ — скорости точек c и d относительно центра диска. Очевидно, $|\vec v_{co}| = |\vec v_{do}|$, и при угловой скорости вращения диска ω

$$|\vec v_{co}| = |\vec v_{do}| = \omega R = u.$$

Из условия нерастяжимости нитей следует, что, когда нити образуют угол α, проекции v_{dx} и v_{cy} скоростей $\vec v_d$ и $\vec v_c$ на оси OX и OY равны нулю:

$$v_{dx} = v_{0x} - u = 0,$$
$$v_{cy} = v_{0y} - u = 0.$$

Отсюда

$$v_{0x} = v_{0y} = u.$$

Это означает, что вектор $\vec v_0$ скорости центра диска направлен вдоль биссектрисы угла XOY и равен по абсолютной величине

$$\left|\vec{v}_0\right| = \frac{u}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\omega R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

А. Матвеев

◆

Ф517. *Пучок электронов с энергией $E=1,0$ кэВ проходит через два небольших конденсатора, отстоящих друг от друга на расстоянии $l=20$ см. Оба конденсатора подключены параллельно к одному генератору. Изменением частоты генератора добиваются того, что пучок электронов проходит эту систему без отклонения. Определить отношение e/m для электрона, если два последовательных значения частоты, при которых выполняется это условие, равны 141 МГц и 188 МГц.*

Отклонения электронов в конденсаторах «компенсируют» друг друга, если за время $\Delta t=l/v$, пока электроны летят в промежутке между конденсаторами (v — абсолютное значение скорости электронов), фаза напряжения на конденсаторах меняется на $k\pi$, где k — целое число. Так как $\Delta\varphi=\omega\Delta t$ и $\omega=2\pi\gamma$ (γ — частота генератора), значения частот, при которых это условие выполняется, определяются соотношением

$$\frac{l}{v} = \frac{k\pi}{2\pi\gamma}.$$

Если γ_1 и γ_2 — последовательные значения частоты генератора, при которых электроны пролетают систему без отклонения, то

$$2\pi\gamma_1 l/v=k\pi, \quad 2\pi\gamma_2 l/v=(k+1)\pi.$$

Отсюда находим

$$v=2(\gamma_2-\gamma_1)l.$$

Итак, влетающий в систему электрон обладает кинетической энергией $E=\frac{mv^2}{2}$. Эту энергию $E=1$ кэВ электрон приобрел, пройдя «предварительно» разность потенциалов $u=1$ кВ: $E=eu$ (e — заряд электрона). Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{4m(\gamma_2-\gamma_1)^2 l^2}{2} = eu,$$

откуда

$$\frac{c}{m} = \frac{4(\gamma_2-\gamma_1)\,l^2}{2u} = 1,76\cdot10^{11}\,\text{Кл/кг}.$$

И. Слободецкий

НА МАРКАХ АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Нельзя сказать, чтобы Альберту Эйнштейну очень повезло в филателии. Существует всего несколько марок, посвященных ему и его научным достижениям. Правда, с течением времени значение его вклада в науку растет — мы все лучше и лучше понимаем величие его трудов. Поэтому, наверное, в будущем появится еще немало эйнштейновских марок.

Мы воспроизводим здесь две почтовые марки с портретами Эйнштейна. Одна из них выпущена в Польской народной республике, другая — в США.

А. Алтыкис,
В. Рудов

United States 8c

В. Рыжик

Где ошибка?

В некоторой школе, в некотором (девятом) классе решалась

Задача. *Найти наибольшее значение площади боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, если площадь его основания равна* 1, *а длина диагонали равна* 2.

Обозначим длины сторон основания через a и b, длину бокового ребра — через c. Тогда площадь Q боковой поверхности будет равна $2(a+b)c$. Итак, для решения задачи нужно найти наибольшее значение выражения

$$Q=2\,(a+b)c. \qquad (1)$$

Из условия вытекает, что измерения параллелепипеда a, b и c связаны равенствами

$$\begin{cases} ab=1, & (2)\\ a^2+b^2+c^2=4. & (3)\end{cases}$$

Запишем выражение (1) как функцию от одной переменной. В той школе, в том классе были предложены два способа для этого.

Первый способ. Из (2) $b=\frac{1}{a}$. Тогда из (3) $c=\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}$ Значит, функция, наибольшее значение которой надо найти, имеет вид

$$Q\,(a)=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}. \qquad (4)$$

Как полагается, возьмем производную. Преобразовав ее, получим

$$Q'\,(a)=-\frac{4\,(a-1)\,(a+1)\,(a^4-a^2+1)}{a^3\sqrt{-a^4+4a^2-1}}$$

Областью определения функции $Q\,(a)$ является множество

$$\left[-\sqrt{2+\sqrt{3}};\ -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right]\cup$$
$$\cup\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right].$$

По смыслу обозначений $a>0$. Таким образом, нужно найти наибольшее значение функции (4) на отрезке $\left[\sqrt{2-\sqrt{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$. Обычным способом («Алгебра и начала анализа 9», п. 59) находим

$$\max Q\,(a)=Q\,(1)=4\sqrt{2}.$$

Второй способ. Из (2) и (3) легко следует

$$(a+b)^2+c^2=6 \qquad (5)$$

или

$$a+b=\sqrt{6-c^2}. \qquad (6)$$

Из (1) и (6) получаем

$$Q\,(c)=2c\sqrt{6-c^2}. \qquad (7)$$

Опять возьмем производную:

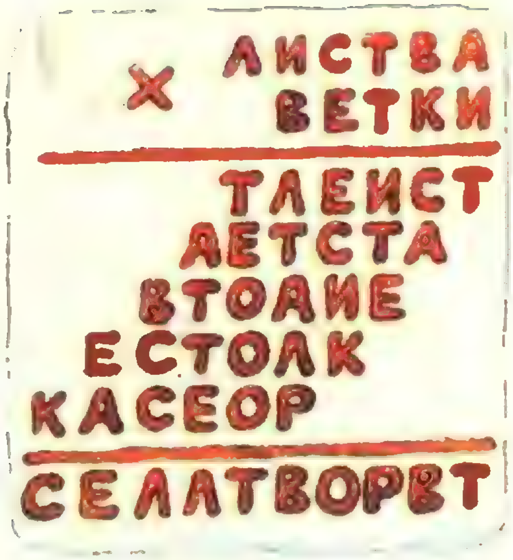
$$Q'\,(c)=\frac{6-2c^2}{\sqrt{6-c^2}}.$$

Областью определения функции $Q\,(c)$ является отрезок $\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]$. По смыслу обозначений $c>0$. Поэтому будем искать наибольшее значение функции (7) на промежутке $\left[0;\sqrt{6}\right]$. Обычным способом находим

$$\max Q\,(c)=Q\left(\sqrt{3}\right)=6.$$

Оказалось, что, по-разному выбрав переменную, через которую мы выражаем целевую функцию (1), мы получили разные результаты.

В той школе, в том классе довольно быстро разобрались, в чем дело. А вы?

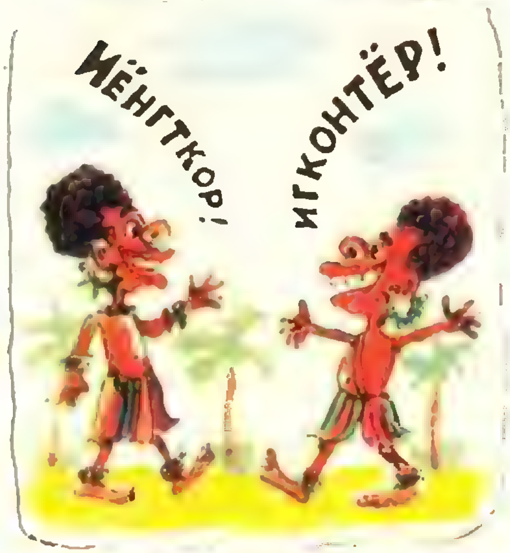


Задачи

1. Прочтите 14 зашифрованных цифрами слов:

5916, 1378, 609136, 6094, 9721,
591, 690958, 634, 7958, 8374,
61274, 790968, 4242025, 79691,

заменив для этого в приведенном на рисунке примере на умножение буквы на цифры (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры).


ИЁНГТКОР!
ИГКОНТЁР!

2. В языке некоторого племени любое сочетание восьми различных букв И, Г, Р, Ё, Т, Н, О, К является словом и других слов нет. Вождь племени, узнав о существовании словарей, поручил своему придворному Лингвисту составить аналогичный словарь из всех слов племени. Лингвист выписал буквы в порядке И, Г, Р, Ё, Т, Н, О, К и стал упорядочивать слова в соответствии с этим алфавитом. Он дошел до слова ЁКОНТРГИ. Какое слово он должен написать следующим? А после слова ИЁНГТКОР? После слова ИГКОНТЁР? Можете ли вы предложить Лингвисту простой способ упорядочивания слов в словаре? Кстати, какое слово будет последним?

3. Задача — шутка. В комнате стоят табуретки и стулья. У каждой табуретки 3 ноги, у каждого стула 4 ноги. Когда на всех табуретках и стульях сидят люди, в комнате всего 39 ног. Сколько стульев и сколько табуреток в комнате?

4. Два человека бегут по ступеням эскалатора метро. Один бежит быстрее другого. Кто из них насчитает больше ступеней?

ГАВ
ГАВ
ГАВ
ГАВ
2×2=

А. Савин

Число — буква — число

(поупражняемся в устном счете!)

Чтобы заполнить цифрами клетки изображенного на рисунке 1 *кросснамбера* (в отличие от *кроссворда* он составляется не из слов, а из чисел), необходимо расшифровать числа x, y, z, u, v и выполнить над ними несколько арифметических действий. Полученные числа нужно поставить в клетки кросснамбера.

Все вычисления постарайтесь сделать «в уме», используя карандаш и бумагу лишь для записи окончательных результатов.

На рисунке 2 изображен код, с помощью которого зашифрованы числа x, y, z, u и v; однако, чтобы расшифровать эти числа, нужно применить свой ключ для каждого числа. Покажем это на примере.

Пример.

Ключ: *умножить на 2.* 33—10—8—35—8—30—3—25—15—35—26—9—8—27—25—8—17. Умножим эти числа на 2 и прочитаем с помощью кодовой картинки (рис. 2): 66—20—16—70—16—60—6—50—30—70—52—18—16—54—50—16—34

ЭТО★ОЧЕНЬ★ПРОСТО.

Теперь попробуйте найти эти числа.

Число x.

Ключ: *прибавить 7.* 33—34—31—26—13—23.

Число y.

Ключ: *разделить на 3.* 60—87—57—99—75—3.

Число z.

Ключ: *вычесть 6.* 26—24—16—21—42—11—30—7—26—36.

Число u.

Ключ: *умножить на 2 и вычесть 2.* 9—21—6—26.

Число v.

Ключ: *умножить на 3 и прибавить 1.* 6—18—5.

Найдя числа x, y, z, u, v, мы сможем заполнить клетки кросснамбера:

По горизонтали

b) $(x+z+v)\,v+u$;
d) $y:(x-u)$;
e) $(v-u)\cdot(z-x)$;
g) $yz-(x+z)\,(x+u)$;
h) $(x+u)\,y+z$;
j) $(z-x)\,(y+u):z$;
l) xv;
m) $y\,(y+u):z+z$.

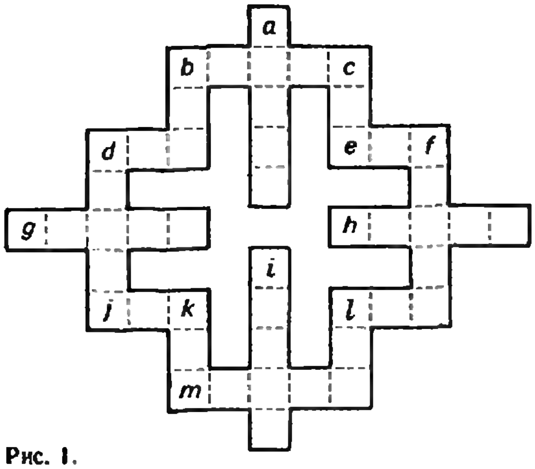

a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m

Рис. 1.

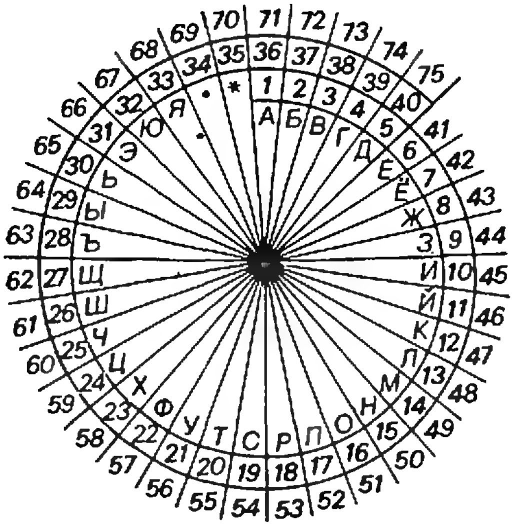

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36
37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75
А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Рис. 2.

По вертикали:

$a)$ $(x+z)\,y$;
$b)$ $z+u+v-x$;
$c)$ $x+z+u+v$;
$d)$ $xzv+z$;
$f)$ $yz\,(z+u-x)$;
$i)$ yz;
$k)$ $xv-z$;
$l)$ $xv+z$.

Числовые ребусы

Замените буквы и звездочки цифрами так, чтобы получились верные «примеры». В каждой задаче разные буквы обозначают разные цифры (разумеется, в различных задачах одна и та же буква может обозначать разные цифры); звездочки можно заменять любыми цифрами. Первая задача состоит из двух «примеров».

Э. Рекстин

1.

```
      × СРЕДА
        НИКТО
        ─────
       *****О
      *****Т
     *****К
     ****И
    *****Н
    ───────────
    ******АР**
```

```
ИНДЕКСАТОР │ НИКТО
******     ├──────
──────     │ СРЕДА
 ***ЕДА
 ******
 ──────
  ******
  ******
  ──────
     *****
     *****
     ─────
        ТА
```

2.

```
а*********│а***
аа***     ├──────
─────     │******
  ****
  ****
  ────
  а****
  а***а
  ─────
    ****
    ****
    ────
     **а*
     **а*
     ────
```

3.

$$и^с + к^с + с^с = икс$$

Л. Асламазов

Работа и мощность электрического тока

При перемещении заряда q в электрическом поле совершается работа

$$A=q\ (\varphi_1-\varphi_2)=qU,$$

где $U=\varphi_1-\varphi_2$ — разность потенциалов начального и конечного положений заряда. Электрический ток — это направленное движение зарядов. За время t через поперечное сечение проводника, по которому течет ток I, проходит заряд $q=It$. Поэтому полная работа, которую может совершить электрический ток в проводнике, равна

$$A=qU=UIt.$$

Отсюда получается известная формула для полной мощности тока:

$$P=UI. \qquad (1)$$

Количество теплоты, выделяемое током в проводнике, определяется законом Джоуля—Ленца:

$$Q=I^2Rt.$$

Соответственно, мощность тепловых потерь определяется формулой:

$$P_т=I^2R. \qquad (2)$$

Для обычного проводника, для которого справедлив закон Ома $U=IR$, формулы (1) и (2) эквивалентны, и, следовательно, вся работа электрического тока переходит в тепло. При этом для мощности можно пользоваться еще и такой формулой:

$$P=P_т=\frac{U^2}{R}. \qquad (3)$$

Предпочтительность использования какой-либо из формул (1), (2) и (3) определяется постановкой конкретной задачи.

Задача 1. *Две электрические лампочки, рассчитанные на включение в сеть с напряжением $U=220$ В, имеют мощности $P_1=25$ Вт и $P_2=100$ Вт. Какая из лампочек будет гореть ярче, если их включить в сеть, соединив между собой последовательно?*

Найдите отношение яркостей каждой лампочки при обычном (одиночном) и последовательном включениях.

Считать, что яркость пропорциональна тепловой мощности, выделяемой в лампочке.

При последовательном соединении лампочек через них течет один и тот же ток. Поэтому для сравнения выделяемых в них мощностей удобнее пользоваться формулой (2):

$$\frac{P_1'}{P_2'}=\frac{I^2R_1}{I^2R_2}=\frac{R_1}{R_2}.$$

Для нахождения отношения сопротивлений воспользуемся формулой (3), так как известные номинальные мощности P_1 и P_2 соответствуют одному и тому же напряжению U на лампочках:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{U^2/R_1}{U^2/R_2},\ \text{и}\ \frac{R_1}{R_2}=\frac{P_2}{P_1}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{P_1'}{P_2'}=\frac{P_2}{P_1}=4$$

— лампочка мощностью в 25 Вт при последовательном включении будет гореть в 4 раза ярче.

Сравним теперь мощности, выделяемые в каждой лампочке при обычном (одиночном) и последовательном включениях. В первом случае

$$P_1=\frac{U^2}{R_1}\ \text{и}\ P_2=\frac{U^2}{R_2}.$$

Отсюда можно найти сопротивления лампочек R_1 и R_2:

$$R_1=\frac{U^2}{P_1}\ \text{и}\ R_2=\frac{U^2}{P_2}.$$

Когда лампочки соединены последовательно, через них течет ток $I=\frac{U}{R_1+R_2}$. Выделяемые в лампочках мощности можно найти по формуле (2):

$$P'_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2} \text{ и } P'_2 = \frac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Тогда для отношений мощностей получаем:

$$\frac{P_1}{P'_1} = \left(1 + \frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \frac{25}{16} \text{ и } \frac{P_2}{P'_2} = \left(1 + \frac{P_2}{P_1}\right)^2 = 25$$

— обе лампочки при последовательном включении горят менее ярко, однако для второй лампочки уменьшение мощности в 16 раз больше.

Когда на участке цепи имеется источник ЭДС $\mathscr{E}$, выражения для полной мощности и мощности тепловых потерь (формулы (1) и (2)) перестают быть эквивалентными, и поэтому в балансе энергий необходимо учитывать работу сторонних сил $\mathscr{E}It$. При этом напряжение U на участке отличается от ЭДС $\mathscr{E}$ на величину падения напряжения IR:

$$U = \mathscr{E} \pm IR \qquad (4)$$

(знак «минус» относится к случаю, когда направление тока на участке совпадает с направлением тока, создаваемого ЭДС, «плюс»— к противоположному случаю). Соответственно, полная мощность тока UI не равна тепловой мощности I^2R:

$$UI = \mathscr{E}I \pm I^2R. \qquad (5)$$

Задача 2. *Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое за $t=1$ с, в аккумуляторе: а) при его зарядке током $I_1=5$ А, разность потенциалов между полюсами аккумулятора $U_1=20$ В, ЭДС аккумулятора $\mathscr{E}=12$ В; б) при разрядке того же аккумулятора на внешнее сопротивление, ток разрядки $I_2=1$ А.*

В первом случае — при зарядке аккумулятора — направление электрического тока противоположно направлению тока, создаваемого ЭДС (рис. 1, *а*), поэтому в формулах (4) и (5) необходимо поставить знаки «плюс». Это означает, что полная работа электрических сил, равная

$$A_1 = U_1 I_1 t = 100 \text{ Дж},$$

складывается из работы $\mathscr{E}I_1t$ против сторонних сил (зарядка аккумулятора) и выделяемого количества теплоты; следовательно, количество теплоты равно

$$Q_1 = A_1 - \mathscr{E}I_1t = (U_1 - \mathscr{E})I_1t = 40 \quad \text{Дж}.$$

Формула (4) позволяет также определить и внутреннее сопротивление r аккумулятора:

$$U_1 = \mathscr{E} + I_1 r, \text{ и } r = \frac{U_1 - \mathscr{E}}{I_1}.$$

Во втором случае — при разрядке аккумулятора — ток на интересующем нас участке совпадает по направлению с током, создаваемым ЭДС (рис. 1, *б*), поэтому работа электрических сил равна

$$A_2 = U_2 I_2 t = (\mathscr{E} - I_2 r) I_2 t = \frac{(\mathscr{E}(I_1 + I_2) - U_1 I_2) I_2}{I_1} t = 10{,}4 \text{ Дж},$$

а количество теплоты —

$$Q_2 = I_2^2 r t = \frac{I_2^2 (U_1 - \mathscr{E})}{I_1} t = 1{,}6 \text{ Дж}.$$

Задача 3. *Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат с переменным сопротивлением R (рис. 2, а). Построить графики зависимости силы тока I, напряжения на источнике U, мощности P, выделяемой во внешней цепи, полной мощности тока $P_п$, а также КПД η при изменении сопротивления реостата R.*

Напишем вначале аналитические выражения для указанных зависимостей. Сила тока находится по закону

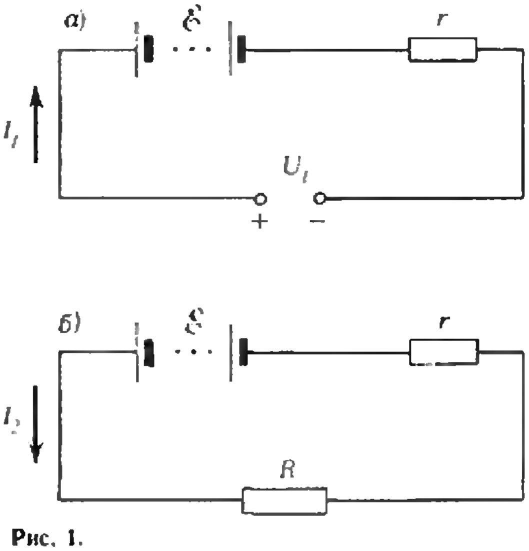


Рис. 1.

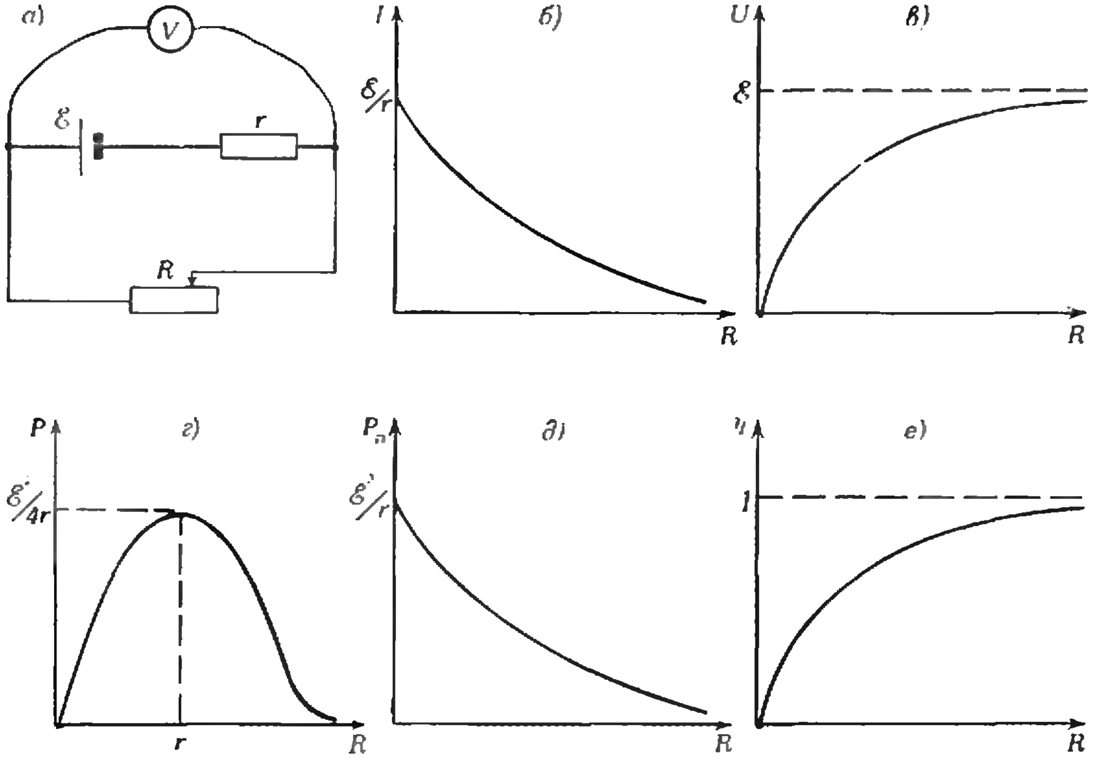


Рис. 2.

Ома для замкнутой цепи:

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R+r}.$$

Напряжение на источнике равно напряжению на внешнем сопротивлении:

$$U=IR=\frac{\mathscr{E}R}{R+r}.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи, равна мощности тепловых потерь; ее можно определить по формуле (2):

$$P=I^2R=\frac{\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2}.$$

Полная мощность тока равна мощности сторонних сил или суммарной мощности тепловых потерь на внутреннем и внешнем сопротивлениях:

$$P_п=\mathscr{E}I=I^2(R+r)=\frac{\mathscr{E}^2}{R+r}.$$

Для коэффициента полезного действия имеем:

$$\eta=\frac{P}{P_п}=\frac{R}{R+r}.$$

Соответствующие графики показаны на рисунках 2, *б—е*. Обратите внимание на наличие максимума у мощности P, выделяемой во внешней цепи (покажите самостоятельно, что мощность P максимальна при равенстве внешнего и внутреннего сопротивлений).

Другой пример, когда не вся работа электрических сил переходит в тепло, дают электромоторы.

Задача 4. *Электромотор включен в сеть постоянного тока с напряжением* $U=220$ *В. Сопротивление обмотки мотора* $R=5$ *Ом. Сила потребляемого тока* $I=10$ *А. Найти механическую мощность мотора и его КПД.*

Полная мощность электрического тока в данном случае складывается из механической и тепловой мощностей:

$$UI=P_м+I^2R,$$

поэтому

$$P_м=UI-I^2R=1700\ \text{Вт}$$

и КПД мотора

$$\eta=\frac{P_м}{P}=\frac{UI-I^2R}{UI}\approx0{,}77=77\%.$$

Задача 5. *Какую максимальную полезную (механическую) мощность* $P_{м\,max}$ *может развить электромотор, имеющий сопротивление об-*

мотки R и включенный в сеть с напряжением U? Какой ток при этом он потребляет?

Найдите значение тока через обмотку мотора при мощности $P_м < P_{м\,max}$. Какой физический смысл имеет неоднозначность ответа?

Из решения предыдущей задачи следует, что зависимость $P_м$ от тока I является квадратичной и графически изображается параболой (рис. 3). Максимальная мощность $P_{м\,max} = \frac{U^2}{4R}$ достигается при токе $I = \frac{U}{2R}$ (проверьте это).

Как видно из рисунка 3, одна и та же мощность $P_м < P_{м\,max}$ развивается при двух значениях тока

$$I_1 = \frac{U - \sqrt{U^2 - 4P_м R}}{2R}$$

и

$$I_2 = \frac{U + \sqrt{U^2 - 4P_м R}}{2R}.$$

Объясним физический смысл этой неоднозначности. Запишем закон Ома для обмотки мотора:

$$U = \mathcal{E}_{инд} + IR,$$

где $\mathcal{E}_{инд}$ — ЭДС индукции, которая возникает вследствие вращения обмотки в магнитном поле (знак «плюс» в формуле выбран в соответствии с правилом Ленца). По закону электромагнитной индукции $\mathcal{E}_{инд}$ пропорциональна скорости вращения. Следовательно, различные значения тока соответствуют разным значениям ЭДС и, соответственно, разным скоростям вращения мотора: одну и ту же механическую мощность мотор может развивать, поднимая медленно тяжелый груз или быстро — легкий.

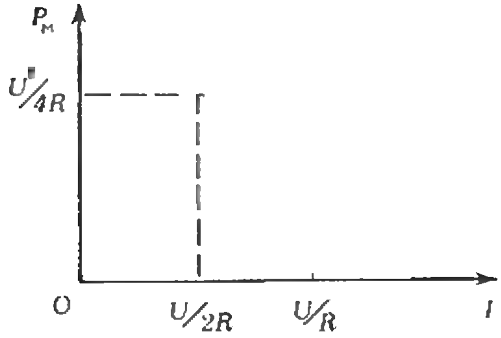


Рис. 3.

Задача 6. *Какую полезную мощность развивает мотор, включенный в сеть с напряжением $U = 220$ В, при потребляемом токе $I_1 = 10$ А? Известно, что при полном затормаживании якоря через обмотку течет ток $I_2 = 40$ А.*

При полной остановке мотора ЭДС индукции в обмотке равна нулю; следовательно, $U = I_2 R$. Отсюда найдем сопротивление R обмотки мотора: $R = U/I_2 = 5{,}5$ Ом. Полезная (механическая) мощность при токе I_1 равна

$$P_м = UI_1 - I_1^2 R = 1650 \text{ Вт}.$$

Теперь обсудим вопрос о тепловых потерях при передаче энергии по проводам на далекие расстояния. Как известно, для того чтобы тепловые потери сделать минимальными, в линиях передач используют высокое напряжение. Не следует путать передаваемое напряжение U — разность потенциалов между проводами линии электропередачи и падение напряжения в линии $\Delta U = IR$, которое связано с текущим по проводам током I и сопротивлением линии R. Передаваемая по проводам мощность равна $P = UI$, а тепловые потери — $P_т = I^2 R = \frac{\Delta U^2}{R}$. Одну и ту же мощность P можно передать при меньшем токе, если увеличить передаваемое напряжение U. При этом падение напряжения в линии ΔU и тепловые потери $P_т$ уменьшатся.

Задача 7. *Линия электропередачи должна передать мощность $P = 100$ кВт на расстояние $L = 100$ км. Потери энергии не должны превышать 2%. Какое минимальное сечение провода (с удельным сопротивлением $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) пригодно для этой цели, если передаваемое напряжение $U = 5000$ В?*

Во сколько раз можно уменьшить сечение провода при увеличении напряжения в 10 раз?

Сила тока в линии $I = P/U$. Максимальные тепловые потери $P_т = I^2 R = \frac{P^2 R}{U^2}$ должны составлять $0{,}02\,P$. Отсюда сопротивление линии равно $R = \frac{U^2}{50P}$. Используя известное выраже-

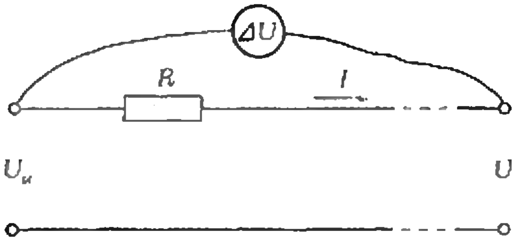


Рис. 4.

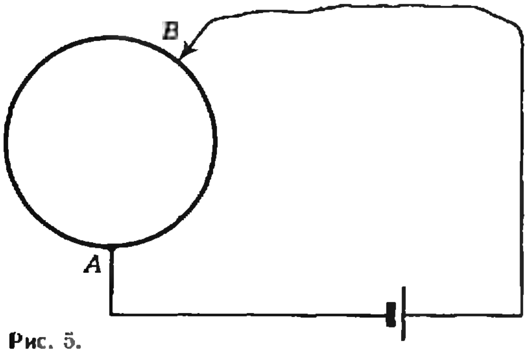


Рис. 5.

ние для сопротивления $R=\rho l/S$, получаем:

$$S=\frac{\rho l}{R}=\frac{100\rho LP}{U^2}\approx 7\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Отсюда видно, что при увеличении напряжения в 10 раз сечение можно уменьшить в 100 раз!

Задача 8. *Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в линии в 100 раз при передаче на нагрузку одной и той же мощности? Известно, что в первом случае падение напряжения в линии составляет $n=0{,}03$ от напряжения на нагрузке. Надо ли при этом изменять сопротивление нагрузки?*

Тепловые потери в линии с сопротивлением R равны $P_т=I^2R$. Поэтому для уменьшения потерь в 100 раз необходимо уменьшить ток в 10 раз: $I_2=I_1/10$.

Напряжение источника $U_и$ отличается от напряжения на нагрузке U на величину $\Delta U=IR$ падения напряжения на подводящих проводах (рис. 4):

$$U_{и1}=U_1+I_1R \quad \text{и} \quad U_{и2}=U_и+I_2R.$$

Так как мощность, передаваемая на нагрузку, не меняется, то

$$U_1I_1=U_2I_2.$$

Кроме того, по условию задачи

$$I_1R=nU_1.$$

Используя написанные соотношения, для отношения напряжений на источнике получаем:

$$\frac{U_{и2}}{U_{и1}}=\frac{100+n}{10(1+n)}.$$

Так как передаваемый ток уменьшается в 10 раз, то для того чтобы нагрузка потребляла ту же мощность, ее сопротивление необходимо увеличить в 100 раз.

Упражнения

1. Имеется пять электрических лампочек, рассчитанных на напряжение 110 В. Мощность трех лампочек 40 Вт, а двух — 60 Вт. Как следует включить их в сеть с напряжением 220 В, чтобы все они горели полным накалом?

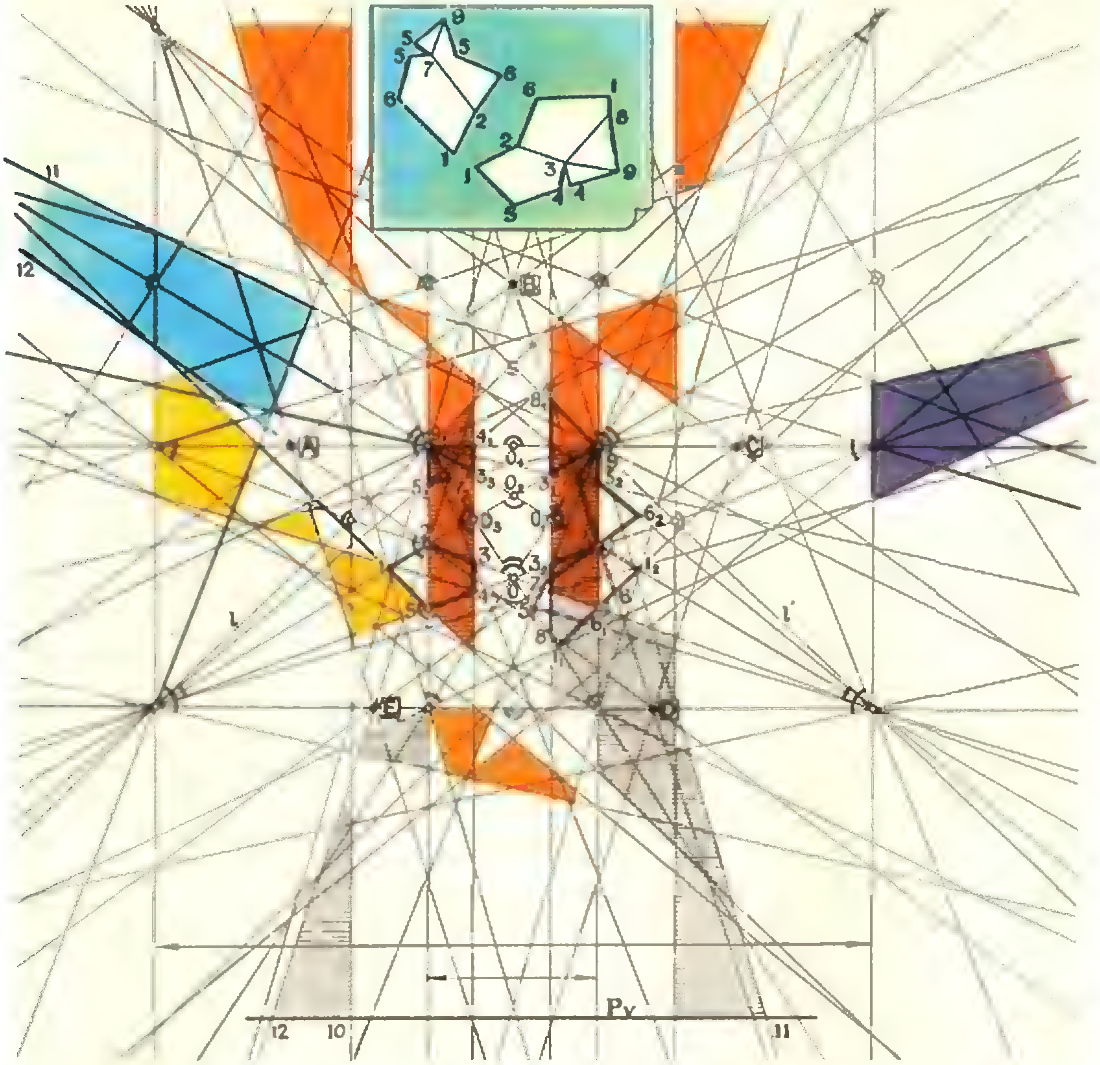
2. Кольцо из однородной проволоки включено в цепь, как показано на рисунке 5. При каком положении движка B в кольце будет выделяться минимальное количество теплоты? Считать, что напряжение на источнике постоянно.

3. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом замкнут на внешнюю цепь. При токе $I_1=2$ А на внешнем сопротивлении выделяется мощность $P_1=8$ Вт. Какая мощность выделится во внешней цепи при токе $I_2=1$ А? Чему равна ЭДС аккумулятора?

4. Почему электромотор, работающий вхолостую, нагревается меньше, чем когда он нагружен? В каком случае в обмотке мотора выделяется наибольшее количество теплоты?

5. Двигатель локомотива массой $m=50$ т при подъеме в гору с уклоном $\alpha=0{,}01$ потребляет ток $I_1=100$ А, а при спуске с той же горы — ток $I_2=50$ А. Найти скорости поезда в обоих случаях. Напряжение в линии $U=2000$ В; КПД двигателя $\eta=0{,}7$; коэффициент трения $k=0{,}02$.

6. Объясните, почему при включении в сеть электроприборов, потребляющих большую мощность, яркость горящих лампочек уменьшается. Рассчитайте, во сколько раз уменьшится яркость лампочки с номинальной мощностью $P_1=100$ Вт при включении параллельно ей утюга мощностью $P_2=1000$ Вт (считать, что яркость лампочки пропорциональна выделяемому в ней количеству теплоты). Сопротивление подводящих проводов от источника номинального напряжения $U=127$ В до розетки $R=2$ Ом.



Постройте многогранник!

С помощью этого рисунка можно построить сколько угодно многогранных поверхностей. (Фотография одной из них приведена на второй странице обложки.) Строятся они так.

Возьмем большой кусок кальки и наложим его на рисунок. Перенесем на него произвольный многоугольник, образованный линиями нашего рисунка. Отметим на кальке некоторую вершину многоугольника и на любой из содержащих его стороны прямых найдем точку с дужкой. Повернем кальку вокруг этой точки на отмеченный угол. При этом ребро нашего многоугольника обязательно совместится с ребром некоторого другого многоугольника. Его мы тоже перенесем на кальку — он «приклеится» к первому многоугольнику с внешней стороны. Затем на любой из тех прямых, содержащих два «свободных» ребра нашего чертежа, которые примыкают к отмеченной вершине, найдем точку с дужкой, вновь повернем кальку и срисуем следующий многоугольник. Будем действовать так до тех пор, пока при очередном повороте мы не получим уже срисованный многоугольник. Как только это произойдет, у нас окажется развертка всех примыкающих к данной вершине граней строящейся поверхности.

Заметим, что нам не всегда удастся обойтись одним листом кальки. Если грани в вершине сходятся «гармошкой», то развертка «налезет» на себя и придется перейти на другой лист кальки. Поступим также со следующей вершиной и т. д. В результате мы получим развертку некоторой многогранной поверхности. После некоторой тренировки вы научитесь извлекать из эпюры (так называется рисунок) самые разнообразные поверхности.

(Окончание см. с. 53)

С. Сефибеков

Доказательство геометрических неравенств

В математических задачах часто бывает полезен такой прием: двумя способами найти одну и ту же величину и приравнять полученные для нее выражения. Пусть мы, например, двумя способами нашли площадь некоторой фигуры. Если в одном из выражений для площади входит, скажем, синус какого-либо угла α, то при помощи соотношения $\sin\alpha \leqslant 1$ из полученного равенства можно получить некоторое неравенство, порой интересное. В статье С. Сефибекова этот прием иллюстрируется восемью задачами. Эти задачи доступны восьмиклассникам, но они интересны и для поступающих в вуз — задачи такого типа попадаются на устных экзаменах.

Ключ к решению приведенных ниже задач — три формулы для площадей. Как известно («Геометрия 8», п. 108), площадь треугольника равна половине произведения двух (любых) его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha \qquad (1)$$

Выведите отсюда, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними*):

$$S = \frac{1}{2}l_1 l_2 \sin\alpha. \qquad (2)$$

Докажите также, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности:

$$S = \frac{1}{2}Pr. \qquad (3)$$

Задача 1. *Доказать, что произведение любых двух сторон треугольника не меньше произведения его периметра на радиус вписанной окружности:* $ab \geqslant Pr$.

Решение. Достаточно приравнять выражения (1) и (3) для площади треугольника и учесть, что $\sin\alpha \leqslant 1$.

Замечание. Из решения видно, что если угол между сторонами с длинами a и b — не прямой, то

$$ab > Pr. \qquad (4)$$

Из неравенства (4) и замечания следует, что для любого треугольника

$$ab + bc + ca > 3Pr.$$

Задача 2. *Доказать, что радиус R окружности, описанной около произвольного треугольника, радиус r вписанной окружности и его периметр P удовлетворяет неравенству*

$$\text{а)}\ R > \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{Pr}, \qquad (5)$$

если треугольник остроугольный или тупоугольный;

$$\text{б)}\ R \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Pr}, \qquad (6)$$

если треугольник прямоугольный.

Решение. а) Соединим центр O описанной окружности с вершинами треугольника.

Для остроугольного треугольника (рис. 1)

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}. \qquad (7)$$

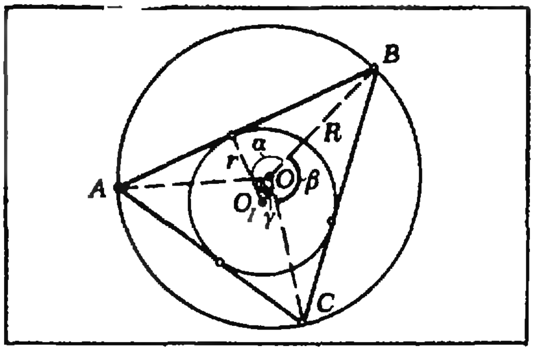


Рис. 1.

---

*) Почему не нужно указывать, какой именно угол между диагоналями рассматривается?

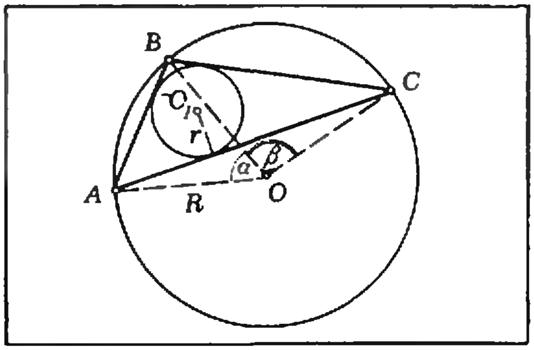


Рис 2.

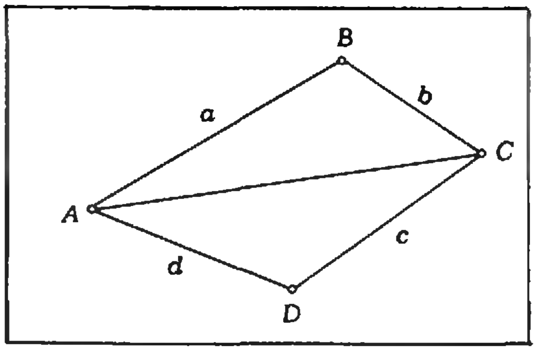


Рис. 3.

По формуле (3)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} Pr, \qquad (8)$$

а по формуле (1)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha, \qquad (9)$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} R^2 \sin\beta, \qquad (10)$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} R^2 \sin\gamma. \qquad (11)$$

Из равенств (7)—(11)

$$Pr = R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma). \qquad (12)$$

Из общих свойств синуса $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 3$. Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 360°$,

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma < 3. \qquad (3)$$

Для тупоугольного треугольника (с тупым углом в вершине B — рис. 2)

$$S_{ABC} = (S_{AOB} + S_{COB}) - S_{AOC}$$

или

$$Pr = R^2(\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + \beta)). \qquad (14)$$

Поскольку $\sin\alpha \leqslant 1$, $\sin\beta \leqslant 1$, $\sin(\alpha + \beta) \geqslant -1$ и $\alpha + \beta \neq 180°$, мы имеем $\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + \beta) < 3$. Отсюда и из (14) получаем (5).

б) Соединим вершину прямого угла C с центром O описанной окружности. Для прямоугольного треугольника ABC аналог равенств (12), (14) имеет вид:

$$Pr = R^2(\sin\widehat{AOC} + \sin\widehat{COB}).$$

Отсюда $\frac{Pr}{R^2} \leqslant 2$, что доказывает неравенство (6).

Если $\widehat{A} = \widehat{B} = 45°$, то $R = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Pr}$; в этом случае радиус R принимает наименьшее значение. Таким образом, из всех прямоугольных треугольников с фиксированным произведением Pr или, что все равно (см. формулу (3)), с фиксированной площадью S, минимальный радиус R имеет равнобедренный треугольник.

Задача 3. *Доказать, что периметр P четырехугольника, описанного около окружности радиуса r, и длины его диагоналей l_1, l_2 удовлетворяют неравенству:*

$$Pr \leqslant \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}.$$

Решение. Из формул (2) и (3)

$$Pr = l_1 l_2 \sin\alpha. \qquad (15)$$

Из неравенства $(l_1 - l_2)^2 \geqslant 0$ следует

$$l_1 l_2 \leqslant \frac{l_1^2 + l_2^2}{2},$$

откуда, в силу (15), получаем искомое неравенство.

Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то $\sin\alpha = 1$, т. е. $Pr = l_1 l_2$. Если еще $l_1 = l_2 = l$ (т. е. для квадрата), то

$$Pr = l^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}.$$

Задача 4. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Пусть P_1, P_2, P_3 и P_4 — периметры, соответственно, треугольников AOB, BOC, COD и DOA, а r_1, r_2, r_3 и r_4 — радиусы вписанных в них окружностей.*

Доказать неравенство:

$$|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|\cdot|OD| \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(P_1 r_1)\cdot(P_2 r_2)\cdot(P_3 r_3)\cdot(P_4 r_4)}. \qquad (16)$$

Решение. С одной стороны, по формуле (3)

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} P_1 r_1. \qquad (17)$$

С другой стороны, по формуле (1)

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot\sin\widehat{AOB}. \quad (18)$$

Из (17) и (18)

$$P_1r_1\leqslant|OA|\cdot|OB|. \quad (19)$$

Аналогично,

$$P_2r_2\leqslant|OB|\cdot|OC|, \quad (20)$$

$$P_3r_3\leqslant|OC|\cdot|OD|, \quad (21)$$

$$P_4r_4\leqslant|OD|\cdot|OA|. \quad (22)$$

Из (19) — (22) легко получается требуемое неравенство.

Равенство достигается, когда $[AC]\perp[BD]$. Из (16) и (13) легко получается неравенство:

$$S_{AOB}\cdot S_{BOC}\cdot S_{COD}\cdot S_{DOA}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{16}|OA|^2\cdot|OB|^2\cdot|OC|^2\cdot|OD|^2.$$

Задача 5. *Докажите, что для выпуклого четырехугольника $ABCD$ справедливо неравенство*

$$S_{ABCD}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}, \quad (23)$$

где a, b, c, d — длины его сторон.

Решение. Разобьем четырехугольник диагональю на два треугольника (рис. 3). Тогда

$$S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}.$$

По формуле (1)

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{B}.$$

Отсюда и из неравенства $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ получаем

$$S_{ABC}\leqslant\frac{a^2+b^2}{4}. \quad (24)$$

Аналогично

$$S_{ADC}\leqslant\frac{c^2+d^2}{4}. \quad (25)$$

Из (24) и (25) получаем требуемое неравенство.

Если $\widehat{B}=\widehat{D}=90°$ и $a=b=c=d$, т. е. четырехугольник $ABCD$ — квадрат, то соотношение (23) превращается в равенство.

В заключение — три задачи для самостоятельного решения.

Задача 6. *Доказать, что для трапеции с высотой h, диагоналями l_1, l_2 и основаниями a, b*

$$h\leqslant\frac{l_1l_2}{a+b}.$$

Задача 7. *Доказать, что для треугольника ABC*

$$S_{ABC}<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2),$$

где a, b, c — длины сторон.

Задача 8. *Доказать, что для выпуклого четырехугольника $ABCD$*

$$S_{ABCD}<$$

$$<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2),$$

где a, b, c, d — длины сторон, e, f — длины диагоналей.

Постройте многогранник!

(Начало на с. 50)

Многогранник на второй странице обложки получен из этой эпюры несколько более сложным образом: в нем «окружения» вершин 3 и 7 использованы по пять раз — из них образован купол модели с вершиной 9. Боковые поверхности тоже получены из эпюры.

Как же строить эпюры? Делается это с помощью *равногранно полуправильных* многогранников.

Такие многогранники замечательны тем, что все их грани равноправны: для любых двух граней такого многогранника можно указать такое перемещение пространства, при котором многогранник перейдет в себя, а первая грань перейдет во вторую. Возьмем любой такой многогранник и рассмотрим плоскости всех его граней. Зафиксируем одну из этих плоскостей (назовем ее Π). В ней остальными плоскостями «высекается» система прямых линий. Точно такие же системы образуются и в остальных плоскостях. Рассмотрим теперь некоторую прямую l системы. Она является пересечением плоскости Π и плоскости еще одной грани. При повороте, переводящем эту плоскость в плоскость Π, прямая l перейдет в некоторую прямую l' плоскости Π. Оказывается, прямая l' получается из прямой l либо поворотом (в плоскости Π) относительно их общей точки, либо параллельным переносом. Остается нанести на чертеж точки поворотов с соответствующими дужками и стрелочки для параллельных переносов.

Эпюра на рисунке получена из равногранного полуправильного шестидесятиугольника («Квант», 1976, № 1).

Совет. При изготовлении эпюры в большем масштабе воспользуйтесь тем, что пятиугольник $ABCDF$ правильный.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Ниже публикуются образцы вариантов вступительных экзаменов по математике и задач по физике в 1978 году.

Математика

(письменный экзамен)

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Для каких a и b $(a, b \in \mathbb{R})$ графики функций $f(x)=2x^4-a^2x^2+b-1$ и $g(x)=2ax^3-1$ имеют лишь две общие точки?

2. Сколько шестизначных чисел содержат точно четыре различные цифры?

3. Решить уравнение $(a \in \mathbb{R})$

$$1+2(\sin^2 2x-2a\cdot\cos 2x+a)\operatorname{tg}^2 x-\cos 4x=0.$$

4. Угол между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, длина стороны основания — a. Найти радиус сферы, касающейся боковых граней пирамиды и описанной около пирамиды сферы.

5. Найти вектор $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, образующий равные углы с векторами $\vec{b}=(y;\ -2z;\ 3x)$, $\vec{c}=(2z;\ 3x,\ -y)$, если $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{d}=(1;\ -1;\ 2)$, $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\vec{a}$ и осью Oy — тупой.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=4x-x^2+1$ и касательными к нему, проведенными в точках с абсциссами $x=0$ и $x=3$.

2. Сумма коэффициентов трех первых слагаемых разложения $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^m$ равна 97. Найти член разложения, содержащий x^4.

3. Найти решения уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}x\right)=2\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{x}{2}\right),$$

принадлежащие сегменту $[-\pi;\ \pi]$.

4. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны a, b, c; плоские углы, образованные этими ребрами, прямые. Найти длину высоты, опущенной на основание пирамиды.

5. При каких a и b $(a, b \in \mathbb{R})$ система

$$\begin{cases} 3^{2(x-y)}-6\cdot 3^{-2x}-3^{-y}>0, \\ ax+by=5 \end{cases}$$

имеет решения?

Географический и геологический факультеты и отделение политэкономии экономического факультета

1. Найти экстремумы, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3}$ на сегменте $[0;\ 3]$.

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x^2+6x+9}{2(x+1)}+\log_2(x+1)<0.$$

3. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, если их сумма равна 35, а сумма их квадратов равна 525.

4. Решить уравнение

$$2^{\frac{\sin x+\sin 3x-\sin 4x}{(1-\cos x)(1-\cos 3x)}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\operatorname{tg} x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-1}}$$

5. Найти объем тела, полученного при вращении правильного шестиугольника вокруг его стороны длины a.

Физика

(задачи устного экзамена)

1. При каком наименьшем значении коэффициента трения k между стенкой и шаром точка подвеса шара и его центр могут находиться на одной вертикали (рис. 1)?

2. Человек стоит на неподвижной тележке и бросает горизонтально камень массы $m=8$ кг со скоростью $|\vec{v}|=5$ м/с. Масса тележки вместе с человеком равна $M=160$ кг. Определить работу, совершаемую человеком при броске.

3. На конце доски массы M и длины L находится маленький брусок массы m (рис. 2). Доска может скользить без трения по горизонтальной плоскости, а коэффициент трения между бруском и доской равен k. Резким толчком доске сообщают начальную скорость $\vec{v}$ (трением между доской и бруском в момент толчка пренебрегаем). Опишите дальнейшее движение системы. Соскользнет ли брусок с доски?

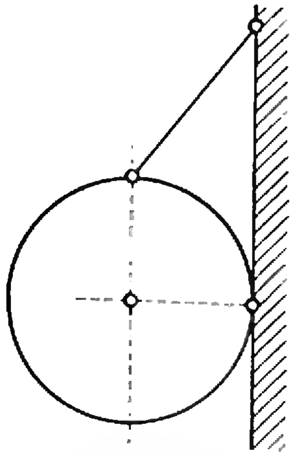


Рис. 1.

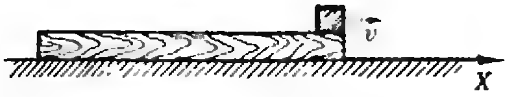


Рис. 2.

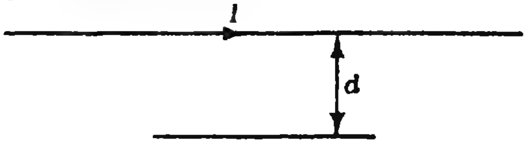


Рис. 3.

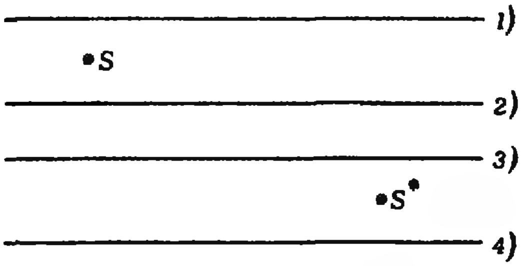


Рис. 4.

4. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длины $L=1$ м находится столбик ртути длины $l=20$ см. Если трубку поставить вертикально, столбик ртути сместится на $x=10$ см. До какого давления была откачана трубка? Ответ выразить в атмосферах (1 атм соответствует 76 см рт. ст.).

5. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, напряжение которой $U=600$ В. Пластины квадратные, площадью $S=100$ см^2 каждая; расстояние между пластинами $d=0,1$ мм. Какой величины ток будет протекать по проводам при параллельном смещении одной пластины относительно другой с постоянной скоростью $|\vec{v}|=6$ см/с?

6. Амперметр с внутренним сопротивлением $r_A=2$ Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает ток $I=5$ А. Вольтметр с внутренним сопротивлением $r_B=150$ Ом, подключенный к зажимам той же батареи, показывает напряжение $U=12$ В. Найти ток короткого замыкания I_0.

7. Под горизонтальным прямолинейным проводом, по которому течет ток, на расстоянии d от провода помещен металлический стержень AB (рис. 3). Стержень отпускают, и он начинает свободно падать. Найти вид зависимости разности потенциалов U на концах стержня от расстояния R до провода.

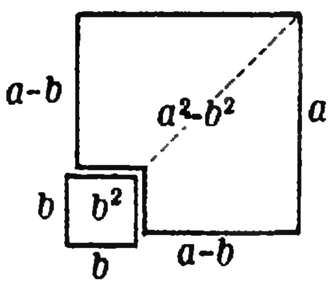
Указание. Считать известным, что ток, текущий по прямолинейному проводу, создает магнитное поле, индукция которого по модулю обратно пропорциональна расстоянию до провода и для точек в плоскости рисунка 3 направлена перпендикулярно этой плоскости.

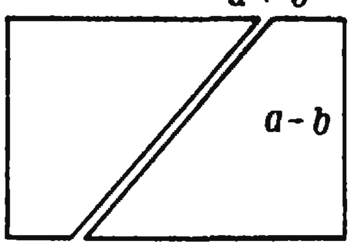
8. Предмет находится на расстоянии $L=0,9$ м от экрана. Между предметом и экраном перемещают линзу. При одном положении линзы на экране получается увеличенное изображение предмета, а при другом — уменьшенное. Найти фокусное расстояние линзы, если известно, что линейные размеры первого изображения в 4 раза больше линейных размеров второго.

9. Найти построением положение центра, вершины и фокуса сферического зеркала для показанных на рисунке 4 четырех различных вариантов положений источника S, его изображения S^* и главной оптической оси зеркала.

А. Васильев, А. Пономаренко

Геометрическое доказательство тождества $a^2-b^2=$ $=(a-b)\,(a+b)$.





А. Савин

15 лет Челябинскому НОУ

Прошло 15 лет интересной плодотворной работы Челябинского научного общества учащихся. За это время десятки тысяч школьников нашли в нем свое призвание. Но самое главное — заповедью каждого стали слова: «Родине — наши мысли, таланты, дела!».

В настоящее время в обществе 68 секций и групп в институтах и 27 филиалов в школах города и области, в которых занимаются более 3,5 тысяч старшеклассников, увлеченных различными областями науки и интересующихся отраслями народного хозяйства, характерными для Южного Урала. Содержание, формы и методы работы общества способствуют тому, что его члены в своей поисковой деятельности не только овладевают новыми знаниями и умениями, но и принимают посильное участие в производительном труде.

Показательным для нашего НОУ является то, что бывшие члены НОУ, ныне специалисты, возвращаются в него в качестве руководителей секций. Среди них преподаватели педагогического института И. Жуков и Е. Жмаева, кандидат медицинских наук В. Циркин, аспирант кафедры математики политехнического института В. Кононов, учитель литературы школы № 1 г. Челябинска Л. Мельникова. А всего более 200 ученых и преподавателей вузов г. Челябинска учат ребят любить науку.

За 15 лет в обществе сложились свои традиции. Лучшая из них — связь исследований с жизнью, с потребностями производства. Так, работы секции физиологии «Состояние здоровья школьников в различные сезоны года», «Дневные и сезонные колебания пульса у людей разного возраста», «Кислородная емкость легких у юных конькобежцев», выполненные под руководством преподавателей кафедры физиологии ЧГМИ, имеют большое практическое значение для физиологии труда человека и спорта.

По заданию кафедры аналитической химии Челябинского политехнического института учащиеся под руководством старшего преподавателя ЧПИ Г. Т. Кирьяновой выполнили целый ряд анализов сплавов железа на содержание в них никеля, кобальта, хрома, марганца и других элементов. Ребята определили процентное содержание этих компонентов в сплавах, что помогло в проведении лабораторных занятий со студентами.

Автоконструкторская секция совместно с научными сотрудниками технологического автомобильно-транспортного сектора научно-исследовательского института открытых горных разработок выполнила работу по созданию действующей модели перспективного колесного тягача. «Одним из дальнейших этапов этой работы явилась разработка и создание действующих стендов-моделей для проведения лабораторных испытаний и проверки теоретических закономерностей бортового поворота колесных двигателей», — так оценил работу юных автоконструкторов генеральный конструктор ЧТЗ, доктор технических наук И. С. Кавьяров.

Членами НОУ освоена технология получения различных пигментов в школьных условиях, исследованы закономерности действия новых ингибиторов коррозии металлов, внедряемых в промышленность. Все это убедительно доказывает, что под руководством научных работников учащиеся могут проводить исследования на высоком научном уровне.

За страницами каждой работы виден кропотливый, не всегда интересный, но целеустремленный и упорный труд — труд, который приносит удовлетворение школьнику, создающему материальные и духовные ценности.

Творческая работа в НОУ способствует формированию устойчивых интересов ребят. Для большинства членов НОУ вопрос «Кем быть?» был решен сравнительно легко — более 90% избрали профессию, близкую к секции, в которой занимались. Примечательно и то, что члены НОУ, поступившие в институты, быстро находят дорогу в научные студенческие общества, а те, кто пошел работать на заводы и фабрики, вскоре становятся активистами ВОИР.

Работа в НОУ влияет и на развитие общественной активности школьников. На ежегодных учебных сборах в летнем лагере «Юный курчатовец» в г. Симе — на родине академика И. В. Курчатова — ребята не только отдыхают, но и обмениваются опытом работы, получают навыки пропагандистов технических и политических знаний. В результате более 100 инструкторов-общественников НОУ руководят кружками в младших классах, ведут большую пропагандистскую работу. В целом 73% членов НОУ постоянно занимаются общественной работой.

Девизом нашего общества ребята избрали слова: «Бороться, искать, находить и не сдаваться!». И члены НОУ вот уже 15 лет настойчиво борются за претворение этих слов в жизнь.

Обозревая пройденный обществом путь, многотысячная армия школьников Челябинска мечтает многого добиться, держа равнение на слова замечательного советского писателя, любимца молодежи Николая Островского: «Только вперед!.. И никуда иначе».

Т. Кузнецова,
зам. председателя Совета кураторов НОУ

Где ошибка?

Условие (5) вытекает из условий (2), (3), но вовсе не равносильно им. При первом способе мы ищем наибольшее значение выражения (1) при условиях (2), (3), при втором — при условии (5).

Между прочим, из (2) и (3), используя тождественное неравенство $t+\frac{1}{t}\geqslant 2$ на $]0; +\infty[$, легко вывести $c^2\leqslant 2$. Но $\max Q(c)=Q(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$.
$]0; \sqrt{2}]$

Число — буква — число

x — девять, y — тысяча, z — тринадцать, u — один, v — сто.

Работа и мощность электрического тока

1. Лампочки одинаковой мощности соединяются параллельно, а полученные две цепочки включаются в сеть последовательно.

2. Точки A и B (см. рис. 5 в статье) должны лежать на одном диаметре.

3. $P_2=I_2((I_1-I_2)r+P_1/I_1)=4{,}5$ Вт;
$\mathscr{E}=I_1r+P_1/I_1=5$ В.

4. При работе вхолостую мотор вращается быстро, ЭДС индукции велика. Следовательно, по обмотке мотора течет малый ток, и она нагревается незначительно. Наибольшее количество теплоты выделяется при полном затормаживании якоря, когда ток максимальный.

5. $$|\vec{v}_1|=\frac{\eta IU}{mg(\sin\alpha+k\cos\alpha)}=$$
$$=9{,}3\ \text{м/с}\approx 33{,}5\ \text{км/ч};$$
$$|\vec{v}_2|=\frac{\eta IU}{mg(k\cos\alpha-\sin\alpha)}=$$
$$=14\ \text{м/с}\approx 50\ \text{км/ч}.$$

6. $$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{(U^2+R(P_1+P_2))^2}{(U^2+RP_1)^2}\approx 1{,}3.$$

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. $b>0$ и $a\in\left]-\sqrt[4]{\frac{128}{3}b}; -\sqrt[4]{b}\right[\cup$ $\cup\left]\sqrt[4]{b}; \sqrt[4]{\frac{128}{3}b}\right[$ или $b<0$ и a — любое действительное число. Указание. Нарисуйте график функции $h(x)=f(x)-g(x)$ при $a>0$, $a<0$ и $a=0$. При $b>0$ и $a\neq 0$ этот график пересекает ось абсцисс в двух точках тогда и только тогда, когда $h(a)\leqslant 0$ и $h\left(-\frac{a}{4}\right)>0$.

При $b>0$ и $a=0$ график не имеет с осью абсцисс общих точек. При $b=0$ он имеет с осью абсцисс одну (при $a=0$) или три (при $a\neq 0$) общие точки. При $b<0$ график при любом $a\in\mathbb{R}$ пересекает ось абсцисс в двух точках.

2. $$C_9^4(4C_6^3P_3+C_4^2C_6^2C_4^2P_2)+C_9^3(C_5^3P_3+$$
$$+5\cdot 3C_5^3P_2+C_5^2\cdot 3C_4^2P_2+5\cdot 3C_5^2C_3^2)=294\,840$$
чисел. Указание. Либо среди цифр нет нуля, либо есть. В первом случае либо какая-то цифра стоит на трех местах, либо имеется два «дублета». Во втором случае одно из четырех: либо нуль занимает три места, либо какая-то другая цифра занимает три места, либо нуль занимает два места, либо, наконец, нуль занимает одно место и есть два «дублета».

3. При $a\in[0; 4[$ $x=\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, при остальных a $x_1=\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, $x_2=$
$$=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+2}{2(a-1)}+\pi l\ (l\in\mathbb{Z}).$$
Указание. Исходное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases}[2(1-a)\cos 2x+2+a]\sin^2 x=0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

4. $$\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)}.$$

Указание. Пусть $MABCD$ — данная пирамида (рис. 1), $[CP]\perp(MB)$ (тогда $[AP]\perp(MB)$ и $\widehat{CPA}=\alpha$), $[MN]\perp(ABC)$, $[MQ]\perp(AD)$, $\widehat{NMB}=\varphi$, $\widehat{QMN}=\beta$, O_1 — центр «искомой» сферы S (рис. 2), K — точка ее касания с гранью MDA, $L=S\cap(MO_1)$. Тогда $|O_1K|=|O_1L|$ — искомый радиус.

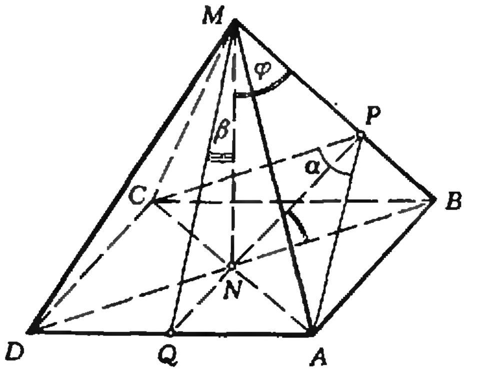


Рис. 1.

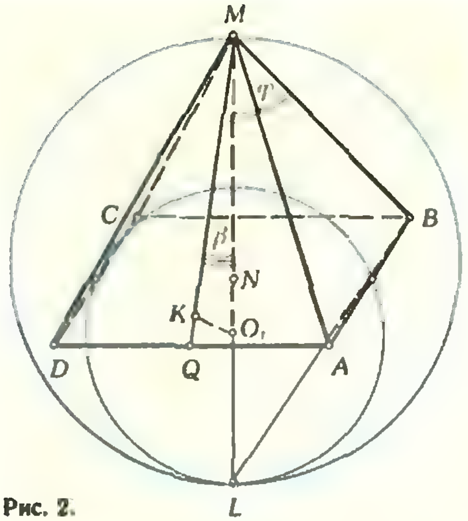


Рис. 2.

Поскольку $\widehat{NMB} = \widehat{PNB}$, из $\triangle PNB$ получаем $\cos\varphi = \frac{|NP|}{|NB|} = \frac{|NP|}{|NA|} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. (Отсюда, между прочим, вытекает, что $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$.) Из $\triangle QMN$ находим $\operatorname{tg}\beta$, из $\triangle LMB$ — $|ML|$ и, наконец, из $\triangle O_1MK$ — $|O_1K|$.

5. $\vec{a} = (2; -2; -2)$.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. $\frac{9}{4}$. 2. $1120x^4$. Указание. $1 + C_m^1\cdot(-2) + C_m^2\cdot(-2)^2 = 97$.

3. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right\}$.

4. $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. Указание. Введите систему координат с началом *в вершине данной пирамиды* и с осями «по ребрам». Далее см. задачу 14 в «Геометрии 10».

5. $b = 0$, $a \neq 0$ или $b \neq 0$, $a \neq -2b$ или $-5 < b < 0$, $a = -2b$. Указание. Обе части неравенства разделить на 3^{-y}. Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y < 2x - 1, \\ ax + by = 5. \end{cases}$$

Географический и геологический факультеты и отделение политэкономии экономического факультета

1. Точка $x_0 = 1$ является точкой минимума функции f, точек максимума на отрезке $[0; 3]$ у нее нет, $\max\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(3) = 4\sqrt{6}$, $\min\limits_{[0;\,3]} f(x) = f(1) = 0$.

2. $]-1;\ 1 + 2\sqrt{2}[$. Указание. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2 \frac{2(x+1)^2}{(x+3)^2} < 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

3. 5, 10, 20 и 20, 10, 5. 4. $x = \pi + 2\pi k\ (k \in Z)$. 5. $\frac{9}{2}\pi a^3$.

Физика

1. $k_{\min} = 1$.

2. $A = \frac{m|\vec{v}|^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = 105$ Дж.

3. В проекциях на ось X скорости и координаты доски и бруска изменяются по формулам:

$$v_д = v - \frac{kmg}{M}t,\quad x_д = vt - \frac{kmg}{2M}t^2,$$

$$v_б = kgt,\quad x_б = \frac{kg}{2}t^2.$$

Брусок соскользнет с доски, если выполняется условие

$$L \leqslant \frac{Mv^2}{2kg(M+m)}.$$

4. $p = \frac{l}{l_0}\,\frac{(L - l + 2x)(L - l - 2x)}{4x(L - l)} \approx$ $\approx 0{,}49$ атм, где $l_0 = 76$ см. рт. ст.

5. $I = \frac{e_0\sqrt{S}\,|\vec{v}|\,U}{d} \approx 3{,}2\cdot10^{-7}$ А.

6. $I_0 = \frac{IU(r_В - r_А)}{r_В(U - Ir_А)} = 29{,}6$ А.

7. $U \sim \frac{\sqrt{R-d}}{R}$.

8. $F = \frac{2}{9}L = 0{,}2$ м.

9. См. рис. 3.

Числовые ребусы

1. ИНДЕКСАТОР = 2509341867.

2. 1 283 496 750 : 1983 = 647 250.

3. $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$.

Почему плохо кричать против ветра?

(см. «Квант» № 2)

1. Скорость жука направлена вертикально вверх, следовательно, жук отклонится от цели на угол 30° (рис. 4).

2. Жук летит по параболе (рис. 5), которая описывается уравнением

$$x = \operatorname{ctg}\alpha\cdot h - \frac{b}{2|\vec{c}|\sin\alpha}h^2.$$

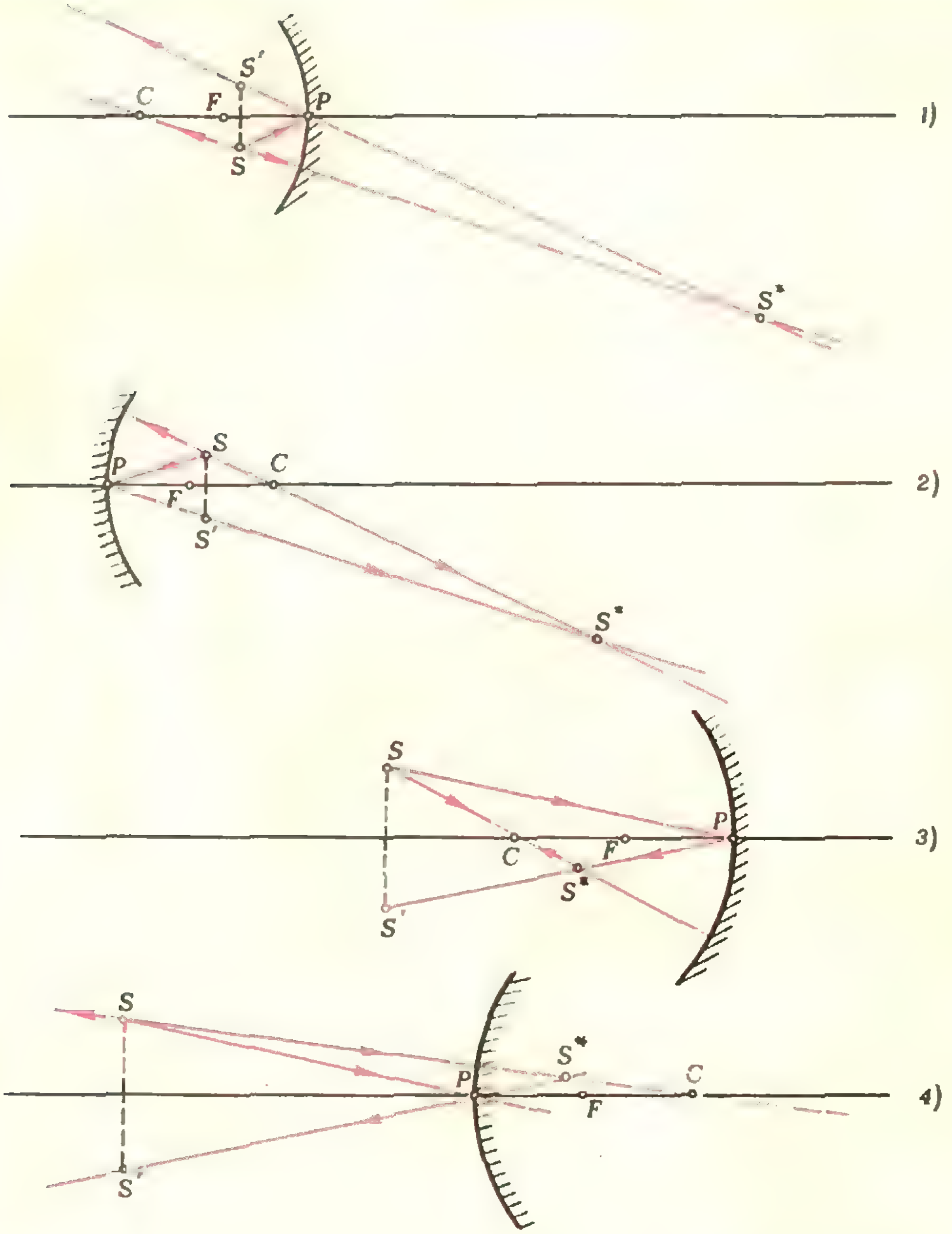

S'
C
F
P
S
1)
S*
P
S
C
F
S'
2)
S*
S
P
C
F
S*
S'
3)
S
S*
P
C
F
S'
4)

Рис. 3.

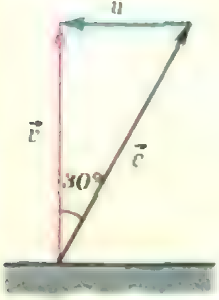


Рис. 4.

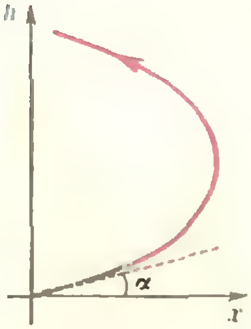


Рис. 5.

3. Фронт преломленной волны составляет с границей угол β такой, что

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{1 + |\vec{u}|\sin\alpha/|\vec{c}|}$$

Решение неравенств с модулем
(*см. «Квант» № 2*)

1. $x \in\,]-\infty, -2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3}; +\infty[$.

2. $x \in\,]\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.

3. а) $\{0,3\}$;

б) $]-3, 1[$;

в) $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

4. а) $\left]-\infty, \frac{4-\sqrt{19}}{3}\right[\cup \left]\frac{4+\sqrt{19}}{3}, +\infty\right[$;

б) $]-\infty, -5-\sqrt{13}] \cup [-2+\sqrt{2}, +\infty[$;

в) $]-5, 3+2\sqrt{2}[$.

5. а) При $-3\frac{1}{4} < a < 3$.

б) При $-\frac{3}{4} < a < 2$.

Московский физико-технический институт

(см. «Квант» № 2)

Математика

Вариант 1

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \ (k \in \mathbf{Z})$. 2. $[7; +\infty[$.

3. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. Если O — точка пересечения медиан и $|OD| = a$, то $|AO| = 2a$. Исходя из того, что отрезок BO является высотой в прямоугольном треугольнике ABD, выразите $|AB|$ и $|BD|$ через a. Можно также разложить векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и воспользоваться тем, что $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

4. $x_1 = \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k$, $y_1 = -\arccos \frac{1}{8} + 2\pi l$; $x_2 = -\arccos \frac{3}{4} + 2\pi k$, $y_2 = \arccos \frac{1}{8} + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. Решение. Из первого уравнения системы $6\cos x = 5 - 4\cos y$, из второго $6 \sin x = -4 \sin y$. Возводя в квадрат и складывая, получаем $\cos y = \frac{1}{8}$ или $y = \pm \arccos \frac{1}{8} + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. Тогда из первого уравнения системы $\cos x = \frac{3}{4}$ или $x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi l$ $(l \in \mathbf{Z})$. Поскольку мы возводили в квадрат, требуется проверка. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что из четырех комбинаций знаков годятся только те две, которые указаны в ответе.

5. 3 ч. 24 мин. Указание. Поскольку уменьшение скорости течения на участке AB приводит к увеличению скорости катера относительно берега при движении от A к B, река течет от C к A. Обозначив расстояние между A и B через a, расстояние между B и C — через b, скорость катера относительно воды в первых двух рейсах — через u и скорость течения реки — через v, составьте систему из трех уравнений. Исключив a и b, выразите из полученного уравнения u через v.

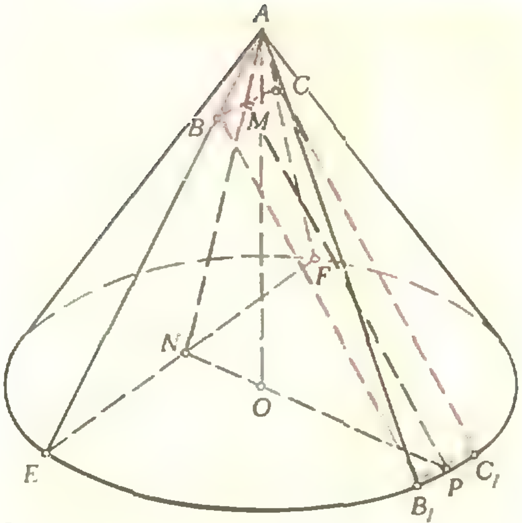


Рис. 6.

6. $\frac{125}{18}\pi$. Решение. Пусть E и F — точки пересечения плоскости (ABC) с окружностью основания конуса (рис. 6). Поскольку $(BC) \parallel (B_1C_1)$, а прямая (B_1C_1) лежит в плоскости основания конуса, то $(BC) \parallel (EF)$. Значит, $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$, в частности, AEF — правильный треугольник. Образующие конуса имеют равные длины, поэтому $|AE| = |AB_1|$, откуда $|AE| : |AB| = 5$. Пусть M, N и P — середины отрезков $[BC]$, $[EF]$ и $[B_1C_1]$ соответственно, O — центр основания конуса. Поскольку $(ON) \perp [EF]$, а $[EF] \parallel [B_1C_1]$, прямая (ON) проходит и через середину отрезка $[B_1C_1]$. Очевидно, отрезок $[AN]$ проходит через точку M и перпендикулярен $[EF]$. Отметим еще, что $(MP) \perp (AN)$, так как $(MP) \parallel (BB_1)$, а $(BB_1) \perp (ABC)$ и, в частности, $(BB_1) \perp (AN)$. Пусть $|AB| = a$, тогда

$$|AM| = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \ |AE| = 5a, \ |AN| = \frac{5\sqrt{3}}{2}a, \ |MN| = 2\sqrt{3}a.$$

В прямоугольном треугольнике AB_1B находим $|BB_1| = \sqrt{24}a$. Далее в прямоугольном треугольнике PMN, учитывая, что $|PM| = |BB_1|$, находим $|PN| = 6a$. Вычисляя двумя способами площадь треугольника ANP, в котором $[PM]$ и $[AO]$ — высоты, получаем $|AO| \cdot |NP| = |AN| \cdot |MP|$, откуда $|AO| = \frac{5}{\sqrt{2}}a$.

Теперь находим радиус основания конуса $R=|OB_1|=\sqrt{|AB_1|^2-|AO|^2}=\frac{5}{\sqrt{2}}a$, объем конуса $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot|AO|=\frac{125\pi}{6\sqrt{2}}a^3$, объем призмы $V_п=\frac{3}{\sqrt{2}}a^3$ и отношение $V_к:V_п=\frac{125}{18}\pi$.

Вариант 2

1. $]-\infty;\ -4[\bigcup]0;\ +\infty[$. 2. $n=4k+1\ (k\in\mathbb{Z})$. **Указание.** Рассмотрите случаи $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$. 3. $n=6$, $x=\pm\frac{1}{2}$. 4. $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. **Указание.** $\triangle CAD$ — равнобедренный, $\widehat{ADN}=\widehat{ACN}$. Выразите $|CM|$ и $|MN|$ через $MD|$ и $\widehat{CDA}$.

5. 1) $\left[\frac{1}{2};\ \frac{34}{5}\right]$, 2) $[-4;\ 2]$. **Решение.** Уравнение прямой BD $y=-x-1$. Требуется найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2x-y-2a\leqslant 0, \\ 2x+6y+5a\leqslant 0, \\ y=-x-1, \\ -3\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

или система

$$\begin{cases} x\geqslant\frac{-6+5a}{4}, \\ x\leqslant\frac{2a-1}{3}, \\ -3\leqslant x\leqslant 3 \end{cases} \tag{1}$$

имеет решение. Чтобы система (1) имела решение, **необходимо**, чтобы a удовлетворяло неравенству $\frac{-6+5a}{4}\leqslant\frac{2a-1}{3}$, т. е. $a\leqslant 2$.

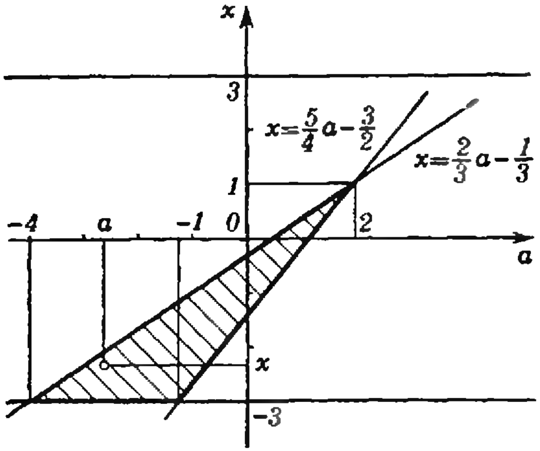


Рис. 7.

Итак, система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} \frac{-6+5a}{4}\leqslant x\leqslant\frac{2a-1}{3}, \\ -3\leqslant x\leqslant 3, \\ a\leqslant 2. \end{cases} \tag{2}$$

Чтобы отрезки $\left[\frac{-6+5a}{4};\ \frac{2a-1}{3}\right]$ и $[-3;\ 3]$ имели общие точки, необходимо и достаточно, чтобы левый конец каждого из них не превосходил правого конца другого отрезка, т. е. чтобы имела решение система

$$\begin{cases} \frac{-6+5a}{4}\leqslant 3 \\ -3\leqslant\frac{2a-1}{3}. \end{cases} \tag{3}$$

Решив систему (3) и учтя условие $a\leqslant 2$, получаем ответ. Можно действовать и по-другому: «решив» систему (1) графически (рис. 7), видим, что $-4\leqslant a\leqslant 2$.

6. $\frac{\sqrt{29}}{3}a$. **Решение.** Положим $\vec{AD}=\vec{i}$, $\vec{AB}=\vec{j}$, $\vec{AA_1}=\vec{k}$. В силу коллинеарности векторов $\vec{AM}$ и $\vec{i}$, а также $\vec{A_1N}$ и $\vec{j}$ можем записать $\vec{AM}=x\vec{i}$, $\vec{A_1N}=y\vec{j}$. Отсюда $\vec{MN}=\vec{MA}+\vec{AA_1}+\vec{A_1N}=-x\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}$. Из условия $\vec{MN}\cdot\vec{QP}=0$, учитывая, что $\vec{QP}=\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$, получаем $y=2x$.

Условие, что $[MN]$ и (QP) пересекаются, можно реализовать в виде уравнений различными способами. Например, так: если $[MN]$ и (QP) пересекаются, то точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости; значит, вектор $\vec{MN}$ компланарен с векторами $\vec{QP}$ и $\vec{QM}$. Это означает, что существуют такие числа α и β, для которых

$$\vec{MN}=\alpha\vec{QP}+\beta\vec{QM}. \tag{1}$$

Отсюда

$$-x\vec{i}+y\vec{j}+\vec{k}=(\alpha+\beta x)\vec{i}+\frac{\alpha-\beta}{2}\vec{j}-\frac{\beta}{2}\vec{k}.$$

В силу единственности разложения это векторное равенство равносильно трем скалярным

$$\begin{cases} -x=\alpha+\beta x, \\ y=\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ 1=-\frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

Исключив из этих уравнений α и β, найдем $x=2y-2$. Отсюда и из $y=2x$ получаем

$x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}$. Значит,

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{4}{3}\vec{j}+\vec{k},$$

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{16}{9}+1}\,a=\frac{\sqrt{29}}{3}\,a.$$

Заметим, что условие (1) является, *вообще говоря, лишь необходимым* для пересечения отрезка $[MN]$ и прямой (QP). Для того чтобы доказать, что при найденных положениях точек M и N пересечение имеет место, спроектируем $[MN]$ и (QP) на плоскость $ABCD$ (N_1 и Q_1 — проекции). Легко видеть, что M и N_1 лежат по разные стороны прямой (Q_1C), а потому отрезок $[MN_1]$ и прямая (Q_1C) пересекаются. Отсюда и из того, что точки M, N, P, Q лежат в одной плоскости, следует, что пересекаются $[MN]$ и (QP).

Физика

Вариант 1

1. $k\geqslant\frac{1}{\sin\alpha}>1$.

2. $r=r_0(1-l/p)=0{,}72$.

3. В начальном положении поле над нижней пластиной равно полю Земли $E_З$, а под пластиной — равно нулю. Точно такая же картина имеет место для заряженной проводящей сферы. Следовательно, поверхностная плотность заряда на нижней пластине равна $\sigma_{пл}=\varepsilon_0E_З$, а полный заряд пластины равен $Q_{пл}=\sigma_{пл}S=\varepsilon_0E_ЗS$. Когда верхняя пластина закроет нижнюю, поле между верхней пластиной и Землей станет равным нулю, поэтому и заряд нижней пластины тоже станет равным нулю. Значит, через гальванометр протечет заряд $Q=Q_{пл}=\varepsilon_0E_ЗS$, откуда искомая напряженность поля Земли

$$E_З=\frac{Q}{\varepsilon_0S}=200\ \text{В/м}.$$

4. $d_2=\frac{d_0d_1}{2d_1-d_0}\approx 14$ м.

Указание. Тем, у кого возникнут затруднения при решении этой задачи, советуем прочитать статью А. Дозорова «Что это значит — «навести на резкость»?» («Квант», 1978, № 2).

Вариант 2

1. Если считать, что при двукратной перегрузке сила давления на опору $\vec{N}$ (а значит, и реакция опоры) равна по модулю $2mg$, то искомая высота (которая находится из уравнения движения и закона сохранения энергии) равна

$$h=\frac{2kl-R}{3}=\frac{8}{3}\ \text{м}.$$

Если же перегрузкой считать величину $\vec{N}-m\vec{g}$, то $|\vec{N}|=3mg$ и

$$h=\frac{2}{3}(kl-R)=\frac{4}{3}\ \text{м}.$$

2. Предполагая, что масса пара $m_п$ мала, получим:

$$\frac{m_п}{m_в}=\frac{c\Delta t}{\lambda}=\frac{8}{539}\approx 0{,}015=1{,}5\%,$$

что, действительно, не противоречит предположению.

3. Вдоль магнитного поля электрон движется равномерно со скоростью $|\vec{v}|\cos\alpha$ и пролетает расстояние $|AБ|=L$ за время $\tau=L/(|\vec{v}|\cos\alpha)$. В плоскости, перпендикулярной магнитному полю, электрон движется по окружности радиуса R:

$$\frac{m(|\vec{v}|\sin\alpha)^2}{R}=e|\vec{B}|\,|\vec{v}|\sin\alpha.$$

Время одного оборота

$$T=\frac{2\pi R}{|\vec{v}|\sin\alpha}=\frac{2\pi m}{e|\vec{B}|}.$$

Из условия $\tau=nT$, где $n=1, 2, 3, \ldots$, получаем:

$$|\vec{B}|=\frac{2\pi m|\vec{v}|\cos\alpha}{eL}\,n.$$

4. $\Gamma=3$.

Вариант 3

1. $|\vec{F}_н|=\frac{1}{2}(k_2-k_1)\,mg\cos\alpha\approx 0{,}13$ Н.

2. Так как вся выделяющаяся при распаде ядер энергия идет на нагревание микрокалориметра, закон сохранения энергии имеет вид: $C\Delta t=\frac{mN_0}{A}W\alpha$. Здесь $\alpha=\frac{n_0-n}{n_0}$ — отношение числа распавшихся атомов к их первоначальному числу $n_0=mN_0/A$. Отсюда найдем α:

$$\alpha=\frac{C\Delta tA}{mN_0W}\approx 0{,}3.$$

Закон радиоактивного распада можно представить в виде:

$$\frac{n_0}{n}=2^{\frac{\tau}{T}},\ \text{или}\ \frac{n_0}{n}=\frac{1}{1-\alpha}=2^{\frac{\tau}{T}}.$$

Так как $(1-\alpha)^{-1}\approx\sqrt{2}$, то

$$\frac{\tau}{T}\approx 0{,}5,\ \text{и}\ T\approx 100\ \text{мин}.$$

3. $Q=C\mathscr{E}$.

4. $F=-9{,}6$ см (линза рассеивающая).

Вариант 4

1. $x=8{,}5l-H/k=1/3$ м (тело остановится не сразу, а лишь после четвертого соскальзывания с правой стенки ямы).

2. $t = \frac{\mu p V}{RTM} = 8{,}35 \cdot 10^{-3}$ с.

3. Выделим участок поверхности шара единичной площади и найдем силу, действующую на выделенный участок. Напряженность электрического поля у поверхности шара снаружи равна $|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, а внутри — $|\vec{E}_{вн}| = 0$. Пусть $\vec{E}'$ — напряженность поля, создаваемого единичной поверхностью, а $\vec{E}''$ — напряженность поля, создаваемого всей остальной поверхностью, вблизи выделенного участка. Используя принцип суперпозиции, для поля над участком и под ним (внутри сферы) получим:

$$|\vec{E}'| + |\vec{E}''| = |\vec{E}|, \quad |\vec{E}'| - |\vec{E}''| = 0.$$

Отсюда находим напряженность поля, действующего на выделенный участок: $|\vec{E}''| = |\vec{E}|/2$. Тогда сила, действующая на единицу площади поверхности, равна

$$|\vec{F}| = |\vec{E}''| \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4}.$$

Направлена эта сила по радиусу от центра шара. Теперь запишем условие равновесия для половинки шара непосредственно перед разрывом:

$$|\vec{F}| \pi R^2 = 2\pi R \Delta R \sigma_{пр}.$$

Отсюда найдем величину заряда Q:

$$Q = 8\pi R \sqrt{\varepsilon_0 R \Delta R \sigma_{пр}} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ Кл}.$$

4. $F = {}^3/_4 l = 9$ см.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2, с. 45)

1. Перепишем зашифрованный ребус в столбик:

$$\begin{array}{r} +\ \text{ТАМТАМ} \\ \text{МРАК} \\ \hline \text{КОШМАР} \end{array}$$

Нетрудно сообразить, что А=9, О=0, так что

$$\begin{aligned} М + К &= Р + 10, \\ К &= Т + 1, \end{aligned}$$

и либо Т+Р+1=М, либо Т+Р+1=М+10.

Пусть сначала Т+Р+1=М. В этом случае Т=4, К=5, так что

$$\begin{cases} М + 5 = Р + 10, \\ Р + 5 = М. \end{cases}$$

Учитывая, что $1 \leqslant Р \leqslant 9$, $1 \leqslant М \leqslant 9$, получаем три возможности для Р и М: Р=1, 2, 3 и, соответственно, $1 \leqslant М \leqslant 9$.

При Р=1 и Р=3 получаем две расшифровки:

$$\begin{array}{r} +\ 496\,496 \\ 6\,195 \\ \hline 502\,691 \end{array} \quad и \quad \begin{array}{r} +\ 498\,498 \\ 8\,395 \\ \hline 506\,893 \end{array},$$

а при Р=2 получаем Ш=4=Т, что невозможно.

Для случая, когда Т+Р+1=М+10, получаем Т=9=А, что также не годится.

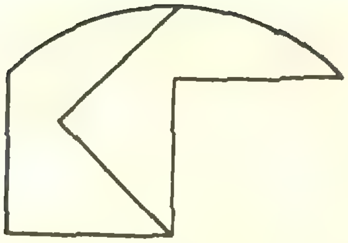


Рис. 8.

Итак, существуют ровно две различные расшифровки ребуса. В условии говорится, что знатоков было несколько — значит, их двое!

3. См. рисунок 8.

4. Перевернем стаканы шесть раз, каждый раз оставляя неперевернутым новый стакан. Тогда каждый стакан окажется перевернутым пять раз, то есть все стаканы будут поставлены вверх дном.

5. Точки, стоящие на одной вертикали, нельзя красить все в один цвет (иначе можно будет построить несколько прямоугольников с одноцветными вершинами). Поэтому на каждой вертикали должны быть точки обоих цветов. Очевидно, что если найдутся две вертикали с одинаковым расположением одноцветных точек, то найдется и прямоугольник с одноцветными вершинами. Из трех разноцветных точек, стоящих на одной вертикали, две точки обязательно одинакового цвета. Две же одноцветные точки вертикали могут занимать только три разных положения (см.

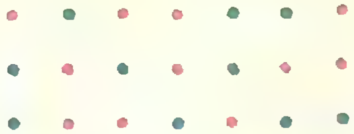


Рис. 9.

рисунок 9: красные точки на второй, третьей и четвертой вертикалях). Так как у нас имеются два цвета, то «разных» вертикалей может быть только шесть. Следовательно, среди имеющихся семи вертикалей по крайней мере две будут с одинаковым расположением одноцветных точек.

...и фокус не удался

(см. «Квант» № 2, с. 47)

Обозначим через $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ десятичную запись натурального числа, у которого a_0 единиц, a_1 десятков, a_2 сотен, ...

Имеем:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0 = 9\Big(\underbrace{\overline{11\ldots11}}_{n} \times a_n + \underbrace{\overline{11\ldots11}}_{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 11 \cdot a_2 + a_1\Big) + (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0).$$

Отсюда видно, что остаток от деления числа на девять равен остатку от деления суммы его цифр. Поэтому исходное число и число, полученное из него перестановкой цифр, при делении на 9 дают одинаковые остатки. Значит, их разность делится на девять. *Это верно и для суммы* цифр разности. Теперь понятно, как узнать зачеркнутую цифру, если сумма незачеркнутых цифр разности не делится на 9. В случае же, когда сумма незачеркнутых цифр разности делится на 9, зачеркнутая цифра может быть как нулем, так и девяткой. Поэтому в таком случае нужно задать еще один вопрос, например: «Вы зачеркнули 0?» Если ответ отрицательный, то зачеркнута девятка.

Числовые ребусы

(см. «Квант» № 2, с. 44)

1. 96787×21817.
2. ДВА=459.
3. 142068:3=47356.

Итак, одна сажень равна трем аршинам.

Задачи наших читателей
(см. «Квант» № 1, с. 44)

1. Около 10 дней. 2. См. рис. 10.

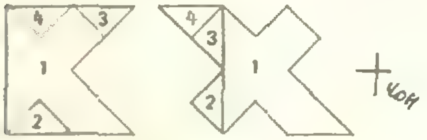


Рис. 10.

Головоломки наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 64)

1. Наименьшее число равно 488, наибольшее — 500. Один из возможных способов расстановки этих чисел показан на рисунке 11.

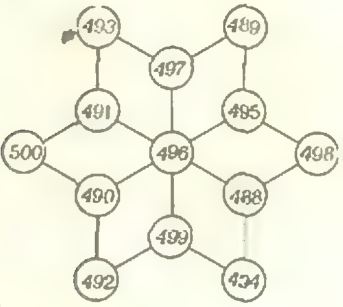


Рис. 11.

2. Наименьшее расставляемое число равно 11, наибольшее — 19; способ расстановки чисел *показан на рисунке* 12.

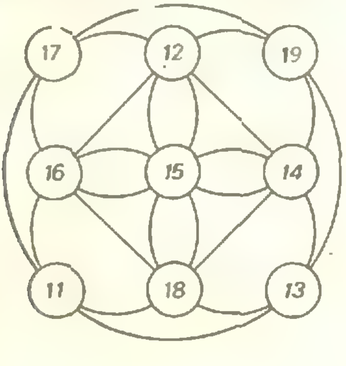


Рис. 12.

«Квант» для младших школьников»
(см. «Квант» № 1, с. 41)

1. Задача имеет $6^4=1296$ решений, которые могут быть получены из шести решений, изображенных на рисунке 13 путем перестановок цифр в кружках одного цвета.

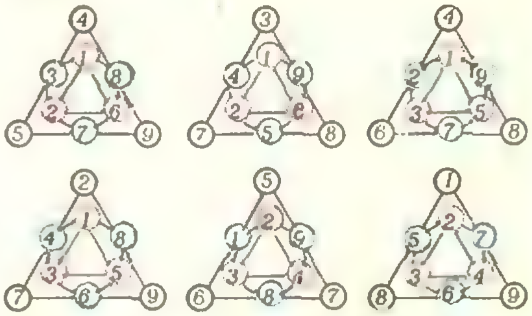


Рис. 13.

2. Пусть *а, б, в, г* — число бутылок, выпитых, соответственно, миссис Адамс, Браун, Вильсон и Грин. Тогда

$$\begin{cases} а+б+в+г=14, \\ а+2б+3в+4г=35. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение системы из второго, получим:
$б+2в+3г=21$, откуда следует, что $б+3г$ — нечетное число. Учитывая это замечание, нетрудно найти, что $а=4$, $б=2$, $в=5$, $г=3$. Таким образом, фамилия Сессиль—Адамс, фамилия Анны—Браун, Доротти—Вильсон и Бетти—Грин.

3. Указание. Выпишите все возможные в языке племени женские имена.

4. $11^3=1331$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, С. Лухин, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова, Е. Тенчурина, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

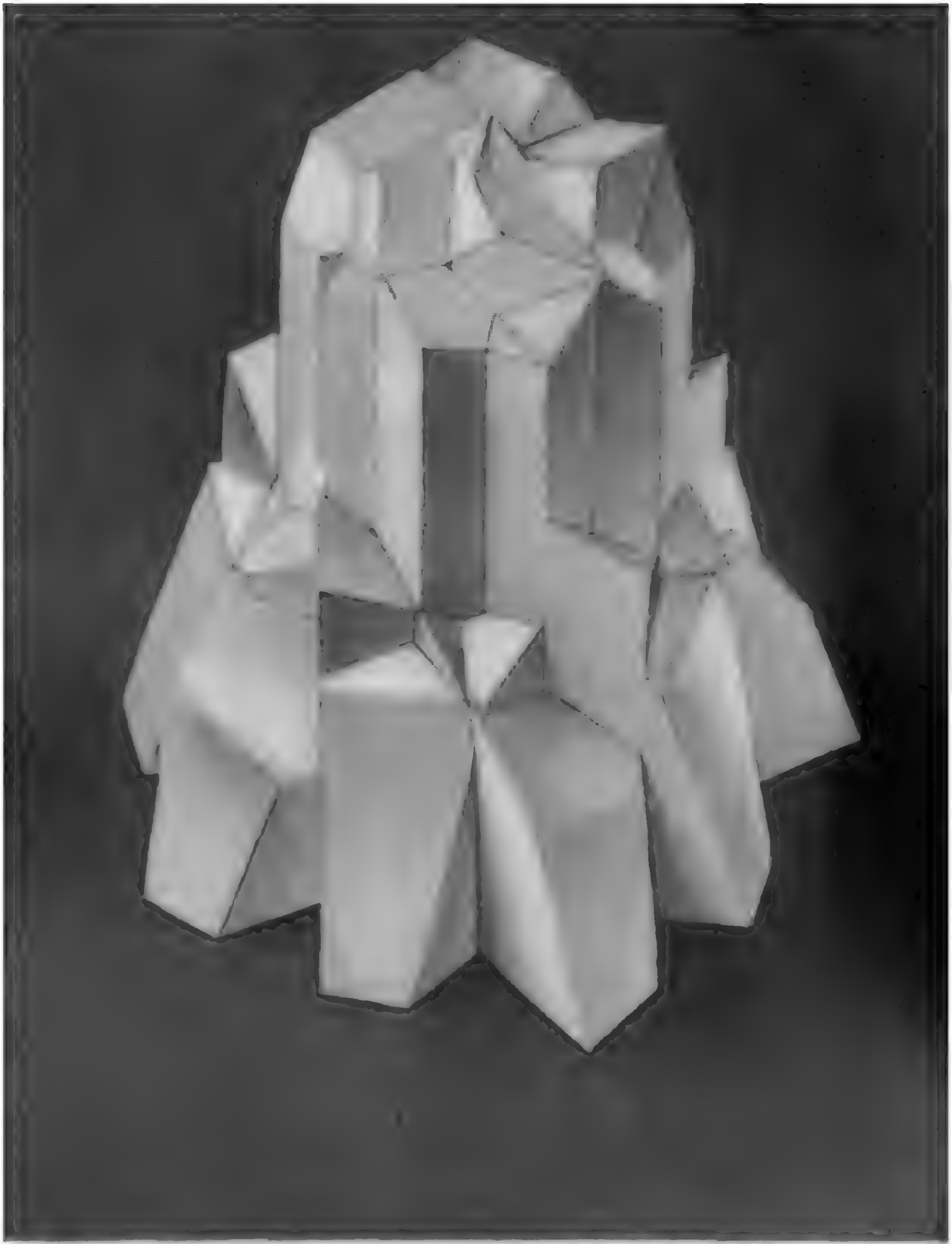
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Бутусова, Н. Дорохова

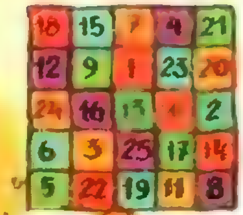
113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/XII-78 г.
Подписано в печать 9/II-79 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,3 Т-05322
Цена 30 коп. Заказ 3001 Тираж 285 742 экз

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

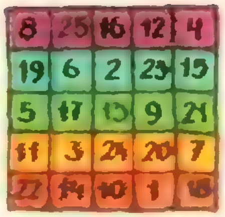
Рукописи не возвращаются



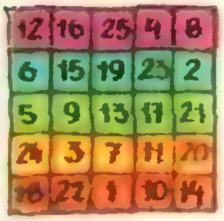
Этот многогранник, сконструированный и изготовленный В. Гамаюновым, определенным образом связан с равногранно полуправильным шестидесятигранником («Квант», 1976, № 1).
О том, как построить его развертку, рассказано на с. 50



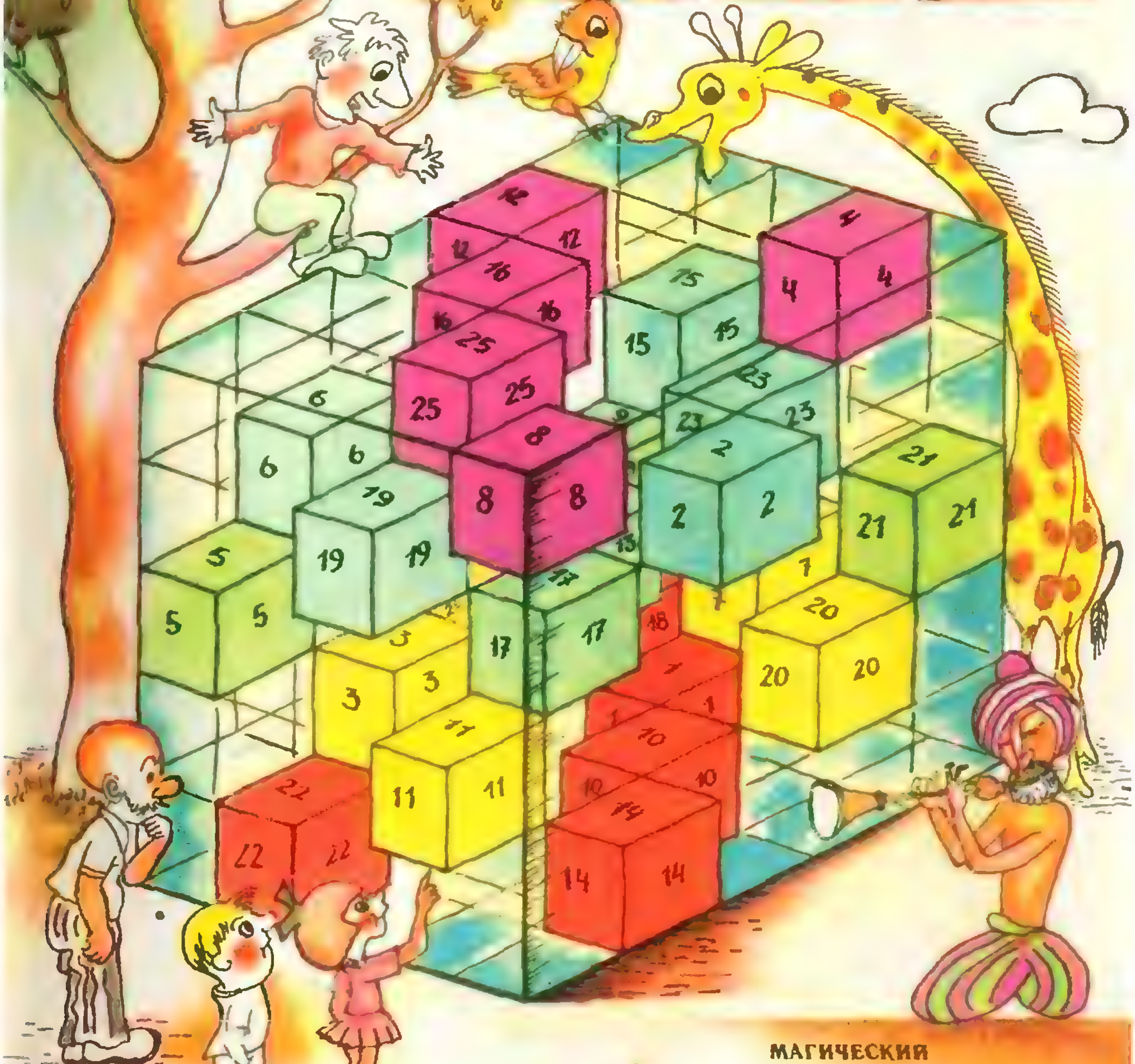
18	15	7	4	21
12	9	1	23	20
24	16	13	10	2
6	3	25	17	14
5	22	19	11	8

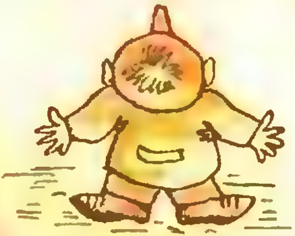


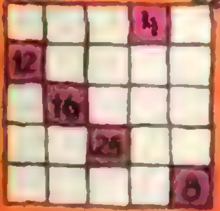
8	25	16	12	4
19	6	2	23	15
5	17	13	9	21
11	3	24	20	7
22	14	10	1	18



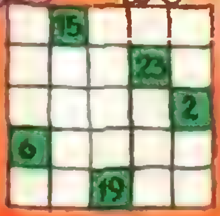
12	16	25	4	8
6	15	19	23	2
5	9	13	17	21
24	3	7	11	20
18	22	1	10	14



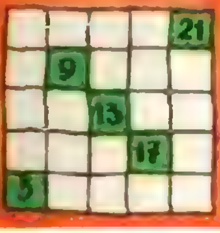




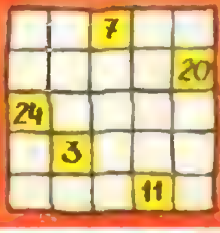
			4	
12				
	16			
		25		
				8



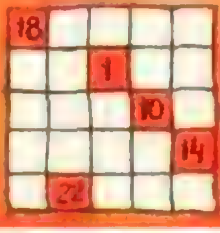
	15			
			23	
				2
6				
		19		



				21
	9			
		13		
			17	
5				



		7		
				20
24				
	3			
			11	



18				
		1		
			10	
				14
	22			

МАГИЧЕСКИЙ СТЕРЕОКВАДРАТ

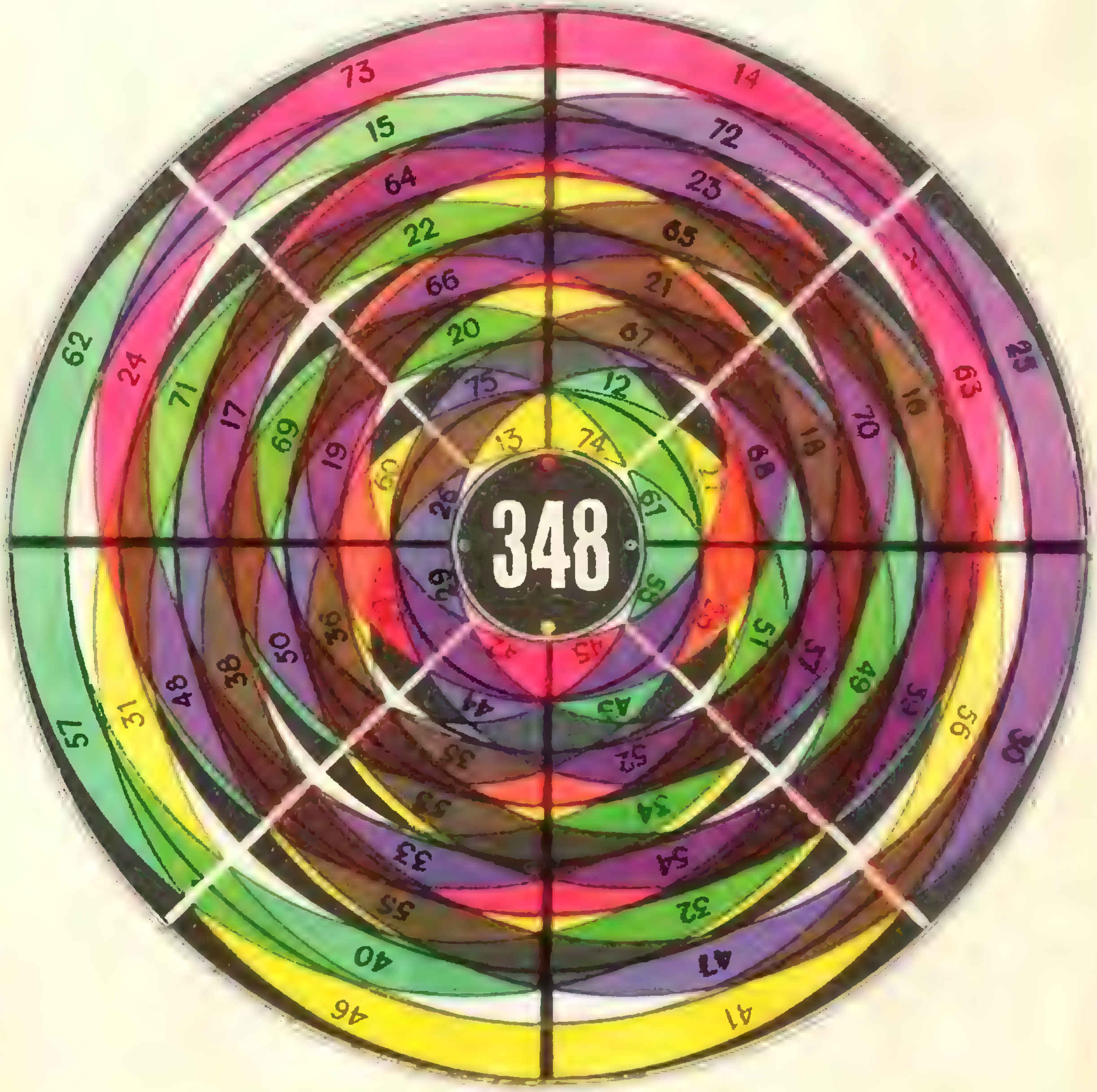
Куб разбит на 125 маленьких кубиков, 25 из которых помечены числами от 1 до 25. Внизу показано, каким образом отмеченные кубики располагаются в каждом из пяти горизонтальных слоев куба. Если теперь на куб посмотреть сверху, потом спереди, а затем сбоку, то мы увидим целиком заполненные квадраты 5×5 (см. рисунок наверху), каждый из которых является магическим, т. е. сумма чисел в каждом горизонтальном ряду, каждом вертикальном ряду и по диагонали каждого такого квадрата одна и та же.

Е. Кривошеев

Индекс 70465

Цена 30 коп.

На этом рисунке наш художник изобразил «магические окружности» американского естествоиспытателя Б. Франклина (1706—1790). Из 64 чисел, расположенных на них, по крайней мере 28 способами естественно выделяются восьмерки чисел, сумма которых равна 348. Это — восьмерки чисел, лежащие в восьми концентрических кольцах, восьмерки чисел, лежащие в восьми секторах восьмерки чисел, лежащие в трех розовых эксцентрических кольцах, в трех голубых эксцентрических кольцах, в трех желтых и трех зеленых. Поищите другие интересные свойства этой конфигурации.


348
73
14
15
72
64
23
22
65
66
21
20
67
75
12
13
74
62
24
71
17
69
19
60
26
61
25
63
16
70
18
68
58
29
57
31
48
38
50
36
51
57
49
39
56
30
42
45
44
43
35
52
53
34
33
54
55
32
40
47
46
41

НОМЕР
4

Основан в 1970 году

Квант

4
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

2 *М. Смолянский.* Международные космические экипажи
4 *Г. Балк, М. Балк, В. Болтянский.* Метод малых шевелений
10 *И. Белкин.* О Ньютоновских законах движения. Сила

Лаборатория «Кванта»

17 *О. Кабардин, Н. Шефер.* Самодельные дифракционные решетки

Математический кружок

19 *И. Янтаров.* Коммутирующие многочлены

Задачник «Кванта»

24 Задачи М556—М560; Ф568—Ф572
26 Решения задач М508—М512; Ф515, Ф518—Ф520
Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта» (32, 36, 51).

По страницам школьных учебников

33 *В. Дубровский.* Площадь поверхности по Минковскому

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *С. Гиндикин.* Арифметика на клетчатой бумаге

Практикум абитуриента

43 *В. Можаев.* Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях
48 *Н. Розов* Читатели советуют

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

52 Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина
53 Ярославский государственный университет
54 Дальневосточный государственный университет (физический факультет)
55 Московский архитектурный институт

Рецензии, библиография

57 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
59 *В. Лешковцев.* У истоков атомной энергетики
60 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(9, 16, 56)*

Красивый
муаровый узор
на первой
странице обложки
получен
с помощью ЭВМ
по программе,
составленной Ю. Котовым.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

Международные космические экипажи

2 марта 1977 года навсегда войдет знаменательной датой в историю космонавтики. В этот день впервые на корабле «Союз-28» на космическую орбиту был выведен международный экипаж, состоящий из командира корабля летчика-космонавта СССР Героя Советского Союза Алексея Губарева и космонавта-исследователя гражданина ЧССР Владимира Ремека.

Запуском корабля «Союз-28» открылся новый этап в исследовании и использовании космического пространства в мирных целях, проводимых социалистическими странами по программе сотрудничества «Интеркосмос».

Программа полета первого международного экипажа космонавтов была весьма насыщенной — она предусматривала стыковку корабля «Союз-28» с орбитальным научно-исследовательским комплексом «Салют-6» — «Союз-27», пилотируемым космонавтами Ю. Романенко и Г. Гречко, и проведение на борту станции совместных исследований и экспериментов.

17 июня 1978 года в Советском Союзе был осуществлен запуск космического корабля «Союз-30», на борту которого находился второй международный экипаж в составе командира корабля дважды Героя Советского Союза летчика-космонавта СССР Петра Климука и космонавта-исследователя гражданина ПНР Мирослава Гермашевского.

Программа полета предусматривала стыковку с орбитальным научно-исследовательским комплексом «Салют-6» — «Союз-29», пилотируемым космонавтами В. Ковалёнком и А. Иванченковым, и проведение на борту станции совместных исследований и экспериментов.

26 августа 1978 года был осуществлен запуск космического корабля «Союз-31», пилотируемого третьим международным экипажем в составе командира корабля дважды Героя Советского Союза летчика-космонавта СССР Валерия Быковского и космонавта-исследователя гражданина ГДР Зигмунда Иена.

Программа полета предусматривала стыковку с орбитальным комплексом «Салют-6» — «Союз-29» и продолжение совместно с Ковалёнко и Иванченковым исследований и экспериментов, начатых предыдущими экипажами.

Идея международных полетов космонавтов социалистических стран по программе «Интеркосмос» была выдвинута Советским Союзом еще в 1976 году. В июле и сентябре в Москве состоялось совещание представителей НРБ, ВНР, ГДР, ПНР, республики Куба, МНР, СРР, СССР и ЧССР, на которых были обсуждены организационные вопросы, связанные с подготовкой к международным пилотируемым космическим полетам. В конце 1976 года в Москву прибы-

В. Ремек (ЧССР), А. Губарев (СССР) на одной из тренировок.

А. Иванченков, В. Коваленок (СССР) в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина.

ла первая группа кандидатов в космонавты — граждан ЧССР, ПНР и ГДР — и уже в декабре 1976 года они приступили к тренировкам и занятиям в Центре подготовки космонавтов имени Ю. А. Гагарина. Дружеская товарищеская помощь опытных советских специалистов и космонавтов позволила им в кратчайшие сроки получить необходимые теоретические и практические знания.

Эксперименты, проводимые в рамках этой программы, весьма обширны. Они ведутся в русле таких важных направлений, как космическая физика, дистанционное зондирование Земли, космическая технология, космическая биология и медицина.

В настоящее время в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина тренируются кандидаты в космонавты — граждане НРБ, ВНР, МНР, республики Куба и СРР, которые до 1983 года также совершат полеты на советских космических кораблях.

М. Смолянский
Фото А. Моклецова

А. Губарев (СССР), О. Пельчак, В. Ремек (ЧССР) у орбитальной станции «Салют-6».

Экипаж «Союз-30» П. Климук (СССР) и М. Гермашевский (ПНР) в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина на одной из тренировок.

В. Быковский (СССР), З. Иен (ГДР) в Центре подготовки космонавтов им. Ю. А. Гагарина на одной из тренировок.

Г. Балк, М. Балк, В. Болтянский

Метод малых шевелений

При испытании геометрических высказываний на правдоподобие, при поиске контрпримеров математик нередко рассуждает так:

— Возьму случай, когда высказывание подтверждается, и «пошевелю» одну точку (или отрезок, или какое-либо другое множество точек). Не могу ли я таким способом получить такой случай, когда высказывание не подтверждается?

Рассмотрим простой пример:

Задача 1. *Из точки P, расположенной внутри выпуклого многоугольника, опускаются перпендикуляры на его стороны или на их продолжения. Условимся основание такого перпендикуляра называть «приятным», если оно принадлежит стороне, и «неприятным» в противном случае. Верно ли, что всякая внутренняя точка любого многоугольника имеет по крайней мере две приятные проекции?*

Решение. Возьмем сначала в качестве искомого выпуклого многоугольника треугольник ABC. Если он остроугольный, то все проекции любой его внутренней точки — приятные. Пусть ΔABC тупоугольный. В этом случае внутри него легко выбрать такую точку P, у которой будут две приятные проекции (рис. 1). Теперь нетрудно построить выпуклый четырехугольник и точку, лежащую на его контуре, так, чтобы эта точка имела только одну приятную проекцию. Таков, например, четырехугольник $MNCB$ на рисунке 2 (MN — любая прямая, оставляющая снаружи проекции A', B', C'). Точка P на его контуре имеет одну приятную проецию (этой проекцией будет сама точка P). Но точка P не лежит внутри многоугольника $MNCB$. Поэтому «пошевелим» точку P — сдвинем ее немного внутрь четырехугольника. При малом «шевелении» точки P мало пошевелятся и ее проекции. Поэтому при достаточно малом шевелении те проекции, которые были неприятными до шевеления точки P, останутся такими и после шевеления. Значит, после шевеления точки P мы получим внутри четырехугольника точку P', у которой будет ровно одна приятная проекция (а именно — проекция на сторону MN).

Задача 2. *Известно, что в каждом треугольнике три высоты (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра: «все высоты любого тетраэдра (или их продолжения) имеют общую точку»?*

Решение. Возьмем произвольный тетраэдр $ABCD$ и проведем в нем высоты AM и DN (рис. 3). Теперь пошевелим этот тетраэдр, сдвинув вершину D в положение D', находящееся, однако, в плоскости BCD. В новом тетраэдре $ABCD'$ высота AM *та же* (поскольку плоскости BCD и BCD' совпадают), т. е. эта высота «выдерживает» шевеление точки D в плоскости BCD. В то же время высота $D'N'$ нового тетраэдра может сместиться в любое положение, параллельное DN (и достаточно близ-

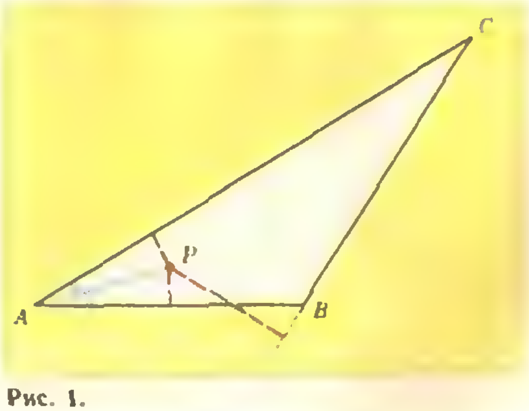


Рис. 1.

кое к DN). Ясно теперь, что за счет шевеления точки D можно получить тетраэдр, в котором высоты AM и $D'N'$ не имеют общих точек (даже если в первоначальном тетраэдре высоты AM и DN пересекались). Значит, утверждение, аналогичное теореме о трех высотах треугольника, для произвольного тетраэдра неверно.

Задача 3. *Существует ли выпуклый ограниченный многогранник, ортогональная проекция которого на любую плоскость является 1979-угольником?* (От редакции. Эту задачу прислал наш читатель из Новосибирска А. Кузьминых.)

Предположим, что такой многогранник существует. Вместо того, чтобы проектировать этот многогранник на всевозможные плоскости, нам будет удобнее, придавая ему всевозможные положения в пространстве, проектировать его на фиксированную плоскость α.

Расположим наш многогранник так, чтобы одно из его ребер — скажем, A_1A_2 — было перпендикулярно плоскости α. При проектировании его в этом положении вершины A_1, A_2 перейдут в одну и ту же вершину P_1 некоторого 1979-угольника $P_1P_2 \ldots P_{1979}$.

Пошевелим многогранник так, чтобы ребро A_1A_2 перестало быть перпендикулярным плоскости α и вершины A_1 и A_2 спроектировались в две разные вершины многоугольника проекции. Если это шевеление сделать достаточно малым, то различные вершины P_i, P_j останутся вершинами (не уйдут «внутрь»), причем различными. Таким образом, в новом положении наш многогранник спроектируется по крайней мере в 1980-угольник. Противоречие!

Следовательно, искомого многогранника не существует.

На этих простых примерах уже видна суть применяемого здесь приема *«малых шевелений»*. Свойства геометрических объектов распадаются на два типа: *устойчивые* — сохраняющиеся при всех (достаточно малых) шевелениях фигуры, и *неустойчивые* — разрушающиеся при некотором малом шевелении. Так, в задаче 1 свойство «проектироваться на продолжение стороны» устойчиво, а свойство «находиться на контуре многоугольника» неустойчиво. В третьей задаче свойство «проекции двух вершин многогранника различны» устойчиво, в то время как свойство «проекции двух вершин многогранника совпадают» неустойчиво. Самостоятельно установите, какие свойства устойчивы и какие неустойчивы в задаче 2.

Поэтому, если мы ищем фигуру, обладающую некоторым набором свойств, то мы сначала добиваемся выполнения нужных устойчивых свойств, а затем подходящим малым шевелением устраняем ненужные нам неустойчивые свойства.

Решим теперь более сложную задачу:

Задача 4. *Можно ли в правильном тетраэдре просверлить сквозное отверстие (не обязательно круглое), через которое может пройти такой же тетраэдр?*

Решим сначала родственную математическую задачу:

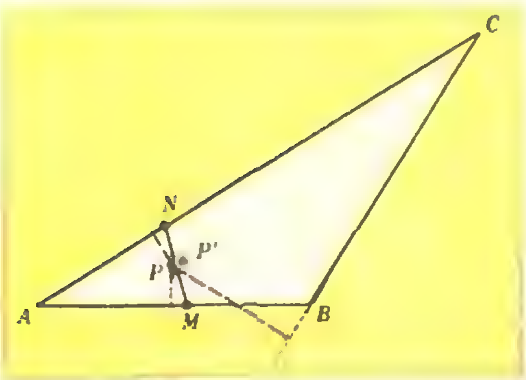


Рис. 2.

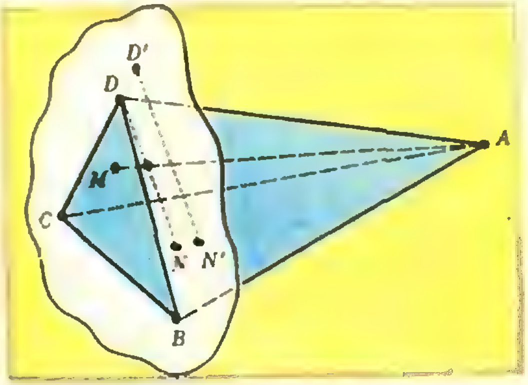


Рис. 3.

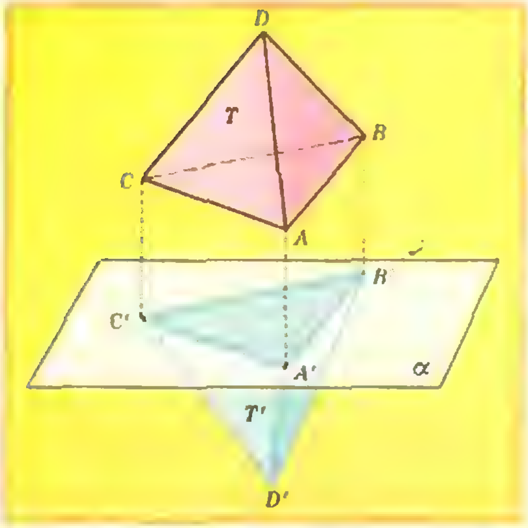


Рис. 4.

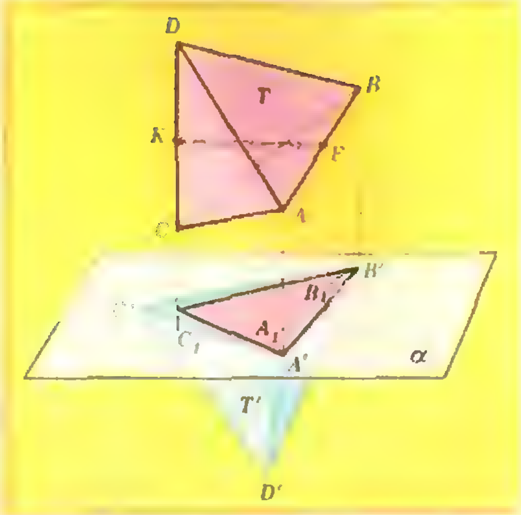


Рис. 5.

Задача 4а. *Можно ли расположить в пространстве два конгруэнтных правильных тетраэдра, так, чтобы при ортогональном проектировании их на некоторую — одну и ту же — плоскость проекция одного тетраэдра лежала целиком (включая и ее границу) внутри проекции другого тетраэдра?*

Решение. Расположим тетраэдр T' так, чтобы его грань $A'B'C'$ лежала в плоскости проекции α (рис. 4). Второй тетраэдр T расположим сначала так, чтобы проекция его грани ABC на плоскость α совпала с треугольником $A'B'C'$. Теперь, шевеля тетраэдр T, попытаемся достичь того, чтобы его проекция на плоскость α оказалась целиком внутри треугольника $A'B'C'$. Прежде всего повернем тетраэдр T так, чтобы внутри треугольника $A'B'C'$ оказалась проекция вершины C. Это можно сделать, например, так: повернем тетраэдр T вокруг ребра AB до положения, в котором ребро CD станет перпендикулярным плоскости α. При этом проекцией тетраэдра T окажется равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$, причем $|A_1B_1| = |A'B'|$ (рис. 5).

Пошевелим теперь тетраэдр T так, чтобы проекция ребра AB оказалась короче отрезка $A'B'$. Для этого отметим середины F и K ребер AB и CD и повернем тетраэдр T на малый угол вокруг прямой FK. После такого шевеления проекцией тетраэдра T на плоскость α окажется трапеция $A_2B_2C_2D_2$ (рис. 6). Если угол поворота достаточно мал, то эта трапеция будет расположена в треугольнике $A'B'C'$, причем сторона A_2B_2 будет лежать на границе этого треугольника.

Чтобы трапеция оказалась целиком внутри треугольника $A'B'C'$, достаточно теперь подвергнуть тетраэдр еще одному шевелению, а именно, сдвинуть тетраэдр на малый вектор, коллинеарный вектору $\overrightarrow{FK}$ (рис. 7).

Мы видим, что тетраэдры T и T' можно расположить в пространстве таким образом, чтобы проекция тетраэдра T на плоскость α оказалась лежащей целиком внутри проекции тетраэдра T' на ту же плоскость. Задача 4а решена.

Значит, возможно в тетраэдре T' просверлить отверстие, через которое пройдет тетраэдр T (просверливать отверстие в T' следует перпендикулярно плоскости $A'B'C'$, причем так, чтобы проекцией отверстия на плоскость $A'B'C'$ оказалась какая-либо фигура, содержащая внутри себя трапецию $A_3B_3C_3D_3$ и лежащая внутри треугольника $A'B'C'$.

Идею малых шевелений полезно привлечь и тогда, когда в каком-то множестве фигур требуется выбрать (построить, найти) ту, которая в том или ином смысле является «наилучшей» (например, имеет наименьший периметр, наибольшую площадь и т. п.). В таких задачах основ-

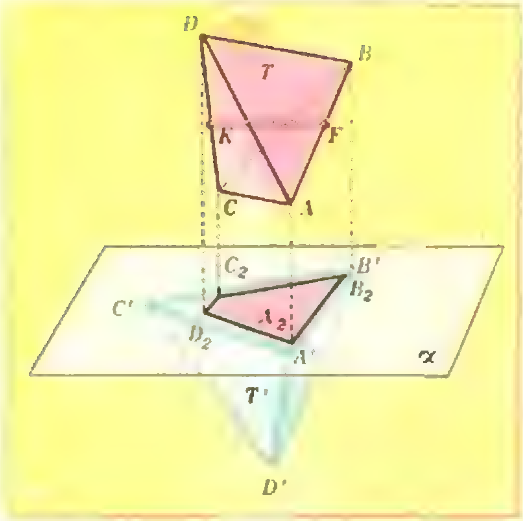


Рис. 6.

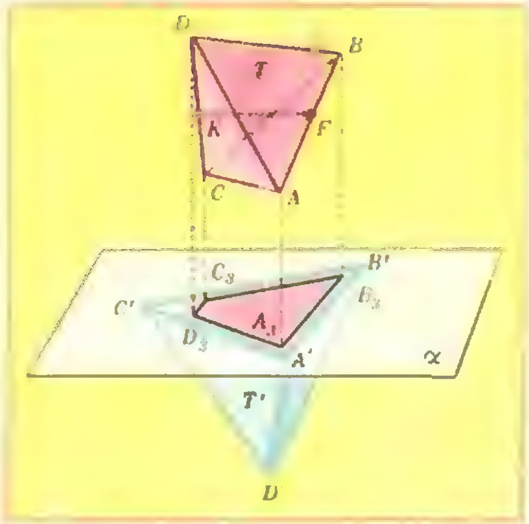


Рис. 7.

ная трудность состоит в том, чтобы сначала угадать правильный ответ; для этого и может оказаться полезным метод малых шевелений: возьмем сначала какую-то фигуру из данного множества и попробуем малым шевелением ее улучшить. Если это не удается, то правдоподобно, что взятая фигура является искомой (за этим, разумеется, должно последовать строгое доказательство).

Задача 5. *Внутри угла C, меньшего, чем развернутый, дана точка P. Укажите способ построения прямой, проходящей через точку P и отсекающей от угла C треугольник наименьшего периметра.*

Поиск решения. Проведем через точку P произвольную прямую $A'B'$ (рис. 8), и пусть Γ — «вневписанная» окружность для $\Delta A'CB'$, касающаяся стороны $A'B'$ и продолжений сторон CA' и CB'. Представим себе сначала, что окружность Γ расположена «далеко» от точки C. Периметр $2p$ треугольника $A'CB'$ равен

$$2p = |A'C|+|CB'|+|A'B'| =$$
$$= |A'C|+|CB'|+|A'T|+B'T| =$$
$$= |A'C|+|CB'|+|A'M|+$$
$$+|B'N| = |CM|+|CN|.$$

Будем приближать касательную окружность Γ к вершине C, уменьшая ее радиус. При этом будут уменьшаться отрезки CM, CN, а значит, и периметр $2p = |CM|+|CN|$ треугольника $A'CB'$. Если точка P расположена вне окружности Γ, то мы можем пошевелить эту окружность так, чтобы ее центр немного приблизился к вершине C, но чтобы точка P еще по-прежнему оставалась вне окружности Γ; при этом периметр треугольника $A'CB'$ уменьшится.

Такая возможность — получения наряду с данным треугольником другого треугольника с меньшим периметром — исчезнет, как только точка P окажется не вне окружности Γ, а на этой окружности. Поэтому правдоподобно, что треугольник минимального периметра получится тогда, когда прямая $A'B'$ будет касаться окружности, проходящей через точку P и касающейся сторон угла C.

Решение. Построим какую-либо окружность Γ', вписанную в угол C; пусть O' — ее центр. Далее, обозначим через P' первую (считая от C) точку пересечения луча CP с построенной окружностью. При гомотетии с центром C и коэффициентом $k = \frac{|CP|}{|CP'|}$ точка P' перейдет в точку P, и потому окружность Γ' перейдет в окружность γ, вписанную в угол C и проходящую через точку P. (Заметим, что окружность, обладающая этими свойствами, единственна; это также вытекает из соображений гомотетии.) Через AB обозначим касательную к окружности γ, проведенную через точку P (точки A и B лежат на сторонах угла).

Докажем, что треугольник ABC — искомый. В самом деле, если

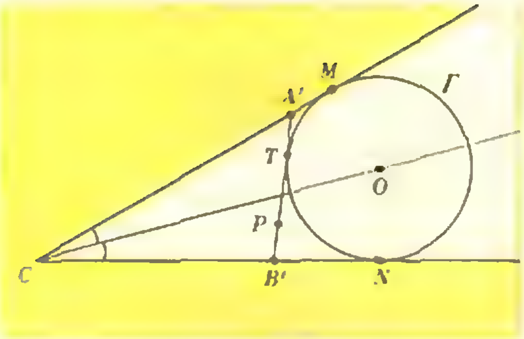


Рис. 8.

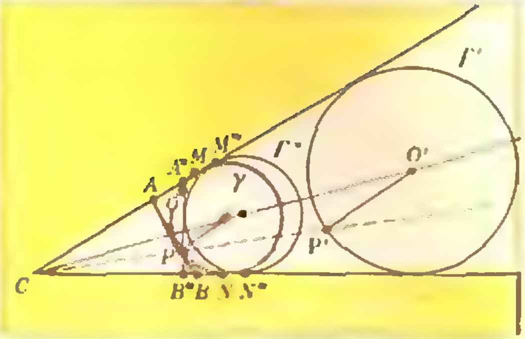


Рис. 9.

$[A^*B^*]$ — какой-либо (отличный от $[AB]$) отрезок с концами на сторонах угла, проходящий через точку P (рис. 9), то прямая A^*B^* не является касательной к окружности γ, т. е. пересекает ее в двух точках P и Q. Следовательно, вневписанная окружность $Г^*$ треугольника A^*B^*C получается из γ гомотетией с коэффициентом, большим единицы. Но тогда ясно, что $|CM^*| + |CN^*| > |CM| + |CN|$ (рис. 9), т. е. периметр треугольника A^*B^*C больше периметра треугольника ABC.

Идея малых шевелений может оказаться полезной не только в геометрических задачах. Для примера рассмотрим следующую задачу («Квант», 1974, № 1, стр. 73):

Задача 6. *Три друга — Алик, Боря и Вася — рассказали, что они будто бы однажды сыграли некоторое число партий в шахматы, причем каждый с каждым сыграл одинаковое число партий. Потом, когда стали решать, кто лучше сыграл и должен считаться победителем, Алик сказал своим товарищам: «У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей». Боря сообщил: «А у меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей», а Вася заметил: «Я набрал больше всего очков» (выигрыш — 1 очко, ничья — $^1/_2$ очка, проигрыш — 0). Мог ли в действительности быть турнир с такими результатами? Если нет, то докажите; если да, то приведите пример.*

Решение. Попытаемся сконструировать турнир, который удовлетворял бы поставленным трем условиям:

I. Алик должен иметь меньше всего проигрышей.

II. Боря должен иметь больше всего выигрышей.

III. Вася должен набрать больше всего очков.

Будем его составлять из отдельных туров (в туре три партии — каждый игрок играет с каждым другим одну партию). Например, может быть такой тур: Алик сыграл с двумя другими игроками вничью, а Боря выиграл у Васи. Или такой тур: Алик сыграл с двумя другими игроками вничью, а Вася выиграл у Бори. Пару таких туров назовем *двойным туром типа* А («типа Алика»). В турнире, который состоит только из одного такого двойного тура, выполняется, очевидно, условие I: у Алика меньше, чем у остальных, проигрышей (нуль проигрышей); при этом каждый игрок набрал по 2 очка. Турнир, составленный из любого числа таких двойных туров типа А, будет обладать свойством I.

Пусть турнир составлен из большого числа двойных туров типа А — скажем, из 100 таких туров. В нем каждый набрал по 200 очков, причем у Алика меньше всего проигрышей — нуль проигрышей (но и нуль выигрышей), а Боря и Вася имеют по 100 выигрышей и по 100 проигрышей.

Теперь немного пошевелим турнир. А именно, пусть сыграно еще небольшое число туров (не обязательно «типа А»); тогда Алик будет иметь по-прежнему меньше проигрышей, чем Боря и чем Вася (иначе говоря, при малых шевелениях турнира свойство I «устойчиво»). Подберем это шевеление так, чтобы выполнялось еще условие II. Для этой цели сначала вообразим себе *двойной тур типа* В («типа Васи»): в нем каждый игрок с каждым из остальных сыграл по две партии, причем Вася сделал 4 ничьих, а Алик и Боря имеют по одному выигрышу и по одному проигрышу; каждый из трех игроков набрал по 2 очка. Если (после указанных 100 двойных туров типа А) были сыграны, скажем, 10 двойных туров типа В, то в результате такого небольшого «шевеления турнира» Алик будет иметь 10 проигрышей, Боря — 110 проигрышей, а Вася — 100 проигрышей, т. е. свойство I сохраняется. В то же время Боря будет иметь 110 выигрышей — больше, чем Алик (10 выигрышей) и чем Вася (100 выигрышей). Значит, условие II тоже выполняется. Кроме того, в итоге каждый набрал по 220 очков (так что условие III пока не выполнено).

К вновь полученному турниру применим еще одно малое шевеление в виде какого-либо одного дополнительного тура; независимо от его исхода условия I и II останутся выполненными (эти условия устойчивые). Подберем этот дополнительный тур так, чтобы Вася набрал в нем больше очков, чем каждый из остальных игроков (например, Вася набирает в нем 2 очка, выигрывая у Алика и Бори, а Алик и Боря делают между собой ничью). Таким образом, мы сконструировали турнир, в котором все три условия I, II, III выполнены, т. е. турнир, о котором говорится в условии задачи, возможен.

Упражнения

1 В четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и конгруэнтны и, кроме того, $|AB| = |CD|$ Обязательно ли этот четырехугольник — квадрат?

2. В выпуклом пятиугольнике все стороны конгруэнтны. Обязательно ли этот пятиугольник правильный?

3 В выпуклом пятиугольнике все диагонали конгруэнтны Обязательно ли этот пятиугольник правильный?

4 В выпуклом шестиугольнике противоположные стороны попарно параллельны, а диагонали, соединяющие противоположные вершины, конгруэнтны Обязательно ли этот шестиугольник правильный?

5 Около окружности описан четырехугольник, диагонали которого конгруэнтны Обязательно ли этот четырехугольник — трапеция? (Указание. Начните с квадрата!)

6 На плоскости даны $2n$ точек $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ Докажите, что малым шевелением этих точек можно добиться того, чтобы никакие два из отрезков $A_1B_1, \ldots, A_nB_n$ не были параллельны и никакие три не пересекались в одной точке

7. В пространстве даны n точек $A_1, \ldots, A_n$ Докажите, что малым шевелением этих точек можно добиться того, чтобы для каждых четырех различных индексов i, j, k, l точки A_i, A_j, A_k, A_l не лежали в одной плоскости.

8 *) Дан выпуклый n-угольник M Докажите, что шевелением $n - 5$ вершин этого многоугольника можно добиться того, чтобы никакие три диагонали не пересекались в одной точке

9. Дан многочлен

$$x^n + a_1x^{n-1} + \qquad + a_{n-1}x + a_n.$$

Докажите, что малым «шевелением» свободного члена a_n можно добиться того, чтобы многочлен не имел кратных корней (Указание Число x_0 тогда и только тогда является кратным корнем многочлена, когда оно одновременно является корнем этого многочлена и его производной)

10. Внутри угла C, меньшего, чем развернутый, дана точка P Постройте прямую, проходящую через точку P и отсекающую от угла C треугольник наименьшей площади

11 Если четырехугольник выпуклый, то сумма длин диагоналей больше его полупериметра Приведите контрпример, показывающий, что обратная теорема неверна.

---

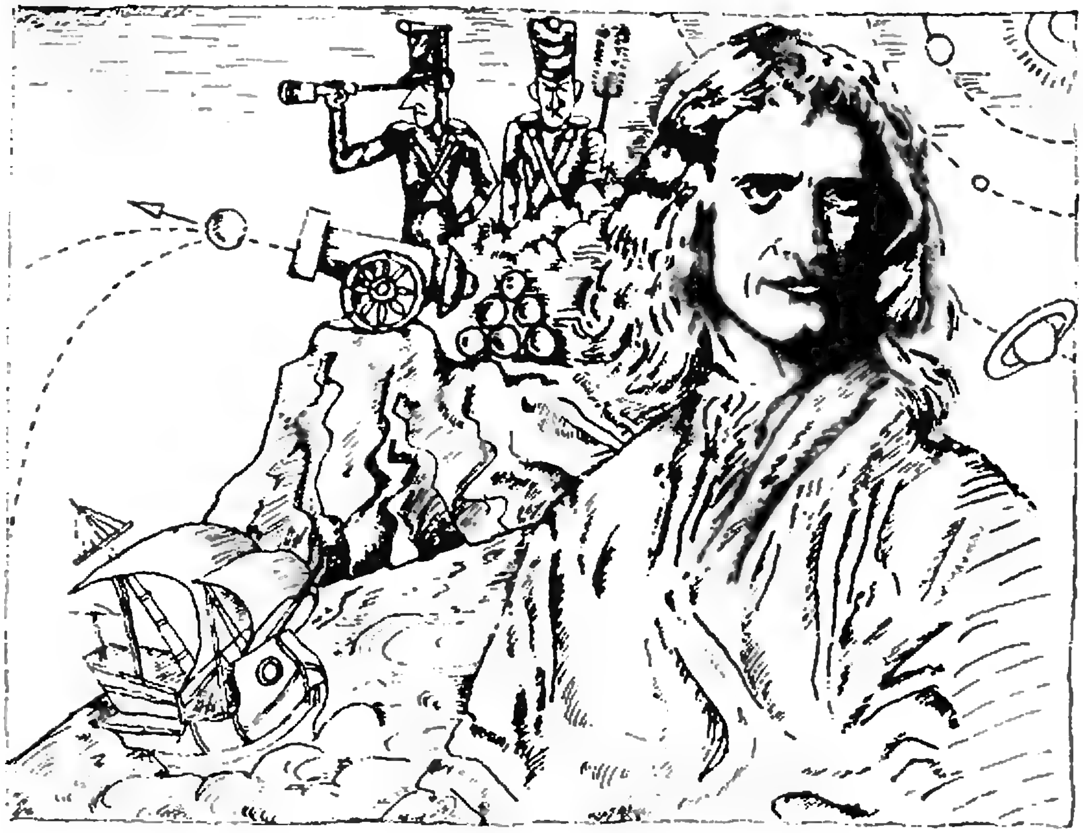
*) См. также задачу М533 («Квант», 1978, № 11).

Советуем купить!

1 *Барабой В А* и *Киричинский Б Р**) Ядерные излучения и жизнь 232 с 77 к
2 *Белоусов А С* * Счетчики элементарных частиц 156 с 47 к
3 *Идельсон Н И* Этюды по истории небесной механики 495 с 1 р 95 к
4 *Муратов М В* * Происхождение материков и океанических впадин 176 с 1 р 01 к
5 *Петрушов А* Человек и Земля* 224 с 72 к
6 ***Физика** на рубеже XVII—XVIII вв* * Сборник статей 248 с 85 к
7 *Черкасов И И* и *Шварев В В* Грунт Луны 140 с 57 к
8 *Штерн М И* * Космос — Земле 182 с 73 к
9 *Яздовский В И* Искусственная биосфера 322 с 72 к

Заказы на книги направлять по адресу
117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига»

*) Книги, отмеченные «звездочкой», имеются в ограниченном количестве



И. Белкин

О Ньютоновских законах движения. Сила

Слово «сила» в обычной речи имеет много значений и допускает множество толкований. Говорят о покупательной силе денег и о силе привычки, о силе воли и о силе общественного мнения, о моральной силе и даже... о нечистой силе. В этих примерах и во множестве других слово «сила» не имеет вполне ясного и однозначного объяснения. Во всяком случае, это слово имеет в них совершенно различный смысл.

Но в механике сила определяется совершенно строго и однозначно. Как говорил Ф. Энгельс, в механике «...действительно знают, что означает слово сила». В этой статье и пойдет речь о силе как механическом понятии и механической величине.

Взаимодействия и силы

В первой нашей статье о законах движения («Квант», 1979, № 2) уже упоминалось, что сила — это влияние одного тела на другое. Но мы видели, что влияние тел всегда взаимное — тела всегда взаимодействуют, то есть влияют друг на друга, и сообщают друг другу ускорения. Значит, при взаимодействии двух тел к каждому из них приложена сила. Сила, приложенная к телу,— причина его ускорения. Ньютон так и определяет силу: «Приложенная сила есть действие, производимое над телом, чтобы изменить его состояние покоя или равномерного прямолинейного движения». В этом и состоит смысл понятия силы в механике. Но пока это только понятие. Нас же интересует сила как физическая величина, которую можно измерить, выразить числом.

Слова «влияние одного тела на другое» содержат нечто неясное, неопределенное. Что значит влияние? Как оно происходит? Тело падает вниз с ускорением, потому что на него влияет Земля. Дверь, снабженная пружиной, движется с ускорением, потому что на нее влияет пружина. Кусок железа движется с ускорением под влиянием магнита. Но разве похожи одно на другое эти влияния? Ясно, что они совершенно различны по своей природе. Во времена Ньютона о природе всех этих влияний ничего не было известно. Но в механике этого, оказывается, можно и не знать. Важно только, что влияние на тело состоит в том, что телу сообщается ускорение. А это значит, что совершенно различные по своей природе влияния (силы) можно сравнивать между собой, если мы сумеем их выразить числами. А для этого необходимо установить, как связаны силы с сообщаемыми ими ускорениями.

Второй закон Ньютона

Эту связь и установил Ньютон из анализа опытных данных. Он сформулировал ее в виде второго закона движения (второй закон Ньютона).

В изложении самого Ньютона этот закон гласит: «Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и имеет то направление, в котором эта сила действует».

В этой формулировке заключена основная идея механики: сила вызывает *изменение* движения, а не само движение, как думали до Ньютона (и как думают и теперь люди, не изучавшие механику). Однако слова «изменение движения» несколько загадочны: ведь движение — это процесс, а не величина; пропорциональными же друг другу могут быть только величины. Неясно также, откуда Ньютон узнал, что существует именно такой закон — закон пропорциональности между силой и изменением движения. Разумеется, закон этот установлен на основании опыта или опытов. Но каких? Ньютон об этом не сообщает. Он просто «велит» телам вести себя так, а не иначе.

Мы можем теперь считать, что слова «изменение движения» означают ускорение, поскольку ускорение представляет собой быстроту изменения скорости движения тела, если масса его постоянна *). Что касается опыта, из которого может быть установлена связь между ускорением и силой, то он должен состоять в том, чтобы различные тела (различные по массе) подвергались действию одной и той же силы; при этом надо измерять ускорения, которые получают эти тела. Та величина, которая в этих измерениях окажется одной и той же для всех тел, и будет служить мерой силы, приложенной к этим телам.

В природе существует одна-единственная сила, которая не зависит от того, к какому телу она приложена. Это — упругая сила деформированного тела, например пружины. Эта сила называется силой упругости. Особенность силы упругости состоит в том, что она зависит только от того, насколько деформировано тело. Так, сила упругости пружины зависит только от ее растяжения (или сжатия) по сравнению с исходной длиной (во времена Ньютона этот факт был уже известен). Поэтому, если поддерживать растяжение пружины постоянным (фиксированным), то она действует на любое прикрепленное к ней тело с одной и той же силой независимо от того, какова масса этого тела (конечно, необходимо, чтобы масса самой пружины была пренебрежимо мала по сравнению с массой прикрепленного к ней тела).

Итак, опыт, который позволил бы установить связь между ускорением и силой, может быть проведен только с использованием пружины. Такой опыт описан в учебнике «Физика 8» (с. 85). Оказывается, пружина, сжатая (или растянутая) на фиксированную длину, сообщает прикрепленным к ней телам ускорения, направления которых всегда совпадают с направлением действующей на тела силы упругости, а абсолютные значения различны для тел с разными массами.

---

*) В современных книгах обычно пишут, как бы «исправляя» Ньютона, вместо «изменение движения» — «изменение количества движения». Под количеством движения при этом понимают произведение массы тела на его скорость (теперь эту величину чаще называют импульсом). Нетрудно понять, что такое толкование слов Ньютона не противоречит принятому нами.

Но для всех тел остается одной и той же величина произведения массы m тела на его ускорение $\vec{a}$, то есть величина $m\vec{a}$. Отсюда следует, что сила $\vec{F}$ определяется уравнением

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Второй закон Ньютона так теперь и формулируется: *сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.*

Ясно, что эта формулировка вполне соответствует ньютоновской, поскольку из нее следует, что ускорение («изменение движения» по Ньютону) пропорционально силе:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Итак, сила, о которой говорилось только, что она представляет собой меру влияния одного тела на другое, стала теперь физической величиной, которая может быть выражена числом. Для нее можно установить единицу измерения. За единицу силы естественно принять силу, которая сообщает телу с массой, равной единице (1 кг), ускорение, равное единице (1 м/с^2). Справедливо, что этой единице присвоено название «ньютон» (Н) в честь творца классической механики.

$\vec{F} = m\vec{a}$ — универсальный закон

Мы уже упоминали, что влияния одних тел на другие могут быть различной природы. Иными словами, различна природа сил взаимодействия. Между тем ко второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ нас привели опыты с силами упругости. Быть может, только для этих сил и справедлив закон Ньютона?

Оказывается, нет. Второй закон Ньютона — фундаментальный закон, он справедлив для любых сил и для всех тел. Им пользуются при изучении движения снарядов и молекул, ветра и звезд, морских волн и деталей механизмов.

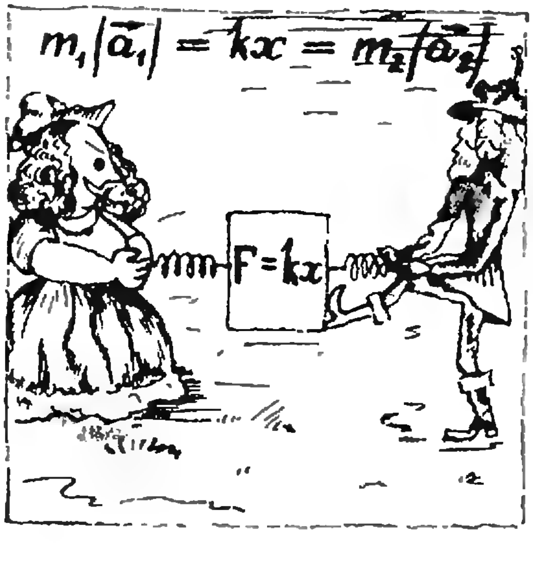
Когда к закрепленной одним концом вертикально расположенной пружине прикреплен груз и груз этот находится в покое, это значит, что ускорения, сообщаемые грузу пружиной и Землей, равны по величине и противоположны по направлению. Сколь ни различны два тела — Земля и растянутая пружина, действующие на покоящийся груз, сколь ни различна природа этих действий, в одном они похожи — они, действуя по отдельности, сообщили бы этому грузу одинаковые по численному значению ускорения (равные $|\vec{g}|$). Они, так сказать, взаимозаменяемы.

Конечно, для физики вопрос о природе различных взаимодействий и сил — очень важный вопрос. Но им занимается не механика, а другие разделы физики. Для механики важно, что всякая сила, приложенная к телу, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.

$\vec{F} = m\vec{a}$ — уравнение движения

Второй закон Ньютона — самый важный закон механики, потому что именно он позволяет решить любую задачу о движении тел. Дело в том, что ускорение $\vec{a}$, входящее в уравнение второго закона, представляет собой быстроту изменения (по модулю и по направлению) скорости тела со временем:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$



Нужно помнить, что за этим векторным уравнением стоят три уравнения для проекций ускорения на оси координат:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \quad a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t},$$

где Δv_x, Δv_y, Δv_z — изменения проекций скорости, Δt — промежуток времени, за который произошли изменения.

В свою очередь проекция скорости — это быстрота изменения координат тела со временем:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Значит, за величиной ускорения во втором законе Ньютона в действительности в сложном виде «скрывается» изменение координат со временем: быстрота изменения быстроты изменения координат (на языке высшей математики это причудливое словосочетание выражается проще: вторая производная координат по времени).

Решив уравнение $\vec{F} = m\vec{a}$, мы получим выражение, показывающее, как координаты движущегося тела изменяются с течением времени. Следовательно, можем узнать положение движущегося тела в любой момент времени. А это и есть главная задача механики. Для этого и существует эта наука. Вот почему уравнение, выражающее второй закон Ньютона, называется уравнением движения.

Чтобы составить это уравнение и решить его, нужно знать силу, действующую на тело. Кроме того, нужно еще знать так называемые начальные условия — координаты тела и его скорость в некоторый начальный момент времени. Наоборот, если закон движения тела известен из опыта, уравнение движения (второй закон Ньютона) позволяет найти силу, приложенную к телу. Если, например, координата x тела изменяется со временем по закону $x = x_0 + v_x t$, то есть тело движется вдоль оси x с постоянной скоростью v_x, то, согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на тело (вдоль оси x), равна нулю. Если координата x изменяется со временем по формуле

$$x = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2},$$

тело движется по оси x с постоянным ускорением a_x. По второму закону это означает, что к телу приложена постоянная сила $\vec{F}_x$, направленная вдоль оси x и равная по модулю ma_x.

Что значит «знать силу»?

Знать движение — это значит знать, как координаты тела зависят от времени. Это ясно из только что приведенных примеров. Но что значит «знать силу»?

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что сила — всегда результат взаимодействия. Если на тело действует сила, то существует какое-то другое тело, от которого она «исходит». И сила зависит от взаимного расположения взаимодействующих тел, от расстояния между ними. Это следует уже из того, что тела, бесконечно удаленные друг от друга, вовсе не взаимодействуют. Но при движении расстояние между взаимодействующими телами может изменяться. Поэтому могут изменяться и силы взаимодействия между этими телами. Значит, сила, приложенная к данному телу, зависит от положения движущегося тела относительно того тела, которое на него действует. Может она зависеть и от скорости движения тела относительно того тела, которое эту силу «создает».

Знать силу — это значит знать, как сила зависит от координат и скоростей движущихся тел. И если вид этой зависимости известен, то соответствующее выражение и нужно подставить вместо $\vec{F}$ в формулу $\vec{F} = m\vec{a}$.

А как узнать эту зависимость? Здесь, как всегда, нужно обратиться к опыту.

Для сил, изучаемых в механике, зависимости от координат и скоростей известны давно.

В 1678 году Роберт Гук (1635—1703) опытным путем установил, что сила упругости пружины пропорциональна ее удлинению. «Каково растяжение, такова сила» — такой короткой фразой объявил Гук об открытом им законе. Теперь этот закон носит его имя. Выражают его формулой

$$F = -kx.$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности, характерный для каждой пружины; x — удлинение пружины, то есть разность длин деформированной и недеформированной пружины. Если вести отсчет координаты свободного конца пружины от положения этого конца при недеформированной пружине, то x — это координата конца пружины. Следовательно, формула $F = -kx$ как раз и показывает, как сила упругости зависит от координаты.

Для другой важной механической силы — силы всемирного тяготения — вид зависимости от координат был установлен самим Ньютоном. Сила эта определяется формулой

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

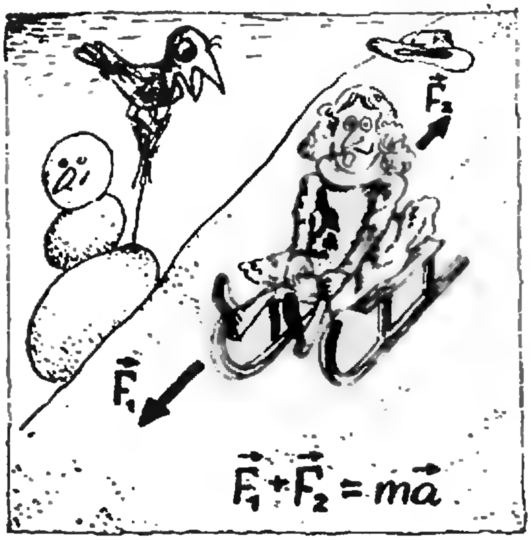
Здесь r — расстояние между взаимодействующими телами, m_1 и m_2 — массы этих тел, γ — коэффициент пропорциональности. Расстояние r и определяет координаты одного тела относительно другого. В земных условиях проявлением силы всемирного тяготения является сила тяжести, равная по модулю $m|\vec{g}|$, где m — масса тела, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. В это выражение координаты тела как будто не входят. Однако нужно иметь в виду, что значение $|\vec{g}|$ зависит от расстояния до тела от центра Земли, то есть от его координат относительно этого центра. Так что и сила тяжести зависит от координат. (Только вблизи поверхности Земли ускорение $|\vec{g}|$ можно приближенно, хотя и с большой точностью, считать постоянным.)

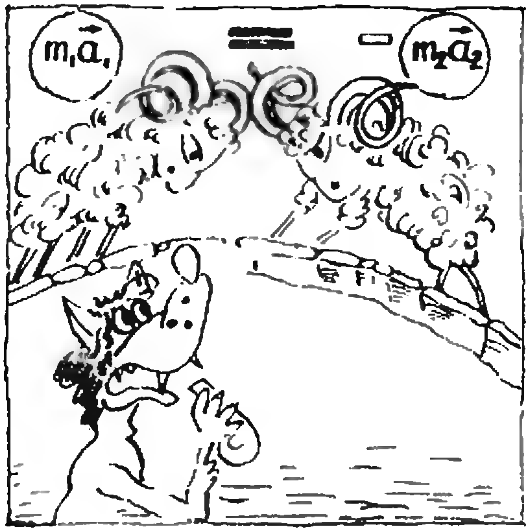
Несколько позже, уже в XVIII веке, была изучена и третья механическая сила — сила трения. Это единственная из механических сил, которая зависит не от координат тела, к которому она приложена, а от относительной скорости тела и направлена против скорости.

Две из трех механических сил — сила упругости и сила трения — имеют, как выяснилось, электромагнитную природу. Природа электромагнитных сил, законы, которым они подчиняются, стали известны около ста лет назад. Природа третьей механической силы — силы всемирного тяготения — была объяснена всего шестьдесят лет назад. А законами механики пользуются уже триста лет. Это связано с тем, что для механики природа сил несущественна. Важно лишь знать, как зависят силы от координат и от скоростей.

Силы складываются

Итак, опыт показывает, что механические силы зависят от координат и скоростей движущихся тел. И опыт же показывает, что ни от чего другого они не зависят. В частности, сила, приложенная к телу, не зависит от того, действует ли она на тело «в одиночестве» или вместе с другими силами. Силы, приложенные к телу, не «мешают» друг другу сообщать ему ускорение. Конечно, о теле, к которому приложено несколько сил, нельзя сказать, что у него и ускорений несколько. У него одно ускорение, равное векторной сумме тех ускорений, которые сообщила бы ему каждая из сил, будь она единственной. Можно поэтому сказать, что и сила на тело действует одна, но она равна векторной сумме всех приложенных к телу





сил. И когда к телу приложено сразу несколько сил, в уравнении $\vec{F} = m\vec{A}$ под $\vec{F}$ нужно понимать векторную сумму всех приложенных сил. Ее называют равнодействующей силой.

Третий закон Ньютона

О третьем законе Ньютона нам остается сказать очень мало. Не потому, что закон маловажный, не заслуживающий серьезных пояснений. Наоборот, в нем содержится самая главная идея механики. А потому, что об этом законе у нас уже была речь и мы им уже пользовались.

В том законе движения, который в книге Ньютона значится под третьим номером и который сохраняет этот традиционный номер во всех книгах по механике от Ньютона до наших дней, говорится о том, что силы возникают при взаимодействии тел, что силы, действующие на каждого из участников взаимодействия, одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Об этом мы уже говорили в предыдущей нашей статье. Там указывалось, что при взаимодействии двух тел каждое из них получает ускорение: эти ускорения направлены в противоположные стороны и отношение модулей ускорений равно обратному соотношению масс взаимодействующих тел. Все это может быть выражено формулой

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2.$$

Теперь мы знаем, что произведение массы тела на его ускорение равно силе, приложенной к телу. Так что $m_1\vec{a}_1$ и $m_2\vec{a}_2$ — это силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на первое и второе тела, и мы можем написать

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

В этом и состоит третий закон Ньютона: *два тела взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине и противоположно направленными.*

Сам Ньютон выразил третий закон движения такими словами: «Действие всегда равно противодействию, или действия тел друг на друга всегда равны и противоположны по направлению». Ньютон пользуется здесь словами «действие» и «противодействие», но второй фразой своей формулировки он поясняет, что между действием и противодействием никакой разницы нет. И то, и другое — сила. Добавим к этому, что и по природе своей силы, с которыми тела действуют друг на друга при взаимодействии, одинаковы. На силу упругости тело «отвечает» силой упругости, на силу трения — силой трения и т. п.

Таковы законы движения, открытые триста лет назад Исааком Ньютоном. Именно открытые, открытые в природе, а не придуманные. Истекшие столетия показали, что для тех движений, которые имел в виду Ньютон, эти законы справедливы, они неизменно подтверждаются опытом.

Имел же в виду Ньютон те движения, которые он, его современники и предшественники могли наблюдать и изучать. Это — обычные в окружающем нас мире движения тел — полет брошеного камня и течение рек, движения маятников и кораблей, планет и ветров.

Одно из «правил рассуждения», которые Ньютон приводит в своей книге, гласит: «Такие свойства тел, которые... оказываются присущими всем телам, над которыми можно производить опыты, должны рассматриваться как свойства всех тел вообще». На этом основании считалось, что законы движения Ньютона справедливы для всех движений всех без исключения тел. Для движений быстрых и медленных, для тел больших и малых.

И только в начале XX века выяснилось, что это не так. Механика Ньютона оказывается неверной, во-первых, тогда, когда тела движутся со скоростями, близкими к скорости света. Это было установлено теорией относительности А. Эйнштейна в 1905 году. Связано это с тем, что взаимодействие между телами передается не мгновенно, как считалось раньше, а с определенной конечной скоростью. Эта скорость как раз и равна скорости света. Неудивительно, что когда скорость движения тела близка к скорости передачи взаимодействия, законы механики становятся иными. Но и в механике теории относительности (в релятивистской механике) мы имеем дело со знакомыми понятиями и величинами — расстояниями и временем, скоростями и ускорениями, массами и силами. Но соотношения между ними совсем другие. В эти новые формулы всегда входит отношение $\frac{v}{c}$ скорости тела v к скорости света c. Когда это отношение мало́ и его можно считать равным нулю, формулы сразу превращаются в формулы механики Ньютона. Поэтому появление теории относительности не привело ни к отказу от этой механики, ни к ее пересмотру.

Во-вторых, механика Ньютона совершенно неприменима к движениям очень малых частиц, из которых образованы атомы и молекулы. Здесь явления описываются новой теорией, появившейся в физике пятьдесят лет назад. В этой теории даже привычные механические понятия, такие, как траектория, скорость, ускорение, сила, теряют свой обычный «механический» смысл. Самое понятие движения здесь отличается от привычного. Но и появление этой новой теории (ее называют квантовой механикой) нисколько не повлияло на механику Ньютона, которая остается незыблемой для тех движений, для которых она была создана.

В «Кванте» № 9 за 1975 год под заглавием «Когда катет длиннее гипотенузы» была опубликована беседа с экс-чемпионом мира Михаилом Талем. Мы тогда не подозревали, что в редакцию придет следующее письмо..

Докажем, что в любом прямоугольном треугольнике гипотенуза конгруэнтна катету.

Пусть $[BB_1]$ — биссектриса угла B прямоугольного треугольника ABC (см. рисунок), D — середина катета AC, O — точка пересечения перпендикуляра к $[AC]$ в точке $D \in (BB_1)$, $[OE]$ и $[OF]$ — перпендикуляры, опущенные из точки O на прямые AB и BC соответственно. Легко показать, что $\triangle BOE \cong \triangle BOF$, откуда

$$|BE| = |BF|. \qquad (1)$$

Далее, из равенства

$$|OA| = |OC|$$

следует, что

$$\triangle OEA \cong \triangle OCF,$$

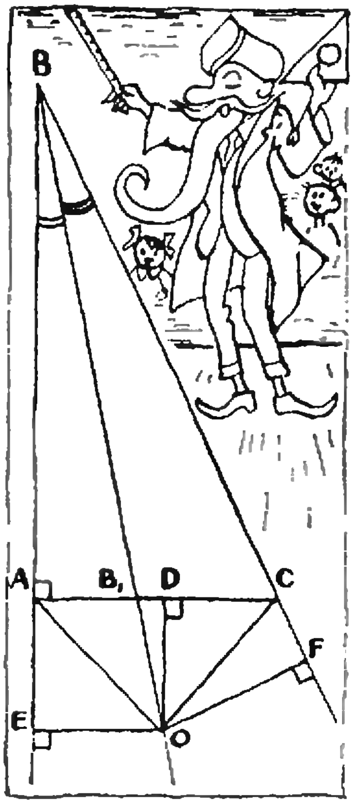
откуда

$$|AE| = |FC|. \qquad (2)$$

Из равенства (1) и (2) получаем, что $|AB| = |BC|$.

Где здесь ошибка?

С. Сефибеков



О. Кабардин, Н. Шефер

Самодельные дифракционные решетки

Впервые дифракционные решетки для изучения спектров использовал в 1821 году немецкий физик Фраунгофер. Его решетки, изготовленные путем наматывания тончайшей проволоки на два параллельных винта, содержали всего лишь несколько десятков проволочек на одном миллиметре длины решетки. (Заметим, что хорошие современные решетки, представляющие собой прозрачные пластинки с нанесенными на них непрозрачными штрихами, имеют до нескольких тысяч штрихов на 1 мм.)

Попробуйте и вы изготовить простую дифракционную решетку. В домашних условиях это можно сделать, например, фотографическим способом.

Для этого нужно на листе ватмана плакатным пером начертить тушью систему параллельных полос одинаковой ширины. Расстояние между полосами можно выбрать равным их ширине. После фотографирования и проявления на негативе получится система светлых и темных полос, то есть чередование прозрачных и непрозрачных для света промежутков. Укрепив полученный негатив в рамке для диапозитивов, работу по изготовлению дифракционной решетки можно считать законченной.

Фотографирование лучше проводить при хорошем солнечном освещении или с подсветкой лампой дневного света.

С одного шаблона можно получить дифракционные решетки с различными периодами, если фотографировать его с различных расстояний. Пусть, например, ширина A светлых полос и ширина B темных полос на шаблоне одна и та же и равна 3 мм; мы хотим получить решетку с постоянной $d = a + b = 0{,}05$ мм ($a = b = 0{,}025$ мм), фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 50$ мм. Тогда расстояние s до шаблона можно найти из выражения

$$\frac{s}{F}=\frac{A}{a},$$

откуда

$$s=F\frac{A}{a}=6\ \text{м}.$$

Полученная после проявления решетка будет содержать на одном миллиметре

$$n=\frac{1}{d}=\frac{1}{0{,}05}=20\ \text{штрихов},$$

то есть примерно столько же, сколько в первых решетках Фраунгофера.

Основное назначение дифракционной решетки как спектрального прибора — определение длины световой волны. Из условия

$$d\sin\varphi=k\lambda$$

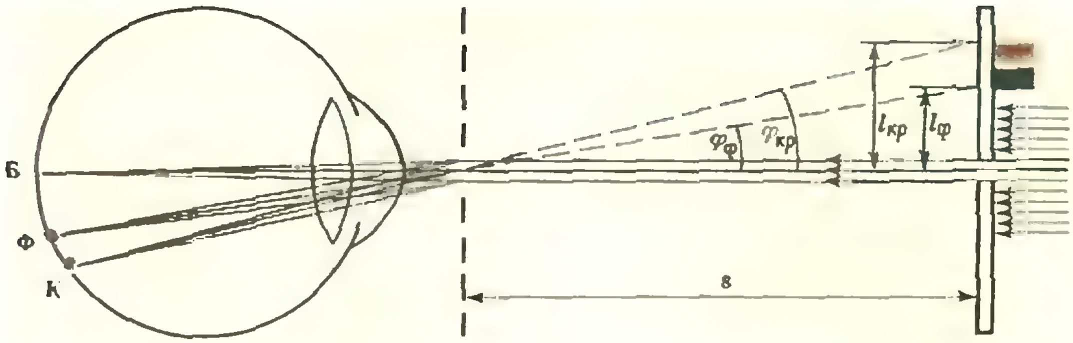
главных максимумов дифракционной картины, полученной с помощью решетки, следует, что чем меньше постоянная решетки d, тем под большим углом будет наблюдаться максимум, соответствующий длине волны λ, в спектре k-го порядка.

Это означает, что с уменьшением постоянной решетки (с увеличением числа штрихов на единицу длины) увеличивается возможность разделять близко расположенные спектральные линии (как говорят, увеличивается *дисперсия* решетки)*). Кроме того, по мере увеличения общего числа штрихов все больше света попадает в главные максимумы, и они становятся все более яркими.

В связи с этим желательно изготовить решетку с возможно бо́льшим

---

*) Подробнее см., например, книгу: Кабардин О. Ф., Орлов В. А., Шефер Н. И. Факультативный курс физики. 10 класс. (М., «Просвещение», 1979.)



общим числом штрихов N и возможно меньшей постоянной решетки d.

Выполнение первого требования определяется в основном терпением и аккуратностью. Нужно вычертить шаблоны на двух-трех листах ватмана и затем склеить их в один большой шаблон для фотографирования (или взять один лист ватмана и уменьшить ширину светлых и темных полос до одного миллиметра).

На второе требование накладывает ограничение разрешающая способность фотоэмульсии, обусловленная ее зернистым строением. Фотопленки с чувствительностью 130—250 единиц ГОСТа обладают разрешающей способностью не более 75—70 штрихов на миллиметр, с понижением чувствительности до 32 единиц ГОСТа разрешающая способность возрастает до 115 штрихов на миллиметр.

Период d полученной дифракционной решетки можно определить, измерив размер C изображения листа ватмана на негативе и разделив его на число N черных линий, нанесенных на чертеж до фотографирования:

$$d = \frac{C}{N}.$$

После изготовления решетки можно приступить к экспериментам. На одном конце деревянной линейки длиной 40—50 см укрепите дифракционную решетку, а на другом — самодельную шкалу из миллиметровой бумаги, наклеенной на полоску картона со щелью. Расположите решетку так, чтобы штрихи были параллельны щели, и направьте на щель свет от лампы накаливания. Поместив глаз вблизи решетки, изменением взаимного расположения экрана и лампы добейтесь наилучших условий видимости спектра.

Ход световых лучей при наблюдении спектра с помощью дифракционной решетки представлен на рисунке.

Используя самодельную дифракционную решетку, можно оценить границы спектральной чувствительности глаза. Для этого нужно определить длину волны красного света на одном краю наблюдаемого спектра и длину волны фиолетового света на другом краю спектра. Если известны период решетки d и порядок спектра k, определение длины волны λ сводится к измерению угла φ между нормалью к плоскости решетки и направлением на положение максимума, соответствующего избранной длине волны:

$$d \sin\varphi = k\lambda,$$

и

$$\lambda = \frac{d}{k}\sin\varphi.$$

Рассматривая щель в экране через дифракционную решетку, найдите положения красного и фиолетового краев спектра 1-го порядка. По обе стороны от щели отсчитайте расстояния $l_{кр}$ и $l_ф$ (см. рисунок) и найдите их средние значения. Измерив расстояние s от щели до решетки, найдите тангенсы углов $\varphi_{кр}$ и $\varphi_ф$ ($\operatorname{tg}\varphi = l\ s$), а по ним — синусы соответствующих углов. Зная период решетки, определите длины волн для красных и фиолетовых лучей в спектре 1-го порядка.

Такие же измерения и вычисления проделайте для спектра 2-го порядка.

И. Янтаров

Коммутирующие многочлены

От редакции

Обычно математические задачи, предлагающиеся школьникам, либо весьма косвенно связаны с новыми результатами, либо касаются их отдельных деталей и не дают возможности увидеть картину в целом. Наверное, это происходит потому, что в математике все взаимосвязано и, как правило, для того, чтобы *полностью* разобраться даже во вполне элементарном вопросе, приходится привлекать соображения из неэлементарных областей математики.

Задача о коммутирующих многочленах, которой посвящена эта статья,— счастливое исключение: здесь удается достаточно близко подойти к проблематике, имеющей общематематический интерес, пользуясь лишь элементарными средствами.

Нам эта задача стала известна из письма, присланного два года назад в «Квант» Э. Туркевичем, которому принадлежат здесь первые результаты. Задача эта, дополненная некоторыми пунктами, предлагалась на исследовательском туре XI Всесоюзной олимпиады и была помещена в Задачнике «Кванта» (М455).

Формулировка задачи

Многочлены P и Q от одной переменной называются коммутирующими *), если $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Выписанное равенство означает, что если в обеих частях равенства раскрыть все скобки и привести подобные члены, то получатся одинаковые многочлены. Это эквивалентно тому, что для любого действительного числа d выполняется численное равенство $P(Q(d)) = Q(P(d))$.

В задаче М455 рассматриваются только многочлены со старшим коэффициентом 1; такие многочлены мы будем называть *унитарными*. (Как мы увидим ниже, вопрос о произвольных коммутирующих многочленах можно свести к вопросу о многочленах со старшим коэффициентом, равным ± 1.)

а) *Для любого числа α найдите все многочлены степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.*

б) *Докажите, что существует не более одного многочлена заданной степени, коммутирующего с данным многочленом P степени два.*

в) *Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени два.*

г) *Докажите, что если два многочлена Q и R коммутируют с некоторым многочленом P степени два, то они коммутируют между собой.*

д) *Докажите, что существует такая последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$, коммутирующих между собой, что степень многочлена P_k равна k и $P_2(x) = x^2 - 2$.*

Решение задач а)—г)

а) Пусть $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Распишем равенство $P(Q(x)) = Q(P(x))$:

$$(x^3 + ax^2 + bx + c)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + a(x^2 - \alpha)^2 + b(x^2 - \alpha) + c.$$

Прежде чем раскрывать скобки, заметим, что справа стоят только четные степени x, а слева коэффициент при x^5 равен $2a$. Значит, $a = 0$. Но тогда слева коэффициент при x^3 равен $2c$, так что и $c = 0$. Поэтому $Q(x) = x^3 + bx$. Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты, получаем систему

$$\begin{cases} 2b = -3\alpha, \\ b^2 = 3\alpha^2 + b, \\ \alpha = \alpha^3 + b\alpha. \end{cases}$$

Пусть $\alpha = 2\gamma$; тогда $b = -3\gamma$. Из 2-го уравнения $9\gamma^2 = 12\gamma^2 - 3\gamma$, то есть $\gamma^2 - \gamma = 0$. Значит, $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$. Легко проверить, что оба эти решения подходят.

---

*) От латинского *commutatívus* — меняющийся.

Таким образом, многочлен 3-й степени Q, коммутирующий с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$, существует только при $\alpha = 0$ ($P(x) = x^2$, $Q(x) = x^3$) и при $\alpha = 2$ ($P(x) = x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 3x$).

Аналогично доказывается, что если степень Q равна 2, то $Q = P$, а если она равна 1, то $Q(x) = x$.

Этот пункт очень простой. Он давался школьникам на олимпиаде, чтобы они лучше разобрались в условии задачи и немножко привыкли к ней. Кроме того, если внимательно разобраться в уравнениях, которые были выписаны, то возникает идея, как решать пункт б) — один из ключевых пунктов задачи.

б) Пусть $Q(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_{k-1} x + a_k$, $P(x) = x^2 + px + q$. Распишем равенство

$$(x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k)^2 + p(x^k + \dots + a_k) + q - (x^2 + px + q)^k - a_1 (x^2 + px + q)^{k-1} - \dots - a_k = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при $x^{2k}, x^{2k-1}, \dots, x, x^0$, мы получаем систему уравнений для $a_1, a_2, \dots, a_k$, p, q. Решить эту систему и даже просто выписать ее довольно трудно. Однако легко заметить, что коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_k$ при степенях $x^{2k-1}, x^{2k-2}, \dots, x^k$ имеют следующую форму:

$b_1 = 2a_1 + R_1(p, q) = 0$,

$b_2 = 2a_2 + R_2(p, q, a_1) = 0$,

. . . .

$b_k = 2a_k + R_k(p, q, a_1, \dots, a_{k-1}) = 0$.

Здесь R_i — некоторое алгебраическое выражение от $p, q, a_1, \dots, a_{i-1}$. Из первого уравнения вытекает, что a_1 выражается через p и q; из второго — что a_2 выражается через p, q и a_1 и, значит, выражается через p и q; из третьего — что a_3 выражается через p, q, a_1 и a_2 и, значит, выражается через p и q, ... Итак, мы видим, что все коэффициенты $a_1, \dots, a_k$ выражаются через p и q, то есть коэффициенты многочлена Q, коммутирующего с P, однозначно выражаются через p и q, что и требовалось доказать.

Легко проверить, что аналогичное рассуждение можно провести для любого многочлена P, лишь бы его степень была больше 1 (а Q был унитарным), то есть утверждение пункта б) верно для любого такого многочлена.

Пункт б) является ключевым в задаче. Из него уже легко вытекают пункты в) и г).

в) Докажем, что многочлен $Q(x) = P(P(x))$ коммутирует с P. Действительно, $Q(P(x)) = P(P(P(x))) = P(Q(x))$. Многочлен Q имеет степень четыре и в силу б) является единственным многочленом такой степени, коммутирующим с P. Аналогично доказывается, что единственным многочленом степени 8, коммутирующим с P, является многочлен $R(x) = P(P(P(x)))$.

г) Пусть $S(x) = Q(R(x))$ и $T(x) = R(Q(x))$. Поскольку P коммутирует с Q и R, то $P(S(x)) = P(Q(R(x))) = Q(P(R(x))) = Q(R(P(x))) = S(P(x))$; значит, P коммутирует с многочленом S. Аналогично проверяется, что P коммутирует с многочленом T. Кроме того, ясно, что S и T — унитарные многочлены одинаковой степени (если Q и R имеют степени k и l, то степени многочленов S и T равны kl). Из б) вытекает, что $S = T$, то есть $Q(R(x)) = R(Q(x))$, что и требовалось.

Так же, как и в пункте б), утверждение остается верным, если P — любой многочлен степени больше 1, а Q и R унитарны.

Многочлены Чебышева. Решение пункта д)

Пункт д) намного сложнее остальных пунктов. Мы приведем несколько различных подходов к его решению.

Первый способ. Пусть $x = t + t^{-1}$. Тогда легко проверить, что x^k имеет вид $x^k = (t + t^{-1})^k = (t^k + t^{-k}) + a_1(t^{k-1} + t^{-(k-1)}) + a_2(t^{k-2} + t^{-(k-2)}) + \dots + a_{k-1}(t + t^{-1}) + a_k$, где $a_1, \dots, a_k$ — некоторые фиксированные числа. Индукцией по k отсюда выводится, что $t^k + t^{-k}$ представляется в виде

$$x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_{k-1} x + b_k,$$

где $b_1, \dots, b_k$ — некоторые фиксированные числа. Обозначим многочлен $x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k$ через

$P_k(x)$. По определению $P_k(t+t^{-1}) = t^k + t^{-k}$, так что $P_k(P_l(t+t^{-1})) = P_k(t^l+t^{-l}) = t^{kl}+t^{-kl} = P_{kl}(t+t^{-1})$. Таким образом, $P_k(P_l(x)) = P_{kl}(x) = P_l(P_k(x))$, то есть любые два из многочленов P_k коммутируют. Поскольку $P_2(x) = x^2-2$, мы построили искомую последовательность многочленов.

Второй способ. Приведем способ получения многочленов P_k при помощи *многочленов Чебышева* T_k. Мы не будем давать прямого определения этих многочленов, но приведем соотношения, которым они удовлетворяют (и которые определяют их однозначно):

$$T_k(\cos t) = \cos kt.$$

Можно доказать, что T_k — многочлен степени k. Легко проверить, что многочлены Чебышева коммутируют:

$$T_k(T_m(x)) = T_{km}(x) = T_m(T_k(x))$$

— дело сводится к тому, что $\cos k(mt) = \cos kmt = \cos m(kt)$. Но T_k — не унитарный многочлен: его старший коэффициент равен 2^{k-1}. Этот недостаток легко исправить, «растянув» с помощью замены переменной аргумент и значение многочлена в два раза, т. е. положив $P_k(x) = 2T_k(x/2)$. От такой процедуры коммутативность не нарушится (проверьте это!). Замечательная последовательность многочленов Чебышева, появляющихся в самых разных вопросах анализа (особенно в теории приближения функций многочленами), оказывается последовательностью коммутирующих многочленов. Именно таким способом построил последовательность P_k Э. Туркевич.

Оба описанных способа основаны на одной идее. Пусть имеется некоторая функция f, принимающая бесконечное число значений и такая, что для каждого натурального n

$$f(nt) = Q_n(f(t)),$$

где Q_n — многочлен. Тогда многочлены Q_m и Q_n коммутируют. Например, если $f(t) = e^t$, то получаем серию коммутирующих многочленов $F_n(x) = x^n$. Если $f(t) = e^t + e^{-t}$, то получаем серию многочленов P_n (это — в точности наш первый способ построения многочленов P_n, только t заменено здесь на e^t). Если $f(t) = \cos t$, то получаем серию многочленов T_n. (Те, кто знаком с комплексными числами и формулой $\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, без труда найдут объяснение, почему функции $e^t + e^{-t}$ и $\cos t$ приводят по существу к одной и той же, с точностью до растяжения вдвое, последовательности многочленов.)

Приведенные решения пункта д) очень красивы, но обладают одним недостатком: совершенно непонятно, как до них можно додуматься. Мы приведем еще одно решение; оно будет менее коротким, но зато будет ясно, как его придумали и как быстро выписывать многочлены P_n.

Третий способ. Как вытекает из пункта б), может существовать только один многочлен P_k степени k, коммутирующий с $P_2(x) = x^2-2$. Выпишем несколько первых таких многочленов:

$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = x^2-2,$$
$$P_3(x) = x^3-3x,$$
$$P_4(x) = x^4-4x^2+2,$$
$$P_5(x) = x^5-5x^3+5x,$$
$$P_6(x) = x^6-6x^4+9x^2-2$$

(здесь $P_4(x) = P_2(P_2(x))$, $P_6(x) = P_2(P_3(x))$, $P_5(x)$ находится так же, как в пункте а)). Посмотрев на эту последовательность многочленов, можно заметить, что она удовлетворяет рекуррентной формуле $P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x)$. Естественно предположить, что эта формула верна при всех $k > 1$.

Итак, определим последовательность многочленов $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ по индукции, считая, что

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2-2,$$

а при $k > 1$

$$P_{k+1}(x) = xP_k(x) - P_{k-1}(x).$$

Докажем, что все многочлены P_k коммутируют с многочленом P_2; тогда они все коммутируют между собой (пункт г)).

Проведем доказательство по индукции. Ясно, что многочлены P_1 и P_2 коммутируют с P_2; предположим, что все многочлены $P_1, P_2, \ldots$

..., P_k коммутируют с P_2, и докажем, что многочлен P_{k+1} коммутирует с P_2.

Нам нужно показать, что

$$P_{k+1}(x^2-2)=(P_{k+1}(x))^2-2.$$

Подставляя в это равенство рекуррентную формулу для P_{k+1}, перепишем его в виде

$$(x^2-2)P_k(x^2-2)-P_{k-1}(x^2-2)= \\ =(xP_k(x)-P_{k-1}(x))^2-2.$$

Теперь используем предположение индукции:

$$(x^2-2)(P_k(x)^2-2)-(P_{k-1}(x)^2-2)= \\ =(xP_k(x)-P_{k-1}(x))^2-2.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим такое равенство:

$$-2(P_k(x)^2-xP_k(x)P_{k-1}(x)+ \\ +P_{k-1}(x)^2)=2x^2-8$$

или

$$P_k(x)^2-xP_k(x)P_{k-1}(x)+ \\ +P_{k-1}(x)^2=4-x^2. \quad (*)$$

Обозначим левую часть $(*)$ через $S_k(x)$. Нам остается доказать, что $S_k(x)$ не зависит от k (и равно $4-x^2$). Действительно, пусть $k>2$. Тогда

$$S_k(x)=P_k(x)^2-xP_k(x)P_{k-1}(x)+ \\ +P_{k-1}(x)^2=P_k(x)[P_k(x)- \\ -xP_{k-1}(x)]+P_{k-1}(x)^2= \\ =-P_k(x)P_{k-2}(x)+P_{k-1}(x)^2= \\ =P_{k-2}(x)^2-xP_{k-1}(x)P_{k-2}(x)+ \\ +P_{k-1}(x)^2=S_{k-1}(x),$$

т. е. $S_k(x)=S_{k-1}(x)$. Поскольку $S_2(x)=4-x^2$, $S_k(x)=4-x^2$ при всех $x\geqslant 2$. Таким образом, мы показали, что P_k коммутирует с P_2 при любом k.

Задачи о коммутирующих многочленах

Мы хотим обсудить задачи, связанные со следующей общей проблемой: *описать все пары коммутирующих* (не обязательно унитарных) *многочленов* P и Q.

Задача 1. Докажите, что два многочлена P и Q первой степени коммутируют в том и только в том случае, когда либо $P(x)=x+\alpha$, $Q(x)=x+\beta$, либо существует x_0 такое, что $P(x_0)=Q(x_0)=x_0$ (общая «неподвижная» точка).

Задача 2. Решите общую проблему для случая, когда степень одного из многочленов P, Q равна 1.

В дальнейшем мы будем считать, что степени многочленов P и Q больше 1.

Пусть $P(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k$, $Q(x)=b_0x^e+\dots+b_{e-1}x+b_e$. Прежде всего покажем, что можно свести общую задачу к случаю, когда коэффициенты a_1 и b_1 равны 0 (многочлены такого вида называются *приведенными*). Для этого воспользуемся следующей операцией. Зафиксируем число a и с его помощью построим из каждого многочлена R новый, «сдвинутый» многочлен $R^{(a)}$ по формуле $R^{(a)}(x)=R(x-a)+a$. Ясно, что многочлен R восстанавливается по многочлену $R^{(a)}$: $R(x)=R^{(a)}(x+a)-a$.

Задача 3. а) Докажите, что если многочлены P и Q коммутируют, то $P^{(a)}$ и $Q^{(a)}$ тоже коммутируют.

б) Докажите, что любая пара коммутирующих многочленов P и Q степени больше 1 имеет вид $P=S^{(a)}$, $Q=T^{(a)}$, где a — некоторое число, а S и T — коммутирующие приведенные многочлены.

В дальнейшем мы будем считать, что многочлены P и Q приведены. Кроме того, мы будем считать, что они унитарны, то есть их старшие коэффициенты равны 1. Ясно, что это — наиболее интересный частный случай. Кроме того, рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что можно свести общую задачу к случаю, когда старшие коэффициенты многочленов P и Q равны ± 1, так что этот частный случай не сильно отличается от общего (в этих рассуждениях надо использовать операцию «растяжения», которая каждому многочлену R сопоставляет многочлен $R^{\{\lambda\}}$ по формуле $R^{\{\lambda\}}(x)=\lambda R(x/\lambda)$). Опишем несколько серий коммутирующих многочленов:

1. Пусть R — многочлен степени r. Рассмотрим серию многочленов $P_0(x)=x$, $P_1(x)=R(x)$, $P_2(x)=R(R(x))$, $P_3(x)=R(R(R(x)))$ (вообще $P_{i+1}(x)=P_i(R(x))$).

Ясно, что все многочлены P_i коммутируют и степень многочлена P_i равна r^i.

2. Серия многочленов $F_k(x) = x^k$. Все многочлены F_k коммутируют и степень многочлена F_k равна k.

3. $\{P_k\}$ — серия многочленов, построенная при решении пункта д) задачи М455. Эти многочлены определяются условием $P_k(t + t^{-1}) = t^k + t^{-k}$. Степень многочлена P_k равна k.

4. Определим серию многочленов $H_1, H_3, H_5, \ldots$ таким условием: $H_k(t - t^{-1}) = t^k - t^{-k}$ (k — нечетно). Легко проверить, что такие многочлены существуют и однозначно определяются выписанным условием. Все эти многочлены коммутируют и степень многочлена H_k равна k.

На самом деле, примеры 3 и 4 являются частными случаями более общего примера. Чтобы описать этот общий пример, сделаем одно замечание о коэффициентах многочленов. Мы до сих пор считали, что эти коэффициенты — действительные числа. Однако в большинстве алгебраических вопросов лучше работать с комплексными числами. Поэтому давайте считать, что коэффициентами наших многочленов могут быть любые комплексные числа.

5. Фиксируем натуральное число m и такое комплексное число λ, что $\lambda^m = 1$ (для каждого m существует $m - 1$ такое число, отличное от 1).

Рассмотрим такие пары чисел (u, v), что $u \cdot v = \lambda$, и положим $x = u + v$. Легко проверить, что $u^k + v^k = x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$, где $a_1, \ldots, a_k$ — некоторые числа, зависящие от λ. Положим $P_k(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$; многочлен P_k характеризуется таким условием: $P_k(u + v) = u^k + v^k$, если $uv = \lambda$.

Пусть l — число, дающее при делении на m остаток 1. Тогда $u^l v^l = (uv)^l = \lambda^l = \lambda$, так что $P_k(u^l + v^l) = u^{kl} + v^{kl}$. Таким образом, если k и l дают при делении на m остаток 1, то $P_k(P_l(u + v)) = u^{kl} + v^{kl} = P_l(P_k(u + v))$, то есть многочлены P_k и P_l коммутируют. Мы построили по числу λ серию коммутирующих многочленов $P_1, P_{m+1}, P_{2m+1}, \ldots$ Все эти многочлены унитарны, приведены и степень P_k равна k.

При $m = 1$, $\lambda = 1$ мы получаем пример 3, при $m = 2$, $\lambda = -1$ — пример 4.

Примеры 1—5 исчерпывают все известные примеры коммутирующих многочленов, так что можно высказать гипотезу, что если P и Q — коммутирующие унитарные приведенные многочлены степени больше 1 с комплексными коэффициентами, то они входят в одну из серий, построенных в примерах 1, 2, 5.

Можно, не решая общей проблемы, попытаться ответить на некоторые частные вопросы:

1. При каких α многочлен $P(x) = x^2 - \alpha$ коммутирует с каким-нибудь многочленом нечетной степени.

2. Пусть P — унитарный многочлен степени больше 1. Отметим степени всех унитарных многочленов Q, коммутирующих с P. Какое подмножество в натуральных числах при этом может получиться?

Например, в примере 1 это — геометрическая прогрессия; в примере 5 — арифметическая.

3. Пусть P, Q — коммутирующие унитарные многочлены степеней k и l. Предположим, что l делится на k. Верно ли, что Q имеет вид $Q(x) = P(R(x))$, где R — унитарный многочлен, коммутирующий с P?

Можно сформулировать более общую проблему — найти все коммутирующие рациональные функции P и Q. В этом случае появляется много новых интересных примеров.

Здесь также годится общий способ, о котором мы говорили в решении пункта д) для многочленов. Пусть имеется функция f (принимающая бесконечное число значений) такая, что

$$f(nt) = P_n(f(t)),$$

где P_n — рациональная функция. Тогда для разных n и m функции P_n и P_m коммутируют.

Возникает интересный вопрос: для каких функций f можно при любом n подобрать такую рациональную функцию P_n, чтобы $P_n(f(t)) = f(nt)$. Например, легко проверить, что этому условию удовлетворяет функция $f(t) = \operatorname{tg} t$.

Можно построить другие примеры функций f, используя теорию эллиптических функций. Поскольку это — неэлементарная теория, мы не будем здесь описывать соответствующее построение.

Все эти примеры показывают, что задача об описании коммутирующих многочленов (и, более общо, коммутирующих рациональных функций) непосредственно связана с очень глубокими и красивыми математическими теориями. Решение этой задачи, видимо, откроет какие-то новые, неизвестные ранее факты. Короче говоря, это задача, которой стоит заниматься.

задачник кванта

Задачи

М556—М560; Ф568—Ф572

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 июня 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М556, М557» или «Ф568». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М556. Обязательно ли конгруэнтны два остроугольных равнобедренных треугольника, имеющих равные по длине боковые стороны и равные радиусы вписанных окружностей?

А. Егоров

М557. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно встретится простое число.

А. Колотов

М558. В круге расположено $k>1$ черных секторов, угол каждого из которых меньше $180°/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга.

В. Произволов

М559. Докажите, что если x, y, z — длины сторон треугольника, то

$$\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|<1.$$

А. Ермилов

М560. В дне ящика имеется дырка. Нужно сделать выпуклую заслонку наименьшей площади, при любом положении которой на дне ящика дырка будет закрыта. Решите эту задачу, если:

а) дно ящика — квадрат 4×4, а дырка 1×1 расположена так, как показано на рисунке 1;

б) дно ящика — квадрат $n\times n$ (n нечетно), а дырка 1×1 расположена в центре (рис. 2);

в)* попробуйте решить аналогичную задачу для каких-либо других случаев, когда дно и дырка — выпуклые фигуры.

В. Батырев

Ф568. При бомбардировке литиевой мишени протонами с энергией не меньше 1,88 МэВ может происходить ядерная реакция

$$^7\mathrm{Li}+p\rightarrow{}^7\mathrm{Be}+n.$$

При какой энергии протонов образующиеся в реакции нейтроны могут лететь назад от литиевой мишени?

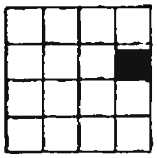


Рис. 1.

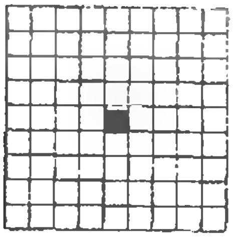


Рис. 2.

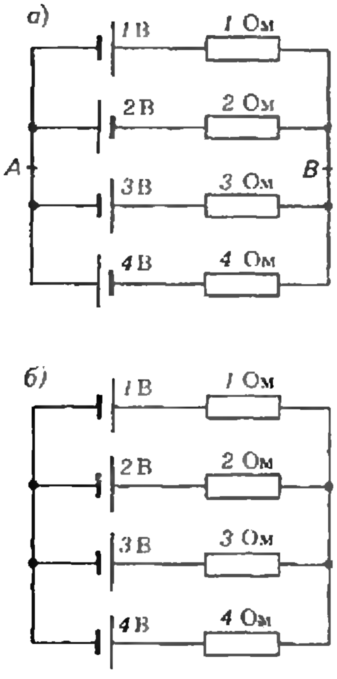


Рис. 3.

Ф569. Электрическим кипятильником мощностью $W = 500$ Вт нагревают воду в кастрюле. За две минуты температура воды увеличилась от 85°С до 90°С. Затем кипятильник выключили и за одну минуту температура воды упала на один градус. Сколько воды находится в кастрюле? Удельная теплоемкость воды равна $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Е. Сурков

Ф570. Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода распределение потенциала $\varphi(x)$ между катодом и анодом имеет вид: $\varphi(x) = x^2 - 2x$ (x — в мм, а φ — в вольтах). Расстояние между катодом и анодом $d = 10$ мм. Координата x совпадает с расстоянием до катода. Определить, при какой минимальной кинетической энергии электрон с поверхности катода сможет достичь анода. Каким будет максимальное ускорение электронов, которые достигнут анода?

Ф571. Батареи и резисторы собирают в цепь двумя способами — как на рисунке 3, *а* и как на рисунке 3, *б*. Определить токи, текущие через резисторы в обоих случаях. Сопротивлениями источников тока и соединительных проводов пренебречь. Как изменятся токи в случае *а*, если разрезать провода в точках *A* и *B*?

Ф572. Перрен исследовал зависимость от высоты числа шарообразных частиц особой смолы — гуммигута во взвеси этих частиц в воде. Для частиц радиусом $r_1 = 0{,}212$ мкм он получил зависимость, график которой показан на рисунке 4 (n — концентрация частиц на высоте h, n_0 — их концентрация у дна кюветы). Такой же график получается для частиц с радиусом $r_2 = 0{,}106$ мкм, только картина растянута по высоте в 8 раз. В то же время известно, что плотность кислорода в земной атмосфере убывает с высотой так, как показано на рисунке 5 (ρ — плотность кислорода на высоте H, ρ_0 — у поверхности кюветы). Определить массу молекулы кислорода.

Плотность гуммигута $\rho_г = 1{,}194$ г/см³.

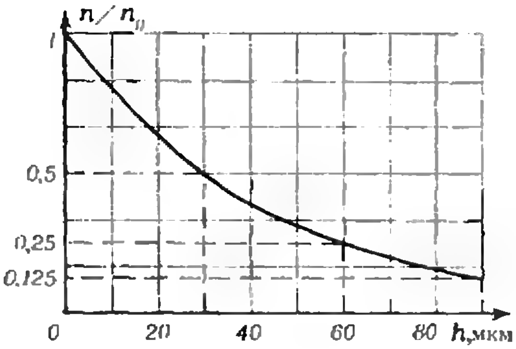


Рис. 4.

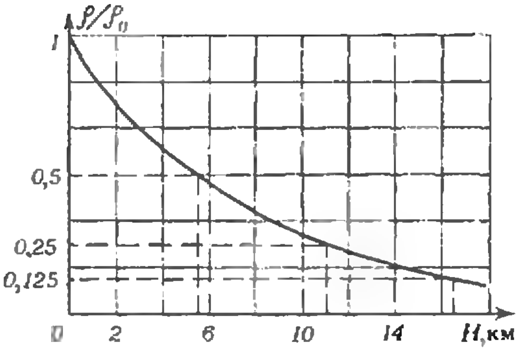


Рис. 5.

Решения задач

М508—М512; Ф515, Ф518—Ф520

М508. *Окружность касается трех полуокружностей с диаметрами $[AB]$, $[BC]$ и $[AC]$ ($C \in [AB]$, рис. 1). Докажите, что радиус окружности вдвое меньше расстояния от ее центра до прямой AB.*

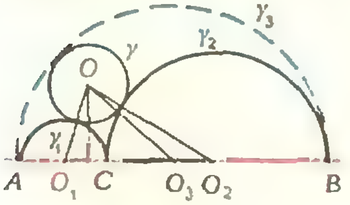


Рис. 1.

Пусть O_1 — центр полуокружности γ_1 с диаметром $[AC]$, O_2 — центр полуокружности γ_2 с диаметром $[BC]$, O_3 — центр полуокружности γ_3 с диаметром $[AB]$, и, наконец, O — центр окружности γ, касающейся трех данных полуокружностей (рис. 1). Обозначим длины радиусов окружностей γ_1, γ_2 и γ, соответственно, через r, R и x. Тогда длина радиуса полуокружности γ_3 равна $R+r$.

Рассмотрим треугольник O_1OO_2. Имеем: $|O_1O| = r + x$, $|OO_2| = R + x$, $|O_1O_2| = R + r$. Обозначим расстояние от центра O до прямой AB через h. Записав площадь треугольника O_1OO_2 по формуле Герона и через длины основания $[O_1O_2]$ и высоты, опущенной из вершины O, получим уравнение

$$\sqrt{Rrx(R+r+x)} = \frac{1}{2}(R+r)h.$$

Аналогичное уравнение для треугольника O_1OO_3 имеет вид

$$\sqrt{rx(R+r)(R-r)} = \frac{1}{2}Rh.$$

Возводя левую и правую части обоих уравнений в квадрат и затем вычитая из одного уравнения другое, получаем

$$rx[R(R+r+x)-(R+r)(R-r)] = \frac{1}{4}h^2[(R+r)^2-R^2],$$

откуда $x^2 = h^2/4$, то есть $x = h/2$, что и требовалось.

Эту задачу можно решить более изящно, если применить инверсию (об инверсии и ее свойствах см. «Квант» — 1974, № 1, с. 16, 1976, № 2, с. 34, 1977, № 6, с. 38).

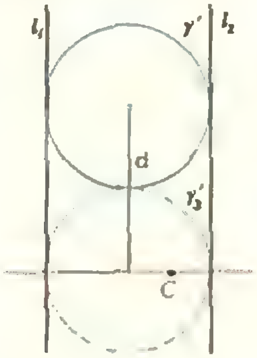


Рис. 2.

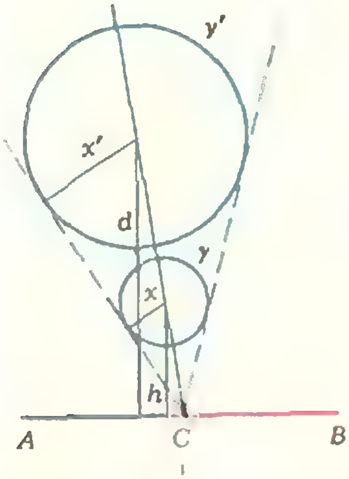


Рис. 3.

Произведем инверсию I относительно произвольной окружности с центром в точке C. При этой инверсии окружности γ_1, γ_2, γ_3 и γ преобразуются так, как показано на рисунке 2: окружности γ_1 и γ_2 перейдут, соответственно, в прямые l_1 и l_2, перпендикулярные $[AB]$, а окружности γ_3 и γ — соответственно в окружности γ_3' и γ', касающиеся прямых l_1 и l_2, причем центр окружности γ_3' принадлежит прямой AB (эта прямая на рисунках 1 и 2 выделена красным цветом).

Легко сообразить, что окружности γ и $\gamma' = I(\gamma)$ гомотетичны с центром гомотетии C. Это видно из рисунка 3: проходящие через точку C касательные к окружности γ при инверсии I переходят в себя и являются касательными к окружности $\gamma' = I(\gamma)$. Обозначим радиус окружности γ' через x', а через d — расстояние от центра окружности γ' до прямой AB. Поскольку γ и γ' гомотетичны, имеем $h/d = x/x'$ (h — расстояние от центра окружности γ до прямой AB, x — радиус γ). Но, очевидно, $x' = d/2$ (окружности γ' и γ_3' — одинакового радиуса, см. рис. 2), так что $x = h/2$, что и требовалось доказать.

В. Сендеров, И. Шарыгин

◆

М509. *Решите в натуральных числах уравнения:*
а) $2^x+1=3^y$;
б) $z^x+1=(z+1)^2$;
в) $z^x+1=(z+1)^y$.

Нетрудно видеть, что уравнения а) и б) — частные случаи уравнения в) при $z=2$ и $y=2$ соответственно. Мы разберем случай а) отдельно, а затем решим уравнение в).

а) Если $x=1$, то и $y=1$.

Пусть $x>1$. Тогда $2^x+1 \equiv 1 \pmod 4$, откуда следует, что y — четное число (если y нечетно, то $3^y \equiv 3 \pmod 4$, и равенство $2^x+1=3^y$ невозможно). Итак, $y=2k$, $2^x=3^{2k}-1$, то есть $2^x=(3^k-1)(3^k+1)$. Поскольку $x>1$, оба множителя 3^k-1 и 3^k+1 должны быть степенями двойки (отличающимися друг от друга на 2). Это возможно только при $k=1$. Поэтому $y=2$, так что $2^x+1=9$, и $x=3$.

Итак, у уравнения а) два решения: (1; 1) и (3; 2).

в) Решение уравнения в) проведем в несколько этапов.

Пусть z имеет простой делитель p: $z=p^m z_1$, $m\geqslant 1$, z_1 взаимно просто с p. Пусть $y=p^n y_1$, где $n\geqslant 0$ и НОД $(y_1, p)=1$.

Рассмотрим выражение $(1+z)^{y_1}$. Имеем:

$$(1+z)^{y_1}=1+y_1z+C_{y_1}^2z^2+\ldots+z^{y_1}=$$
$$=1+z\left(y_1+C_{y_1}^2z+\ldots+z^{y_1-1}\right).$$

Поскольку y_1 не делится на p (будем записывать это так: $y_1\not\equiv 0 \pmod p$), получаем

$$(1+z)^{y_1}=1+p^m A,\ \text{где}\ A\equiv y_1z_1 \pmod p.$$

Рассмотрим теперь $(1+z)^y$. Докажем следующее вспомогательное утверждение (верное, впрочем, при некоторых ограничениях): для любого натурального B

$$(1+p^iB)^p=1+p^{i+1}D\,(i>0),$$

причем $B\equiv D \pmod p$. В самом деле, применим формулу бинома Ньютона:

$$(1+p^iB)^p=1+C_p^1\cdot p^iB+C_p^2\cdot p^{2i}B^2+\ldots$$
$$\ldots+p^{i}{}_{p}B^p=1+p^{i+1}B+C_p^2\cdot p^{2i}B^2+\ldots+p^{i}{}_{p}B^p.$$

Легко видеть, что если $2i>i+1$, то есть $i>1$, то утверждение справедливо. Если же $i=1$, то коэффициент при p^{i+1} будет равен $B+C_p^2B^2$. Если p — нечетное, то C_p^2 делится на p, так что $B+C_p^2B^2\equiv B \pmod p$, и наше утверждение для нечетных p верно и в этом случае.

Пусть z имеет нечетный простой делитель p. Применим доказанное утверждение к выражению $(1+z)^y$. Имеем:

$$(1+z)^y=\left((1+z)^{y_1}\right)^{p^n}=(1+p^mA)^{p^n}=$$
$$=(1+p^{m+1}A_1)^{p^{n-1}}=\ldots=1+p^{m+n}A_n,$$

причем $A\equiv A_1\equiv\ldots\equiv A_n \pmod p$, то есть A_n на p не делится. Мы ищем решение уравнения в): $(1+z)^y=1+z^x$, или $p^{m+n}A_n=p^{mx}z_1^x$. Поскольку $z_1\not\equiv 0 \pmod p$, должно выполняться равенство

$$m+n=mx.$$

С другой стороны, очевидно, что $x\geqslant y$. Если $x>y$, то $x>p^n$, откуда

$$m+n>mp^n\geqslant m(1+n(p-1)),$$

и $n>mn(p-1)$, что невозможно.

Аналогично разбирается случай, когда у z нет нечетных делителей, но оно делится на 4. Таким образом, если $x>0$, то уравнение в) не может иметь таких решений $(x, y; z)$ в натуральных числах, что z делится на нечетное число или на 4. Случай $z=2$ разобран в пункте а). Остается рассмотреть случай, когда $z=1$, и случай $x=y$.

Если $z=1$, получаем уравнение $1^x+1=2^y$, $2^y=2$, откуда $y=1$, x — любое.

В случае $x=y$ имеем:

$$z^x+1=(z+1)^x,$$

то есть

$$1=(z+1)^x-z^x=[(z+1)-z]\times$$
$$\times[(z+1)^{x-1}+(z+1)^{x-2}z+\ldots+z^{x-1}]=$$
$$=(z+1)^{x-1}+(z+1)^{x-2}z+\ldots+z^{x-1}\geqslant x.$$

Таким образом, $x=y=1$, z — любое.

Итак, уравнение в) имеет два набора решений:

$(x;\ 1;\ 1)$, x — любое,
$(1;\ 1;\ z)$, z — любое,

и два решения, получающиеся при $z=2$:

$$(1;\ 1;\ 2) \text{ и } (3;\ 2;\ 2).$$

Теперь нетрудно видеть, что уравнение б) (являющееся частным случаем уравнения в) при $y=2$) имеет единственное решение: $x=3,\ z=2$.

Л. Лиманов

◆

M510. *В книге «Венгерские математические олимпиады» приводится такая задача (№ 148): «Доказать, что для всех положительных $\alpha<\pi$ выполнено неравенство*

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha>0».$$

Докажите следующее обобщение этого неравенства: для всех $0<\alpha<\pi$ и натурального n

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\sin 3\alpha+\cdots+\frac{1}{n}\sin n\alpha>0.$$

Докажем это неравенство по индукции.

1. При $n=1$ неравенство справедливо: $\sin\alpha>0$, если $\alpha\in\,]0;\ \pi[$.

При $n=2$ имеем:

$$\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)>0 \text{ если } \alpha\in\,]0;\ \pi[.$$

2. Пусть $S_{n-1}(\alpha)=\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha+\dots+\frac{1}{n-1}\sin(n-1)\alpha>0$ при $\alpha\in\,]0;\ \pi[$. Докажем, что функция $S_n(\alpha)=S_{n-1}(\alpha)+\frac{1}{n}\sin n\alpha$ также положительна при $\alpha\in\,]0;\ \pi[$. Предположим противное. Тогда $S_n(\alpha)$ имеет минимум в искомой точке $\alpha_0\,(0<\alpha_0<\pi)$, причем $S_n(\alpha_0)\leqslant 0$. При этом $S'_n(\alpha_0)=\cos\alpha_0+\cos 2\alpha_0+\dots+\cos n\alpha_0=$

$$=\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]-\sin\frac{\alpha_0}{2}}{2\sin\frac{\alpha_0}{2}}=0.$$

Значит, $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]=\sin\frac{\alpha_0}{2}$, откуда

$$\left|\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]\right|=\cos\frac{\alpha_0}{2}.$$

Поэтому $S_n(\alpha_0)-S_{n-1}(\alpha_0)=\frac{1}{n}\sin n\alpha_0=\frac{1}{n}\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]\cos\frac{\alpha_0}{2}-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha_0\right]\sin\frac{\alpha_0}{2}\right\}\geqslant 0,$

то есть $S_{n-1}(\alpha_0)\leqslant S_n(\alpha_0)\leqslant 0$, что противоречит предположению индукции. Поэтому $S_n(\alpha)>0$ при всех $\alpha\in\,]0;\ \pi[$.

Рассмотренная сумма

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$$

является частичной суммой бесконечного тригонометрического ряда, про который можно доказать, что он на интервале $]-\pi;\ \pi[$ *сходится к функции* $\frac{x}{2}$, а на всей прямой — к периодическому продолжению (с интервала $]-\pi;\ \pi[$) этой функции. Коэффициенты $\frac{1}{k}$ этого ряда связаны с функцией $\frac{x}{2}$ *формулами Фурье*:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin kx\,dx,$$

и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ является *рядом Фурье* функции $\frac{x}{2}$.

Теория рядов Фурье — бесконечных сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ — чрезвычайно важный и богатый результатами раздел математического анализа. Неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0$$

(для любого натурального n и $x \in]0; \pi[$) было доказано Липотом Фейром (1880—1959), известным венгерским математиком, внесшим значительный вклад в развитие теории тригонометрических рядов (ему, в частности, принадлежит один из первых примеров расходящегося в точке ряда Фурье непрерывной функции).

В. Скворцов

◆

М511. *Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что четырехугольник $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$, то $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.*

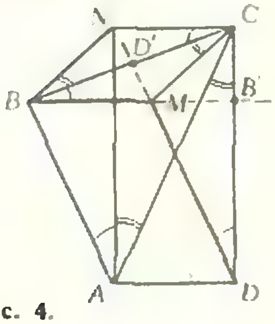


Рис. 4.

Проведем $(NC)\parallel(BM)$ и $(BN)\parallel(MC)$ (рис. 4). Тогда четырехугольники $BNCM$ и $ANCD$ — параллелограммы, откуда следует, что $\widehat{NAB}=\widehat{CDM}$, $\widehat{NCB}=\widehat{CBM}$.

По условию $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$; следовательно, $\widehat{NAB}=\widehat{NCB}$ и точки A, B, N, C лежат на одной окружности. Поэтому $\widehat{NBC}=\widehat{NAC}$. Но $\widehat{NBC}=\widehat{BCM}$, а $\widehat{NAC}=\widehat{ACD}$ (четырехугольники $BNCM$ и $ANCD$ — параллелограммы). Поэтому $\widehat{BCM}=\widehat{ACD}$, что и требовалось доказать.

Ю. Михеев

Приведем еще одно решение этой задачи, основанное на том, что четырехугольники $ABCD$ и $MB'CD'$ подобны; здесь $B'=(BM)\cap(DC)$, $D'=(DM)\cap(BC)$. Действительно, у этих четырехугольников угол C общий, а остальные углы попарно конгруэнтны: $\hat{A}=\hat{M}$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{D}=\hat{D}'$. Однако одной конгруэнтности углов для подобия четырехугольников недостаточно. Заметим теперь, что треугольники $BD'M$ и DMB' подобны. Из этого подобия и того, что четырехугольник $ABMD$ — параллелограмм, вытекает равенство

$$\frac{|MB'|}{|AB|}=\frac{|MD'|}{|AD|},$$

из которого уже следует подобие четырехугольников $ABCD$ и $MB'CD'$. Из этого подобия в свою очередь следует, что $\widehat{ACD}=\widehat{MCD'}(=\widehat{MCB})$.

Л. Лиманов

◆

М512. *Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального $m>1$ числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ... попарно взаимно просты.*

Положим $f_1(x) = x^3 - x + 1$, и для каждого $n=2, 3, \ldots$

$$f_n(x)=f(f_{n-1}(x)).$$

Тогда $f_1(0) = f_1(1)=1$ и (по индукции) $f_n(0) = f_n(1)=1$ для каждого n. Таким образом, свободный член $f_n(0)$ многочлена $f_n(x)$ с целыми коэффициентами равен 1. Поэтому *при любом натуральном n и целом a* число $f_n(a)$ дает при делении на a остаток 1. Отсюда следует, что при любых целых $k > l > 0$ и m число $f_k(m) = f_{k-l}(f_l(m))$ при делении на $f_l(m)$ дает в остатке 1, так что $f_k(m)$ и $f_l(m)$ взаимно просты.

Возникает естественный вопрос: *каков должен быть многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, чтобы для не-*

$x(x-1)r(x)+1;$
$x(x+1)[(x-1)r(x)-1]+1;$
$x[(x^2-1)r(x)-2x]+1;$
$x(x-1)[(x+1)r(x)+1]-1;$
$x[(x^2-1)r(x)+2x]-1;$
$x(x+1)r(x)-1$

(здесь $r(x)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами).

го выполнялось условие задачи:

для любого натурального m числа (*)
$m, f(m), f(f(m)), \ldots$ попарно взаимно просты.

Из нашего решения ясно, что для этого достаточны условия $f(0)=f(1)=1$, другими словами, любой многочлен вида $f(x) = x(x-1)r(x)+1$ (где $r(x)$ — любой многочлен с целыми коэффициентами) удовлетворяет условию (*). Оказывается, полный ответ на наш вопрос таков: многочлен $f(x)$ удовлетворяет условию (*) тогда и только тогда, когда он принадлежит одному из шести типов, приведенных на полях.

Заметим, что в решении задачи мы построили бесконечную последовательность натуральных чисел, в которой все числа попарно взаимно просты (например: 2, $f_1(2)=7$, $f_2(2)=f_1(7)=337$, ..., $f_n(2)$, ...). Из существования такой последовательности сразу вытекает бесконечность множества простых чисел.

А. Колотов

◆

Ф515. *Легкий стержень длины l закреплен в вертикальной плоскости на оси, проходящей через точку O, которая делит стержень в отношении $1:3$. К одному из концов стержня прикреплен тяжелый шарик массы m, другой конец стержня прикреплен к горизонтальной пружине жесткости k (рис. 5). Пружина не растянута, когда стержень вертикален. Определить период малых колебаний стержня.*

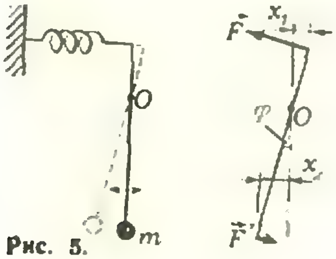


Рис. 5.

Смещение верхнего и нижнего концов стержня от вертикали при колебаниях обозначим соответственно x_1 и x_2. Тогда

$$x_1 = \frac{l}{4}\sin\varphi, \quad x_2 = \frac{3l}{4}\sin\varphi.$$

Проекции сил, действующих на шарик, на ось X, касательную к траектории движения шарика (рис. 5), равны $-m|\vec{g}|\sin\varphi$ и $-|\vec{F}'|$, где $\vec{F}'$ — сила нормальной реакции стержня. Так как стержень невесом, моменты сил $\vec{F}$ и $\vec{F}'$ равны. Следовательно,

$$|\vec{F}'|\frac{3}{4}l = |\vec{F}|\frac{1}{4}l,$$

откуда

$$|\vec{F}'| = \frac{kx_1}{3} = \frac{1}{12}kl\sin\varphi.$$

Теперь запишем уравнение движения маятника:

$$-m|\vec{g}|\sin\varphi - |\vec{F}'| = ma_\tau,$$

или

$$\frac{1}{m}\left(\frac{kl}{12}\sin\varphi + m|\vec{g}|\sin\varphi\right) = \omega_0^2\frac{3l}{4}\sin\varphi.$$

Выражая циклическую частоту ω_0 через период T и сокращая на $\sin\varphi$, находим T:

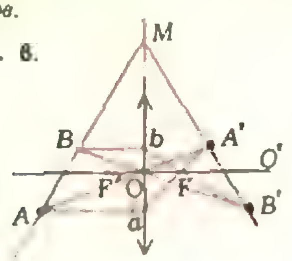
$$T = 6\pi\sqrt{\frac{lm}{kl+12m|\vec{g}|}}.$$

Ю. Левчук

◆

Ф518. *На рисунке 6 показано положение двух точек A и B и их изображений A' и B', которые дает тонкая линза. Найти построением положение линзы и ее фокусов.*

Рис. 6.



Лучи, идущие без преломления из точки A в точку A' и из точки B в точку B', проходят через оптический центр линзы. Следовательно, точка O — оптический центр линзы (см. рис. 6).

Луч, проходящий через точки A и B, после преломления в линзе проходит через точки A' и B'. Следовательно, точка M — точка пересечения лучей AB и $A'B'$ — лежит в плоскости линзы.

Итак, положение линзы мы определили. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости линзы. Лучи Aa и Bb, параллельные главной оптической оси, после преломления проходят через фокус линзы. Следовательно, F и F' — фокусы линзы, OO' — главная оптическая ось линзы.

Ф519. *Груз A подвешен к пружине BC с помощью нити AB (рис. 7). Какова должна быть амплитуда колебаний груза, чтобы эти колебания были гармоническими? Масса груза $m = 0{,}1$ кг, жесткость пружины $k = 1600$ Н/м.*

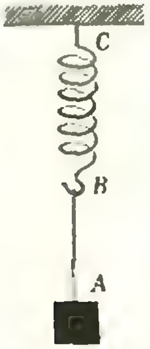


Рис. 7.

Если колебания груза гармонические, то есть его смещение x от положения равновесия меняется со временем по закону

$$x = A\cos\omega t$$

(A — амплитуда, ω — частота колебаний), то ускорение груза равно

$$a = x'' = -A\omega^2\cos\omega t.$$

Модуль ускорения максимален при $x = \pm A$. *Так как* груз прикреплен к пружине с помощью нити, ускорение груза в *верхней точке* не может быть больше $\vec{g}$; следовательно,

$$|\vec{a}| \leqslant |\vec{g}|, \text{ или } A\omega^2 \leqslant |\vec{g}|.$$

Отсюда находим, что

$$A \leqslant \frac{|\vec{g}|}{\omega^2}.$$

Частота гармонических колебаний груза совпадает с *частотой колебаний* пружины, то есть $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Таким образом,

$$A \leqslant \frac{|\vec{g}|m}{k} \approx 0{,}06 \text{ см}.$$

◆

Ф520. *В проточном калориметре (рис. 8) исследуемый газ пропускают по трубопроводу и нагревают с помощью спирали. Газ поступает в калориметр при температуре $t_1 = 20$°C. При мощности нагревателя $W_1 = 1$ кВт и расходе газа $m_1 = 540$ кг/ч температура газа за нагревателем оказалась такой же, как при мощности нагревателя $W_2 = 2$ кВт и расходе газа $m_2 = 720$ кг/ч. Давление газа в трубе всюду одинаково. Найти температуру газа t_2, если его теплоемкость при постоянном объеме $c_V = 21$ Дж/(моль·K), а молярная масса газа $M = 29$ кг/кмоль.*

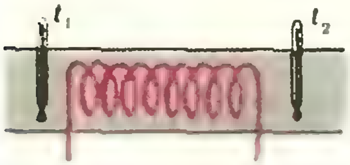


Рис. 8.

Выделяемая нагревателем энергия расходуется на изменение *внутренней энергии* газа ($\Delta E_{\text{вн}}$), совершение работы (A) и на потери энергии из-за теплоотвода от калориметра. Эти потери зависят от разности температур калориметра и среды. Так как температуры в первом и втором случаях одинаковы, одинаковы и потери энергии. Следовательно,

$$W_1 = \Delta E_{\text{вн.1}} + A_1 + Q,$$
$$W_2 = \Delta E_{\text{вн.2}} + A_2 + Q,$$

откуда

$$W_2 - W_1 = \Delta E_{\text{вн.2}} - \Delta E_{\text{вн.1}} + A_2 - A_1.$$

Но $\Delta E_{\text{вн}} = \frac{c_V}{M}m(t_2 - t_1)$ $\left(\text{так как } c_V — \text{теплоемкость моля газа, удельная теплоемкость газа равна } \frac{c_V}{M}\right)$,

$A = p\Delta V = \frac{m}{M}R\Delta T = \frac{m}{M}R(t_2 - t_1)$. Таким образом,

$$W_2 - W_1 = \frac{c_V}{M}(t_2 - t_1)(m_2 - m_1) + \frac{R}{M}(t_2 - t_1)(m_2 - m_1).$$

Отсюда

$$t_2 - t_1 = \frac{(W_2 - W_1)M}{(c_V + R)(m_2 - m_1)} \approx 20\text{° C}, \quad t_2 \approx 40\text{° C}.$$

И. Слободецкий

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М506—М515 и Ф508—Ф522 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Абдибеков (Аральск) **5а), в)**; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **7а), 8, 9, 1, 2, 5а), в)**; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **1, 5в)**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **8, 9а), б), 1, 2**; *С. Азнабаев* (Новотроицк Оренбургской обл.) **7а), 8, 9б), 2, 5в)**; *В. Айриян* (Раздан) **1, 2**; *К. Архангельский* (Киев) **8, 9б), 5в), б)**; *Б. Баасандорж* (МНР) **9а), б)**; *А. Бадалян* (пос. Берд АрмССР) **2, 5**; *Б. Байсакалов* (*Алма-Ата*) **7а), 8, 9а), б), 1, 5а), в), г)**; *К. Бакланов* (Тула) **9б)**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **9б), 1—3, 5в)**; *А. Барг* (Николаев) **5а, в)**; *Д. Баттулта* (МНР) **2**; *Б. Бегун* (Москва) **5а), в), г)**; *А. Бекжанов* (Алма-Ата) **8**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **2**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **8, 1**; *В. Болотников* (Харьков) **8, 9а), б), 2, 3, 5**; *А. Боричев* (Ленинград) **1—4, 5а), в)**; *Ю. Бусин* (Черемхово) **9а), б)**; *А. Васильев* (Саратов) **2**; *В. Виноградов* (Казань) **9а), б)**; *В. Виноградов* (Москва) **8, 0—2, 4, 5а), б), в), г)**; *И. Власов* (Мичуринск) **9а), б)**; *А. Воронин* (Бугуруслан) **8**; *А. Воронов* (Москва) **5а), б)**; *А. Галенко* (Пенза) **1, 5а)**; *А. Гильман* (Москва) **8, 9а), б), 1—3, 5а)**; *Л. Гитлин* (Витебск) **5а), б)**; *Ю. Глухов* (Щелково) **8, 1**; *А. Головин* (Москва) **9а), б), 2, 5а)**; *О. Гордиенко* (Павлодар) **9б), 1, 2, 5а), в), г)**; *М. Горелов* (Белорецк) **8, 9а), б), 1—3**; *Е. Горелова* (Саратов) **7а), 8, 9а), б)**; *Г. Грабарник* (Ташкент) **6, 7а), 8, 9а), б), 1, 2, 4, 5**; *Н. Гринберг* (Киев) **2, 5а), б)**; *В. Губа* (Вологда) **6, 7а), 8, 9а), б), 0—4, 5а), б), в)**; *С. Гузов* (Львов) **5а)**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **1**; *В. Димантман* (Баку) **8, 9б)**; *О. Дмитриев* (Саратов) **8, 9а, б), 2, 5в)**; *С. Довбыш* (Москва) **1—4, 5а), б), в)**; *А. Дороговцев* (Киев) **2**; *И. Елишевич* (Чернигов) **9а), б), 5а)**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **9б), 5а), в)**; *И. Ефимов* (Красноярск) **5а)**; *С. Забаринов* (д. Харчи Ивановской обл.) **2**; *В. Забелин* (Саратов) **8, 1, 3, 5а), в), г)**; *Д. Захаров* (Москва) **8, 9а), б)**; *А. Захарян* (Сочи) **5в)**; *И. Зверович* (Минск) **9а), 2, 5а), в)**; *М. Зельдич* (Киев) **2—4**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **2**; *М. Ибрагимов* (Шуша) **9б), 2**; *Е. Ивченко* (Винница) **2**; *О. Ижболдин* (Ленинград) **6, 7а), 0**; *Р. Измайлов* (Баку) **8, 1—5**; *К. Ильин* (Вильнюс) **9а), б)**; *А. Исмайлов* (с. Чайрасуллу АзССР) **1**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **8, 9а), б), 1, 2, 5а), в), г)**; *С. Калашников* (Рязань) **5в), г)**; *А. Каплан* (Сумгаит) **6, 7а), 8, 9а), б), 1—3, 5в)**; *Г. Карагулян* (Ереван) **6, 8, 9а), 1—3**; *А. Келарев* (Свердловск) **8, 9а), б), 2, 3, 5**; *А. Коломыцев* (Ангарск) **1, 5а), в)**; *А. Король* (Ташкент) **5а)**; *И. Коростишевский* (Орск) **5в)**; *Д. Кофман* (Киев) **8**; *С. Кочетов* (п/о Дружба Краснодарского края) **1, 2, 5в)**; *О. Кравец* (Воронеж) **2, 3**; *С. Кузнецов* (Ангарск) **7, 8, 0—3, 5б), в), г), д)**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **6, 7а), 1—3, 5а), в), г)**; *А. Кулагин* (Москва) **1, 5а)**; *А. Кулеско* (*Донецк*) **7а), 8, 9, 2, 4, 5а), б)**; *Ю. Лапуста* (Тернополь) **8, 9б), 2, 5**; *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТатАССР) **2**; *Д. Людмирский* (Киев) **5а)**; *К. Маринов* (НРБ) **8, 9а), б), 0**; *В. Матчишин* (Целиноград) **8, 9б), 2, 5в), г)**; *Р. Мешойрер* (Москва) **8, 9б), 1, 2, 5в)**; *Б. Меламед* (Запорожье) **5а)**; *А. Миндлин* (Саратов) **8, 9б), 2, 5а), в)**; *Д. Миндлин* (Ташкент) **1—3, 5в), г)**; *С. Морейно* (Москва) **2, 5а), в)**; *О. Мурсакулийев* (Сиазань) **9а), б)**; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) **1—3, 5а) в), г)**; *О. Намазов* (с. Фахрало ГрССР) **9а), б)**; *Н. Нестеренко* (Новосибирск) **0**; *В. Никитюк* (Москва) **5а), б)**; *А. Николаев* (д. Октябрь ТатАССР) **1**; *С. Новиков* (Херсон) **2, 5в), г)**; *А. Опарин* (Горький) **7а), 8, 9б), 0—5**; *А. Орехов* (Херсон) **9б), 2, 5а)**; *С. Осенний* (Киев) **9б)**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **8, 9, 2, 5а), в)**; *А. Петров* (Красногорск Московской обл.) **8**; *В. Подругина* (Ангарск) **8**; *В. Подстригач* (Львов) **2, 5а)**; *Л. Полтерович* (Москва) **2**; *А. Попелюхин* (Киев) **1, 2, 5а), б)**; *В. Процишин* (с. Песчаное Павлодарской обл.) **8, 9а), б), 2, 5а), в), г)**; *Б. Рабинович* (Тула) **2, 5а), в)**; *Г. Рыбкин* (Смоленск) **1, 5в)**; *И. Савенков* (Москва) **8, 9а), б), 1, 2**; *М. Севрюк* (Москва) **7а), 8—3, 5а), б)**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **6, 7а), 8—2**; *Я. Соколовский* (с. Михайловичи Львовской обл.) **8**; *С. Стадниченко* (Пенза) **9б, 1, 5а)**; *Ф. Сукочев* (Ташкент) **6, 7а), 8, 9а), б), 1, 2, 4, 5б), в), г), д)**; *О. Тавгень* (Минск) **6, 9а), б), 0, 2, 5а), в)**; *К. Таталян* (Ереван) **2, 3, 5а)**; *Н. Трифонов* (Канск) **2, 4, 5а), в), г)**; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **9**; *С. Трохов* (Оренбург) **8, 9а), б), 0, 2, 5в), г)**; *Д. Тураев* (Горький) **8, 2, 5а)**; *В. Уманский* (Баку) **8, 9а), б), 5в)**; *В. Фарбер* (Баку) **9б)**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **8, 9а), б), 1, 2, 5а), в), г)**; *Л. Цаленко* (Москва) **2, 3, 5а), б), в)**; *П. Чеботарев* (Москва) **9а), б)**; *И. Черная* (Ленинград) **9а), б)**; *В. Шарафян* (Ереван) **8**; *С. Шарипов* (Каракуль УзССР) **2**; *Е. Шкляр* (Гомель), **2, 5а)**; *Ф. Эрдман* (ГДР) **9б)**; *М. Эфроимский* (Ленинград) **6, 9б), 0, 2, 5а)**; *В. Якубович* (Москва) **5в)**; *А. Ялышев* (Тула) **7а), 9б), 2, 5а)**; *П. Ярошевский* (Донецк) **5а)**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф508—Ф522**, справились с задачами **Ф508** и **Ф521**. Остальные задачи правильно решили: *А. Аннабаев* (Чимкент) **11**; *А. Арбатский* (Благовещенск Амурской обл.) **13, 17—19**; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **13**; *Ю. Балаян* (Баку) **15**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **10, 15, 18, 19, 22**;

(Продолжение см. на с. 36)

В. Дубровский

Площадь поверхности по Минковскому

Длина дороги равна ее площади, деленной на ее ширину.
(*Из лекции для школьников*)

В предшествующей заметке о площади поверхности («Квант», 1978, № 5) мы рассказали о том, как не следует ее определять. Мы показали там, что для этой цели не подходят ни развертка, ни приближение многогранными поверхностями.

В данной заметке будет предложен корректный способ определения площади поверхности, придуманный выдающимся немецким физиком и математиком Г. Минковским (1864—1909). *Его определение отличается* общностью и простотой. Оно позволяет легко вычислять площади простейших поверхностей. В «Геометрии 10» это определение используется при нахождении площади сферы (§ 69) и площади поверхностей цилиндра, конуса и шарового сегмента (приложение к гл. VI).

Идея определения Минковского очень наглядна. Представим себе слой постоянной толщины, «окутывающий» поверхность. Интуитивно ясно, что его объем $V(\delta)$ (2δ — толщина слоя) примерно равен $2\delta \cdot S$, где S — площадь рассматриваемой поверхности. Вычислив величину $V(\delta)/2\delta$, мы найдем приближенное значение S, причем приближение будет тем лучше, чем меньше δ.

Переведем эту идею на язык математики. Математическим эквивалентом «слоя постоянной толщины» является понятие окрестности фигуры [*]. Дадим определение этого понятия. Пусть Φ — произвольная фигура в пространстве, δ — положительное число. Множество Φ_δ точек P пространства, удаленных от Φ на расстояние, не превышающее δ,

$$\rho(P\ \Phi) \leqslant \delta$$

называется (замкнутой [*]) *δ-окрестностью фигуры Φ*.

Чтобы это определение стало понятным, надо определить понятие расстояния от точки до фигуры. Под *расстоянием $\rho(P, \Phi)$ от точки P до фигуры Φ* понимается такое число d, что любой шар с центром P и радиусом, меньшим d, не имеет с Φ общих точек, а любой шар с центром P и радиусом, большим d, имеет.

Впрочем, δ-окрестность фигуры можно определить и без понятия расстояния до Φ. Оказывается, данное определение эквивалентно следующему: δ-окрестность фигуры Φ — это множество Φ_δ таких точек P пространства, что всякий шар с центром P и радиусом, большим δ, имеет с Φ общие точки. Продумайте это.

Если в определении расстояния от точки до фигуры заменить слова «пространство» и «шар» на «плоскость» и «круг», то получится определение δ-окрестности фигуры на плоскости. Везде, где не оговорено противное, мы будем рассматривать пространственные окрестности.

Упражнения

1. а) Найти плоскую и пространственную δ-окрестности отрезка. Доказать, что площадь первой и объем второй равны, соответственно, $2\delta d+\pi\delta^2$ и $\pi\delta^2 d+\frac{4}{3}\pi\delta^3$, где d — длина отрезка.

б) Решить ту же задачу для окружности радиуса $R>\delta$ (в этом случае ответы такие: $4\pi\delta R$ и $2\pi^2 R\delta^2$).

2. Найти в пространстве δ-окрестность правильного шестиугольника. Доказать, что $V(\delta)/2\delta$, где $V(\delta)$ — ее объем, при $\delta \to 0$ стремится к площади шестиугольника.

Дадим теперь основное для этой заметки определение: *площадью поверхности Π* называется предел

$$S(\Pi)=\lim_{\delta\to 0}\frac{V(\Pi_\delta)}{2\delta}, \qquad (1)$$

---

[*] О применении этого понятия к решению задач можно почитать в статье «Окрестность фигуры» («Квант», 1973, № 10).

[*] Так как мы будем рассматривать только замкнутые окрестности, прилагательное «замкнутый» в дальнейшем опускается.

где $V(\Pi_\delta)$ — объем ее δ-окрестности.

Предостережение. Разумеется, предел (1) может и не существовать. Можно показать, что для всех «хороших» поверхностей он существует (в простейших случаях он будет нами вычислен). Однако не следует думать, что из его существования для некоторой фигуры Π вытекает, что Π является поверхностью в общепринятом смысле. Кроме того, для площади по Минковскому не всегда справедливо равенство $S(\Pi_1 \cup \Pi_2) = S(\Pi_1) + S(\Pi_2)$ (при $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$); соответствующий пример рассматривается в задаче 4. Впрочем, с «хорошими» поверхностями таких неприятностей не случается.

Примеры вычисления площадей

Вычислять площади поверхностей, непосредственно пользуясь данным выше определением, удается, конечно, только в простейших случаях *).

Мы найдем площади сферы, тора (поверхности, получаемой при вращении окружности вокруг непересекающей ее прямой), боковых поверхностей цилиндра и конуса. Половинки осевых сечений δ-окрестностей этих поверхностей изображены на рисунках 1, 2, 3а, 4а.

Упражнения

3. Доказать, что δ-окрестность поверхности, получаемой при вращении плоской кривой L вокруг оси l, лежащей в одной плоскости с кривой, есть результат вращения плоской δ-окрестности этой кривой вокруг оси l.

4. Доказать, что тела, возникающие при вращении фигур желтого цвета, изображенных на рисунках 1, 2, 3а, 4а, являются δ-окрестностями соответствующих поверхностей.

1. Сфера. Очевидно, что объем δ-окрестности сферы $\Sigma = \Sigma(R)$ радиуса R равен разности объемов шаров радиусов $R+\delta$ и $R-\delta$ (рис. 1):

$$V(\Sigma_\delta) = \frac{4}{3}\pi\left[(R+\delta)^3 - (R-\delta)^3\right] = 2\delta\cdot\frac{4}{3}\pi\left(3R^2 + \delta^2\right).$$

Деля последнее выражение на 2δ и переходя к пределу при $\delta \to 0$, находим, что $S(\Sigma(R)) = 4\pi R^2$.

2. Тор. Рассмотрим тор $T = T(R, r)$, получающийся при вращении окружности радиуса r вокруг оси, отстоящей от ее центра на рас-

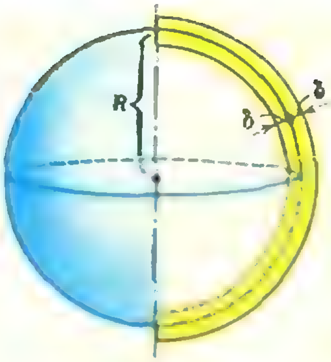


Рис. 1.

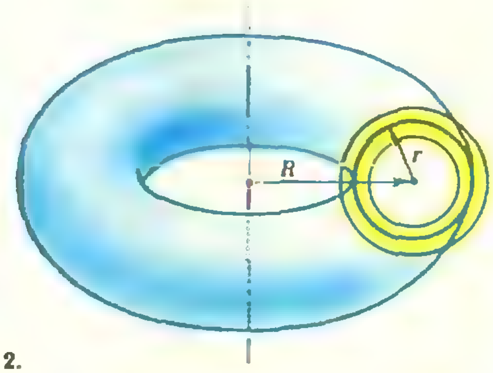
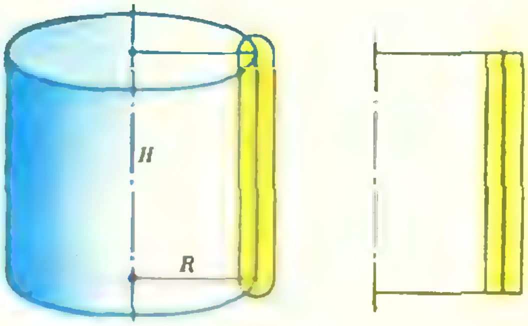


Рис. 2.



а) б)

Рис. 3.

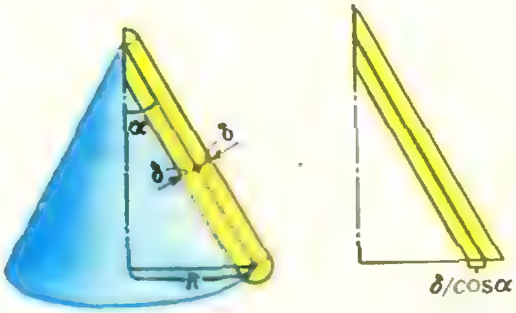


Рис. 4. а) б)

---

*) В более сложных случаях площадь поверхности находится с помощью тех или иных интегральных формул.

стоянии $R>r$ (рис. 2). Ясно, что ограниченное им тело есть r-окрестность окружности радиуса R, объем которой, согласно результату упражнения 1б), равен $2\pi^2Rr^2$. Пользуясь этой формулой, легко найти объем δ-окрестности тора (см. рис. 2) — он равняется разности объемов $(r+\delta)$-окрестности и $(r-\delta)$-окрестности окружности радиуса R:

$$V(T_\delta)=2\pi^2R(r+\delta)^2-$$
$$-2\pi^2R(r-\delta)^2=2\delta\cdot 4\pi^2Rr.$$

Следовательно, $S(T(R,\,r))=4\pi^2Rr$.

Из рисунков 3а и 4а видно, что найти объемы δ-окрестностей боковых поверхностей цилиндра и особенно конуса не так просто, как для сферы и тора. Вычисления существенно упростятся, если чуть-чуть «подправить» эти окрестности (рис. 3б и 4б). Мы проведем подсчет, воспользовавшись «поправками», а затем докажем их правомерность.

3. Цилиндр. *Обозначим через* $C=C(R,\,H)$ боковую поверхность цилиндра радиуса R и высоты H. Объем ее «исправленной» δ-окрестности C'_δ (рис. 3б) равен разности объемов цилиндров радиусов $R+\delta$ и $R-\delta$ с одинаковой высотой H:

$$V(C'_\delta)=\pi H\left[(R+\delta)^2-(R-\delta)^2\right]=$$
$$=2\delta\cdot 2\pi RH, \qquad (2)$$

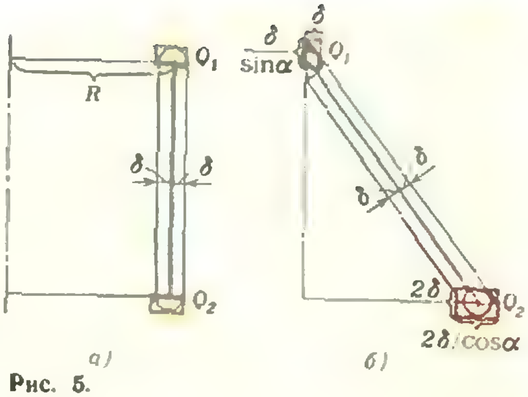
поэтому

$$S(C(R,\,H))=\lim_{\delta\to 0}\frac{V(C'_\delta)}{2\delta}=2\pi RH.$$

4. Конус. *Пусть* R — радиус основания конуса, α — угол между его осью и образующей, а $K=K(R,\,\alpha)$ — его боковая поверхность. Тогда объем тела K'_δ (рис. 4б) равен разности объемов конусов с радиусами $R+\dfrac{\delta}{\cos\alpha}$ и $R-\dfrac{\delta}{\cos\alpha}$ и одинаковыми углами α. Легко видеть, что

$$V(K'_\delta)=\frac{1}{3}\,\pi\operatorname{ctg}\alpha\left(R+\frac{\delta}{\cos\alpha}\right)^3-$$
$$-\frac{1}{3}\,\pi\operatorname{ctg}\alpha\left(R-\frac{\delta}{\cos\alpha}\right)^3=$$
$$=2\delta\,\frac{\pi}{\sin\alpha}\left(R^2+\frac{\delta^2}{3\cos^2\alpha}\right).$$

Следовательно, $S(K(R,\,\alpha))=\dfrac{\pi R^2}{\sin\alpha}$.



а) б)

Рис. 5.

Если вместо угла α задана длина l образующей конуса, то, поскольку $l=\dfrac{R}{\sin\alpha}$, для площади получаем формулу $S(K)=\pi Rl$.

Докажем теперь законность *замены окрестностей* C_δ и K_δ на C'_δ и K'_δ. Ясно, что *замена окрестности* Π_δ в формуле (1) на какое-то тело Π'_δ не влияет на результат в том и только том случае, когда величина

$$v_{(\delta)}=\frac{V(\Pi_\delta)-V(\Pi'_\delta)}{2\delta}$$

стремится к нулю при $\delta\to 0$. Разности объемов $V(C_\delta)$ и $V(C'_\delta)$, $V(K_\delta)$ и $V(K'_\delta)$ по модулю не превосходят, очевидно, объемов тел, получаемых при вращении прямоугольников Q_1 и Q_2 на рисунках 5а и 5б соответственно. Найдя эти объемы (заметим, что *для этого* можно воспользоваться формулой (2)), мы получим, что в случае цилиндра $|v(\delta)|\leqslant 4\pi R\delta$, а в случае конуса $|v(\delta)|\leqslant\left(\dfrac{4\pi R}{\cos\alpha}+\dfrac{\pi\delta}{\sin\alpha}\right)\delta$. Следовательно, в обоих случаях $\lim\limits_{\delta\to 0}v(\delta)=0$.

Обобщения

Пусть для какого-то множества Φ существует *конечный* и *положительный* предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{V(\Phi_\delta)}{2\delta}$; тогда, очевидно, при замене знаменателя 2δ на $c\delta^n$ этот предел обратится в нуль при $n<1$ и в бесконечность при $n>1$. В определенном смысле это свойство *специфично* для поверхностей. Легко понять, что для тел таким пограничным значением будет уже $n=0$, а для линий — $n=2$.

В частности, в *последнем* случае принимают следующее определение: *длиной линии L по Минковскому* (в пространстве) называется предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{V(L_\delta)}{\pi\delta^2}$.

Интуитивным оправданием этого определения служит то, что сечение окрестности L_δ, перпендикулярное линии L, есть круг радиуса δ (площади $\pi\delta^2$), так что объем L_δ должен примерно равняться произведению $\pi\delta^2$ на длину линии L. Проверьте, пользуясь результатом упражнения 1, что определение Минковского дает для длин отрезка и окружиости нужные значения.

Менее содержательно, но вполне осмысленно рассмотрение величин $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{V(\Phi_\delta)}{c\delta^n}$ при $n=0$ и $n=3$, где c — надлежащим образом выбранные постоянные (см. задачу 7).

Аналогичные определения можно дать и на плоскости, где наиболее интересен случай $n=1$: величину $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{S(L_\delta)}{2\delta}$, где $S(L_\delta)$ — площадь (плоской) δ-окрестности кривой L, естественно принять за длину линии L (ср. эпиграф).

Дальнейшие обобщения касаются n-мерных пространств при $n>3$ и на них мы, конечно, останавливаться не будем.

Задачи

1. Покажите, что не всегда δ-окрестность фигуры Φ является объединением всех шаров радиуса δ с центрами в точках этой фигуры.

2. Приведите пример двух различных фигур Φ и Φ' таких, что $\Phi_\delta=\Phi'_\delta$: а) при некотором δ; б) при всех δ.

3. Докажите, что объем δ-окрестности выпуклого n-угольника равен $2\delta\cdot S+\pi\delta^2\cdot P+\frac{4}{3}\pi\delta^3$, где S — его площадь, а P — полупериметр.

4. Пусть Q — квадрат, лежащий в плоскости Oxy, Q_1 — множество его точек, у которых обе координаты x и y рациональны, Q_2 — его остальные точки. Докажите, что все эти множества имеют площадь по Минковскому, причем $S(Q)=S(Q_1)=S(Q_2)$, так что $S(Q_1\cup Q_2)<S(Q_1)+S(Q_2)$, хотя множества Q_1 и Q_2 не пересекаются.

5. Найдите площадь поверхности, получаемой при вращении дуги окружиости вокруг стягивающей ее хорды.

6. Найдите площадь поверхности тела, являющегося пересечением двух (достаточно длинных) цилиндров радиуса R, оси которых проходят через общую точку и взаимно перпендикулярны.

7. Подберите константы c_1 и c_2 так, чтобы пределы а) $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{V(\Phi_\delta)}{c_1}$ б) $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{V(\Phi_\delta)}{c_2\delta^3}$ имели содержательный геометрический смысл. Для каких фигур Φ они положительны?

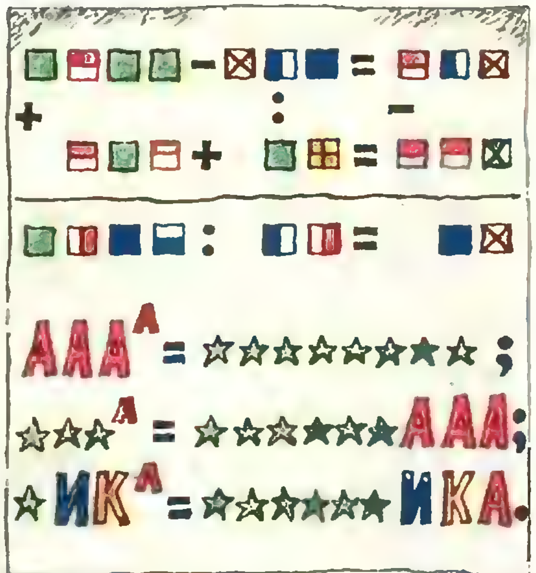
Список читателей, приславших правильные решения...

(Начало см. на с. 32)

В. Беркут (Днепропетровск) 18, 19; *А. Болдырев* (Алма-Ата) 19; *В. Болотников* (Харьков) 10, 12, 14—17, 19, 22; *Г. Борисов* (п. Комсомольский Тюменской обл.) 11, 12, 15, 17; *А. Бродин* (Киев) 11, 12; *О. Булыгин* (Павлодар) 18; *М. Валейко* (Киев) 9, 10; *О. Васильев* (п. Урмары ЧувАССР) 9; *С. Васильев* (Калинин) 10; *А. Велько* (п. Сахарный завод Минской обл.) 18; *Д. Володько* (Долгопрудный) 18, 19, 22; *Ф. Габбасов* (п/о Насибаш БашкАССР) 18; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 9—14, 16, 19; *М. Гольцман* (Днепропетровск) 10, 11, 15, 20; *И. Гопич* (Новосибирск) 9, 10, 14, 15; *И. Грузберг* (Пермь) 9, 13; *Е. Давыдов* (п. Поплевино Рязанской обл.) 13; *И. Даниловский* (Горький) 19; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) 15; *В. Дидух* (Львов) 10; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 11, 15, 18, 22; *М. Ермолаев* (Кострома) 16; *В. Жилич* (с. Хабары Алтайского кр.) 15, 18; *Ю. Жук* (Москва) 13, 15; *В. Жуков* (Абаза) 19, 20, 22; *К. Жуков* (Москва) 13, 15; *Д. Захаров* (Москва) 18; *А. Земсков* (Ухта) 18; *Е. Зудин* (Александров) 10, 11, 13—17, 22; *Е. Ивченко* (Винница) 18; *К. Ильин* (Вильнюс) 18; *С. Калашников* (Рязань) 10; *А. Каплан* (Сумгант) 18; *В. Кельмин* (Москва) 19; *О. Кириленко* (Балашиха) 22; *А. Клочков* (Челябинск) 13; *В. Ковтуненко* (Киев) 9, 10; *Е. Коган* (Днепропетровск) 10, 15, 16; *М. Коков* (с. Батех КБАССР) 9; *В. Комов* (Александров) 10, 11, 13, 14, 16—19, 22; *А. Коробейников* (Балашов) 10; *А. Костеров* (Семилуки) 20; *О. Кравец* (Воронеж) 19; *Р. Криштул* (Бобруйск) 16; *Е. Кузьмин* (Череповец) 9, 18, 19; *А. Куприн* (Москва) 9—12, 18—20, 22; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) 11—13, 15, 17, 19, 20; *В. Лашкин* (Киев) 12, 15, 18, 22; *А. Леонович* (Лида) 16; *В. Линьков* (Калуга) 10; *Д. Людмирский* (Киев) 10, 17—19, 22; *Ю. Макаров* (п/о Чагода Вологодской обл.) 18; *С. Маламанов* (Ленинград) 15, 18; *И. Маничев* (Слуцк) 18; *А. Матюкас* (Каунас) 15, 16, 19; *Л. Марухленко* (п. Старая Купавна Московской обл.) 12; *С. Медведев* (Москва) 10, 11; *В. Микулов* (Павлодар) 20; *А. Могильнер* (Свердловск) 20; *А. Молотовщиков* (Тейково) 16; *С. Муратчаев* (Махачкала) 10;

(Окончание см. на с. 51)

КВАНТ для младших школьников



$\overline{ААА}^{А}=\overline{☆☆☆☆☆☆☆☆}$;
$\overline{☆☆☆}^{А}=\overline{☆☆☆☆☆☆ААА}$;
$\overline{☆ИК}^{А}=\overline{☆☆☆☆☆☆ИКА}$.

Задачи

1. **Числовые ребусы.** В первом ребусе цифры зашифрованы фигурками, в остальных—буквами и звездочками (см. рисунок). Одинаковым фигуркам и буквам соответствуют одинаковые цифры, разным—разные; звездочки могут быть любыми цифрами. Ни одно число не начинается нулем. Расшифруйте ребусы.

2. Решите уравнения:

а) $\overline{xyzz}=(\overline{xy})^2+(\overline{zz})^2$,

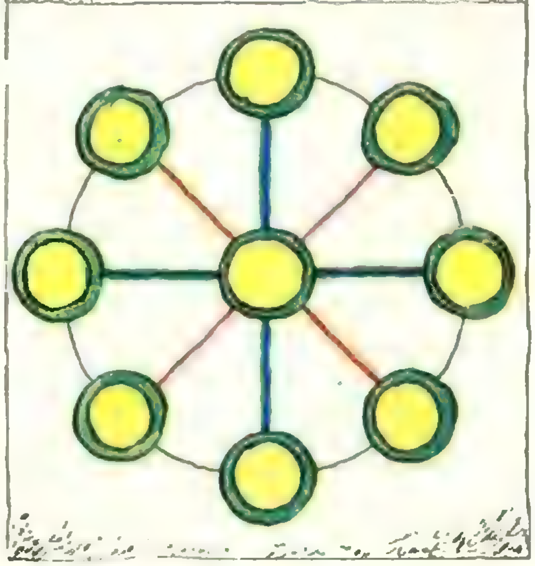
б) $\overline{xxyy}=(\overline{xx})^2+(\overline{yy})^2$

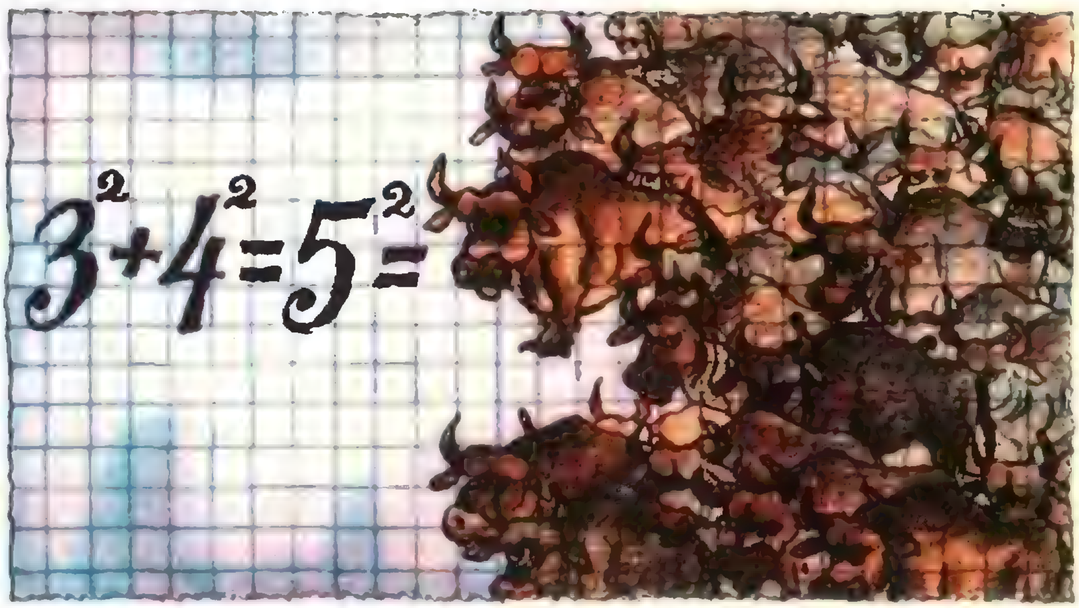
(запись $\overline{ab}$ означает двухзначное число, у которого b единиц и a десятков; запись $\overline{cdab}$ — четырехзначное число, у которого b единиц, a десятков, d сотен и c тысяч).

3. **Числовое колесо.** В кружочки изображенного на рисунке числового колеса поставьте первые девять нечетных простых чисел так, чтобы сумма любых трех чисел, расположенных по диаметру, была простым числом. Докажите, что при этом в центре может стоять любое из этих простых чисел, кроме числа 3.

4. Параллелограмм составлен из трех равнобедренных треугольников, среди которых нет конгруэнтных. Найдите величины его углов.

5. Двое мальчиков играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются побитыми поставленными фигурами. Кто выигрывает в этой игре, если оба стараются играть наилучшим образом?





С. Гиндикин

Арифметика на клетчатой бумаге

Почему тетрадь по математике — в клетку? Такой вопрос задают иногда первоклассники, которым не очень удобно писать цифры в клеточках. Позже они узнают, что на клетчатой бумаге удобно делать геометрические чертежи. Оказывается, рисуя различные фигуры на клетчатой бумаге, можно много интересного узнать и про арифметику.

Способ представления чисел фигурами на клетчатой бумаге уходит корнями в глубокую древность — к математике Древнего Вавилона, Египта, Греции. Конечно, тогда математики не разлиновывали глиняные таблички или папирусы на клетки, а составляли фигуры из точек. Мы же воспользуемся клетчатой бумагой.

В Древней Греции число, равное произведению двух натуральных сомножителей, называли *плоским числом*: оно связывалось с точками, расположенными в виде прямоугольной решетки (рис. 1). Мы же договоримся изображать плоское число прямоугольником на клетчатой бумаге и считать число клеточек в нем.

Свойства умножения хорошо иллюстрируются чертежами. Например, *распределительному закону* (правилу раскрытия скобок) соответствует разрезание прямоугольника на меньшие прямоугольники (рис. 2). Название «плоское число» теперь забыто, а слово «квадрат», обозначающее произведение равных сомножителей, сохранилось по сей день.

Квадраты и гномоны

Нечетные числа изображались в Древней Греции при помощи уголков тол-

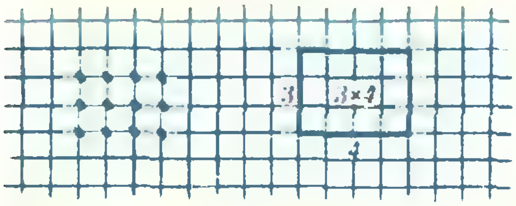


Рис. 1.

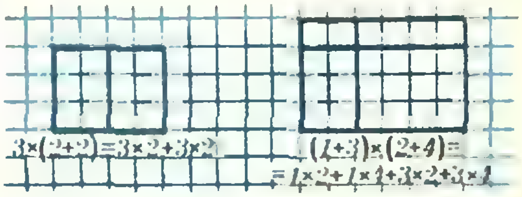


Рис. 2.

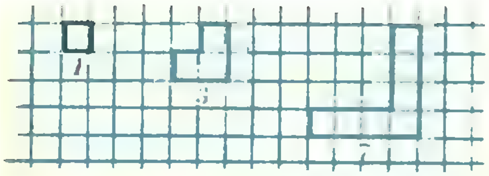


Рис. 3.

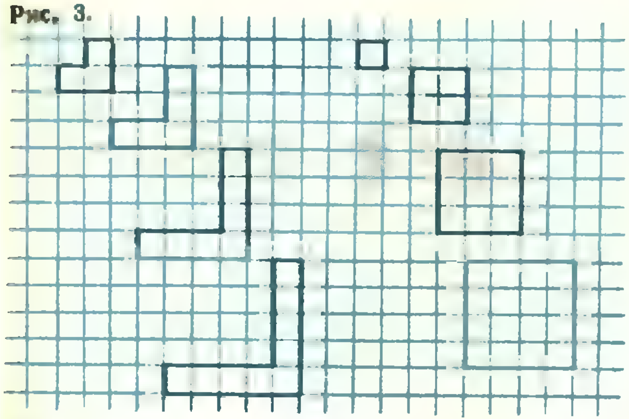


Рис. 4.

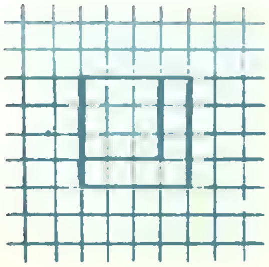


Рис. 5.

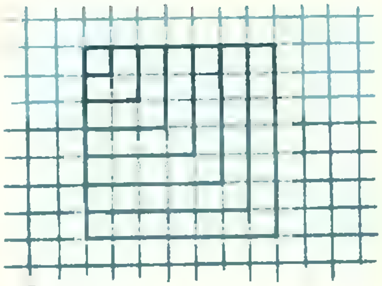


Рис. 6.

щиной в одну клетку — *гномонов* (рис. 3). Первое рассуждение, которое мы приведем, относится к квадратам и гномонам; принадлежит оно Никомаху Геразскому, жившему примерно в I веке.

Нарисуем подряд несколько квадратов и гномонов (рис. 4). Не правда ли, каждый гномон хочется дополнить некоторым квадратом; при этом получится следующий квадрат (рис. 5). Это наблюдение означает, что *каждое нечетное число является разностью двух последовательных квадратов.*

Теперь сложим подряд несколько гномонов, начиная с самого маленького. Получится квадрат (рис. 6). Значит, *сумма последовательных нечетных чисел, начиная с первого, является квадратом:* $1+3=4$, $1+3+5=9$, $1+3+5+7=16$ и т. д.

Пифагор и пифагорейцы

Полулегендарный мудрец Пифагор (VI в. до н. э.), любил путешествовать, и многое в его учении почерпнуто из восточной мудрости.

Для пифагорейцев характерно мистическое отношение к числам. Они коллекционировали всевозможные числовые «диковины», видя в них проявление божественных сил. При помощи числовых образов пифагорейцы умели выражать свои мысли и чувства. Четные числа назывались *женскими*, нечетные — *мужскими*. Особенно ценили пифагорейцы число $10=1+2+3+4$ (рис. 7), называя его *превосходным* или *тетрадой*, и клялись «тем, кто вложил в нашу душу тетраду — источник и корень вечной природы». Числа, равные сумме своих (собственных) делителей ($6=1+2+3$), назывались *совершенными*, и Никомах знал четыре совершенных числа: 6, 28, 496, 8128. Дружбу символизировали пары *дружественных чисел*, каждое из которых является суммой (собственных) делителей другого числа. Например, числа 284 и 220 — дружественные: $284=1+2+4+5+10+20+11+22+44+55+110$, $220=1+2+4+71+142$. Но раз есть «хорошие» числа, то должны быть и «плохие». «Плохо», если число не обладает никакими достоинствами, еще хуже, если оно окружено интересными числами. Боязнь числа 13 — «чертовой дюжины» — поражает своей бессмертностью. Но кое-что забыто. Вот что пишет Плутарх: «Пифагорейцы питают отвращение к числу 17. Ибо 17 лежит как раз посередине между числом 16, представляющим полный квадрат, и числом 18, являющимся удвоенным квадратом; оба эти числа являются единственными плоскими числами, для которых периметр (прямоугольника) равен его площади...». Другими словами, ут-

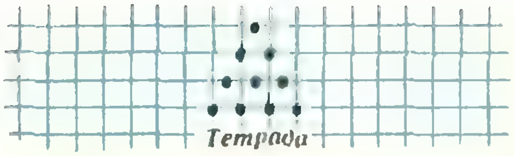


Рис. 7.

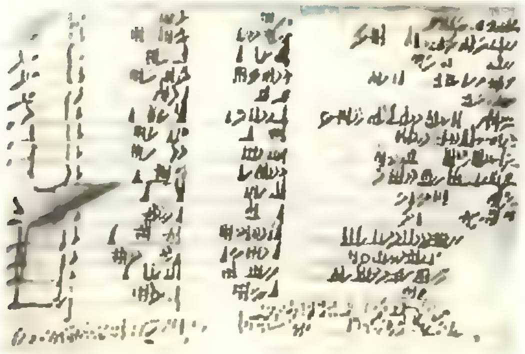


Рис. 8. Древневавилонский клинописный текст.

верждается, что если произведение двух чисел (разумеется, натуральных) равно их удвоенной сумме, то это *либо пара* 3 и 6, *либо* пара 4 и 4 (почему?).

Пифагоровы тройки

Существует легенда, согласно которой Пифагор в честь какого-то из своих открытий принес в жертву не то одного быка, не то сто быков. Витрувий утверждает, что столь важным Пифагору показалось открытие двух квадратов, сумма которых равна третьему квадрату *). Речь идет о соотношении $3^2+4^2=5^2$. Теперь тройки натуральных чисел a, b, c, для которых $a^2+b^2=c^2$, принято называть *пифагоровыми* тройками. Оказывается, пифагоровы тройки знали уже в Вавилоне (рис. 8). Постепенно нашли их и греческие математики.

Попытаемся понять, как можно найти пифагоровы тройки. Вспомним, что всякое нечетное число представляется в виде разности двух последовательных квадратов. Тогда нечетный квадрат вместе с квадратами, разностью которых он является, образуют пифагорову тройку. Например, $3^2=9=2\cdot 4+1=5^2-4^2$ (рис. 9). Так получается тройка 3, 4, 5. Аналогично $5^2=25=2\cdot 12+1=13^2-12^2$, откуда $12^2+5^2=13^2$; $7^2=49=2\cdot 24+1=25^2-24^2$, откуда $24^2+7^2=25^2$. Таким образом получаются все пифагоровы тройки a, b, c, у которых $c=a+1$. Их общий вид:

$$a=\frac{m^2-1}{2},\quad b=m,\quad c=\frac{m^2+1}{2}$$

(m — нечетно!). Докажите это. А как *найти* все пифагоровы тройки?

Общая задача о пифагоровых тройках

Накопленный опыт подсказывает, что надо исследовать разность двух любых (а не только соседних) квадратов c^2-a^2, где $c>a$. Получается «толстый гномон» толщиной в $c-a$ клеток (рис. 10). Задача, таким образом, сводится к описанию всех возможных способов преобразования (без изменения числа клеток!) квадрата b^2 в некоторый «толстый гномон».

Первое наблюдение состоит в том, что «толстый гномон» можно преобразовать в прямоугольник (плоское число!) со сторонами длины $m=c-a$ и $n=c+a$ (рис. 11; мы получили геометрическое доказательство формулы $c^2-a^2=(c-a)(c+a)$). Возникает вопрос, какие плоские числа могут быть преобразованы в «толстые гномоны». Ясно, что числа $m=c-a$ и $n=c+a$ не равны друг другу и являются либо одновременно четными, либо одновременно нечетными — других же ограничений нет. Итак, если имеется прямоугольник, не являющийся квадратом, длины сторон которого m и n имеют одинаковую четность, то его можно преобразовать в «толстый гномон», являющийся разностью квадратов

$$c^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 \text{ и } a^2=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

(*при нашах предположениях* числа $m+n$ и $m-n$ четны и отличны от нуля).

---

*) Впрочем, другие источники указывают другие причины. Есть *также мнение*, что никакого жертвоприношения вообще не было, поскольку жертвоприношения противоречили философии пифагорейцев.

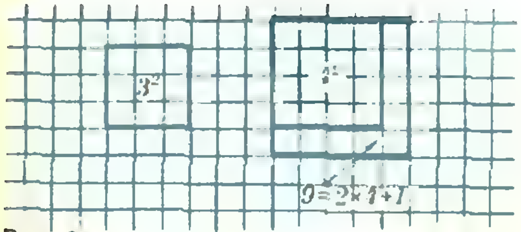


Рис. 9.

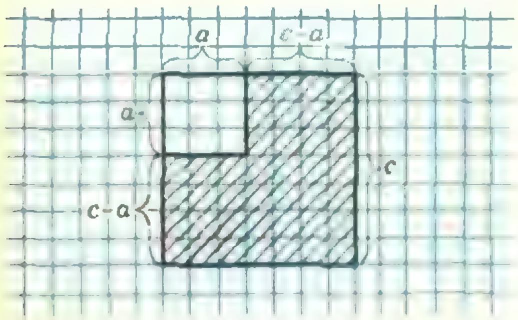


Рис. 10.

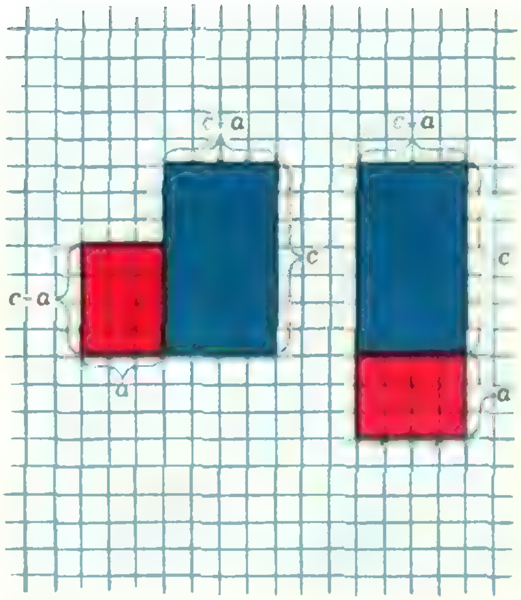


Рис. 11.

Итак, мы свели задачу о нахождении пифагоровых троек к вопросу о том, *каким образом квадрат* b^2 может быть преобразован в прямоугольник со сторонами длины m, n одинаковой четности ($m \neq n$). Эта задача легко решается. Пусть $r \neq b$ — делитель числа b^2 (но не обязательно — делитель числа b), для которого $\frac{b^2}{r}$ имеет ту же четность, что и r. При этом r должно быть той же четности, что и b, хотя это условие и недостаточно (почему?). Тогда прямоугольник со сторонами длины $m = r$ и $n = \frac{b^2}{r}$ может быть *преобразован в* «толстый гномон», являющийся разностью квадратов

$$c^2 = \left[\frac{b^2/r + r}{2}\right]^2 \text{ и } a^2 = \left[\frac{b^2/r - r}{2}\right]^2.$$

Отметим, что r может равняться 1 и что можно ограничиться делителями $r < b$ (почему?).

Итак, все пифагоровы тройки имеют вид

$$a = \frac{b^2 - r^2}{2r}, \ b, \ c = \frac{b^2 + r^2}{2r},$$

где $1 \leqslant r < b$ — такой делитель числа b^2, что r и b^2/r имеют одинаковую четность (совпадающую с четностью b). Пользуясь этим правилом, можно выписывать пифагоровы тройки автоматически. *Попробуйте проделать* это; для контроля мы приводим таблицу пифагоровых троек с b из первого десятка:

b	r	a	c
3	1	4	5
4	2	3	5
5	1	12	13
6	2	8	10
7	1	24	25
8	2	15	17
8	4	6	10
9	1	40	41
9	3	12	15
10	2	24	26

В таблице встречаются тройки a, b, c, отличающиеся только перестановкой чисел a и b; *это объясняется тем, что в пифагоровой тройке* a и b можно переставлять. Кроме того, мы видим, что не существует пифагоровой тройки с $b = 2$: в этом случае нет подходящего делителя r

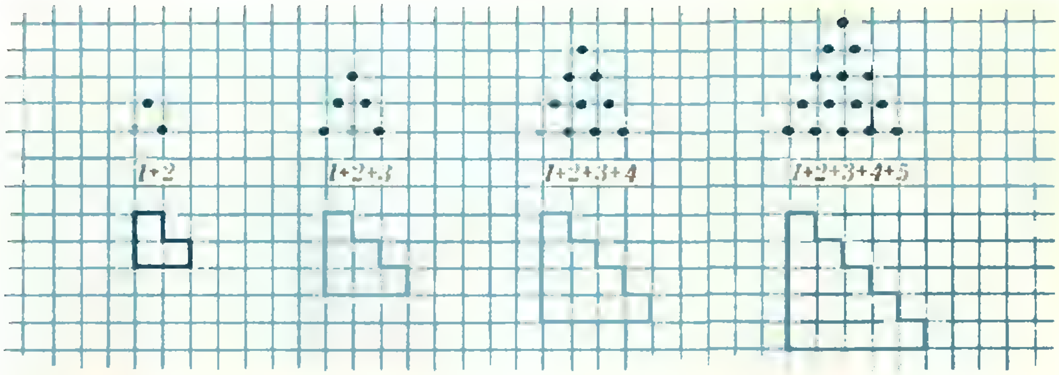


Рис. 12.

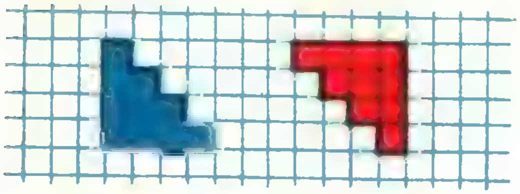


Рис. 13.

(условию $r<2$ удовлетворяет лишь натуральное $r=1$, но единица — нечетное число). Для всех же остальных b хотя бы одна пифагорова тройка существует. Если b нечетно, то можно взять $r=1$; при этом получаются a и c, отличающиеся на единицу (мы рассмотрели этот случай в самом начале). Если же $b\neq 2$ — четное, то можно взять $r=2$; при этом получатся тройки с $c-a=2$ (почему?).

Треугольные числа

В клинописных табличках вавилонян содержится способ вычислять сумму первых n натуральных чисел: $1+2+$ $+3+\ldots+n$. Такие суммы стали называть *треугольными числами*, поскольку из точек, соответствующих слагаемым, можно составить треугольник (рис. 12). На клетчатой бумаге удобнее нарисовать фигуру, напоминающую лестницу (рис. 13): в каждом следующем ряду лестницы на одну клетку больше, чем в предыдущем. Чтобы сосчитать число клеток в лестнице (равное искомой сумме), нарисуем еще одну такую же лестницу, но перевернутую; после чего «сдвинем» обе лестницы (рис. 14). Зубцы лестниц соединятся и получится прямоугольник, у которого длина одной стороны равна n, а другой $n+1$. В таком прямоугольнике $n(n+1)$ клеток; в лестнице же вдвое меньше, т. е. $\frac{n(n+1)}{2}$.

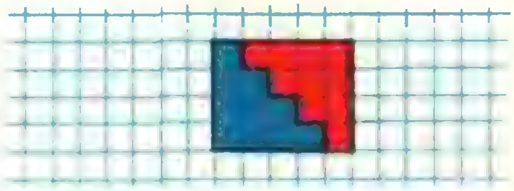


Рис. 14.

Таким образом,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Задача 1. *Пользуясь лестницами, найдите сумму $1+3+5+\ldots$ $\ldots+(2k+1)$ нечетных чисел; сумму $2+4+6+\ldots+2k$ четных чисел, сумму $1+4+7+\ldots+3k+1$ чисел вида $3k+1$* (первую из этих сумм мы уже нашли при помощи гномонов).

Следующая задача связана с еще одним интересным наблюдением Никомаха:

Задача 2. *Убедитесь в том, что гномон, являющийся разностью квадратов соседних треугольных чисел, является кубом, точнее*

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2=n^3.$$

Из этого соотношения Никомах получил формулу для суммы кубов

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Для ее доказательства достаточно собрать все гномоны, отвечающие соседним треугольным числам.

В. Можаев

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Действие электрического и магнитного полей на заряженные частицы приводит ко многим интересным явлениям и широко используется в современной технике. Это, например, управление движением электронов в различных электровакуумных приборах и ускорение заряженных частиц до высоких энергий, фокусировка частиц с помощью электростатических и магнитных линз и разделение частиц по их удельным зарядам в масс-спектрографах.

Ограничимся рассмотрением наиболее простых случаев — движением заряженных частиц в однородных и стационарных (не зависящих от времени) электрическом и магнитном полях.

В электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ на частицу с зарядом q и массой m действует электрическая сила

$$\vec{F}_{\text{эл}} = q\vec{E},$$

которая сообщает частице ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{эл}}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}.$$

Это ускорение направлено по полю, если $q>0$, и против поля, если $q<0$. Следовательно, положительная частица начнет равноускоренно двигаться по полю, а отрицательная — против поля.

Пусть частица переместилась из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2. При этом ее кинетическая энергия изменилась на величину

$$\Delta W_{\text{к}} = -q(\varphi_2-\varphi_1).$$

Вот почему энергию заряженных частиц удобно измерять в электронвольтах (1эВ — это энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным заряду электрона, при прохождении разности потенциалов в один вольт).

На движущуюся заряженную частицу в магнитном поле действует магнитная сила, называемая силой Лоренца $\vec{F}_{\text{л}}$. Ее модуль

$$\left|\vec{F}_{\text{л}}\right| = q\left|\vec{v}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\alpha,$$

где q — заряд частицы, $\vec{v}$ — ее скорость, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля и α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Характерной особенностью этой силы является то, что она всегда перпендикулярна направлению движения частицы и индукции магнитного поля.

Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, работа этой силы равна нулю. Следовательно, если на частицу не действуют никакие другие силы, при движении в магнитном поле энергия частицы будет оставаться постоянной величиной *).

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Отрицательно заряженная частица движется в однородном электрическом поле так, что эквипотенциальную поверхность с потенциалом φ_1 она пересекает под углом α_1 к нормали, а эквипотенциальную поверхность с потенциалом φ_2 — под углом α_2 (рис. 1). Известно, что в точке, где потенциал поля равен нулю, скорость частицы равна нулю. Найдите связь между углами α_1 и α_2.*

Если в точке с нулевым потенциалом кинетическая энергия частицы была равна нулю, в точках *1* и *2*

---

*) Подробнее об этом можно прочитать в статье Ю. Зайчикова «Сила Лоренца и ее работа» («Квант», 1979, № 2).

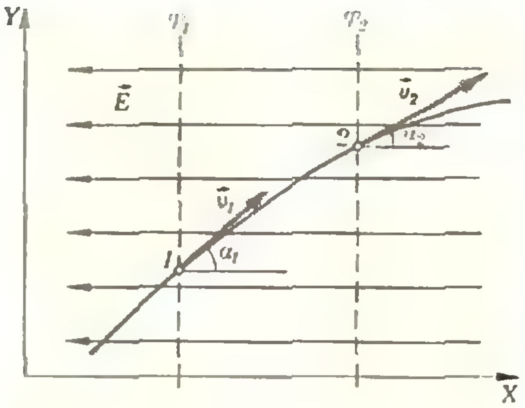


Рис. 1.

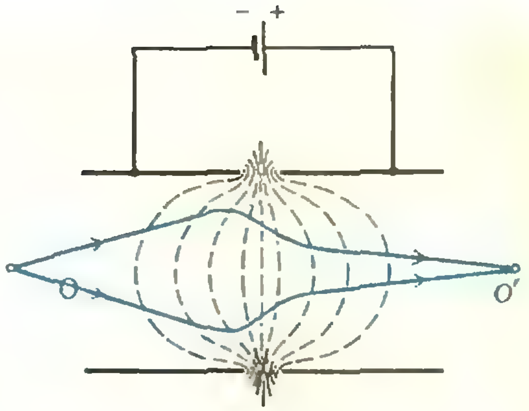


Рис. 2.

она будет равна соответственно

$$\frac{m|\vec{v}_1|^2}{2}=-q\varphi_1$$

и

$$\frac{m|\vec{v}_2|^2}{2}=-q\varphi_2,$$

откуда отношение скоростей частицы

$$\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|}=\sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_2}}.$$

В направлении оси X на частицу действует электрическая сила, поэтому проекция скорости v_x будет возрастать: $v_{x_2}>v_{x_1}$. В направлении оси Y нет никаких действующих на частицу сил; следовательно, проекция скорости v_y будет оставаться постоянной:

$$|\vec{v}_1|\sin\alpha_1=|\vec{v}_2|\sin\alpha_2,$$

или

$$\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_2|}=\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}.$$

Сравнивая два выражения для отношения модулей скоростей частицы в точках 1 и 2, найдем связь между синусами углов α_1 и α_2:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}.$$

Обратите внимание на такой факт: траектория частицы отклоняется в направлении нормали к эквипотенциальной поверхности, если (как в рассмотренном нами случае) частица движется в сторону возрастания потенциала. Это позволяет понять и более сложные движения зарядов в неоднородных электрических полях, например *принцип электростатической фокусировки*. На рисунке 2 показана так называемая *электростатическая линза*, составленная из двух коаксиальных цилиндров; пунктирными линиями изображены сечения эквипотенциальных поверхностей. Точка O — источник расходящегося пучка медленных электронов, а точка O' — изображение сходящегося пучка быстрых электронов.

Задача 2. *Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора, между которыми поддерживается постоянная разность потенциалов $U=60$ В (рис. 3). Определите минимальную скорость электрона $\vec{v}_{\min}$, при которой он достигнет верхней пластины. Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha=60°$.*

При движении в конденсаторе на электрон будет действовать постоянная электрическая сила, направленная против поля, то есть от отрицательной пластины к положительной. Поэтому проекция скорости электрона на ось Y будет равномерно уменьшаться, а проекция на ось X — оставаться постоянной. Нетрудно показать, что траекторией движения электрона будет парабола (проверьте это самостоятельно).

Минимальная начальная скорость электрона будет соответствовать случаю, когда парабола касается верхней пластины конденсатора. Это означает, что в момент касания проекция v_y скорости электрона будет равна нулю.

В точке 1 кинетическая энергия электрона была $\frac{m|\vec{v}_{\min}|^2}{2}$, а в точке 2 она равна
$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{m(|\vec{v}_{\min}|\sin\alpha)^2}{2}$. С другой стороны, изменение кинетической энергии связано с разностью потенциалов между пластинами конденсатора: $\Delta W_к = -eU$ *). Таким образом,

$$\frac{m(|\vec{v}_{\min}|\sin\alpha)^2}{2} - \frac{m|\vec{v}_{\min}|^2}{2} = -eU,$$

откуда

$$|\vec{v}_{\min}| = \sqrt{2\frac{e}{m}\frac{U}{1-\sin^2\alpha}} \approx$$

$$\approx 9{,}2\cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Попробуйте решить эту задачу другим способом: запишите уравнения движения электрона по осям X и Y и из них найдите минимальную начальную скорость.

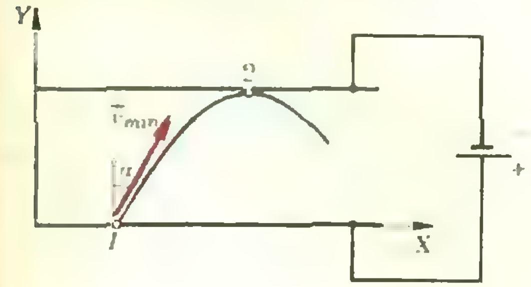


Рис. 3.

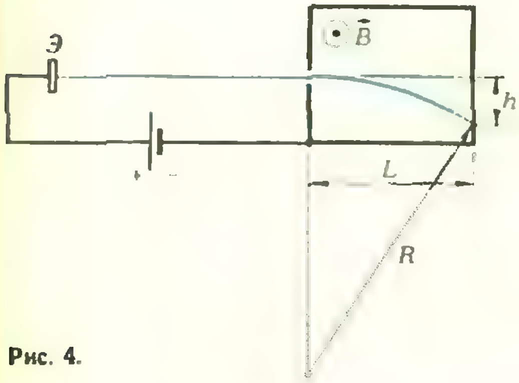


Рис. 4.

Задача 3. *Пучок однократно заряженных положительных ионов Li^+($A=6$) испускается эмиттером «Э». Ионы ускоряются электрическим полем и, пройдя разность потенциалов $U=3000$ В, попадают в камеру с поперечным магнитным полем $|\vec{B}| = 3\cdot 10^{-2}$ Т (рис. 4). Найдите величину отклонения пучка h. Длина камеры $L=15$ см, заряд электрона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-24}$ г.*

Пройдя ускоряющую разность потенциалов U, каждый ион приобретает кинетическую энергию

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{2} = eU,$$

где m — масса иона, $\vec{v}$ — его скорость. Отсюда

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

С такой скоростью ион влетит в камеру, где существует только магнитное поле. На ион начнет действовать сила Лоренца, которая сообщит ему центростремительное ускорение. Поскольку сила Лоренца в каждый момент перпендикулярна скорости иона, ион будет двигаться по окружности. Радиус этой окружности можно найти из уравнения движения иона

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{R} = e|\vec{v}||\vec{B}|.$$

С учетом того, что $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, получим

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{e|\vec{B}|} = \frac{1}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Величина отклонения пучка h находится из простых геометрических расчетов (см. рис. 4):

$$h = R - \sqrt{R^2 - L^2} \approx 0{,}02 \text{ м}.$$

Задача 4. *Слаборасходящийся пучок электронов вылетает из точки O со скоростью $\vec{v}$ и движется в продольном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 5). При каких значениях модуля вектора магнитной индукции будет происходить фокусировка пучка на экране «Э», расположенном на расстоянии L от точки O?*

---

*) Под e здесь и в дальнейшем мы будем понимать модуль заряда электрона.

Рассмотрим движение отдельного электрона, вектор скорости которого лежит в плоскости рисунка 5 и составляет угол α с вектором $\vec{B}$.

Поскольку на электрон действует только сила Лоренца, проекция которой на направление поля равна нулю, проекция скорости электрона на это направление будет оставаться постоянной и равной $|\vec{v}|\cos\alpha$.

В плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$, электрон будет двигаться по окружности с линейной скоростью, равной $|\vec{v}|\sin\alpha$. Запишем уравнение движения электрона по окружности:

$$\frac{m\left(|\vec{v}|\sin\alpha\right)^2}{R}=e|\vec{v}||\vec{B}|\sin\alpha.$$

Отсюда найдем радиус окружности R и период обращения T:

$$R=\frac{m|\vec{v}|\sin\alpha}{e|\vec{B}|},$$

$$T=\frac{2\pi R}{|\vec{v}|\sin\alpha}=\frac{2\pi m}{e|\vec{B}|}.$$

Одновременно электрон равномерно движется по полю со скоростью $|\vec{v}|\cos\alpha$.

Если через время $\tau=\frac{L}{|\vec{v}|\cos\alpha}$ электрон окажется в точке O' (см. рис. 5), это будет означать, что он сделал целое число n полных оборотов:

$$\tau=nT,$$

или

$$\frac{L}{|\vec{v}|\cos\alpha}=n\frac{2\pi m}{e|\vec{B}_n|},$$

где $n=1, 2, 3,\ldots$ В результате получаем дискретный набор значений модуля вектора магнитной индукции, при которых электрон будет попадать в точку O':

$$|\vec{B}_n|=\frac{2\pi m|\vec{v}|\cos\alpha}{eL}n.$$

Говоря строго, значения фокусирующих полей зависят от угла α. Однако при малых углах $\cos\alpha\approx1$ и

$$|\vec{B}_n|\approx\frac{2\pi m|\vec{v}|}{eL}n.$$

Задача 5. *Положительно заряженная частица влетает в скрещенные однородные электрическое и магнитное поля. Начальная скорость частицы $\vec{v}_0$ перпендикулярна и электрическому полю $\vec{E}$, и магнитному полю $\vec{B}$ (рис. 6). По какой траектории будет двигаться частица?*

Оказывается, при фиксированных значениях $\vec{E}$ и $\vec{B}$ вид траектории частицы целиком определяется величиной ее начальной скорости $\vec{v}_0$.

Если $|\vec{v}_0|=\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$, сила Лоренца будет равна по модулю, но противоположна по направлению электрической силе, поэтому частица будет двигаться равномерно и прямолинейно вдоль оси X.

Если $|\vec{v}_0|>\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$, модуль силы Лоренца в начальный момент будет больше модуля электрической силы; следовательно, на частицу будет действовать результирующая сила, направленная вниз. По мере смещения частицы вниз, против поля $\vec{E}$, она

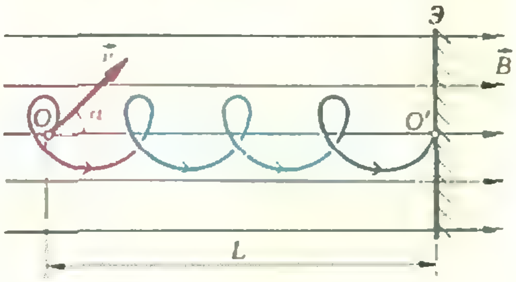


Рис. 5.

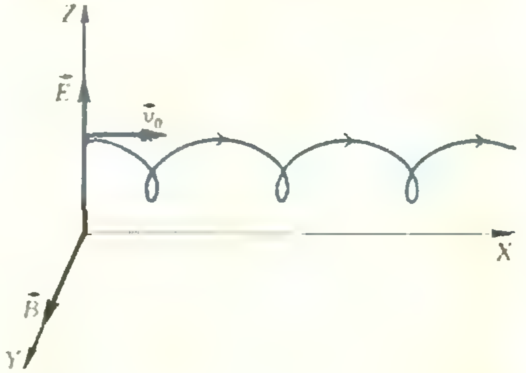


Рис. 6.

будет постепенно терять скорость и все сильнее и сильнее загибаться магнитным полем (см. рис. 6). В самой нижней точке траектории проекция скорости частицы v_z станет равной нулю, а ее полная скорость будет минимальной. Радиус кривизны траектории в этой точке будет наименьшим, а ускорение частицы, направленное вверх, — наибольшим.

Затем частица начнет двигаться вверх, по полю $\vec{E}$, ее скорость будет увеличиваться, а вместе с ней будет увеличиваться и радиус кривизны траектории. В некоторый момент скорость частицы станет равной начальной скорости $\vec{v}_0$.

В результате частица будет «дрейфовать» вдоль оси X. Траекторией ее движения является циклоида. На рисунке 6 показана траектория частицы для случая, когда $\left|\vec{v}_0\right| > 2\dfrac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{B}\right|}$.

(Строгий расчет показывает, что движение по циклоиде можно представить как суперпозицию равномерного движения по оси X со скоростью $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{B}\right|}$ и движения по окружности в плоскости XZ.)

Упражнения

1. Две заряженные частицы с равными скоростями $\left|\vec{v}\right| = 10^9$ см/с одновременно влетают в плоский конденсатор (рис. 7). Определите, при *какой напряженности* $\vec{E}$ электрического поля в конденсаторе частицы смогут столкнуться. Удельные заряды частиц равны по абсолютной величине ($e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг), но противоположны по знаку. *Расстояние между* пластинами конденсатора $d = 1$ см; $h = 5$ см; угол падения частиц $\alpha = 45°$.

2. В планетарной модели атома *водорода* (по Резерфорду — Бору) предполагалось, что *электрон вращается* по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). Определите радиус атома водорода, *если известно*, что минимальная энергия, которую нужно *дополнительно* сообщить электрону для удаления его из атома (энергия ионизации), равна $W = 2{,}2 \cdot 10^{-18}$ Дж. Заряды электрона и протона равны $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

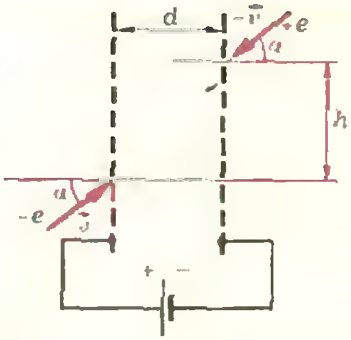


Рис. 7.

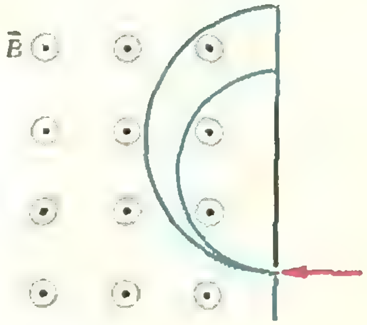


Рис. 8.

3. В устройстве для определения изотопного состава (масс-спектрографе) однозарядные ионы калия с атомными весами $A_1 = 39$ и $A_2 = 41$ сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в *однородное* магнитное поле, перпендикулярное *направлению их* движения (рис. 8). В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющий потенциал меняется около среднего значения U_0 на *величину* $\pm\Delta U$. С *какой* относительной точностью $\Delta U/U_0$ нужно поддерживать значение ускоряющего потенциала, чтобы пучки изотопов калия не перекрывались?

4. *Селектор скоростей заряженных* частиц представляет собой устройство со взаимно перпендикулярными электрическим и магнитным полями. При некоторых *величинах* полей через селектор прямолинейно проходят *электроны с кинетической* энергией T_e. Протоны какой энергии T_p пройдут прямолинейно через тот же селектор?

Н. Розов

Читатели советуют

В обширной редакционной почте «Кванта» значительная часть писем наших читателей — школьников, преподавателей, любителей математики — касается тематики раздела «Практикум абитуриента». Многие из них затрагивают частные вопросы — на такие письма редакция отвечает лично их авторам. Но в целом ряде писем и заметок высказываются интересные соображения по различным теоретическим вопросам школьного курса математики, излагаются приемы решения некоторых типов экзаменационных задач, сообщаются полезные замечания, предложения методического характера, самостоятельно составленные задачи. Хотя приводимые в подобных письмах соображения и задачи не всегда являются новыми и оригинальными, с их содержанием целесообразно, на наш взгляд, познакомить всех читателей «Кванта». Не считая возможным публиковать эти письма и заметки полностью, редакция подготовила подборку материалов, составленную по идеям и предложениям читателей журнала, с необходимыми дополнительными комментариями. Мы надеемся, что включенные в подборку вопросы окажут помощь поступающим в вузы.

Свободное владение школьным курсом математики, которое абитуриент должен показать на приемном экзамене, подразумевает, в частности, умение правильно проводить вычисления, грамотно преобразовывать алгебраические выражения. К сожалению, поступающим часто снижают оценку именно за ошибки, допущенные в ходе преобразований. Такие ошибки происходят, как правило, не из-за незнания — это, скорее, результат невнимательности и небрежности, неумения проверять самого себя, результат недостаточной практики в решении примеров, отрабатывающих технику преобразований.

При решении подобных примеров полезно иметь в виду следующее соображение: иногда преобразование алгебраических выражений удается упростить, если удачно использовать тригонометрические функции, т. е. сделать тригонометрическую подстановку (см. «Квант», 1974, № 3, с. 49—50). Суть этого метода состоит в том, что вместо одной из входящих в алгебраическое выражение переменных подставляется некоторая тригонометрическая функция вспомогательного угла, причем она подбирается так, чтобы исходное выражение в силу известных формул тригонометрии упростилось.

Конечно, удачная тригонометрическая подстановка бывает полезна не только для преобразования алгебраических выражений, но и во многих задачах — при решении уравнений, доказательстве неравенств и т. д. Большой набор интересных примеров такого рода прислал наш читатель *В. Ольхов* (Горький).

Пример 1. *Доказать тождество*

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (1)$$

Прежде всего заметим, что обе части равенства (1) одновременно имеют смысл, если

$$b\geqslant 0, \quad a\geqslant 0, \quad a\geqslant\sqrt{b}; \qquad (2)$$

для этих значений a и b мы и докажем наше тождество. Наличие под квадратным корнем выражения a^2-b наводит на мысль положить

$$b=a^2\sin^2\varphi, \text{ где } 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2, \qquad (3)$$

— ведь тогда

$$\sqrt{a^2-b}=a\cos\varphi.$$

Такая тригонометрическая подстановка допустима, поскольку в силу неравенств (2) дробь b/a^2 (при $a\neq 0$) заключена между 0 и 1 и ее можно принять за значение квадрата синуса некоторого угла первой четверти (если $a=0$, то и $b=0$ и тождество (1) очевидно).

После подстановки (3) правая часть равенства (1) запишется в виде

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

В то же время

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{a+a\sin\varphi}=$$
$$=\sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

так как $1+\sin\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}+$

$+2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\right.$

$\left.+\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2$, и тождество (1) доказано.

Пример 2. *Доказать, что при $c>0$, $a>c$, $b>c$*

$$\sqrt{(a+c)(b+c)}+$$
$$+\sqrt{(a-c)(b-c)}\leqslant 2\sqrt{ab}.$$

Когда в этом неравенстве достигается знак равенства?

Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)}+$$
$$+\sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}\leqslant 2. \quad (4)$$

Так как по условию

$$0<\frac{c}{a}<1, \quad 0<\frac{c}{b}<1,$$

можно положить

$$\frac{c}{a}=\cos\alpha, \quad 0<\alpha<\pi/2,$$
$$\frac{c}{b}=\cos\beta, \quad 0<\beta<\pi/2.$$

Если в левой части неравенства (4) выполнить эту тригонометрическую подстановку, то можем последовательно записать:

$$\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}+$$
$$+\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}=$$
$$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$
$$=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\leqslant 2,$$

что и доказывает неравенство (4).

Из приведенной цепочки преобразований видно, что равенство в соотношении (4) достигается, когда

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=1,$$

т. е. при $\alpha=\beta$; это возможно только при $a=b$ (проверьте самостоятельно!).

Следующее ниже иррациональное уравнение с параметром без особого труда решается стандартным методом — возведением в степень; надо только внимательно проследить за тем, чтобы не получить посторонних корней. Мы покажем, как это уравнение решается иначе — с помощью тригонометрической подстановки.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$\sqrt{p+x}+\sqrt{p-x}=x. \quad (5)$$

Заметим прежде всего, что если уравнение (5) при каком-нибудь значении параметра p имеет корень, то этот корень — неотрицательное число (почему?). Отсюда следует, что при $p<0$ уравнение (5) корней не имеет, при $p=0$ оно имеет один корень $x=0$ и при $p>0$ корни должны удовлетворять неравенствам $0<x\leqslant p$ (докажите эти утверждения).

Сделаем тригонометрическую подстановку

$$x=p\cos\psi, \quad 0\leqslant\psi<\frac{\pi}{2};$$

тогда уравнение (5) примет вид

$$\sqrt{1+\cos\psi}+\sqrt{1-\cos\psi}=\sqrt{p}\cos\psi,$$

или

$$\sqrt{2}=\sqrt{p}\left(\cos\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\psi}{2}\right)$$

(проделайте выкладки). Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$$\sin\psi=\frac{p-2}{p}.$$

Определяемое отсюда значение ψ можно выбрать в первой четверти только тогда, когда $p\geqslant 2$; следовательно, уравнение (5) имеет корни только для значений параметра $p\geqslant 2$. При любом значении параметра, удовлетворяющем этому условию,

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{2}{p}\sqrt{p-1},$$

а потому при $p \geqslant 2$ уравнение (5) имеет корень

$$x = 2\sqrt{p-1}.$$

Упражнения

1. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a-\sqrt{4(a-1)}}+\sqrt{a+\sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2-4(a-1)}}.$$

2. Доказать, что при $a > |b|$

$$b\sqrt{2}\,\frac{2a+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}} = \sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}.$$

3. Доказать, что для неотрицательных чисел a, b, c, d

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leqslant \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

4. Доказать, что если $a > c > 0$ и $b > c > 0$, то

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}.$$

Когда в этом неравенстве достигается знак равенства?

5. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-x}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-x}}{2}} = \sqrt{4+\sqrt{x}}+\sqrt{16-x}.$$

* * *

Ученик 10 класса *Валерий Голубенко* (г. Черкесск Ставропольского края) предлагает читателям журнала решить составленную им задачу:

6. Пусть D — точка пересечения высот $[AE]$ и $[BF]$ равнобедренного треугольника ABC, в котором $|AB| = |BC|$. Рассматривается отношение N площадей треугольников BED и ABC.

а) Доказать, что $N = 1/90$, если точка D лежит на окружности, вписанной в треугольник ABC.

б) Вычислить N в случае, когда точка D является центром тяжести треугольника, симметричного треугольнику ABC относительно середины высоты $[BF]$.

* * *

Судя по письмам, большой интерес у читателей журнала вызвали примеры систем уравнений, которые решаются не стандартными преобразованиями, а логическими рассуждениями («Квант», 1978, № 4, с. 50).

С. Мириев (пос. Хиллы Нефтечалинского р-на Азербайджанской ССР) прислал в редакцию задачу, решение которой остроумно использует неравенство Бернулли («Алгебра и начала анализа 9», п. 2).

Пример 4. *Решить в целых числах уравнение*

$$x = \lg(9x+1). \qquad (6)$$

Ясно, что уравнение (6) целых отрицательных корней не имеет, а $x=0$ — его корень. Поэтому будем искать целые положительные корни. Перепишем уравнение (6) в виде

$$(1+9)^x = 1+9x.$$

Но в силу неравенства Бернулли при любом натуральном n

$$(1+9)^n \geqslant 1+9n,$$

причем знак равенства достигается только при $n=1$. Поэтому уравнение (6) имеет единственный целый положительный корень $x=1$.

Предлагаем читателям самостоятельно подумать еще над двумя «нестандартными» задачами — уравнением, которое прислал *А. Ермилов* (г. Коломна Московской области), и системой неравенств, составленной *М. Левиным* (Таллин):

7. Решить уравнение

$$x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1} = xy.$$

8. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} \geqslant 2+x^2, \\ 2^{x+y-4} \leqslant \dfrac{1-(z-x)^2}{1+(4-y)^2}. \end{cases}$$

* * *

Говорят, что в геометрии обосновать сложное утверждение часто оказывается проще, чем строго доказать наглядно очевидный факт. Об одном таком факте и идет речь в задаче *С. Сефибекова* (село Кашкент Хивского р-на Дагестанской АССР):

9. Доказать, что если сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью представляет собой треугольник, то этот треугольник остроугольный.

* * *

В ряде случаев оказывается полезным представить выражение $a\sin x+b\cos x$ в следующем виде:

$$a\sin x+b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi), \qquad (7)$$

где a и b — константы, а вспомогательный угол φ определяется соотношениями

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(«Квант», 1976, № 4, с. 41—42).

На любопытное обобщение формулы (7) указывает в своем письме *М. Шкапенюк* (Одесса). Продемонстрируем это обобщение на конкретной задаче.

Пример 5 (МГУ, мехмат, 1965). *Сколько корней имеет уравнение*

$$\sin x+2\sin 2x=3+\sin 3x?$$

Применяя известные формулы тригонометрии, предложенное уравнение перепишем в виде

$$\sin 2x-\sin x\cos 2x=\frac{3}{2}. \qquad (8)$$

Теперь левую часть преобразуем следующим образом:

$$\sin 2x-\sin x\cos 2x=$$
$$=\sqrt{1+\sin^2 x}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\sin 2x-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cos 2x\right].$$

Так как при любом x

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2+\left(-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)^2=1,$$

существует зависящий от x угол $\varphi=\varphi(x)$ такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=\cos\varphi(x),$$
$$-\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=\sin\varphi(x).$$

Но тогда

$$\sin 2x-\sin x\cos 2x=$$
$$=\sqrt{1+\sin^2 x}\sin(2x+\varphi(x)),$$

так что уравнение (8) равносильно уравнению

$$\sqrt{1+\sin^2 x}\sin(2x+\varphi(x))=\frac{3}{2}.$$

Поскольку левая часть последнего уравнения при всех значениях x не превосходит $\sqrt{2}$, это уравнение корней не имеет.

* * *

Наш читатель *В. Колмыков* (Воронеж) предлагает найти ошибку в «доказательстве» следующей явно неверной «теоремы»:

10. Теорема. *Если две плоскости параллельны, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (9)$$

— уравнение плоскости α, а

$$Ax+By+Cz+D=0$$

— уравнение плоскости β, и пусть $\alpha\parallel\beta$. В силу параллельности этих плоскостей

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c},$$

или, если обозначить эти отношения через k,

$$A=ka,\quad B=kb,\quad C=kc.$$

Но тогда уравнение плоскости β можно записать в виде

$$ax+by+cz+\frac{D}{k}=0. \qquad (10)$$

Вычитая из равенства (10) равенство (9), получаем, что $D=kd$, а потому уравнение (10) плоскости β можно переписать в виде

$$ax+by+cz+d=0.$$

Поскольку это уравнение совпадает с уравнением (9) плоскости α, получаем $\alpha=\beta$.

Список читателей, приславших правильные решения...

(Начало см. на с. 32, 36)

И. Овчинников (Ленинград) 9—11; *И. Омелян* (Львов) 9—12, 15, 18, 19; *А. Опарин* (Горький) 19, 22; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 9, 10; *Т. Павелкина* (Киев) 10, 11; *А. Павенис* (п/о Нагале ЛатвССР) 13; *А. Павлов* (Узловая) 16; *А. Паланджян* (Ереван) 16; *Г. Паплаускас* (Гарлява) 16; *А. Перов* (Москва) 15; *А. Петров* (Красногорск Московской обл.) 18, 19; *С. Прядкин* (Киев) 9—11, 15—17; *С. Пузанов* (Одинцово) 10; *И. Романовский* (Линда) 10, 16, 20; *И. Рузин* (Ленинград) 22; *И. Савенков* (р/п Лысые Горы Саратовской обл.) 11, 18; *С. Сафронюк* (Ровно) 18, 19, 22; *В. Сачков* (Чебоксары) 11, 19; *Л. Семенова* (Днепропетровск) 10; *В. Середа* (Львов) 12; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 15—17, 19, 20; *Е. Ситников* (Туймазы) 9; *О. Скрипачев* (Казань) 9, 10, 12; *Ю. Солдатенко* (Пинск) 10, 11, 16; *А. Степанович* (Никольский Карагандинской обл.) 10, 13; *М. Строшинский* (Донецк) 9, 10, 16; *К. Трутнев* (Казань) 18; *Н. Федин* (Омск) 10, 12—19, 22; *Л. Халтаров* (Улан-Удэ) 10; *С. Хрулин* (Моршанск) 16; *В. Швейдель* (Великие Луки) 11; *Е. Шевкунов* (Фрунзе) 12, 15; *Р. Широков* (Киев) 13, 15, 16, 18; *С. Шичянин* (Невинномысск) 19; *С. Шишков* (Москва) 13—19, 22; *Е. Шкляр* (Гомель) 16; *А. Шосточенко* (Кишинев) 18; *М. Эфроимский* (Ленинград) 15, 22; *О. Янчук* (п/о Иванополь Житомирской обл.) 12; *В. Яровой* (Ленинград) 22.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Казанский государственный университет
им В. И. Ульянова-Ленина

О Казанском государственном университете подробно рассказывалось в «Кванте» № 6 за 1976 год.

Математика
(письменный экзамен)

Механико-математический факультет

1. Решить уравнение

$$2 \sin 6x = \operatorname{tg} 2x - 2 \sin 2x.$$

2. Найти координаты вектора $\vec{p}$, коллинеарного вектору $\vec{q} = (3; -4)$, если известно, что вектор $\vec{p}$ образует с осью Ox тупой угол и $|\vec{p}| = 10$.

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

4. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{1+y} (1 + \sin x) > 1.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить уравнение

$$2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin^2 x - \operatorname{tg} x.$$

2. Решить неравенство

$$| 3^x - 3 | + 9^x - 3 > 0.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду с высотой H и стороной основания a вписан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат со стороной b, так, что его нижнее основание лежит на основании пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на боковых ребрах пирамиды. При каком b объем вписанного параллелепипеда будет наибольшим? Найти объем при этом значении b.

4. На дороге на расстоянии 10 м друг от друга лежит некоторое количество столбов. Начав с одного крайнего столба, рабочий перенес все столбы по одному к другому крайнему столбу, причем для этого ему в общей сложности пришлось пройти 1,44 км. Сколько столбов лежало на дороге?

Физический факультет

1. Решить уравнение

$$\sin x - \frac{|2 \cos x - 1|}{2 \cos x - 1} \cdot \sin^2 x = \sin^3 x.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 28, \\ \log_9 x - \log_{\frac{1}{9}} y = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

3. На кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x$.

4. Двугранный угол между боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α, а сторона основания равна a. Найти объем пирамиды.

Физика
(задачи устного экзамена)

1. Цилиндр радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты $h < R$. Какую наименьшую горизонтальную силу, проходящую через ось цилиндра и перпендикулярную к стенке, надо приложить к цилиндру, чтобы он мог подняться на ступеньку? Трение не учитывать.

2. На резиновой нити, длина которой в нерастянутом состоянии l_0, подвешен тяжелый шарик массы m, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса; при этом нить отклоняется на угол α. Деформация нити упругая, коэффициент упругости k. Найти угловую скорость вращения ω.

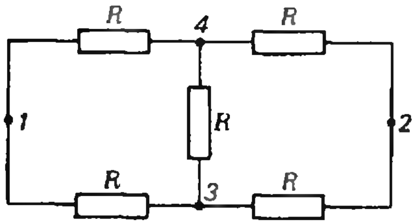
3. Льдина с площадью поперечного сечения S и высотой H плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

4. Шарик плотности $\rho_{\text{ш}}$ подвешен на невесомой нити длины l в жидкой среде плотности ρ. Определить период его колебаний. Трением пренебречь.

5. Колеса паровоза имеют радиус $R_0 = 1$ м при 0° С. Определить разницу в числах оборотов колеса летом при температуре $t_1 = 25°$ С и зимой при температуре $t_2 = -25°$ С на пути пробега паровоза $l = 100$ км (тепловой коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$).

6. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В. Какую механическую работу совершает мотор за время $t = 1$ с при протекании по его обмотке тока $I = 2$ А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток $I_0 = 3$ А?

7. В электроплитке сопротивления соединены в схему, показанную на рисунке.



Электроплитка включается в сеть точками 1 и 2, при этом за некоторое время удается довести до кипения $m_1 = 500$г воды. Сколько воды можно довести до кипения за то же время, если электроплитку включить в сеть точками 1 и 3? Начальная температура воды в обоих случаях одна и та же. Тепловыми потерями пренебречь.

8. Через двухэлектродную лампу (диод) с плоскими электродами течет ток $I = 10$ мА. Напряжение на лампе $U = 100$ В. С какой силой $|\vec{F}|$ действуют на анод лампы попадающие на него электроны, если скорость их вблизи катода равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \times 10^{11}$ Кл/кг.

9. В однородном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}| = 0{,}125$ Т расположен проволочный виток таким образом, что его плоскость перпендикулярна магнитным линиям. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при некотором повороте витка, $q = 8 \cdot 10^{-2}$ Кл. На какой угол повернулся виток, если его площадь $S = 5 \cdot 10^3$ см^2, а сопротивление витка $R = 1$ Ом?

10. Вогнутое зеркало дает действительное изображение точечного источника, расположенного на оптической оси на расстоянии $d = 50$ см от зеркала. Фокусное расстояние зеркала $F = 25$ см. Зеркало разрезали пополам, и его половины отодвинули друг от друга на расстояние $a = 1$ см в направлении, перпендикулярном оптической оси. Как расположены по отношению друг к другу изображения, даваемые половинками зеркала?

В. Вишневский,
О. Соколов,
А. Хасанов

Ярославский государственный университет

О Ярославском государственном университете см. «Квант», 1978, № 6, с. 73.

Математика
(письменный экзамен)

Математический факультет

Вариант 1

1. Найти высоту треугольной пирамиды наибольшего объема, вписанной в шар радиуса R.

2. Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7, чтобы цифры не повторялись и крайние цифры были четными?

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2-1}(x+1) < 1.$$

4. Решить уравнение

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\cos x - \frac{8}{3}\pi\right) = 1.$$

Вариант 2

1. Прямоугольный параллелепипед вписан в шар радиуса R. Найти поверхность параллелепипеда, если он имеет наибольший возможный объем.

2. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7, чтобы цифры не повторялись и сумма крайних была двузначным числом?

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2+3x}(x+3) < 1.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}.$$

Физический факультет

Вариант 1

1. Какую часть площади квадрата отсекает парабола, проходящая через две соседние вершины квадрата и касающаяся его стороны в ее середине?

2. Решить неравенство

$$2C_n^5 > 11C_{n-2}^3,$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

3. Решить уравнение

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{3}{2}} - 3^{2x-1}.$$

4. Решить уравнение

$$2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x.$$

Вариант 2

1. Какую часть площади полукруга отсекает парабола, проходящая через концы диаметра полукруга и касающаяся граничной окружности в точке, равноудаленной от концов диаметра?

2. Решить неравенство

$$C_n^{n-2} + C_{n+1}^{n-1} \leqslant 100,$$

где C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

3. Решить уравнение

$$4^{x+1,5} + 9^x = 6^{x+1}.$$

4. Решить уравнение

$$4\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 3\sin^2 x = 3.$$

Физика

(задачи устного экзамена)

Физический факультет

1. По наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, с высоты $h = 1{,}25$ м из состояния покоя соскальзывает тело. Коэффициент трения тела о плоскость $k = 0{,}2$. Какую скорость приобретет тело после соскальзывания?

2. Мотоциклист совершает вираж с линейной скоростью $v = 72$ км/ч по окружности радиуса $R = 71$ м. Определить угол α отклонения мотоциклиста от вертикали.

3. Стеклянную трубку длины $l = 1$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают сверху и вынимают. Какой длины h столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление равно $h_0 = 760$ мм рт. ст.

4. В двух сосудах находится один и тот же газ. Объемы сосудов V_1 и V_2, давление и температура газа в сосудах p_1, T_1 и p_2, T_2 соответственно. После соединения сосудов в них установилась температура T. Найти давление в соединенных сосудах.

5. Два положительных заряда $q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 9 \cdot 10^{-6}$ Кл находятся на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Какой заряд и где нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

6. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала φ. Каков будет потенциал φ_1 большой капли, получившейся в результате слияния N капель ($N = 15$, $\varphi = 220$ В)?

7. Конденсатор, присоединенный к батарее с напряжением $U = 400$ В проводами с сопротивлением $R = 15$ Ом, имеет первоначальную емкость $C_1 = 3$ мкФ. Затем его емкость равномерно увеличивается за время $t = 0{,}15$ с до $C_2 = 33$ мкФ. Какая энергия выделится при этом в виде тепла в подводящих проводах?

8. Зал с круглым полом радиуса $R = 15$ м освещается лампой, укрепленной в центре потолка. Найти высоту зала, если известно, что наименьшая освещенность стены зала в n раз больше наименьшей освещенности пола ($n = 3$).

9. Вогнутое зеркало дает на стене изображение пламени свечи, увеличенное в n раз ($n = 3$). Расстояние от свечи до зеркала $d = 40$ см. Найти фокусное расстояние F зеркала.

10. Какова кинетическая энергия и скорость фотоэлектронов, вылетающих из натрия при его облучении ультрафиолетовыми лучами ($\lambda = 2{,}1 \cdot 10^{-5}$ см), если работа выхода электронов из натрия $A_в = 2{,}52$ эВ? Кинетическую энергию электронов выразить в электрон-вольтах.

М. Доброхотова, Н. Михеев, В. Чаплыгин

Дальневосточный государственный университет

(физический факультет)

Физический факультет Дальневосточного государственного университета готовит специалистов-физиков для научно-исследовательских институтов, высших учебных заведений, средних школ и предприятий Дальнего Востока.

Шесть кафедр факультета осуществляют подготовку специалистов по физике твердого тела, молекулярной физике, геофизике, электронике, автоматизации научных исследований и ядерной физике.

Производственную практику студенты проходят, как правило, на местах своей будущей работы. Это институты Дальневосточного научного центра АН СССР (океанологии, автоматики и процессов управления, вулканологии, биологии моря), лаборатории геологоразведывательных управлений, научно-исследовательские суда, работающие по международным программам, конструкторские бюро, заводы и школы Дальнего Востока.

Математика

(устный экзамен)

1. Решить уравнение

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^{(\log_x 11)^{-2}} = 11.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(x-1) < 2.$$

3. Сколько различных нечетных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0,1,3,4,5?

4. Сколько существует телефонных номеров, содержащих комбинацию 12, если номер состоит из 5 цифр?

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \cos^2 x + \cos x + 3.$$

6. Определить размеры открытого бассейна объемом 32 м³ с квадратным дном, на облицовку дна и стен которого затрачивается наименьшее количество материала.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -3x^2 - |x| + 3, \quad y = 0.$$

8. При совместной работе двое рабочих могут выполнить задание за 4 часа. Первый

из них, работая отдельно, может выполнить задание на 6 часов раньше, чем второй. За сколько часов каждый в отдельности может выполнить задание?

9. Найти высоту h треугольной пирамиды, длины боковых ребер которой равны a, b, c, а все плоские углы при вершине прямые.

10. Около правильной треугольной пирамиды с плоским углом α при вершине описан шар. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.

Физика

(задачи устного экзамена)

1. Шофер автомобиля внезапно заметил недалеко от себя стену, перпендикулярную к направлению его движения. Что выгоднее сделать, чтобы предотвратить аварию: затормозить или повернуть в сторону?

2. Небольшое тело скользит вниз с вершины сферы радиуса R. На какой высоте от вершины тело оторвется от поверхности сферы? Трением пренебречь.

3. Дана узкая стеклянная трубка, запаянная с одного конца. Трубка содержит воздух, отделенный от окружающей атмосферы столбиком ртути. Имеется также миллиметровая линейка. Определите с их помощью атмосферное давление.

4. Какое напряжение возникает в сечении латунного цилиндра, если длина его остается неизменной при повышении температуры от $t_1 = 0°C$ до $t_2 = 100°C$? Коэффициент линейного расширения латуни $\alpha = 18 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$; модуль упругости $E = 9{,}8 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

5. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p = 5$ атм и температуре $t = 17°C$. Какова скорость движения газа в трубе, если за $\tau = 5$ мин через площадь поперечного сечения трубы $S = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2 протекает $m = 2{,}5$ кг углекислого газа?

6. Маленький металлический шарик массы $m = 1$ г, которому сообщен заряд $q = +10^{-7}$ Кл, брошен издалека со скоростью $|\vec{v}| = 1$ м/с в металлическую сферу с зарядом $Q = +3 \cdot 10^{-7}$ Кл. При каком минимальном значении радиуса сферы шарик достигнет ее поверхности?

7. Определить количество электронов, образующих заряд пылинки массы $m = 5 \cdot 10^{-9}$ г, если она находится в равновесии в электрическом поле, создаваемом двумя заряженными пластинами. Разность потенциалов между пластинами $\Delta\varphi = 3000$ В, а расстояние между ними $d = 2$ см. Заряд одного электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

8. В однородное магнитное поле с индукцией $|\vec{B}| = 0{,}1$ Т помещен проводник длины $l = 20$ см с сопротивлением $R = 10$ Ом. Проводник соединен с источником тока, ЭДС которого $\mathcal{E} = 10$ В и внутреннее сопротивление $r = 10^{-4}$ Ом. Под действием магнитного поля проводник начинает перемещаться перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $|\vec{v}| = 10$ м/с. Определить силу тока в проводнике.

9. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с поверхностью стола угол 48°. Как надо расположить плоское зеркало, чтобы изменить направление луча на горизонтальное?

10. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить между катодом и анодом, чтобы полностью затормозить фотоэлектроны, вылетающие из катода при освещении его лучами с длиной волны $\lambda = 200$ нм, если работа выхода $A = 4$ эВ? Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Н. Александрова,
В. Шлык,
Л. Юдина

Московский архитектурный институт

Московский архитектурный институт основан в 1866 году. Ежегодно выпускает 250—300 архитекторов широкого профиля, получающих специализацию в области градостроительства, архитектуры жилых и общественных зданий, архитектуры промышленных зданий и сооружений, архитектуры и планировки сельских населенных мест, архитектуры интерьера зданий, ландшафтной архитектуры, реставрации памятников архитектуры. Институт имеет четыре факультета: общей подготовки, градостроительства, промышленного строительства, жилого и общественного строительства. В течение пяти с половиной лет студенты института проходят полный курс по программе 32 кафедр, обеспечивающих всестороннюю подготовку молодых специалистов в области архитектурного проектирования, художественной графики, теории и истории архитектуры, специальных инженерных, экономических, общественно-политических дисциплин, физической подготовки, гражданской обороны.

Обучение в институте дневное и вечернее. Большинство выпускников института распределяются среди архитектурно-проектных и научно-исследовательских институтов Москвы и Московской области. Довузовская подготовка желающих получить образование в Московском архитектурном институте включает подготовительное отделение и три вида подготовительных курсов — для школьников 9—10 классов по рисунку и черчению, для демобилизованных из рядов Советской Армии — по программе вступительных экзаменов, заочные курсы для жителей Москвы и Московской области.

Экзамены в институт проводятся по следующим предметам: рисованию гипсовой головы и композиции (профилирующие предметы), литературе (сочинение), математике и физике (устно), проекционному черчению. Ежегодно принимается на I курс института 350 человек — на дневное отделение, 75 человек — на вечернее.

Институт располагает уникальной библиотекой, насчитывающей более 100 тысяч томов книг по архитектуре и искусству.

Математика
(устный экзамен)

Билет 1

1. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$.

2. Дано $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = m$.

Найти: 1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$

2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$

3) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

3. Центры четырех окружностей радиуса a находятся в вершинах квадрата со стороной a. Найти площадь фигуры, образованной дугами этих четырех окружностей и лежащей внутри квадрата.

Билет 2

1. Объем фигур вращения.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}.$$

3. Статуя высотой 5 м стоит на постаменте, высота которого 6 м. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

Физика
(задачи устного экзамена)

1. Пуля массой m попадает в деревянный брусок массы M, подвешенный на нити длиной l, и застревает в нем. Определить, на какой максимальный угол отклонится нить, если скорость пули равна $|\vec{v}|$.

2. Шар массой M опирается на две гладкие плоскости, образующие угол $\varphi = 90°$, причем левая плоскость составляет с горизонтом острый угол α. Определить силы, с которыми шар давит на плоскости.

3. Тело падает с высоты $H = 360$ м с начальной скоростью $|\vec{v}_0| = 20$ м/с и углубляется в песок на глубину $s = 0{,}5$ м. Определить среднюю силу сопротивления почвы. Масса тела $m = 0{,}1$ кг, сопротивление воздуха не учитывать.

4. Три одинаковых шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $l = 20$ см. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha = 30°$?

5. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода закипает через $t_1 = 15$ мин, при включении второй обмотки — за $t_2 = 30$ мин. Через сколько минут закипит чайник, если обе обмотки включить последовательно? В каком случае КПД чайника больше и почему?

6. Найти ток короткого замыкания для аккумуляторной батареи, если она при нагрузке $I_1 = 5$ А отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 9{,}5$ Вт, а при нагрузке $I_2 = 8$ А — мощность $P_2 = 14{,}4$ Вт.

Ю. Мещеряков,
В. Смирнов,
А. Степанов,
В. Фролов

Домино-пасьянс

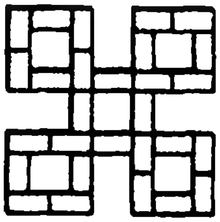


Рис. 1.

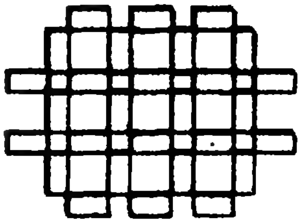


Рис 2.

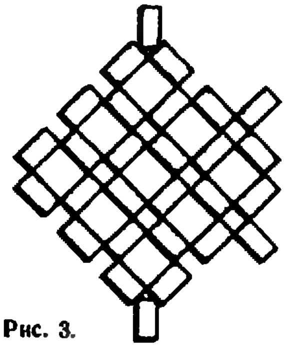


Рис. 3.

Приставляя косточки домино друг к другу по правилам игры в домино, сложите из полного комплекта косточек (28 штук) фигуру, изображенную на рисунке 1. Затем уложите эти 28 косточек в виде узора, изображенного на рисунке 2, так, чтобы косточки снова соприкасались одинаковыми значениями очков. То же задание — для фигуры, изображенной на рисунке 3.

Л. Мочалов,
П. Толкач

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы расскажем о книгах, вышедших в первом квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Хинчин А. Я. *Три жемчужины теории чисел.* Издание 3-е. Объем 4 л., тираж 50 000 экз., цена 20 к.

Эта замечательная книга посвящена изложению трех теорем теории чисел.

Первая теорема носит имя голландского математика Ван дер Вардена и имеет следующую формулировку:

Пусть k и l — произвольные натуральные числа. Тогда существует такое натуральное число n, что при разбиении любого отрезка натурального ряда длины n любым способом на k классов (среди которых могут быть и пустые) по крайней мере в одном из этих классов найдется арифметическая прогрессия длины l.

Во второй главе рассматривается гипотеза Ландау — Шнирельмана, утверждающая верность некоторого неравенства. Выдвинутая в 1931 году, она привлекла внимание весьма широкого круга исследователей во всех странах, но оказалась трудноподдающейся; только в 1942 году ее доказал молодой американский математик Манн. Год спустя Артин и Шерк опубликовали новое ее доказательство, гораздо более изящное, хотя по-прежнему совершенно элементарное. По мнению Хинчина, конструкция Артина — Шерка является «замечательным сочетанием структурной тонкости и предельной элементарности метода».

Наконец, в третьей главе приводится элементарное решение проблемы Варинга; доказывается, что *для любого натурального n существует такое натуральное k, что любое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем k n-х степеней каких-то натуральных чисел.* Эта гипотеза была высказана Варингом еще в XVIII столетии (ее частный случай — замечательная теорема Лагранжа: *каждое натуральное число есть сумма не более чем четырех квадратов*), но только в начале нашего века (1907 г.) Гильберт доказал ее справедливость во всей полноте. Однако его доказательство было очень громоздким и неэлементарным, как, впрочем, и более поздние доказательства Харди, Литлвуда и И. М. Виноградова. Поэтому математики, имея дело с такой внешне элементарной задачей, как проблема Варинга, продолжали поиски такого ее решения, которое не нуждалось бы в понятиях и методах, выходящих за пределы элементарной арифметики. Элементарное решение получил советский математик Ю. В. Линник в 1942 году (впрочем, его «элементарное» доказательство тоже очень не просто). Изложению доказательства Линника посвящена третья глава книги.

Автор книги А. Я. Хинчин — широко известный специалист по теории чисел и замечательный педагог. Его книга «Три жемчужины теории чисел», безусловно, — одна из жемчужин популярной математической литературы. Поэтому хотелось бы, чтобы все любящие математику старшеклассники, купив эту книгу, потрудились над ней с карандашом и бумагой.

2-е издание выходило в 1948 году.

Издательство «Мир»

2. Дьюдени Г. *Кентерберийские головоломки.* Перевод с англ. Объем 21 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Автор этой книги Генри Эрнест Дьюдени (1857—1930) — один из известнейших создателей головоломок; наряду с Сэмом Лойдом он по праву считается классиком этого жанра. Вряд ли его нужно представлять читателям «Кванта»: в 1975 году издательство «Мир» в серии книг по занимательной математике выпустило в свет сборник Дьюдени «520 головоломок», несколько задач из которого были перепечатаны нашим журналом («Квант», 1975, № 2).

«Кентерберийские головоломки» — прекрасный сборник задач. Собственно «кентерберийские головоломки» составляют лишь первую его главу. История ее написания такова. Известно, что классическое произведение английской литературы XIV века, книга Джеффри Чосера «Кентерберийские рассказы» осталась незаконченной. Воспользовавшись этим, Дьюдени дополнил ее новыми, якобы найденными, страницами: персонажи Чосера задают друг другу разные занимательные задачи. Глава «Кентерберийские головоломки» задает тон всей книге: каждая последующая глава (кроме одной) также имеет свою сюжетную линию; почти каждая головоломка облечена в форму занимательной истории, много ярких персонажей, непринужденных диалогов. Своей беллетризованностью сборник «Кентерберийские головоломки» выделяется среди всех книг Дьюдени. По стилю его, пожалуй, можно сравнить с книгой Льюиса Кэррола «История с узелками» (М., «Мир», 1973).

Перевод сборника «Кентерберийские головоломки» (выполненный Ю. Сударевым) — приятное событие. Настоящее издание дополнено головоломками из еще одного известного сборника Дьюдени «Математические развлечения» (1917 г.), они собраны в главах «Вечер парадоксов» и «Задачи на шахматной доске».

Вот как, например, начинается глава, посвященная шахматным головоломкам: «От сильного порыва ветра каминная труба сорвалась с крыши и рухнула прямо под ноги случайному прохожему. Он сказал спокойно:

— Мне это ни к чему: я не курю.

Некоторые читатели, увидев головоломку на шахматной доске, склонны сделать столь же невинное замечание:

— Мне это ни к чему: я не играю в шахматы».

Конечно, никакой пересказ не в состоянии заменить самой книги. Несомненно, читатель сумеет оценить ее по достоинству сам.

Физика

Издательство «Наука»

1. Бендриков Г. А. и др. *Задачи по физике.* Издание 4-е, исправленное. Объем 26 л., тираж 300 000 экз., цена 95 к.

Этот сборник предназначен в помощь поступающим в вузы. В нем помещены задачи по всем разделам программы по физике. К большинству задач даны подробные решения или указания.

2. Ланге В. Н. *Экспериментальные физические задачи на смекалку.* Издание 2-е, исправленное и дополненное. (Библиотечка физико-математической школы.) Объем 7 л., тираж 300 000 экз., цена 20 к.

Основная цель книги состоит в воспитании навыков нестандартного мышления. Знакомство с историей физики убедительно показывает, что успех эксперимента часто определяется применением новых, совершенно неожиданных, специально для этого случая разработанных методов измерения. В книге приведено свыше ста задач, в которых предлагается придумать способ измерения некоторых величин, используя самые примитивные и элементарные приборы, казалось бы, совсем неподходящие для этой цели. Чтобы облегчить решение задач, введен раздел «Подсказки». В конце книги приведен подробный разбор задач.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средних школ, интересующихся физикой, и учащихся физико-математических школ; может быть полезна также преподавателям физики средних школ.

3. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для учащихся средней школы, абитуриентов вузов и самообразования.* Издание 2-е, исправленное. Объем 30 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 40 к.

В книге даны определения всех основных физических понятий, сформулированы физические законы и кратко разъяснена сущность описываемых ими явлений. Руководство содержит сведения по всем разделам курса физики, которые изучаются в средней школе и средних специальных учебных заведениях. В некоторых главах приведены примеры решения задач.

Руководство по физике рассчитано на школьников старших классов, учащихся ПТУ, техникумов и слушателей подготовительных отделений вузов. Оно может быть использовано абитуриентами при подготовке к приемным экзаменам в вузы, а также теми, кто интересуется физикой и занимается самообразованием.

4. Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга 1. Издание 20-е, исправленное. Объем 12 л., тираж 500 000 экз., цена 40 к.

Эта книга написана известным популяризатором и педагогом Яковом Исидоровичем Перельманом. Автор не ставил перед собой задачи изложить школьный курс физики. В книге очень популярно и интересно излагаются различные парадоксы, головоломки, задачи, опыты, замысловатые вопросы и рассказы из области физики. Она будет понятна даже школьникам 5—7 классов. Несмотря на «солидный возраст», книга «устарела» лишь в очень незначительной степени.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

5. Гернек Ф. *Альберт Эйнштейн.* Перевод с немецкого. Объем 5 л., тираж 50 000 экз., цена 30 к.

В книге профессора университета им. Гумбольдта в Берлине Ф. Гернека рассказано не только о научных достижениях А. Эйнштейна, но и об основных этапах его жизненного пути и о его философских взглядах.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

«Атомиздат»

6. Дубовой Э. И. *Таинственный мир элементарных частиц.* Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Книга в популярной форме знакомит читателя с проблемами физики элементарных частиц и современными экспериментальными способами познания мира частиц, с результатами новейших исследований в этой области. Описаны основные советские и зарубежные ускорители и физические установки, обсуждены экспериментальные возможности и теоретические перспективы нового направления в физике элементарных частиц — исследований на встречных пучках и накопительных кольцах. Хорошо иллюстрированная книга завершается таблицей элементарных частиц с акцентом на «белые пятна» в ней.

Книга рассчитана, прежде всего, на выпускников школ и преподавателей физики.

Издательство «Просвещение»

7. Спасский Б. И. *Физика в ее развитии.* Пособие для учащихся. Объем 14 л., тираж 100 000 экз., цена 55 к.

Автор дает исторический обзор основных этапов развития физики, начиная с древности и кончая первой половиной XX века. Доступным для учащихся языком, с минимальным использованием математического аппарата, без ущерба для точности и глубины изложения, в книге рассмотрено развитие таких физических понятий, как масса, сила, работа, температура и т. д. Большое внимание уделено вопросам мировоззренческого характера.

И. Клумова,
М. Смолянский

У истоков атомной энергетики

Это произошло в августе 1955 года в Женеве, на Первой международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Тысячная аудитория Дворца наций, в котором проходила конференция, нарушив строгие правила процедуры, запрещающие аплодировать докладчикам, встала и бурными овациями проводила директора первой в мире советской атомной электростанции члена-корреспондента Академии наук СССР Дмитрия Ивановича Блохинцева, рассказавшего делегатам об этой станции.

Атомная электростанция (АЭС) вступила в строй в июне 1954 года, положив начало эре мирного использования атомной энергии. Таков был замечательный итог работы большого коллектива ученых, инженеров, техников, строителей, которым пришлось пройти по неизведанным путям. Об этой работе и рассказывается в небольшой книжке Д. И. Блохинцева «Рождение мирного атома» (М., «Атомиздат», 1977).

Началось все вскоре после окончания войны. Неподалеку от Москвы, в маленьком городке Обнинске возникла физическая лаборатория, превратившаяся со временем в Физико-энергетический институт. Небольшая группа ученых — создателей этого института — приступила к работе почти на пустом месте. Д. И. Блохинцев вспоминает: «...Дощатые бараки; неуютные «финские» домики «итээровцев» и «научников»; случайные здания, приспособленные для лабораторий и управлений; под ногами жидкая глина, в которой оставались резиновые сапоги (некоторые подвязывали их веревкой) и безнадежно вязли машины. Основное здание лаборатории, ныне реконструированное, осталось от колонии детей, прибывших из Испании в 1936 году; другое здание — особняк, принадлежавший до революции семье Морозовых (известных фабрикантов-текстильщиков). В светелке этого старого здания, которое позднее было превращено в гостиницу и приняло немало почетных гостей, в те времена жил... одинокий старый козел, пугавший запоздалых прохожих».

Тем не менее год от года институт рос и набирал силу. В 1951 году Д. И. Блохинцеву и его товарищам по работе было поручено приступить к конструированию первой атомной электростанции.

Не хватало энергии. Время от времени все погружалось в темноту и холод. Но во много раз острее ощущалась нехватка опыта и знаний — ведь по такому пути еще никто не проходил. Вот как об этом говорится в книге: «По-видимому, в каждом новом деле бывают по крайней мере две неясности и две ясности: первая неясность — когда люди совсем еще ничего не знают о предмете, затем наступает первая ясность — когда все кажется изумительно очевидным. Далее наступает вторая неясность, когда отчетливо понимаешь, что, в сущности, ничего не знаешь, а только думал, что знаешь. И, наконец, появляется зрелое знание и полное владение делом. В описываемый период мы, участники создания АЭС, находились в состоянии, так сказать, первой ясности. На самом деле количество проблем, которые предстояло решить, возрастало по мере углубления в работу над реактором. И не раз у нас проходил холодок по спине от ощущения возможной несовместимости уже принятых конструктивных решений с новыми обстоятельствами, ранее не принятыми во внимание».

Энтузиазм и самоотверженный труд всех сотрудников, число которых быстро увеличивалось по мере развертывания исследовательских и конструкторских работ, помощь других научных коллективов, работавших в области ядерной физики, позволили, успешно преодолев невероятные трудности, правильно выбрать тип атомного реактора, создать надежную систему защиты от радиоактивных излучений, сконструировать и построить станцию, уверенно проработавшую четверть века и сегодня еще продолжающую свою службу.

9 мая 1954 года атомный реактор первой АЭС ожил — в нем началась цепная реакция деления урана. Однако, чтобы наладить работу нового реактора, понадобилось еще полтора месяца. 26 июня был подан горячий пар на турбогенератор — освобожденная энергия атомных ядер по проводам потекла к потребителям. Это была огромная победа советской науки и техники, и ее по достоинству оценило все прогрессивное человечество.

Основное содержание книги — живой, правдивый, захватывающий рассказ очевидца о том, как рождалась первая АЭС. В заключительной части книги Д. И. Блохинцев сообщает также интересные подробности о создании первого реактора на быстрых нейтронах и первого импульсного реактора, предложенного автором и переданного потом в Дубну, в Объединенный институт ядерных исследований.

Читая эту книгу, видишь, как трудно быть первопроходцами в науке, но как захватывающе интересен труд ученых и какие замечательные результаты приносит он человечеству.

В. Лешковцев

Читатели советуют

1. $2(2-a)^{-1}$ при $1 \leqslant a < 2$; $2(a-2)^{-1}\sqrt{a-1}$ при $a > 2$. Указание. Положить $a = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, где $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, и рассмотреть отдельно случаи $0 \leqslant \operatorname{tg}\alpha < 1$ и $\operatorname{tg}\alpha > 1$.

2. Указание. Сделать подстановку $b = a\cos\varphi$, где $0 < \varphi < \pi$.

3. Указание. Разделить обе части неравенства на его правую часть и положить

$$\frac{d}{a} = \operatorname{tg}^2\alpha,\ 0 \leqslant \alpha < \pi/2,$$

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg}^2\beta,\ 0 \leqslant \beta < \pi/2\ .$$

4. Указание. Обе части неравенства разделить на c и сделать подстановку

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 0 < \alpha < \pi/2,$$

$$\frac{b}{c} = \frac{1}{\cos^2\beta},\ 0 < \beta < \pi/2.$$

Знак равенства достигается при $\alpha + \beta = \pi/2$.

5. $x = 16$. Указание. Положить $x = 16\sin^2\varphi$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

6. а) Указание. Ввести векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ и, разложив $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ по этим векторам, рассмотреть равенство

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB} = 0;$$

получить отсюда, что $\cos\hat{A} = {}^2/_3$. Далее доказать, что $|BD| = \frac{1}{4}|DF|$. б) $N = {}^1/_{30}$.

7. $x = 2$, $y = 2$. Указание. Предварительно доказать, что если $z \geqslant 1$, то

$$\frac{\sqrt{z-1}}{z} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

8. $x = 0$, $y = 4$, $z = 0$. Указание. Из первого неравенства видно, что $\sqrt{x+y} \geqslant 2$, т. е. $x + y \geqslant 4$. Так как правая часть второго неравенства не превосходит 1, $x + y - 4 \leqslant 0$. Следовательно, $x + y = 4$.

10. Уравнение плоскости удовлетворяется не для произвольных значений x, y, z, а лишь для вполне определенных, причем своих для каждой плоскости. Поэтому, если $(x_\alpha;\ y_\alpha;\ z_\alpha)$ и $(x_\beta;\ y_\beta;\ z_\beta)$ — произвольные точки плоскостей α, β, то в результате вычитания из равенства (10) равенства (9) получится соотношение

$$a(x_\beta - x_\alpha) + b(y_\beta - y_\alpha) + c(z_\beta - z_\alpha) + \frac{D}{k} - d = 0,$$

из которого равенство $D = kd$ не следует.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина

Математика

Механико-математический факультет

1. $x_1 = \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k,\ l \in \mathbb{Z})$. 2. $\vec{p} = (-6;\ 8)$.

3. $\dfrac{a^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{12\left(1 + \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ $(k \in \mathbb{Z})$. 2. $]0;\ +\infty[$.

3. $b = \frac{2}{3}a$, $V = \frac{4}{27}a^2H$. 4. 13.

Физический факультет

1. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$ $(k,\ l \in \mathbb{Z})$.

2. $\{(9;\ 3),\ (3;\ 9)\}$. 3. $(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$ и $(1+\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. 4. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Указание. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, $[BF] \perp [SA]$ (тогда $[DF] \perp [SA]$ и $\widehat{BFD} = \alpha$), $[SO] \perp (ABC)$, $\widehat{OSA} = \varphi$. Поскольку $\widehat{OSA} = \widehat{FOA}$, из $\triangle FOA$ получаем $\cos\varphi = \dfrac{|OF|}{|OA|} = \dfrac{|OF|}{|OD|} = \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. (Отсюда вытекает, что $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right[$.)

Физика

1. $|\vec{F}_{\min}| \approx mg\sqrt{2h/R}$.

2. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l_0\cos\alpha + mg/k}}$.

3. $A = \frac{1}{2}\rho_в SH^2g(1 - \rho_л/\rho_в)^2$, где $\rho_л$ и $\rho_в$ — плотности льда и воды соответственно.

4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g(1 - \rho/\rho_ш)}}$.

5. $\Delta n = \frac{l}{2\pi R_0}\left(\frac{1}{1+\alpha t_2} - \frac{1}{1+\alpha t_1}\right) \approx$ $\approx 9{,}6$ оборота.

6. $A = \mathscr{E} I\,(1 - I/I_0) = 8$ Дж.

7. $m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = m_1 \frac{R}{5/8R} = 800$ г.

8. $|\vec{F}| = l\sqrt{\frac{2U}{e/m}} \approx 3{,}4 \cdot 10^{-7}$ Н.

9. $\alpha = \arccos\left(\frac{qR}{|\vec{B}|\,S} - 1\right) =$ $= \arccos 0{,}28 \approx 74°$.

10. $x = 2a = 2$ см.

Ярославский государственный университет

Математика

Математический факультет

Вариант 1.

1. $\frac{4}{3}R$. Предупреждение. Не забудьте доказать, что пирамида наибольшего объема — правильная. 2. $A_3^2 \cdot A_5^4 = 720$. 3. $]1; \sqrt{2}[\,\cup\,]2; +\infty[$. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 1, \\ 0 < x + 1 < x^2 - 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 1 < 1, \\ x + 1 > x^2 - 1. \end{cases}$$

Можно также воспользоваться тождеством $\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$. 4. $x = \pi + 2\pi k\ (k \in \mathbf{Z})$.

Указание. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\frac{\pi}{3}\cos x - \frac{8}{3}\pi = \pi k\ (k \in \mathbf{Z})$.

Вариант 2.

1. $8R^2$. Предупреждение. Не забудьте доказать, что основанием прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема является квадрат. 2. $12A_5^3 = 720$.

3. $\left]0; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right[\cup \left]1; +\infty\right[$.

4. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k\ (k \in \mathbf{Z})$.

Физический факультет

Вариант 1

1. $\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{1}{3}$; $\frac{S_3}{S} = \frac{2}{3}$ (см. рис. 1; S — площадь квадрата). Указание. В системе координат, указанной на рисунке 1, уравнение данной параболы имеет вид $y = dx^2$. 2. $n > 11$. 3. $\left\{\log_{\frac{9}{2}} \frac{9}{2\sqrt{2}}\right\}$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

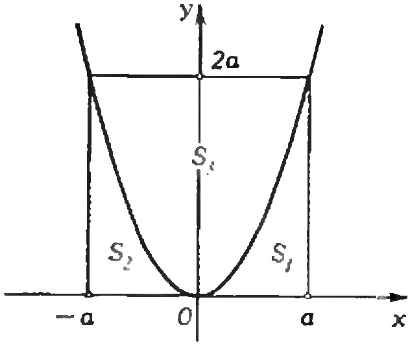


Рис. 1.

Вариант 2

1. $\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{3\pi - 8}{3\pi}$; $\frac{S_3}{S} = \frac{8}{3\pi}$ (см. рис. 2; S — площадь полукруга). Указание. В системе координат, указанной на рисунке 2, уравнение данной параболы имеет вид $y = -dx^2 + R$. 2. $2 \leqslant n \leqslant 10$. 3. $\left\{\log_{\frac{3}{2}} 2,\ 2\log_{\frac{3}{2}} 2\right\}$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

Физика

1. $|\vec{v}| = \sqrt{2gh\,(1 - k\,\mathrm{ctg}\,\alpha)} \approx 4$ м/с.

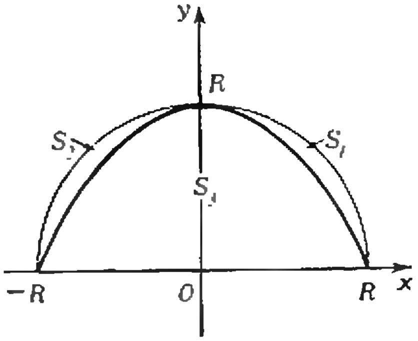


Рис. 2.

2. $\alpha = \operatorname{arctg}(v^2/Rg) \approx 30^\circ$.

3. $h = \dfrac{h_0 + l - \sqrt{h_0^2 + l^2}}{2} \approx 252$ мм.

4. $p = \dfrac{T}{V_1 + V_2}\left(\dfrac{p_1V_1}{T_1} + \dfrac{p_2V_2}{T_2}\right)$.

5. Заряд $q_3 = -1{,}44 \cdot 10^{-8}$ Кл надо поместить между зарядами q_1 и q_2 на расстоянии $x = 12$ см от первого заряда.

6. $\varphi_1 = \varphi N^{\frac{2}{3}} \approx 1340$ В.

7. $Q = U^2(C_2 - C_1)^2R/l \approx 1{,}44 \cdot 10^{-2}$ Дж.

8. $H = R/n = 5$ м.

9. $F = \dfrac{n}{n+1} d = 30$ см.

10. $E_{\text{к}} = \dfrac{hc}{\lambda} - A_{\text{в}} \approx 3{,}37$ эВ,

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{в}}\right)} \approx 1{,}09 \cdot 10^6 \text{ м/с},$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с и $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Дальневосточный государственный университет
(физический факультет)

Математика

1. $\dfrac{1}{11}$. 2. $]3;\ 4[\ \cup\ ]5;\ +\infty[$.

3. $3 \cdot 3 \cdot P_3 = 54$. 4. 3970. Указание. Разбейте пересчитываемое множество на подмножества в зависимости от того, где стоит комбинация 12. Не ошибитесь: эта комбинация не обязана входить только один раз

5. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(0) = 5$, $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = \dfrac{11}{4}$. 6. Сторона основания (дна) — 4 м, глубина — 2 м. 7. $S = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{37}-1}{6}} (-3x^2 - x + 3)dx = \dfrac{37\sqrt{37} - 55}{54}$.

8. Первый — за 6 ч, второй — за 12 ч.

9. $\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. Указание. Введите систему координат с началом в вершине данной пирамиды и с осями «по ребрам». Далее см. задачу 14 в «Геометрии 10».

10. $\dfrac{3\sqrt{3}\pi}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}(2\cos\alpha + 1)^2}$.

Физика

1. Выгоднее затормозить, поскольку длина тормозного пути вдвое меньше радиуса поворота.

2. $h = R/3$.

3. $p = \rho g h \dfrac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1}$, где h — высота ртутного столбика, ρ — плотность ртути, l_1 (l_2) — длина воздушного столба, когда трубка стоит вертикально отверстием вверх (вниз).

4. $\sigma = \alpha E(t_2 - t_1) \approx 1{,}8 \cdot 10^8$ Н/м².

5. $|\vec{v}| = \dfrac{mRT}{p\mu S_{\text{т}}} = 1{,}55$ м/с.

6. $R_{\min} = \dfrac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m|\vec{v}|^2} = 0{,}54$ м.

7. $n = \dfrac{mgd}{e\Delta\varphi} \approx 2 \cdot 10^3$.

8. $I = \dfrac{\mathscr{E} - |\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|}{R + r} \approx 1$ А.

9. Зеркало надо расположить под углом 66° или 24° к поверхности стола.

10. $U_{\min} = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right) = 2{,}2$ В.

Задачи на геометрический смысл производной

(см. «Квант» № 2)

1. В точке с абсциссой $x = 1$ графики функций не пересекаются, но имеют в соответствующих точках параллельные между собой касательные.

2. Например: а) рис. 3, б) рис. 4.

3. Согласно условиям 1, 2 (перед задачей 6) составляем систему

$$\begin{cases} x_0^3 - x_0 + 1 = 3x_0^2 - 4x_0 + a, \\ 3x_0^2 - 1 = 6x_0 - 4. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_0 = 1$. Тогда из первого уравнения следует $a = 2$.

4. Пусть вершина подвижной параболы имеет абсциссу $a > 0$ (рис. 5). Тогда уравнение параболы имеет вид $x = y^2 + a$, а ее верхней части $y = \sqrt{x - a}$. Согласно тем же условиям 1, 2 имеем

$$\begin{cases} \sqrt{x_0 - a} = x_0^2, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x_0 - a}}\, 2x_0. \end{cases}$$

Перемножая уравнения системы, получим $2x_0^3 = \dfrac{1}{2}$, откуда $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Тогда $y_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$; $a = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

5. Уравнение параболы имеет вид $x = ay^2 - 2$, где $a > 0$, а ее верхней части — $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{a}}$. Из тех же условий 1, 2

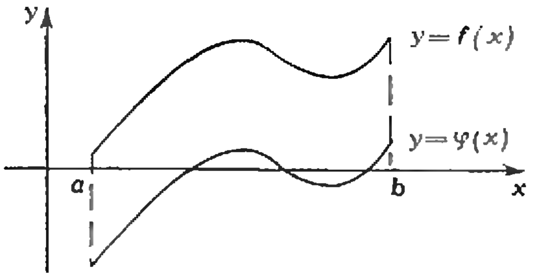


Рис. 3.

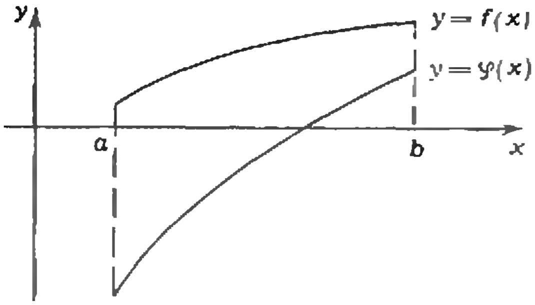


Рис. 4.

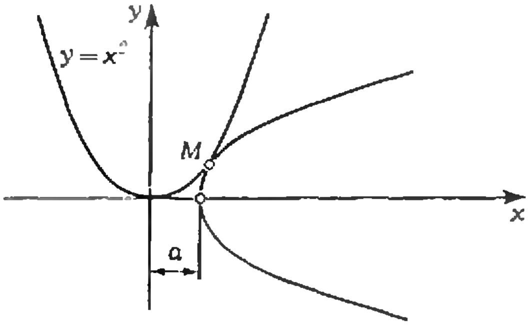


Рис. 5.

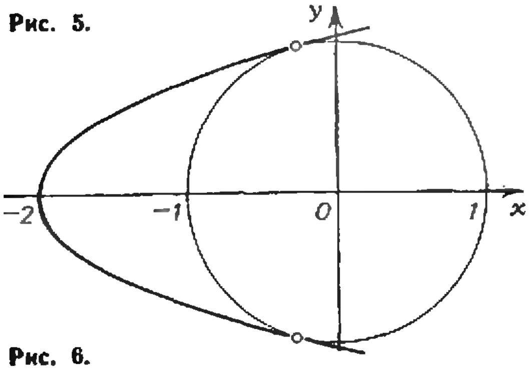


Рис. 6.

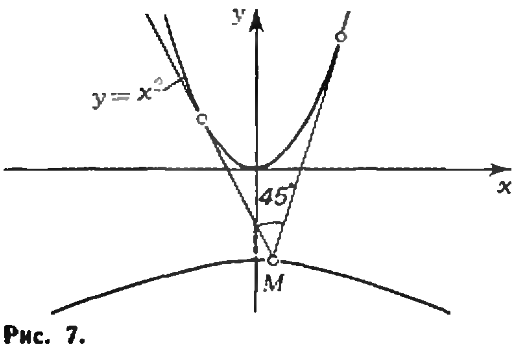


Рис. 7.

имеем

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x_0+2}{a}}=\sqrt{1-x_0^2},\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{a}\,\sqrt{x_0+2}}=-\dfrac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}.\end{cases}$$

Перемножая соответственно левые и правые части уравнений, получим $x_0=-\frac{1}{2a}$.

Подставляя значение x_0 в первое уравнение, получим $4a^2-8a+1=0$, откуда $a=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $-1\leqslant x_0<0$, то есть $-1\leqslant-\frac{1}{2a}<0$, то должно быть $a\geqslant\frac{1}{2}$. Следовательно, значение $a=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ не подходит. Итак, касаться окружности будет парабола $x=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y^2-2$ (рис. 6).

6. Обозначим через $M(X;Y)$ произвольную точку искомой кривой (рис. 7). Пусть прямая, проходящая через эту точку, касается параболы в точке $(x_0;\,x_0^2)$. Тогда $x_0=X\pm\sqrt{X^2-Y}$ (см. решение задачи 4). Угловые коэффициенты соответствующих касательных следующим образом выразятся через X и Y: $K_1=2(X+\sqrt{X^2-Y})$; $K_2=2(X-\sqrt{X^2-Y})$. Вычислим тангенс угла между касательными и приравняем его к $\operatorname{tg}45^\circ=1$:

$$1=\frac{K_2-K_1}{1+K_1\cdot K_2}=\frac{-4\sqrt{X^2-Y}}{1+4Y}. \tag{1}$$

Разрешим полученное уравнение относительно Y:

$$(1+4Y)^2=16(X^2-Y),$$

$$Y=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{2}+X^2}.$$

Нетрудно проверить, что условию задачи удовлетворяет лишь уравнение $Y=-\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{1}{2}+X^2}$, так как из (1) следует, что $Y\leqslant-\frac{1}{4}$. Второе же уравнение $Y=-\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{1}{2}+X^2}$ определяет кривую, из любой точки которой парабола видна под углом 135°.

7. Геометрическая модель задачи: найти точку пересечения прямых, касающихся параболы $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$ в точках с абсциссами t_1 и t_2.

8. Геометрическая модель данной задачи, очевидно, выглядит следующим образом: в какой точке t_0 прямая,

проходящая через точку $(t_1;\ s_1)$, может касаться параболы $s = \frac{at^2}{2}$? Метод решения этой задачи рассмотрен в задаче 4. Отметим лишь, что аналитическое решение приводит к двум значениям t_0, одно из которых приходится отбросить, так как оно больше, чем t_1, и поэтому не подходит по смыслу нашей задачи. Из геометрических соображений ясно, что если $s_1 > \frac{at_1^2}{2}$, то нет решений. Это тот случай, когда расстояние s_1 настолько велико, что ракета за время t_1 не успеет его пройти, даже не отключая двигателя.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. Задачи такого типа удобно решать, используя таблицу. Числа, проставленные в клетках таблицы, обозначают номер шага решения, на котором доказывается, что данная буква не может принять некоторое значение или же принимает его (тогда это значение выделяется цветом).

1. Поскольку имеются все пять *частных произведений* (*ЧП*) и все они отличны от множимого, множитель не содержит цифр 0 и 1. 2. Четвертое *ЧП*, полученное при умножении на цифру Е≠1, начинается с цифры Е; следовательно, первая цифра множимого Л=1. 3. Остальные *ЧП* начинаются с цифр, отличных от соответствующих цифр множителя, на которые производилось умножение. Это означает, что Е — наименьшая из цифр множителя, в частности Е < И. Отсюда следует, что Е = 2, иначе множимое превысило бы $14 \cdot 10^4$, и четвертое *ЧП* начиналось бы не с буквы Е. 4. И (вторая цифра множимого) меньше пяти, иначе бы четвертое *ЧП* начиналось бы не с цифры 2. 5. Из сопоставления первых цифр *ЧП* с соответствующими цифрами множителя следует: 5_1. Т > И; 5_2. В > Т; 5_3. К > В, 5_4. А > К. 6. Так как А (младшая цифра второго *ЧП*) получена при умножении А на К, а К ≠ 1, получаем А ≠ 7 и А ≠ 9. Кроме того, А не может быть и нулем. Таким образом, остается единственное решение: А = 8 и К = 6. 7. Учитывая 5_3, получаем В = 5. 8. Учитывая 5_2, находим Т = 4. 9. Учитывая 5_1, находим И = 3. 10. С (первая цифра результата) получена сложением К с переносом из предыдущего разряда, который не может быть больше 1, отсюда С = К + 1 = 7. 11. Все цифры сомножителей найдены. Это позволяет найти значения оставшихся двух букв: О = 9 и Р = 0.

Расшифрованные слова: ВОЛК ЛИСА КРОЛИК КРОТ ОСЕЛ ВОЛ КОРОВА КИТ СОВА АИСТ КЛЕСТ СОРОКА ТЕТЕРЕВ СОКОЛ.

2. После слова ЁКОНТРГИ Лингвист напишет слово ТИГРЁНОК; после ИЁНГТКОР — слово ИЁНГОРТК, после ИГКОНТЁР — слово ИРГЁТНОК. Последним словом в словаре, разумеется, будет слово КОНТЁРГИ.

3. 3 табуретки и 4 стула. Указание. Нужно решить в натуральных числах такое уравнение: $5x + 6y = 39$.

Таблица

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	6	2	3	5_4	5_4	5_4	5_4	6	6	6
В	1	1	3	5_2	5_2	7	6	7	6	7
Е	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
И	1	1	3	9	8	4	4	4	4	4
К	1	1	3	5_3	5_3	5_3	6	6	6	6
Л	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
О	11	2	3	9	8	7	6	10	6	11
Р	11	2	3	9	8	7	6	10	6	11
С	10	2	3	9	8	7	6	10	6	10
Т	1	1	3	5_1	8	7	6	8	6	8

4. Нужно рассмотреть три случая:

а) Эскалатор неподвижен. Тогда оба человека насчитывают одинаковое число ступеней.

б) Эскалатор движется, люди бегут по движению. В этом случае больше ступеней насчитывает бегущий быстрее.

в) Эскалатор движется, люди бегут против движения. В этом случае больше ступеней насчитывает отстающий (если, например, он движется со скоростью, равной по абсолютной величине скорости эскалатора, то он, оставаясь на одном месте, насчитывает бесконечно много ступеней).

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин,
Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова,
В. Чернов, В. Шептовицкий

Зав. редакцией Л. Чернова

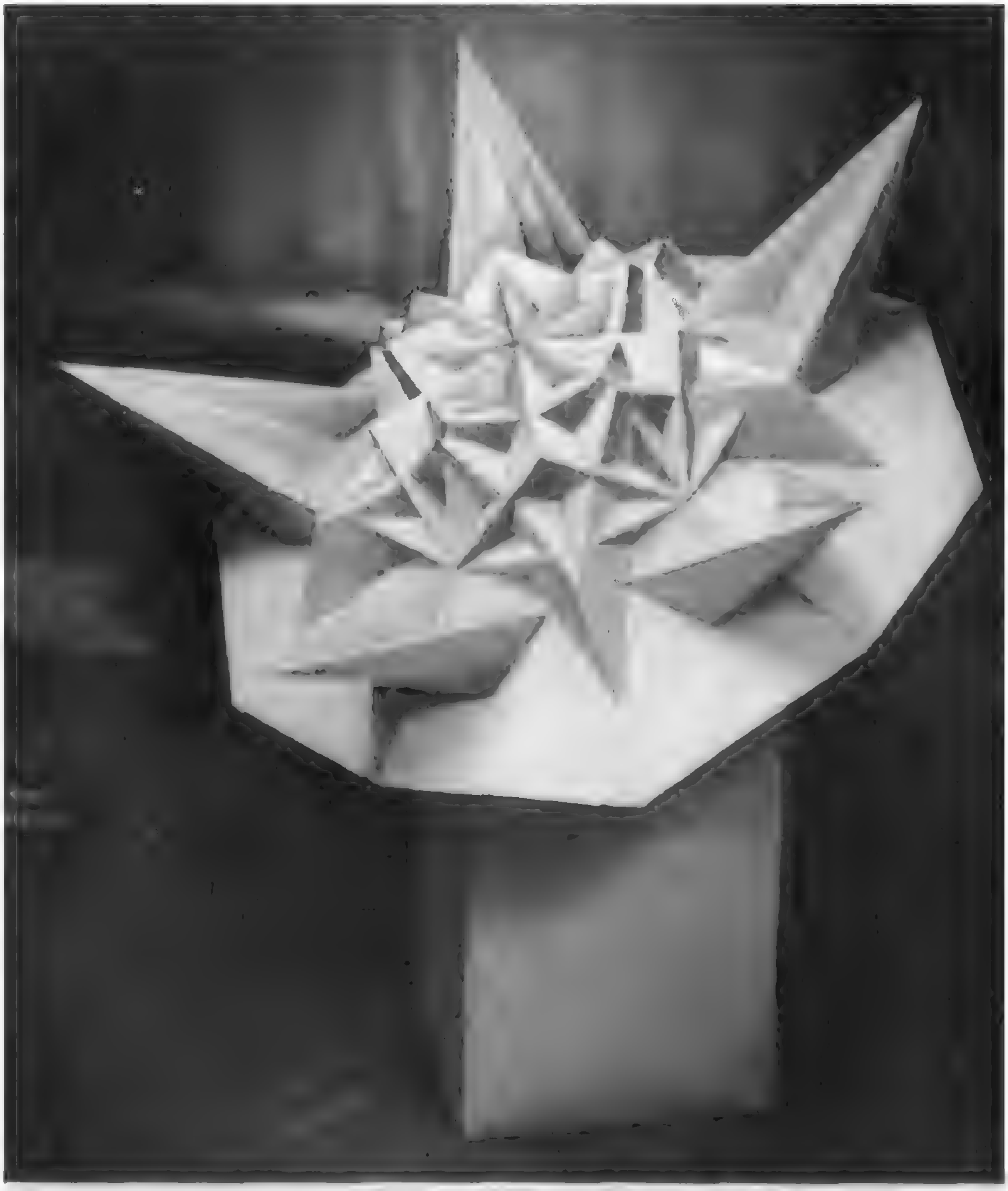
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 29/I—79 г.
Подписано в печать 13/III—79 г.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,86. Т-06181
Цена 30 коп. Заказ 159 Тираж 286 718 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Эта «летающая тарелка» — близкий родственник многогранника, модель которого была показана на второй странице обложки «Кванта» № 1. Подробнее см. четвертую страницу обложки этого номера.

В. Гамаюнов

Красивый муаровый узор на первой странице обложки получен с помощью ЭВМ.

Муаровые узоры возникают при наложении двух семейств линий, каждое из которых содержит близко расположенные непересекающиеся линии. При наложении линии двух семейств должны пересекаться под небольшими углами. Тогда расстояние между полосами будет существенно больше расстояний между линиями семейства. В этих условиях от небольшого смещения линий одного из семейств положение полос узора может сильно измениться. Поэтому вычертить вручную муаровый узор очень сложно. Для этой цели лучше применить ЭВМ и управляемый от нее графопостроитель.

Воспроизведенный на обложке узор выполнен системой графического отображения АЛГРАФ. Одно из семейств линий — параллельные равномерно расположенные прямые, другое — дуги синусоид, амплитуда и длина волны которых меняются по квадратичному закону.

Ю. Котов

ПЕРВЫЕ СОВЕТСКИЕ «ЛУННИКИ»

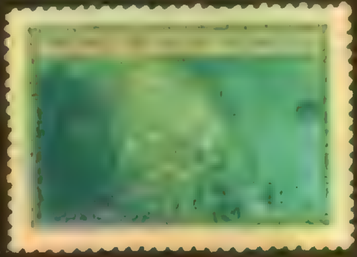
Двадцать лет назад, 2 января 1959 г., в Советском Союзе был осуществлен успешный запуск космической ракеты к Луне. Впервые в истории человечества был создан летательный аппарат, превысивший вторую космическую скорость. Последняя ступень ракеты весом 1472 кг пролетев вблизи Луны и стала первой искусственной планетой солнечной системы. Научная аппаратура, установленная на ней, исследовала корпускулярное излучение Солнца, космические лучи, метеорные частицы и магнитные поля в межпланетном пространстве.

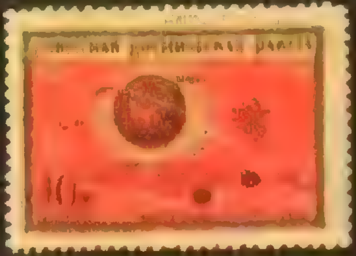
— 12 сентября 1959 г. к Луне стартовала вторая советская космическая ракета. 14 сентября она достигла поверхности Луны. Во время полета была получена ценная научная информация о физических явлениях, происходящих в ближнем космосе и окололунном пространстве.

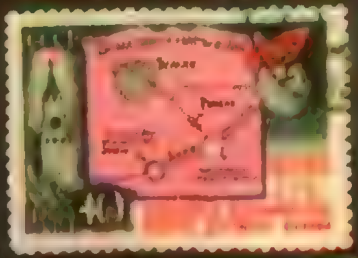
— 4 октября 1959 г. третья советская космическая ракета направилась к Луне. 7 октября ее научная аппаратура в течение 40 минут фотографировала обратную сторону Луны, невидимую с Земли. Обработка фотопленок была автоматически проведена на борту ракеты, а полученные изображения лунной поверхности передавались на Землю при помощи специальной радиотехнической системы. Так было положено начало картографированию Луны.

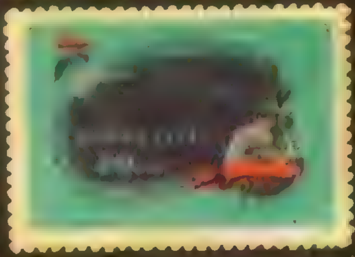
— Эти выдающиеся события нашли свое отражение в отечественной и зарубежной филателии. В Советском Союзе запуск первой и второй ракет к Луне был отмечен выпуском серий, состоящих из двух марок. Третьей ракете были посвящены три марки. Все они в хронологической последовательности изображены на этой странице. Здесь же помещены и марки социалистических стран, рассказывающие об этих полетах.

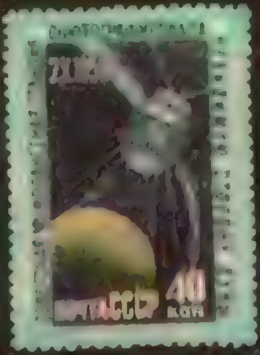
В. Рудов

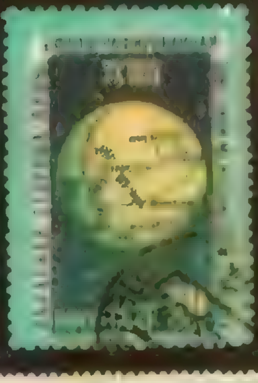


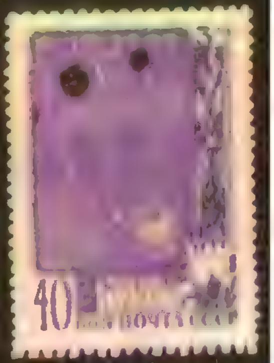


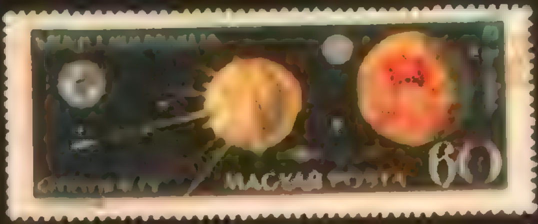


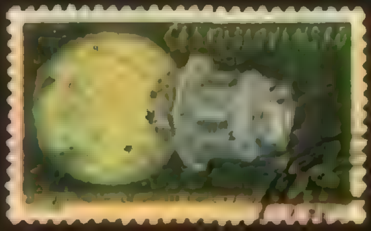


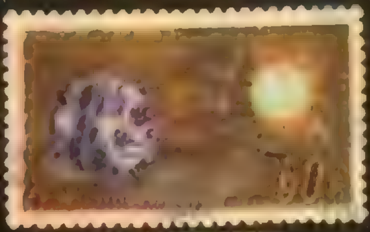


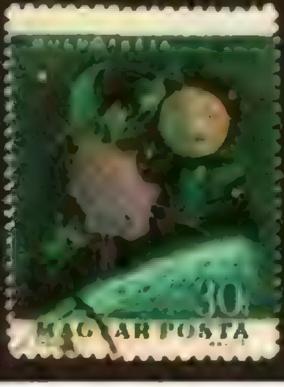


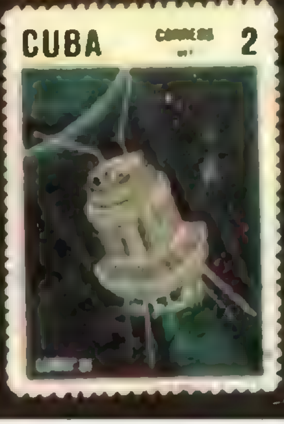










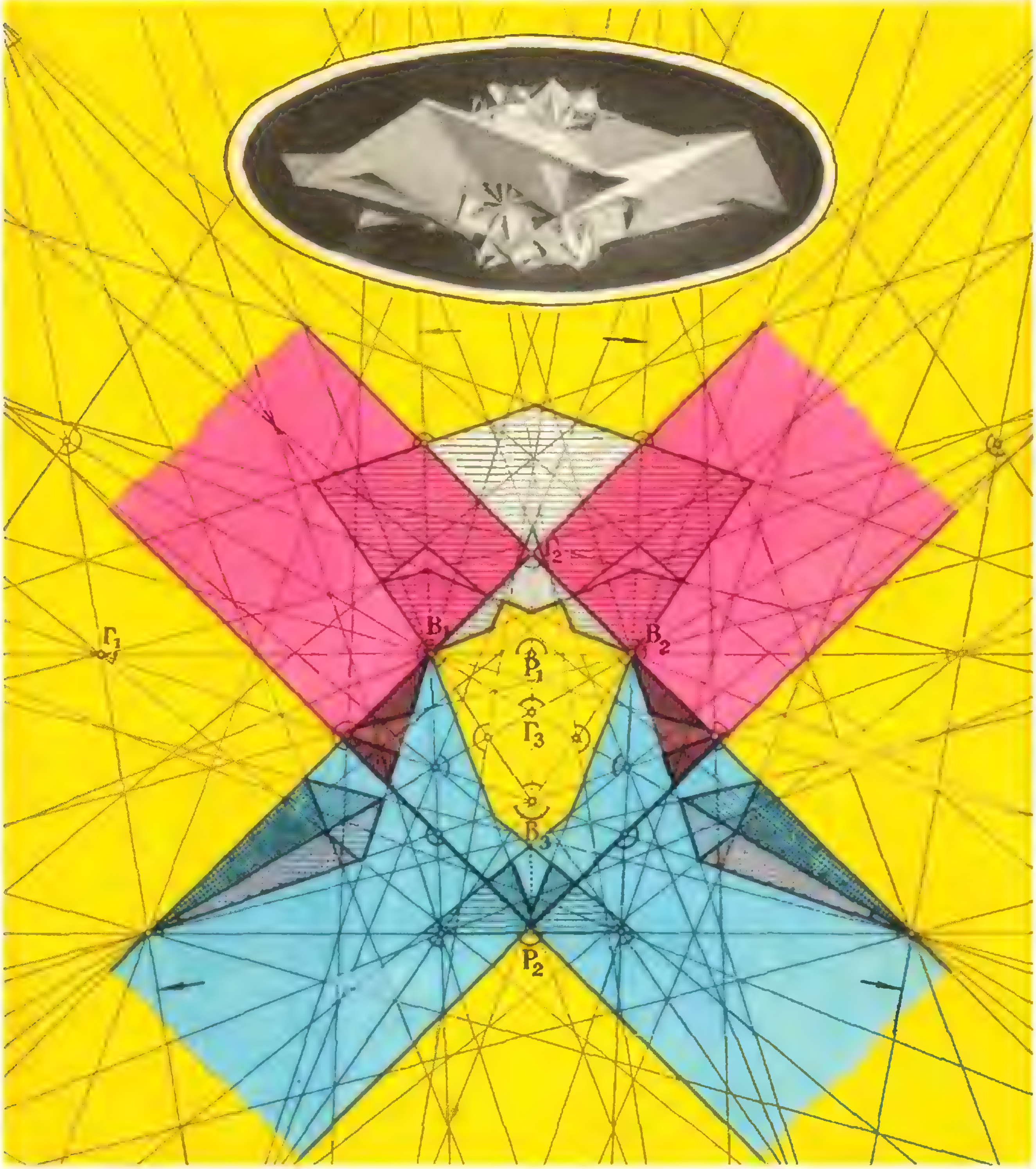


Цена 30 коп.

Индекс 70465

На второй странице обложки «Кванта» № 1 была помещена фотография модели многогранника, состоящего из десяти симметрично расположенных пересекающихся кубов. «Летающая тарелка» на второй странице обложки этого номера журнала получена продолжением его граней. На эпюре внизу показаны грани этой «тарелки». Постарайтесь отыскать на эпюре грани еще одной «тарелки», показанной ниже. (О том, как пользоваться эпюрами, см. «Квант» № 3, с. 50)

В. Гамаюнов



НОМЕР
5

Основан в 1970 году

Квант

5
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. И. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *Б. Голубов.* Что такое ряд Тейлора?
8 *Л. Тарасов.* Открытие нейтрона
15 *Т. Черногор.* После захода Солнца

Математический кружок

18 *М. Севрюк.* Вариации на тему классических неравенств

Задачник «Кванта»

22 Задачи М561—М565; Ф573—Ф577
24 Решения задач М513, М514; Ф514, Ф521—Ф525

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
32 *В. Тихонов.* Опыты с воздушными шариками
33 *А. Дозоров.* Шарик, который не сдувается

Практикум абитуриента

34 *М. Крайзман.* Заменим фигуру
39 *Н. Берюлева.* Построение изображений в линзах и сферических зеркалах
44 *С. Алешин и др.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
47 *В. Ильин и др.* Новосибирский государственный университет
49 *Л. Асламазов.* Московский институт стали и сплавов
51 **Спрашивайте — отвечаем**

Рецензии, библиография

55 *Г. Луканкин, М. Смолянский.* Подарок учителю и школьнику
56 **Ответы, указания, решения**

Наша обложка *(с. 53, 54)*

Смесь *(с. 21, 38, 43)*

На первой
странице обложки
8 спиралей
закручиваются
к центру
по ходу
часовой стрелки,
а [illegible] спиралей — против.
5 и 8 —
соседние члены
последовательности
Фибоначчи.
Подробности на с. 53.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$
$e^x =$

Б. Голубов

Что такое ряд Тейлора?

Имя английского математика Брука Тейлора навсегда вошло в историю математики благодаря открытию, которое он сделал в 1715 году, в возрасте 29 лет. Что это за открытие? Об этом мы и постараемся рассказать.

Посмотрите на рисунки 1—3. На них изображены графики функций

$$y=e^x,\quad y=\frac{1}{1+x}\quad \text{и}\quad y=\ln(1+x).$$

Под номером 1 на каждом из этих рисунков изображена касательная к соответствующему графику в точке $x=0$, то есть график некоторой линейной функции $y=ax+b$ (проверьте, что ими будут соответственно функции $y=1+x$, $y=1-x$ и $y=x$). Под номером 2 на каждом из этих рисунков изображен график такого квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$, который вблизи точки $x=0$ прилегает к графику соответствующей функции «теснее» всех других квадратных трехчленов. Точнее, речь идет о таких квадратных трехчленах, которые в точке $x=0$ совпадают с соответствующими функциями вместе со своими производными первого и второго порядка. В этих случаях говорят, что графики этих квадратных трехчленов имеют с соответствующими графиками *касание второго порядка* (проверьте, что такими будут соответственно квадратные трехчлены $y=1+x+\frac{x^2}{2}$, $y=1-x+x^2$ и $y=x-\frac{x^2}{2}$.)

Наконец, под номером 3 на рисунках 1—3 изображены графики функций $y=ax^3+bx^2+cx+d$, которые имеют с графиками соответствующих кривых в точке $x=0$ *касание третьего порядка* (легко сообразить, что это значит; проверьте, что такими будут соответственно функции

$$y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},$$

$$y=1-x+x^2-x^3 \text{ и } y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\Big).$$

Обратимся теперь к рисунку 4. На нем изображены график функции $y=\sin x$ и графики многочленов, имеющие с графиком синуса в точке $x=0$ касание первого, третьего и пятого порядков (проверьте, что это — соответственно, многочлены $y=x$, $y=x-\frac{x^3}{6}$ и $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\Big)$.

Как видно из этих рисунков, чем выше порядок касания, тем теснее график многочлена примыкает вблизи точки $x=0$ к графику соответствующей функции.

Основная идея Тейлора состояла в том, чтобы для «произвольной» функции (будем для простоты считать ее заданной в окрестности точки $x=0$) подобрать такой «многочлен бесконечного порядка» $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$, который имел бы с данной функцией в точке $x=0$ касание «бесконечного порядка».

Оказалось, что для очень широкого класса функций это возможно и, что еще более важно, очень часто этот «многочлен» — его называют *рядом Тейлора* функции — совпадает с выбранной функцией на некотором промежутке, содержащем точку $x=0$.

Знание ряда Тейлора функции очень полезно, если нужно вычислить ее значение: с его помощью функцию, как правило, можно вычислить с любой наперед заданной точностью.

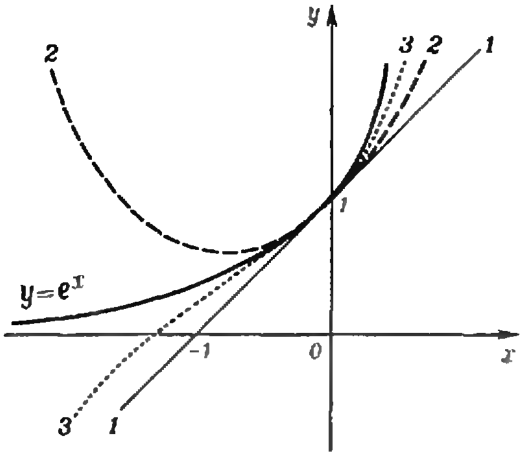


Рис. 1.

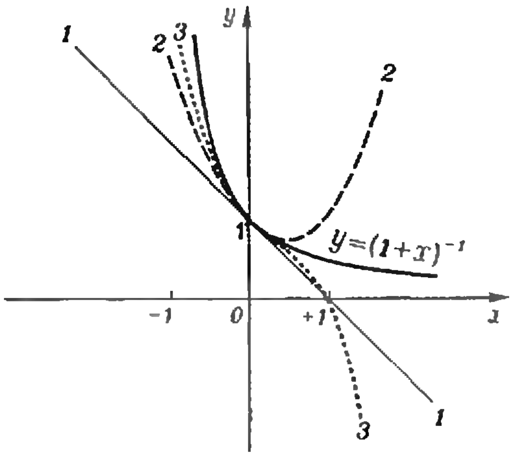


Рис. 2.

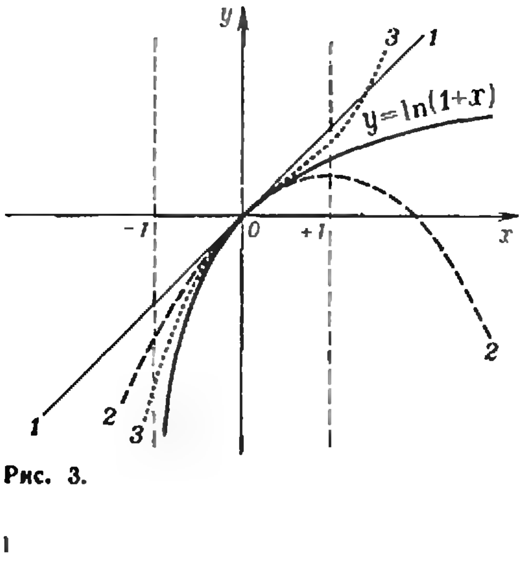


Рис. 3.

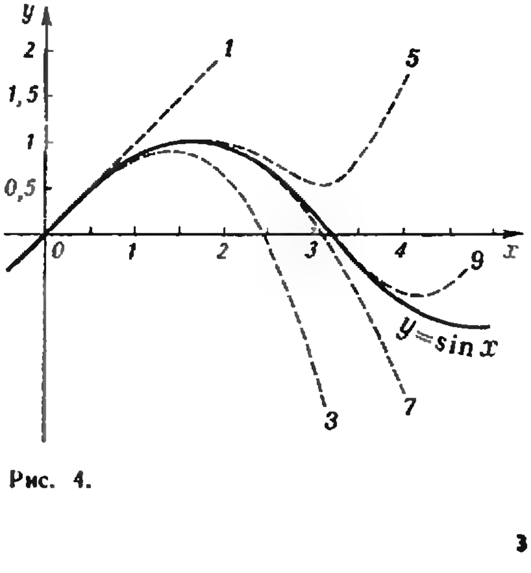


Рис. 4.

В этой статье мы получим ряды Тейлора для функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=e^x$ и $y=\ln(1+x)$.

Необходимые сведения из анализа

Прежде всего нам понадобится формула Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

где функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, а функция F является для нее первообразной на этом отрезке.

Далее, из геометрического смысла интеграла вытекает, что $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$, если $f(x)\geqslant 0$ на $[a;\ b]$ (рис. 5). Отсюда легко следует, что если две непрерывные функции на отрезке $[a;\ b]$ удовлетворяют неравенству $f(x)\leqslant g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$, то есть неравенства, связывающие непрерывные функции, можно интегрировать, получая неравенства того же знака.

Наконец, нам понадобится равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0, \qquad (1)$$

где x — любое действительное число.

Докажем его. Найдем по данному x такое натуральное число N, что $\frac{|x|}{N+1}\leqslant\frac{1}{2}$. Тогда для всех $n>N$ будут выполнены неравенства

$$0\leqslant\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{N}\times$$

$$\times\frac{|x|}{N+1}\cdot\ldots\cdot\frac{|x|}{n}\leqslant\frac{|x|^N}{N!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}=$$

$$=\frac{|x|^N\cdot 2^N}{N!}\cdot 2^{-n}.$$

Поскольку N фиксировано, то при $n\to\infty$ предел последовательности, стоящей в правой части этих неравенств, равен нулю. Отсюда и следует равенство (1).

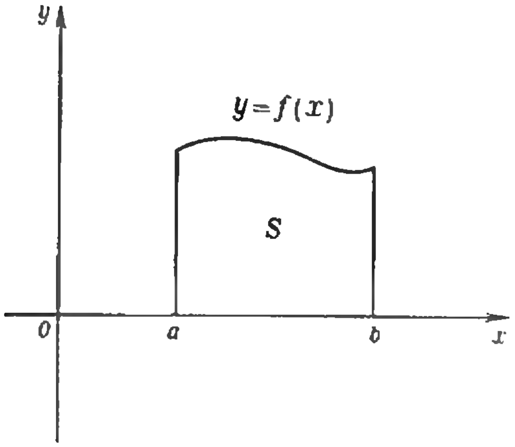


Рис. 5. $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Представление функций $\sin x$ и $\cos x$ рядами Тейлора

Пусть фиксировано $x>0$. Тогда, интегрируя неравенство $\cos t\leqslant 1$ по отрезку $[0;\ x]$, получим, что

$$\int_0^x \cos t\,dt\leqslant\int_0^x 1\,dt.$$

Но так как $\sin t$ является первообразной для $\cos t$, а t — первообразной для 1, предыдущее неравенство на основании формулы Ньютона — Лейбница можно записать в виде $\sin x\leqslant x$. Это неравенство можно было бы написать сразу, но мы хотели объяснить принцип получения дальнейших неравенств и потому привели его доказательство.

Интегрируя неравенство $\sin t\leqslant t$ по отрезку $[0;\ x]$, получим, что

$$\int_0^x \sin t\,dt\leqslant\int_0^x t\,dt.$$

Поскольку функция $-\cos t$ является первообразной для $\sin t$, а $\frac{t^2}{2}$ — первообразной для t, предыдущее неравенство на основании формулы Ньютона — Лейбница примет вид

$$1-\cos x\leqslant\frac{x^2}{2}\ \text{ или }\ \cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[0;\ x]$ и снова пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, придем к неравенству $\sin x\geqslant x-\frac{x^3}{3!}$.

Продолжая процесс последовательного интегрирования (и пользуясь методом математической индукции), легко доказать неравенства

$$\begin{aligned} \cos x &\leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{4n}}{(4n)!}, \\ \sin x &\leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}, \\ \cos x &\geqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots-\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}, \\ \sin x &\geqslant x-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $n=0,\ 1, \ldots,\ x>0$.

Объединяя первое и третье из неравенств (2), получим

$$1-\frac{x^2}{2!}+\ldots-\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} \leqslant \cos x \leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{4n}}{(4n)!}. \qquad (3)$$

Левый многочлен можно рассматривать как приближенное значение $\cos x$ с недостатком, а правый — как приближенное значение $\cos x$ с избытком (рис. 6). Но разность между правым и левым многочленами из неравенств (3) равна $\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}$, и при $n \to \infty$ она стремится к нулю на основании (1). Поэтому

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots-\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{4n}}{(4n)!}\right).$$

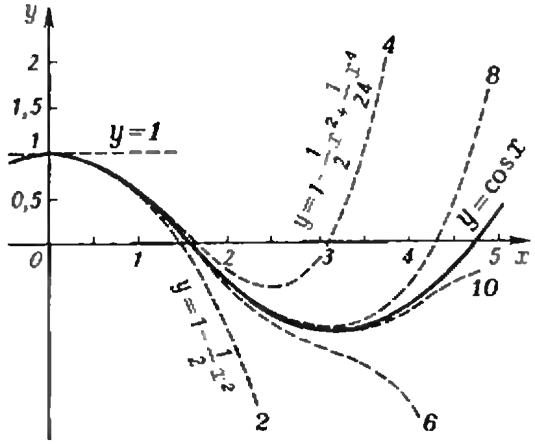


Рис. 6.

Этот результат кратко записывают в виде

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots \qquad (4)$$

Правая часть этого равенства и называется *рядом Тейлора функции* $\cos x$.

При доказательстве неравенств (3), а значит, и равенства (4), предполагалось, что $x>0$. Но они справедливы и для $x<0$ в силу четности всех входящих в них функций. Наконец, они легко проверяются и для $x=0$ и, таким образом, справедливы при всех действительных x.

Аналогично, для $x>0$ из (2) имеем

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}\right).$$

Этот результат записывают в виде

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots, \qquad (5)$$

а выражение в правой части этого равенства называют *рядом Тейлора функции* $\sin x$.

Заметим, наконец, что равенство (5) остается справедливым и для $x \leqslant 0$ в силу нечетности всех входящих в него функций.

Разложение функции e^x в ряд Тейлора

Известно, что $(e^x)'=e^x$, откуда следует, что при любой постоянной C функция e^x+C является первообразной для e^x. Кроме того, нам важно знать, что $e>1$ ($e=2{,}718\ldots$).

Поскольку $e>1$, то $1 \leqslant e^t \leqslant e^a$ для всех $t \in [0;\ a]$. Интегрируя это неравенство по отрезку $[0;\ x]$, где $0 \leqslant x \leqslant a$, получим $x \leqslant e^x-1 \leqslant e^a x$ или $1+x \leqslant e^x \leqslant 1+e^a x$. Эти неравенства также можно проинтегрировать по отрезку $[0;\ x]$, заменив в них предварительно x на t. В результате получим

$$x+\frac{x^2}{2!} \leqslant e^x-1 \leqslant x+e^a\frac{x^2}{2!},$$

или

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + e^a \frac{x^2}{2!} \ (0 \leqslant x \leqslant a).$$

Продолжая процесс последовательного интегрирования, получим неравенства

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^a, \quad (6)$$

где $n = 0, 1, \dots, 0 \leqslant x \leqslant a$.

Таким образом, для каждого значения x из отрезка $[0; a]$ получено приближенное значение для функции e^x с недостатком и с избытком в виде многочленов степени n. Разность между правым и левым многочленами в неравенствах (6) равна $(e^a - 1)\frac{x^n}{n!}$; при $n \to \infty$ она стремится к нулю на основании (1). Поскольку a — произвольное положительное число, из неравенств (6) следует, что при любом $x \geqslant 0$

$$e^x = \lim_{n \to \infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Запишем это в виде равенства

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (7)$$

Выражение в правой части (7) называется *рядом Тейлора функции* e^x.

Упражнение 1. Обоснуйте равенство (7) при $x < 0$. (Указание. Воспользуйтесь тем, что $e^x < 1$ при $x < 0$.)

Разложение функции ln (1 + x) в ряд Тейлора

Функция $\ln(1+x)$ определяется как $\log_e(1+x)$, то есть основание логарифма равно e. Поскольку $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$ при всех $x > -1$, то для $\frac{1}{1+x}$ функция $\ln(1+x) + C$ является первообразной на интервале $]-1; +\infty[$ при любой постоянной C. Этим мы воспользуемся ниже. Заметим, что при $t \geqslant 0$ справедливы неравенства

$$1 - t + \dots + t^{2n-2} - t^{2n-1} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + \dots - t^{2n-1} + t^{2n}. \quad (8)$$

(Обоснуйте их самостоятельно.)

Интегрируя неравенства (8) по отрезку $[0; x]$, где $x \geqslant 0$, и пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, получим неравенства

$$x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (9)$$

в которых $x \geqslant 0$. Разность между правым и левым многочленами равна $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то она стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \dots \quad (10)$$

для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Упражнение 2. Убедитесь, что это равенство справедливо и для $-1 < x < 0$. (Указание. Воспользуйтесь тем, что при $t > -1$ $1 - t + \dots + t^{2n-2} - t^{2n-1} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 - t + \dots - t^{2n-1} + \lambda t^{2n}$, если $\lambda > \frac{1}{1+t}$.)

Выражение в правой части равенства (10) и называется *рядом Тейлора функции* $\ln(1+x)$.

При нахождении рядов Тейлора функций $\sin x$, $\cos x$, e^x и $\ln(1+x)$ мы использовали различные искусственные приемы. На самом деле существует единый метод нахождения ряда Тейлора функции — он основан на ее последовательном дифференцировании. С ним вы можете познакомиться по замечательной книге А. Я. Хинчина «Восемь лекций по математическому анализу» (М., «Наука», 1977).

Что дают полученные оценки?

Полученные выше оценки функций $\sin x$, $\cos x$, e^x и $\ln(1+x)$ позволяют вычислять их в произвольной точке с любой требуемой точностью.

Например, если требуется узнать значение функции $\sin x$ в точке $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ с погрешностью, не превосходящей числа $\varepsilon > 0$, то найдем сначала такое целое $n \geqslant 0$, что $x^{4n+1}/(4n+1)! < \varepsilon$. Тогда значения многочленов из неравенств (2) в точке x дадут нам значение $\sin x$ с точностью до ε, одно с недостатком, другое — с избытком. Вычисление же ее значений в других точках с помощью формул приведения сводится к вычислениям в точках отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Немного истории

Сочинение Б. Тейлора «Methodus incrementorum directa et inversa» вышло в свет в 1715 г. в Лондоне на латинском языке. Тейлор был современником Ньютона и Лейбница — основателей дифференциального и интегрального исчисления. Его метод был основан на формуле Ньютона, которая дает приближенное представление функции на заданном отрезке в виде многочлена степени n, совпадающего с данной функцией в $n+1$ равноотстоящих точках отрезка (в том числе и в его конечных точках). Тейлор совершил переход к пределу в формуле Ньютона при $n \to \infty$ совершенно формально, не заботясь об обосновании предельного перехода.

По этому поводу видный немецкий ученый и историк математики Ф. Клейн писал: «В сущности, Тейлор здесь оперирует с бесконечно малыми (дифференциалами) гораздо, если можно так выразиться, легкомысленнее, чем это когда-либо делали последователи Лейбница; интересно отметить, что он еще... на глазах Ньютона так уклонился от метода пределов, которым пользовался последний» *).

Впоследствии многие математики из разных стран занимались обоснованием метода Тейлора: Лагранж, Коши, Шлёмильх, Рош, Пеано и другие. Благодаря их усилиям метод представления функций рядами Тейлора и метод приближенного изображения функций многочленами получили полное обоснование.

В настоящее время понятие ряда Тейлора является одним из основных в высшей математике. Ряды Тейлора или их конечные суммы находят применение почти всюду, где имеется необходимость точного или приближенного изображения плавно меняющихся функций.

Задачи

1. Пользуясь равенством

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad (-\infty < x < \infty),$$

доказать, что при $x \geqslant 0$ и $n = 0, 1, \ldots$ справедливы неравенства

$$x - \frac{x^3}{3} + \ldots - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant x - \frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

Если же $x < 0$, то в этих неравенствах знак «$\leqslant$» следует заменить на «$\geqslant$».

2. Доказать, что для $-1 < x \leqslant 1$ справедливо равенство

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

3. Доказать равенство $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} +$

$$+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

4. Доказать равенство $\ln 2 = 1 -$

$$- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

5. Доказать равенство

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots$$

6. Доказать равенство

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots,$$

где $-1 < x \leqslant 1$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

---

*) Феликс Клейн. Элементарная математика с точки зрения высшей, том. I. Арифметика, алгебра, анализ (М.—Л., ГТТИ, 1933), с. 347—348.

Л. ТАРАСОВ

ОТКРЫТИЕ НЕЙТРОНА

> Всех нас весьма интересует вопрос о строении ядра и возможный ключ для его решения, появившийся благодаря открытию нейтрона...
>
> Нильс Бор (1932 год).

Мысль о возможном существовании нейтрона была впервые высказана в 1920 году великим английским физиком Резерфордом. Нейтрон представлялся Резерфорду в виде «нейтрального дублета» — тесного соединения протона и электрона...

Нейтронная гипотеза Резерфорда

Резерфорд пришел к нейтронной гипотезе, размышляя над проблемой структуры атомных ядер. Например, было известно, что атом гелия имеет 2 электрона и, следовательно, ядро этого атома должно содержать 2 протона (ведь атом нейтрален). Однако масса атома гелия не в два, а в четыре раза больше массы атома водорода. В связи с этим возникала мысль, что ядро гелия составляют 2 электрона и соответственно 4 протона. С точки зрения Резерфорда, ядро гелия состояло из 2 протонов и 2 нейтральных дублетов. Атом кислорода, например, имеет 8 электронов, а его масса в 16 раз больше массы атома водорода; поэтому можно было предположить, что ядро кислорода содержит 16 протонов и 8 электронов (по Резерфорду — 8 протонов и 8 нейтральных дублетов).

Почему Резерфорд представлял нейтрон в виде «дублета» из протона и электрона, а не в виде самостоятельной нейтральной частицы? Это можно понять, если вспомнить, что в 20-е годы нашего столетия были известны только три элементарные частицы — электрон, протон, фотон; в то время было принято считать, что эти три частицы полностью исчерпывают весь набор «элементарных кирпичиков», из которых построена материя. Рассматривая гипотетический нейтрон как «объединение» протона с электроном, Резерфорд тем самым следовал общепринятой концепции. Кроме того, открытая еще в 1898 г. β-радиоактивность ядер, как казалось, вполне определенно указывала на наличие электронов внутри атомных ядер (β-излучение ядер — поток электронов).

Ограниченность нейтронной гипотезы Резерфорда не умаляет ее исторической ценности. Резерфорд сумел заразить идеей «нейтрона» (пусть даже представляемого в виде миниатюрного атома водорода) многих своих учеников. И вполне закономерно, что именно одному из них, Д. Чедвику, удалось действительно открыть нейтрон — не некий «нейтральный дублет» из протона и электрона, а новую элементарную частицу. Это произошло в 1932 г. Открытию предшествовал ряд интереснейших событий в мире физики.

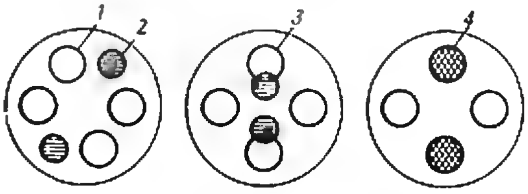
«Изгнание» электрона из атомного ядра

Одно из таких событий произошло в 1924 г., когда французский физик Луи де Бройль предложил сопоставлять с электроном некую *волну*. Длина этой волны λ выражалась через импульс электрона p следующим образом:

$$\lambda = h/p, \qquad (1)$$

где $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с — универсальная физическая постоянная — постоянная Планка. В 1927 г. гипотеза де Бройля (и в частности, формула (1)) получила экспериментальное подтверждение в опытах, обнаруживших дифракцию электронов при прохождении сквозь тонкие металлические пластинки.

Обнаружение у электронов волновых свойств существенно меняло представления физиков о структуре атомного ядра. Теперь стало ясно: электроны в состав атомного ядра не входят — по той причине, что электрон просто не может «поместиться» внутри ядра.



а) б) в)

Условные схемы, иллюстрирующие структуру ядра гелия: *а*) — протонно-электронная модель; *б*) — модель с нейтральными дублетами Резерфорда; *в*) — протонно-нейтронная модель. Обозначения: *1* — протон, *2* — электрон, *3* — нейтральный дублет, *4* — нейтрон.

В самом деле, чтобы поместиться в ядре, электрон должен иметь длину волны λ, не превышающую диаметра d ядра: $\lambda<d$. Используя (1), получаем отсюда неравенство

$$p > h/d. \qquad (2)$$

Минимальное значение импульса электрона, определяемое этим неравенством, очень велико. Действительно, подставив $d \sim 10^{-14}$ м (характерные размеры атомного ядра были оценены в опытах по рассеянию α-частиц, выполненных Резерфордом еще в 1910 г.), получим

$$p \approx 6{,}6 \cdot 10^{-20} \text{ Дж.}$$

Для частицы, масса которой $m \approx 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг, это — огромный импульс. Поэтому для оценки энергии E электрона надо воспользоваться соотношением релятивистской динамики

$$E = pc^2/v, \qquad (3)$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме, v — скорость электрона. (Это соотношение следует из известных релятивистских формул

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 — масса покоя электрона.)

Полагая в рассматриваемом нами случае $v \approx c$, получаем из (3):

$$E \approx pc.$$

Теперь неравенство (2) может быть переписано в виде

$$E > hc/d.$$

Подставив сюда значения h, c и d, получим: $E > 2 \cdot 10^{-11}$ Дж, или $E > 10^8$ эВ (напомним, что 1 эВ$=1{,}6 \times 10^{-19}$ Дж).

Итак, чтобы поместиться внутри атомного ядра, электрон должен иметь энергию не менее 10^8 эВ. При β-распаде ядра эта энергия должна была бы освобождаться. Однако, как показывает опыт, энергия, выделяющаяся при β-распаде ядер, существенно меньше — она не превосходит 10^5—10^6 эВ (в расчете на одно ядро).

Следовательно, приходится признать, что, во-первых, электроны в состав ядер не входят и, во-вторых, электрон при β-распаде ядра рождается в момент акта распада (подобно тому как рождаются фотоны при испускании света атомами).

Впрочем, надо заметить, что несмотря на обнаружение у электрона волновых свойств, вопрос о наличии электронов в ядрах некоторое время продолжал оставаться открытым. Может быть, по той причине, что волновые свойства электрона казались весьма непонятными?

Загадочное излучение

В 1919 г. Резерфорд впервые осуществил искусственное расщепление ядра азота α-частицей. Эта ядерная реакция в современной записи выглядит так:

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + p$$

(${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ — ядро азота, состоящее из 7 протонов и 7 нейтронов; ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ — ядро гелия, или α-частица (2 протона, 2 нейтрона); ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$ — ядро одного из изотопов кислорода (8 протонов, 9 нейтронов); p — протон).

В последующие годы началось интенсивное изучение ядерных реакций, происходящих под действием α-частиц. Было установлено, что многие легкие элементы при обстреле α-частицами испускают протоны. Многие, но не все!

В мае 1930 г. немецкие физики Боте и Бекер обнаружили, что бериллий при обстреле α-частицами испускает не протоны, а какое-то другое излучение, до тех пор не известное. Излучение это не оставляло треков в камере Вильсона; через довольно толстые свинцовые плиты (толщиной 10 см) это излучение проходило, почти не ослабевая. Поэтому было высказано предположение, что это очень жесткое γ-излучение — электромагнитное излучение, кванты которого (γ-кванты) несут огромную энергию.

Загадочным излучением Боте — Бекера заинтересовались французские физики Ирен и Фредерик Жолио-Кюри. Они поставили на пути излучения заслонку из водородсодержащего вещества — парафина — и немедленно получили интереснейший результат: парафиновая заслонка, в отличие от свинцовой, надежно перекрывала излучение Боте — Бекера; при этом из парафина летело в направлении излучения весьма большое число быстрых протонов.

Жолио-Кюри предположили, что протоны — ядра отдачи, появляющиеся в результате столкновения с атомами водорода, имеющимися в парафине, фотонов с очень большой энергией. Протоны «выбиваются» из атомов водорода. Зная энергию протона, можно оценить энергию фотона, «выбившего» этот протон. Жолио-Кюри сделали эту оценку. Энергия протонов была определена по максимальным расстояниям, проходимым ими в воздухе. Затем, на основании законов сохранения импульса и энергии, была дана оценка соответствующей энергии фотона. Значение этой величины оказалось очень большим: $\sim 5 \times \times 10^7$ эВ.

Хотя в общих чертах объяснение явления было дано, признать его удовлетворительным и окончательным было нельзя. Многое оставалось неясным. Откуда берется столь большая энергия фотонов? Почему, охотно передавая свою энергию протонам, фотоны в то же время не желают взаимодействовать с атомами свинца? И тем не менее в своей работе, опубликованной 18 января 1932 г., Ирен и Фредерик Жолио-Кюри продолжали считать, что излучение Боте — Бекера — жесткое электромагнитное излучение. В заключительных строках работы говорилось: «*Итак, настоящими опытами, по-видимому, установлено, что электромагнитное излучение высокой частоты способно освобождать в водородсодержащих веществах протоны и придавать им высокие скорости*».

Джеймс Чедвик (1891—1974).

Открытие нейтрона Чедвиком

Познакомившись с работой Жолио-Кюри, английский физик Д. Чедвик из лаборатории Резерфорда в Кембридже догадался, что французские физики (равно как и немецкие физики Боте и Бекер) имели дело не с жестким электромагнитным излучением, а с нейтронами. Чедвик был учеником Резерфорда; под влиянием учителя он давно и основательно проникся идеей «нейтрона», искал нейтроны, ожидал встретить их в любом новом излучении. Впоследствии он признавался: «Мои мысли, естественно, вертелись вокруг нейтронов».

Чедвик повторил опыты Жолио-Кюри, внеся в них существенное дополнение с целью проверки нейтронной гипотезы: он использовал разные заслонки, содержащие легкие элементы (водород, литий, углерод, азот и другие). Чедвик обнаружил, что загадочное излучение, возникающее при бомбардировке бериллия α-частицами, способно создавать не только протоны, но и другие ядра отдачи — ядра лития, углерода, азота и т. д.

Для измерения энергии ядер отдачи Чедвик воспользовался импульсной ионизационной камерой с усилителем и осциллографом. Ионизационная камера имеет два электрода, между которыми подана разность потенциалов (10^2—10^3 В). Ядро отдачи, пролетая вблизи этих электродов, производит ионизацию атомов газа, наполняющего камеру. Возникающие на пути ядра отдачи ионы и электроны движутся под действием электрического поля к соответствующим собирающим электродам; в результате в цепи ионизационной камеры появляется импульс тока, который может быть усилен и подан на осциллограф. Измеряя величину наблюдаемого на осциллографе импульса, Чедвик определил энергию различных ядер отдачи (протонов, ядер азота и др.). Сравнив затем эти энергии, он пришел к выводу: излучение, возникающее при бомбардировке бериллия α-частицами, есть не что иное, как поток нейтральных частиц с массой, практически равной массе протона.

И вот 27 февраля 1932 г. (то есть спустя всего лишь месяц после опубликования работы Жолио-Кюри) появляется краткое сообщение Чедвика «Возможность существования нейтрона». В сообщении, в частности, говорилось:

«... *Результаты, полученные мною, очень трудно объяснить, исходя из предположения об электромагнитном излучении, если при столкновении должны сохраняться энергия и количество движения. Однако трудности исчезают, если предположить, что излучение состоит из частиц с массой* 1 *и зарядом* 0, *то есть из нейтронов. Можно предположить, что в результате захвата α-частицы ядром Ве образуется ядро* ^{12}*С и испускается нейтрон ... Столкновения этих нейтронов с атомами, через которые они проходят, создают атомы отдачи; наблюдаемая энергия атомов отдачи находится в полном соответствии с такой точкой зрения*».

Рассуждения и довольно простые расчеты Чедвика, основанные на законах сохранения энергии и импульса, весьма поучительны. Попробуем повторить их.

Предположим, что ядро массы m (предполагаемый нейтрон), имеющее скорость $\vec{v}$, испытывает лобовое упругое столкновение с покоящимся ядром массы m'. Законы сохранения энергии и импульса для данного столкновения имеют вид

$$\begin{aligned} mv^2/2 &= mv_1^2/2 + m'v_2^2/2, \\ m\vec{v} &= m\vec{v}_1 + m'\vec{v}_2, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — скорости ядер m и m' после столкновения. Заметим, что векторы $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены вдоль одной прямой. Из этих уравнений найдем скорость ядра отдачи (ядра m'):

$$v_2 = 2vm/(m + m') \qquad (5)$$

(v_2, v — абсолютные значения скоростей). Далее предположим, что в одном случае ядро-мишень имеет массу m' (обозначим его скорость после столкновения как v_2'), а в другом случае — массу m'' (скорость v_2''). Из (5) следует, что

$$v_2'/v_2'' = (m + m'')/(m + m'). \qquad (6)$$

В случае водородсодержащей и азотсодержащей мишеней значения масс ядер отдачи равны соответственно $m' = 1$ и $m'' = 14$. Измерив для этих мишеней энергии ядер отдачи, Чедвик нашел, что $v_2'/v_2'' \approx 7$. В этом случае соотношение (6) приобретает вид

$$(m + 14)/(m + 1) \approx 7,$$

откуда немедленно следует, что $m \approx 1$.

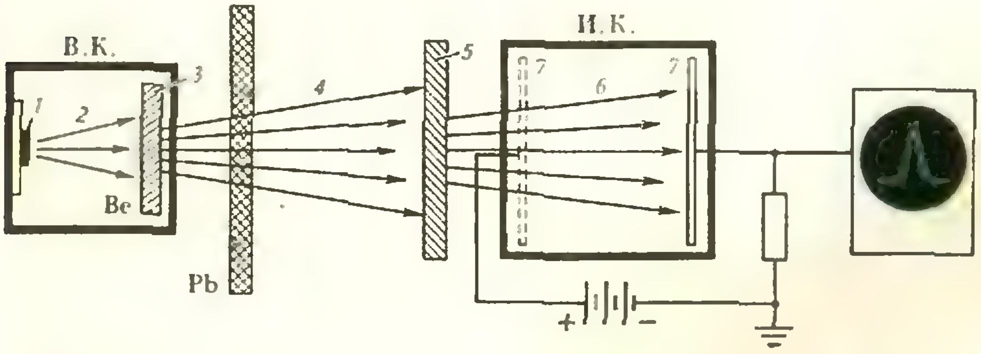


Схема экспериментальной установки Чедвика: В. К. — вакуумная камера; 1 — полоний, являющийся источником α-частиц; 2 — α-частицы; 3 — бериллиевая мишень; 4 — проникающее излучение (нейтроны); 5 — заслонка, из которой выбиваются ядра отдачи (опыты проводились с разными заслонками из легких элементов); 6 — вылетающие из заслонки ядра отдачи; И. К. — ионизационная камера для измерения энергии ядер отдачи; 7 — электроды для собирания ионов, образующихся внутри камеры при прохождении через нее ядер отдачи.

С принятием нейтронной точки зрения становилось понятно, почему излучение из бериллия легко проходило через свинец, и, наоборот, хорошо задерживалось заслонками из легких элементов. Из (4) легко найти отношение энергии E_1 налетающей частицы, которую она имеет после столкновения, к ее энергии E до столкновения (для случая лобового столкновения):

$$\eta = \frac{E_1}{E} = \frac{v_1^2}{v^2} = \left(\frac{m' - m}{m' + m} \right)^2 .$$

Отсюда видно, что если $m' \gg m$ (случай свинцовой заслонки), то $\eta \approx \approx 1$, то есть энергия налетающей частицы (нейтрона) уменьшается в каждом столкновении очень мало. Наоборот, если значение m' близко к значению m, то отношение η мало́, то есть потери энергии нейтрона в каждом столкновении относительно велики. При лобовом столкновении с протоном нейтрон должен остановиться, передав всю свою энергию протону. Теперь понятно, почему нейтроны относительно легко проходят через свинец, но застревают в парафине, выбивая в направлении своего движения протоны.

Открытие нейтрона — выдающееся событие в современной физике

Исследования, выполненные Боте — Бекером и Жолио-Кюри, сыграли большую роль в открытии нейтрона. Однако решающего шага эти исследователи все же не сделали. Как образно сказал академик Б. М. Кедров, «они подошли вплотную к двери, ведущей к разгадке новой тайны природы, они ощупали эту дверь и даже постучались в нее, но открыть ее не смогли, так как эта дверь открывается не «к себе» (то есть в сторону электромагнитной концепции), а «от себя» (то есть в сторону коренного отказа от этой концепции)».

Решающий шаг был сделан Чедвиком, который догадался проделать эксперимент с разными заслонками (водородсодержащей, азотсодержащей и др.) и предпринял измерения энергии ядер отдачи. Выполнив эти измерения и сопоставив полученные количественные результаты, Чедвик сделал правильный вывод о существовании нейтрона. На примере этого открытия хорошо видно, какое важное значение имеют в физике количественные измерения.

С открытием нейтрона в физику не просто вошла еще одна элементарная частица. Нейтрон привел к открытию совершенно нового типа взаимодействий — *ядерного* взаимодействия. Революционное значение открытия нейтрона состояло прежде всего в крушении электромагнитной концепции в физике; оказалось, что природа материи и ее превращения значительно богаче, чем это представлялось ранее, что они не сводятся только к электромагнитным явлениям.

Сразу же после открытия нейтрона советский физик Д. Д. Иваненко и немецкий физик В. Гейзенберг предложили новую модель ядра. Согласно этой модели ядро состоит из протонов и нейтронов, между которыми на весьма малых расстояниях действуют мощные силы притяжения не электромагнитного характера — ядерные силы. Протонно-нейтронная модель была свободна от всех неувязок и «натяжек» прежних моделей ядра, объясняла известные к тому времени данные о ядерных превращениях. Дальнейшие исследования подтвердили несомненную справедливость этой модели и сделали ее общепринятой и бесспорной.

Другое направление исследований, обусловленных открытием нейтрона, связано с проблемой ядерных реакций. Ядерную реакцию под действием нейтронов впервые наблюдал английский физик Н. Фезер в мае 1932 г. В современной записи эта реакция выглядит так:

$$^{11}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$ ($^{1}_{0}n$ — символ нейтрона).

Работа Фезера была первой ласточкой. Вслед за ней последовало огромное число исследований по ядерным реакциям, вызванным, или, как говорят, инициированным нейтронами. Как отмечал Чедвик в своей лекции при получении Нобелевской премии за открытие нейтрона, «большую эффективность нейтронов в получении ядерных реакций легко объяснить. При столкновении заряженной частицы с ядром вероятность ее проникновения в ядро ограничена кулоновской силой расталкивания. В случае же соударения нейтрона с ядром ограничения такого типа не существует. Сила взаимодействия нейтрона с ядром вначале весьма мала: лишь на очень малых расстояниях она начинает быстро расти и носит характер притяжения... Поэтому даже нейтроны очень малой энергии могут проникнуть в ядро.»

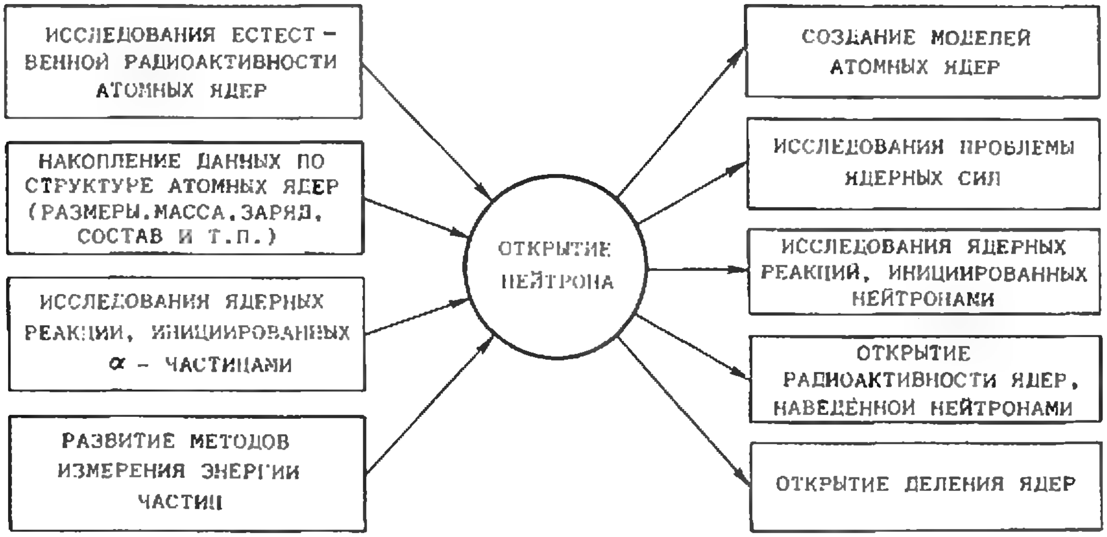
В 1934 г. итальянским физиком Э. Ферми была открыта искусственная радиоактивность атомных ядер под действием нейтронного облучения.

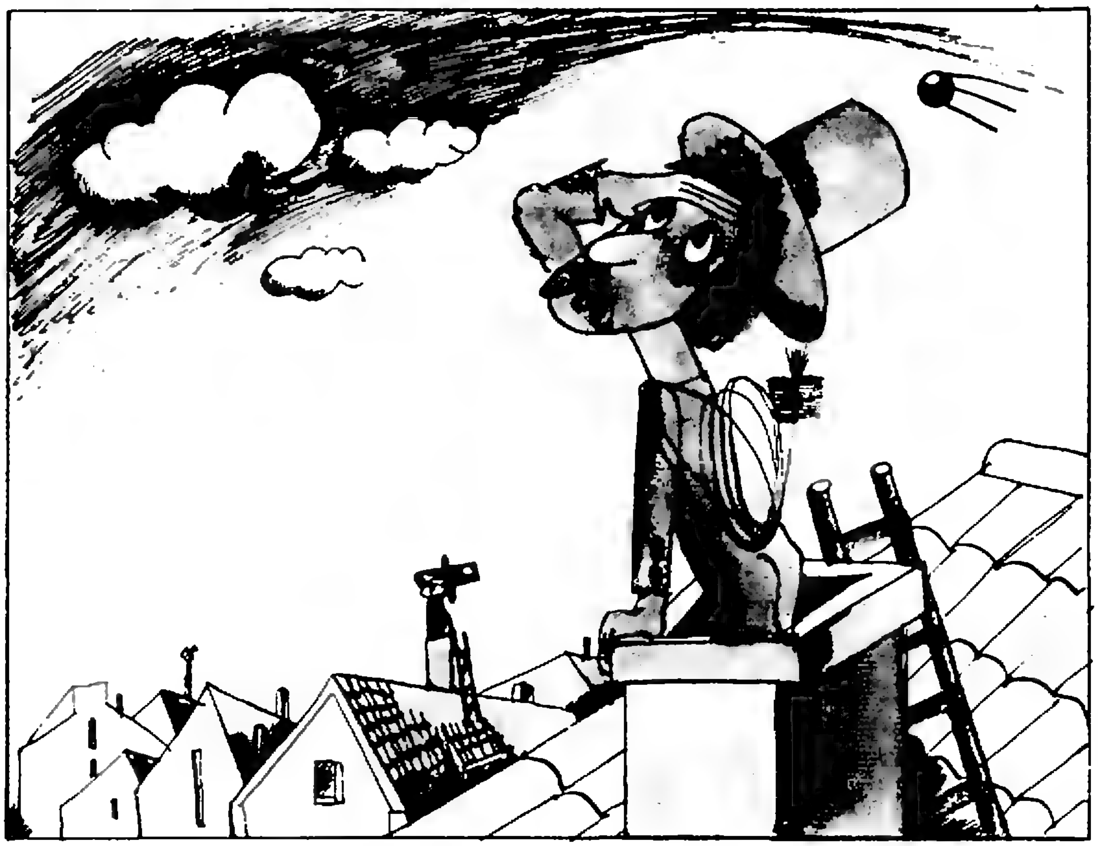
В том же 1934 г. Ферми с сотрудниками наблюдали деление ядер тяжелых элементов под действием медленных нейтронов. (Правда, верную интерпретацию наблюдаемого явления Ферми не дал. Только в 1939 г. немецкие физики О. Ган и Ф. Штрассман сделали правильный теоретический вывод: под действием медленных нейтронов происходит деление тяжелых ядер с образованием радиоактивных осколков.)

С открытием нейтрона началась эра ядерной физики, ознаменовавшаяся в середине XX столения развитием физики элементарных частиц и рождением ядерной техники.

В истории физики 1932 г. обычно называют «годом чудес», отдавая должное обилию замечательных открытий, выпавших на долю этого года. С этим названием можно согласиться даже в том случае, если учитывать только открытие нейтрона.

Открытие нейтрона — своеобразный узел в сети направлений научных исследований


ИССЛЕДОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ РАДИОАКТИВНОСТИ АТОМНЫХ ЯДЕР
НАКОПЛЕНИЕ ДАННЫХ ПО СТРУКТУРЕ АТОМНЫХ ЯДЕР (РАЗМЕРЫ, МАССА, ЗАРЯД, СОСТАВ И Т.П.)
ИССЛЕДОВАНИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИИ, ИНИЦИИРОВАННЫХ α - ЧАСТИЦАМИ
РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ
ОТКРЫТИЕ НЕЙТРОНА
СОЗДАНИЕ МОДЕЛЕЙ АТОМНЫХ ЯДЕР
ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМЫ ЯДЕРНЫХ СИЛ
ИССЛЕДОВАНИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ, ИНИЦИИРОВАННЫХ НЕЙТРОНАМИ
ОТКРЫТИЕ РАДИОАКТИВНОСТИ ЯДЕР, НАВЕДЁННОЙ НЕЙТРОНАМИ
ОТКРЫТИЕ ДЕЛЕНИЯ ЯДЕР



Т. Черногор

После захода Солнца

Можно ли невооруженным глазом увидеть искусственный спутник Земли? Ответ на этот вопрос представляется очевидным: конечно, нет. Ведь для того чтобы глаз видел удаленный предмет, необходимо, чтобы угловой размер φ этого предмета (рис. 1) был не меньше $\varphi_{min} \approx 1' \approx 10^{-4}$ рад. Значит, спутник, находящийся, например, на расстоянии $R \approx 500$ км от поверхности Земли, может быть виден невооруженным глазом, если его линейный размер d не меньше чем $R\varphi_{min} \approx 50$ м! Так что наблюдать с Земли невооруженным глазом искусственный спутник нельзя. Однако...

Попробуем оценить угловые размеры звезд. Будем считать, что расстояние до звезды $R \approx 10^{16}$ м (на таком расстоянии от Солнечной системы находится ближайшая звезда α Центавра), линейный размер звезды $d \approx 10^{10}$ м. Тогда угловой размер звезды $\varphi \approx 10^{-6}$ рад, что меньше φ_{min}. Но ведь звезды мы видим. Почему? Да потому, что звезды светятся...

Теперь вернемся к спутнику. Нельзя ли «заставить» его светиться? Конечно, можно. Ведь Луна «светится» — отражает солнечный свет. И спутник может светиться отраженным солнечным светом. Наблюдать такой светящийся спутник можно вскоре после

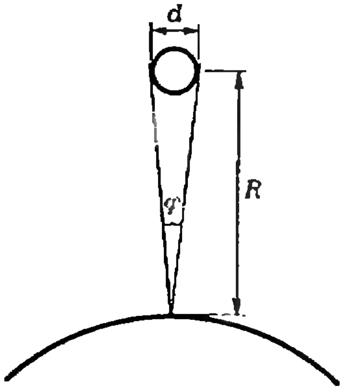


Рис. 1.

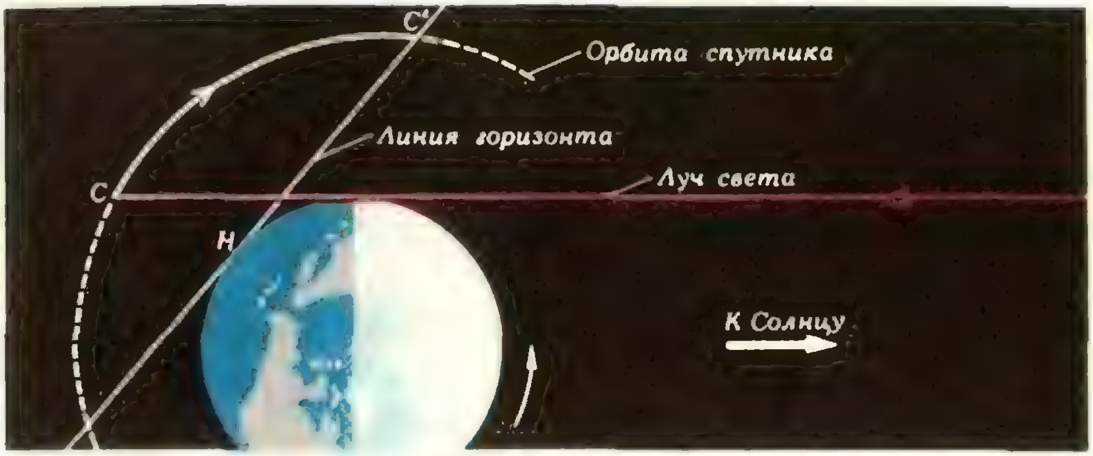


Рис. 2.

захода Солнца (или перед его восходом). Дело в том, что между моментом захода Солнца на уровне горизонта и на некоторой высоте над горизонтом *существует временной интервал*. И если на той высоте, где находится спутник, Солнце еще не зашло, а для наблюдателя H — уже зашло (рис. 2), то на участке CC' орбиты спутник для такого наблюдателя светится. Ясно, что чем меньше времени прошло после захода Солнца на уровне горизонта, тем больше участок орбиты, на котором можно наблюдать светящийся спутник.

Мы сказали «наблюдать». Но как? Можно ли видеть светящийся спутник невооруженным глазом? Посмотрим.

Для глаза существует энергетический порог видимости: глаз реагирует на световое излучение, если мощность этого излучения, попадающая в глаз, не менее $P_{\min} \approx 3\cdot 10^{-17}$ Вт. Оценим попадающую в глаз мощность излучения спутника. Точнее, ту мощность солнечного излучения, которая, отражаясь от спутника, попадает в глаз наблюдателя.

Будем называть интенсивностью энергию излучения, проходящую за единицу времени через единичную площадку.

В околоземном пространстве интенсивность солнечного излучения равна $I_0 \approx 1{,}4\cdot 10^3$ Вт/м². Если площадь поверхности спутника $s \approx 10$ м², то мощность солнечного излучения, попадающая на спутник, $P_\text{с} = I_0 s \approx 1{,}4\cdot 10^4$ Вт. Часть этой энергии, — приблизительно 0,1, — отражается от поверхности спутника *). Так что мы можем *рассматривать спутник как источник излучения* мощностью $P_\text{и} = kP_\text{с} \approx 1{,}4\cdot 10^3$ Вт ($k=0{,}1$ — коэффициент отражения). Интенсивность этого излучения на расстоянии R от спутника равна $I_R = P_\text{и}/4\pi R^2$ ($4\pi R^2$ — это площадь сферы, «окружающей» спутник; через эту площадь проходит мощность $P_\text{и}$ излучения спутника; так что $P_\text{и}/4\pi R^2$ — это как раз мощность излучения, попадающая на единицу площади, то есть интенсивность). Если спутник находится на расстоянии $R \approx 500$ км от поверхности Земли, то интенсивность излучения, попадающего в глаз наблюдателя, $I_R \approx 0{,}4\cdot 10^{-9}$ Вт/м². Считая, что площадь зрачка наблюдателя приблизительно 0,3 см², находим мощность излучения, попадающую в глаз наблюдателя: $P \approx 10^{-14}$ Вт.

Таким образом, $P \gg P_{\min}$. Значит, наблюдатель с Земли может видеть

---

*) То, какая часть солнечной энергии отражается от поверхности спутника (иными словами, коэффициент отражения), зависит от состояния этой поверхности, от ее обработки. А это определяется целевым назначением спутника. Так что величина коэффициента отражения колеблется в широких пределах. Мы же для наших оценок возьмем значение 0,1.

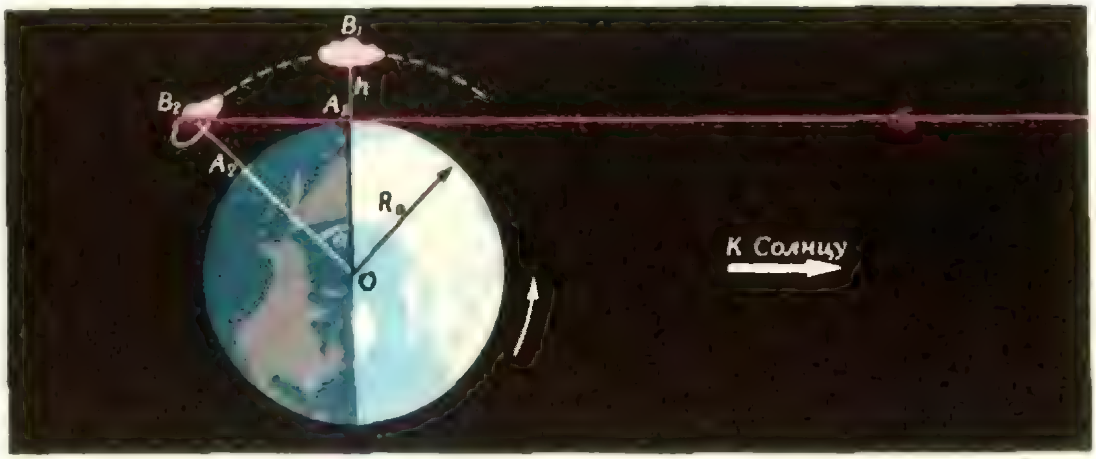


Рис. 3.

искусственный спутник Земли невооруженным глазом.

Разумеется, расчет, который мы провели, приблизительный. Но в том, что результат, полученный нами, соответствует действительности, вы можете убедиться сами.

И еще одно наблюдение мы предлагаем вам провести на заходе Солнца. Попробуем определить высоту облаков над Землей. Единственный измерительный прибор, который нам для этого понадобится, — это часы.

Зафиксируем два момента времени: t_1 — время захода Солнца в пункте наблюдения и t_2 — время захода Солнца на высоте облака. После этого только останется рассчитать высоту облака над Землей. Рассчитаем.

Сначала проведем расчет для наблюдателя, находящегося на экваторе. На рисунке 3 A_1 — точка, в которой находится наблюдатель в момент времени t_1, B_1 — точка, в которой находится облако в этот момент. Момент времени t_2 наступает, когда облако попадает в точку B_2; наблюдатель при этом окажется в точке A_2. Угол α, на который за время $\Delta t = t_2 - t_1$ повернется Земля вокруг своей оси, равен $\alpha = \Delta t 2\pi / T$ ($T = 24$ ч — период суточного обращения Земли).

Итак, в ΔA_1OB_2 на рисунке 3 $\widehat{A_1OB_2} = \alpha$, $|OA_1| = R_0$ (R_0 — радиус Земли; мы для простоты считаем, что ось вращения Земли перпендикулярна к плоскости ее орбиты), $|OB_2| = R_0 + h$. Так как $|OA_1| / |OB_2| = \cos\alpha$,

$$h = \frac{R_0(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2R_0 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Обычно $\alpha \ll 1$, поэтому можно считать, что $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha \approx 1$ и

$$h = 2R_0\left(\frac{\Delta t\pi}{T}\right)^2.$$

Если наблюдатель находится на широте φ, то расстояние $|OA_1|$ равно не R_0, а $R_0 \cos\varphi$ (расстояние от точки наблюдения до оси вращения Земли). Такой наблюдатель может рассчитать высоту облаков по формуле

$$h = 2R_0\cos\varphi\left(\frac{\Delta t\pi}{T}\right)^2.$$

Приступая к расчетам, мы не оговорили «начальных условий». А теперь они, наверное, очевидны: облако должно быть над головой наблюдателя, погода должна быть безветреной и, конечно, должен быть ясный закат. (Разумеется, и при этих условиях расчет, проведенный нами, дает лишь оценку высоты облаков).

И в заключение мы предлагаем вам подумать над следующим вопросом. Определяя высоту облаков, мы основывались на суточном вращении Земли. А в наших расчетах со спутником мы это вращение вообще не учитывали. Не привело ли это к серьезной ошибке? В какой мере можно доверять этим расчетам? Проверьте.

М. Севрюк

Вариации на тему классических неравенств

Эта заметка написана десятиклассником Мишей Севрюком на основе его доклада на конференции НОУ московской школы № 2. В ней доказываются неравенства, найденные автором, видоизменяющие и обобщающие неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Они, конечно же, не новы: в классических областях математики практически нет «белых пятен», достижимых без серьезной подготовки. Доказательства упомянутых неравенств содержатся, например, в замечательной, но трудно доступной книге Харди, Литлвуда и Полна *); однако чисто комбинаторные доказательства М. Севрюка оригинальны и заметно проще.

Неравенства указанного типа интересуют и многих других наших читателей. Кроме заметки М. Севрюка мы в этом номере публикуем в виде задачи (М565) неравенства Маклорена, интересные доказательства которых прислал М. Розенберг, а также задачу Р. Винокура, показывающую применимость неравенств указанного типа в самых разнообразных ситуациях.

В наш век электронных компьютеров приятно сознавать, что живое искусство алгебраических преобразований не утратило свою привлекательность и не перестало быть полезным ...

Еще древние греки знали, что среднее геометрическое $\sqrt{ab}$ двух неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического $\frac{a+b}{2}$. Эта теорема справедлива для любого числа неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n) \geqslant (a_1 \ldots a_n)^{1/n} \qquad (1)$$

(равенство наступает только тогда, когда все a_i совпадают); она будет служить основой всего дальнейшего.

Первая серия неравенств

Здесь по-прежнему $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные неотрицательные числа. Кроме суммы S_1 всех a_i по отдельности, как в неравенстве (1), нас будут интересовать сумма их всевозможных попарных произведений

$$S_2=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n,$$

сумма их всевозможных произведений по три

$$S_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n,$$

и вообще сумма S_k их произведений по k сомножителей ($k \leqslant n$). Аналогично, кроме произведения P_1 всех a_i по отдельности, нас будут интересовать произведение всевозможных попарных сумм

$$P_2=(a_1+a_2)(a_1+a_3)\cdot\ldots\cdot(a_{n-1}+a_n),$$

произведение сумм по три

$$P_3=(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_4)\cdot\ldots\cdot(a_{n-2}+a_{n-1}+a_n),$$

и вообще произведение P_k их сумм по k слагаемым ($k \leqslant n$).

Оказывается, величинам S_k и P_k при $k=1, 2, \ldots, n$ можно дать следующие оценки сверху и снизу (через $S_1=a_1+\ldots+a_n$ и $P_1=a_1\cdot\ldots\cdot a_n$):

$$C_n^k\left(\frac{S_1}{n}\right)^k \geqslant S_k \geqslant C_n^k P^{\frac{k}{n}} \qquad (\mathrm{I}_{1,2})$$

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{C_n^k} S_1^{C_n^k} \geqslant P_k \geqslant k^{C_n^k} P_1^{\frac{C_n^k}{n}}. \qquad (\mathrm{II}_{1,2})$$

Развернутая запись этих формул выглядит очень внушительно. Не пугайтесь! Расшифруйте лучше одну из этих формул (при конкретных, не слишком больших значениях k, n) и вы увидите — все это не так страшно. Например, при $k=3$, $n=4$, формула (I_2) выглядит так:

---

*) Г. Г. Харди, Дж. Е. Литлвуд, Г. Полиа «Неравенства» (М., «Мир», 1948), в дальнейшем — ХЛП.

$$4\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^3 \geqslant a_1a_2a_3+$$
$$+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+$$
$$+a_2a_3a_4 \geqslant 4\,(a_1a_2a_3a_4)^{3/4}.$$

При $k=1$ неравенства (I_2), (II_1) превращаются в (1); (I_1) и (II_2) превращаются в (1) при $k=n$ (проверьте!). Таким образом, все четыре неравенства (I), (II) можно рассматривать как обобщения неравенства (1).

Доказательство неравенства (I_2). Положим для краткости $C=C_n^k$, а через $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_{C_n^k}$ обозначим слагаемые суммы S_k (их, очевидно, $C=C_n^k$ штук). Так как $\frac{S_k}{C}$ — среднее арифметическое чисел $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_c$, согласно (1)

$$\frac{S_k}{C} \geqslant (\tilde{p}_1\tilde{p}_2\ldots\tilde{p}_c)^{1/C}.$$

Каждое a_i входит сомножителем ровно в C_{n-1}^{k-1} из чисел $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_C$. Значит, $(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\ldots\tilde{p}_c)^{1/C}=P_1^{\nu}$, где $\nu=\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C}=\frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k}=\frac{k}{n}$. Поэтому $\frac{S_k}{C} \geqslant P_1^{\frac{k}{n}}$, то есть $S_k \geqslant CP_1^{\frac{k}{n}}$, что и требовалось.

Равенство в (I_2) имеет место при $k=n$, при $a_1=\ldots=a_n$, или при равенстве нулю не менее $n-k+1$ чисел из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Доказательство неравенства (II_2). Обозначим через $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \ldots, \tilde{s}_C$ сомножители произведения P_k (по-прежнему $C=C_n^k$). Положим для краткости $q=k^C$. В левой части нашего неравенства, т. е. в выражении P_k, раскроем скобки. Получим сумму из q слагаемых, каждое из которых есть произведение C чисел из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, взятых по одному из каждого $\tilde{s}_i$. В произведение этих слагаемых каждое a_i входит сомножителем, в силу симметрии, одинаковое число раз (обозначим это число через μ). Поэтому это произведение равно P_1^{μ}, откуда согласно (1)

$$\frac{P_k}{q}=(P_1^{\mu})^{1/q}, \tag{2}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда все наши q слагаемых равны, что, в частности, имеет место при $a_1=\ldots=a_n$; пользуясь этим, найдем μ.

Пусть $a_1=a_2=\ldots=a_n=2$. Тогда в (2) имеет место равенство $\tilde{s}_1=\tilde{s}_2=\ldots=\tilde{s}_C=2k$, $P_1=2^n$, откуда

$$\frac{(2k)^C}{q}=(2^n)^{\frac{\mu}{q}},\ 2^C=2^{\frac{n\mu}{q}},\ \ \mu=\frac{Cq}{n}.$$

Подставляя это значение в (2), получаем II_2.

Ясно, что равенство имеет место либо при $k=1$, либо при $a_1=\ldots=a_n$, либо при равенстве нулю не менее k чисел из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Для доказательства неравенства (I_1) нам будет нужно *неравенство Маклорена*. Положим $\bar{S}_k=\frac{S_k}{C_n^k}$. Тогда

$$\bar{S}_1 \geqslant \bar{S}_2^{\frac{1}{2}} \geqslant \bar{S}_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \ldots \geqslant \bar{S}_n^{\frac{1}{n}} \tag{3}$$

(если все a_i положительны и не все a_i одинаковы, то везде стоит знак $>$).

Доказательство этого неравенства можно найти в ХЛП, стр. 69 *).

Доказательство неравенства (I_1) сразу получается из (3). Действительно $S_kC^{-1}=\bar{S}_k$, $S_1n^{-1}=\bar{S}_1$, так как $C_n^1=n$. Значит, (I_1) принимает вид $\bar{S}_1 \geqslant \bar{S}_k^{\frac{1}{k}}$, а это содержится в (3).

Докажите самостоятельно с помощью неравенства Маклорена также и (I_2).

Неравенство (II_1) доказывается аналогично (I_2); это доказательство мы оставляем читателю.

Условие равенства в (I_1): $a_1=a_2=\ldots=a_n$ или $k=1$, в (II_1): $a_1=a_2=\ldots=a_n$ или $k=n$.

---

*) Другое доказательство, присланное М. Розенбергом, будет опубликовано как решение задачи М565.

Вторая серия неравенств

Здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — n положительных чисел. Введем следующие обозначения (мы предполагаем, что $k \leqslant n-1$):

$$\Sigma_i = \frac{\tilde{s}_i}{S_1 - \tilde{s}_i},$$

$$\Pi_i = \frac{\tilde{p}_i}{P_1 - \tilde{p}_i} \left(i = 1, 2, \ldots, C = C_n^k\right).$$

Нас интересуют границы изменения величин*) $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_C, \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_C, \Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_C, \Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_C$. Оказывается, эти границы для выражения $\Sigma_1 \Sigma_2 . \Sigma_C$ зависят от k; именно:

при $k \in \left[1, \frac{n}{2}\right[$ *имеем*

$$\Sigma_1 \cdot \ldots \cdot \Sigma_C \in \left]0, \left(\frac{k}{n-k}\right)^C\right], \qquad (\mathrm{III}_1)$$

при $k = \frac{n}{2}$ *(если n четно)*

$$\Sigma_1 \ldots \Sigma_C = 1, \qquad (\mathrm{III}_2)$$

при $k \in \left]\frac{n}{2}, n-1\right]$ имеем

$$\Sigma_1 \cdot \ldots \cdot \Sigma_C \in \left[\left(\frac{k}{n-k}\right)^C, +\infty\right[. \qquad (\mathrm{III}_3)$$

Доказательство утверждения (III_3). Назовем *сочетаниями I рода* сочетания из n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по k, *сочетаниями II рода* — сочетания из этих же чисел по $n-k$ Их тоже будет C, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$. Занумеруем сочетания II рода в произвольном порядке, причем сумму чисел в i-м сочетании II рода обозначим через $\tilde{s}'_i$ Ясно, что $\tilde{s}'_1 \cdot \tilde{s}'_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{s}'_C = (S_1 - \tilde{s}_1) \times (S_1 - \tilde{s}_2) \ldots (S_1 - \tilde{s}_C)$. Рассмотрим произвольное сочетание I рода с номером $i - (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$. Из $k > \frac{n}{2}$ следует, что $k > n-k$ и из чисел, входящих в это сочетание, можно составить C_k^{n-k} сочетаний II рода (с какими-то номерами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_R$, где $R = C_k^{n-k}$), причем каждое число из множества $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ будет входить ровно в C_{k-1}^{n-k-1} таких сочетаний II рода. Значит,

$$C_{k-1}^{n-k-1} \tilde{s}_i = \tilde{s}'_{\gamma_1} + \tilde{s}'_{\gamma_2} + \ldots + \tilde{s}'_{\gamma_R}. \qquad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что

$$C_{k-1}^{n-k-1} \tilde{s}_i \geqslant R \left(\tilde{s}'_{\gamma_1} \tilde{s}'_{\gamma_2} \ldots \tilde{s}'_{\gamma_R}\right)^{1/R}. \qquad (5)$$

Очевидно, любое сочетание II рода можно получить из $C_{n-(n-k)}^{k-(n-k)} = C_k^{2k-n} = C_k^{k-(2k-n)} = C_k^{n-k} = R$ сочетаний I рода. Поэтому, записав неравенства, подобные (5), для всех сочетаний I рода и перемножив эти неравенства, получим

$$\left(C_{k-1}^{n-k-1}\right)^C \tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{s}_C \geqslant R^C \times \left[\left(\tilde{s}'_1 \tilde{s}'_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{s}'_C\right)^R\right]^{1/R},$$

$$\frac{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{s}_C}{\tilde{s}'_1 \tilde{s}'_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{s}'_C} \geqslant \left(\frac{R}{C_{k-1}^{n-k-1}}\right)^C$$

и окончательно

$$\frac{\tilde{s}_1}{S_1 - \tilde{s}_1} \cdot \frac{\tilde{s}_2}{S_1 - \tilde{s}_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\tilde{s}_C}{S_1 - \tilde{s}_C} \geqslant \left(\frac{k}{n-k}\right)^C,$$

что и требовалось доказать.

Можно показать, что равенство имеет место лишь при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. С другой стороны, так как $k > n-k$, мы можем $\Sigma_1 \cdot \Sigma_2 \cdot \ldots \cdot \Sigma_C$ сделать как угодно большим, например, зафиксировав $a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_n$ и неограниченно уменьшая $a_1, a_2, \ldots, a_{n-k}$

Доказательство утверждения (III_1) аналогично предыдущему; равенство возможно лишь при $a_1 = \ldots = a_n$ Мы оставляем его читателю, как и (очевидное) доказательство (III_2)

Далее, при всех k ($= 1, \ldots, n-1$)

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_C \in \left[\frac{kC}{n-k}, \infty\right[. \qquad (\mathrm{IV})$$

Доказательство IV. Согласно (1)

$$(S_1 - \tilde{s}_1) + (S_1 - \tilde{s}_2) + \ldots + (S_1 - \tilde{s}_C) \geqslant C[(S_1 - \tilde{s}_1)(S_1 - \tilde{s}_2) \ldots (S_1 - \tilde{s}_n)]^{1/C}. \qquad (6)$$

В дальнейшем выражение в квадратных скобках будем обозначать через H Так как каждое a_i встречается ровно в C_{n-1}^{k-1} сочетаниях из n наших чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ по k,

$$\tilde{s}_1 + \tilde{s}_2 + \ldots + \tilde{s}_C = \left(C_{n-1}^{k-1}\right) S_1,$$

и из (6)

$$\left(C - C_{n-1}^{k-1}\right) S_1 \geqslant C H^{\frac{1}{C}},$$

то есть

$$S_1 \geqslant \frac{C H^{\frac{1}{C}}}{C - C_{n-1}^{k-1}}. \qquad (7)$$

Из (1) также следует

$$\frac{1}{S_1 - \tilde{s}_1} + \ldots + \frac{1}{S_1 - \tilde{s}_C} \geqslant \frac{C}{H^{1/C}}. \qquad (8)$$

---

*) Эти величины интересны для некоторых вопросов теорией вероятности (*прим. ред.*).

Из (7) и (8)

$$\Sigma_1+\ldots+\Sigma_c=\left(\frac{S_1}{S_1-\widetilde{s}_1}-1\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{S_1}{S_1-\widetilde{s}_c}-1\right)=S_1\left[\frac{1}{S_1-\widetilde{s}_1}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{1}{S_1-\widetilde{s}_c}\right]-C\geqslant$$

$$\frac{C\sqrt[c]{H}}{C-C_{n-1}^{k-1}}\cdot\frac{C}{\sqrt[c]{H}}-C=\frac{C^2}{C-C_{n-1}^{k-1}}-$$

$-C=\dfrac{kC}{n-k}$, что и требовалось доказать.

Равенство в (IV) имеет место только при $a_1=\ldots=a_n$. Если это не так, то не все $\widetilde{s}_i$ равны и уже в (6) и (7) имеет место знак $>$.

С другой стороны, $\Sigma_1+\ldots+\Sigma_c$ можно сделать как угодно большим, например, неограниченно увеличивая a_1 при фиксированных значениях чисел $a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Приведем теперь для полноты оценки изменения величин $\Pi_1+\ldots+\Pi_c$ и $\Pi_1\cdot\ldots\cdot\Pi_C$. Первая величина при $k\neq n/2$ принимает любые положительные значения. При $k=n/2$ (n — четно) она имеет минимум, равный $C=C_n^k$, который достигается при $a_1=\ldots=a_n$, а сверху по-прежнему не ограничена. Вторая величина при $k\neq n/2$ также может принимать любые положительные значения, а при $k=n/2$ (n — четно) эта величина всегда равна 1.

Дешевый ящик

Две стенки ящика, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда и объем 1 м³, изготовляются из одного материала, а четыре другие — из материала, который стоит в 8 раз меньше. При каких размерах x, y, z ящика стоимость материалов, нужных для его изготовления, минимальна?

Решение. Пусть стоимость 1 м² второго материала равна p рублей. По условию,

$$xyz=1.$$

Возможны два случая: либо стенки, изготовленные из первого материала, — смежные, либо — нет. В первом случае стоимость материалов равна

$$S_1=8p\,(xy+yz)+$$

$$+p\,(xy+yz+2xz)=$$

$$=p\cdot xyz\left(\frac{9}{z}+\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\right)=$$

$$=p\left(\frac{9}{z}+\frac{9}{x}+\frac{2}{y}\right),$$

во втором —

$$S_2=8p2xy+p(2xz+2yz)=$$

$$=2pxyz\left(\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=2p\left(\frac{8}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right).$$

Применим неравенство

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt{abc}$$

между средним арифметическим и средним геометрическим (см. с. 18) к этим выражениям. Получим

$$S_1\geqslant9\sqrt[3]{6}\,p \quad\text{и}\quad S_2\geqslant12p.$$

Легко видеть, что $9\sqrt[3]{6}\,p>12\,p$. Стоимость S_2 будет минимальна тогда и только тогда, когда минимальной будет сумма $\dfrac{8}{z}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$, а это последнее условие будет выполнено в том и только в том случае, когда $\dfrac{8}{z}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$ примет значение

$$3\sqrt[3]{\frac{8}{z}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}}.$$

Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{8}{z}=\frac{1}{y}=\frac{1}{x}.$$

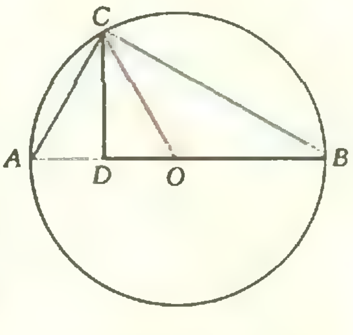
Поскольку $xyz=1$, отсюда следует, что $x=y=0{,}5$; $z=4$.

Таким образом, *стенки из первого материала должны быть несмежными и иметь форму квадрата со стороной 0.5 м, а расстояние между ними равно 4 м.*

Р. Винокур

Еще одно доказательство теоремы о средних

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел является очень важным математическим соотношением. В нашем журнале не раз уже публиковались материалы на эту тему. На рисунке, идею которого предложил наш читатель *Ш. Касимов*, приводится еще одно красивое геометрическое доказательство этого неравенства.



$$|CD|=\sqrt{|AD|\cdot|DB|},$$

$$|OC|=\frac{|AD|+|DB|}{2}$$

задачник кванта

Задачи

M561—M565; Ф573—Ф577

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M561, M562» или «Ф573». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M561. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, площади которых равны S_1 и S_2, расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

Л. Купцов

M562. На отрезке $[0;\ 1]$ задано множество M, являющееся объединением нескольких отрезков, такое, что расстояние между любыми двумя точками из M не равно 0,1. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, меньше

а) 0,55; б) 0,5.

А. Кац, ученик 10 класса

M563. Функция f определена на отрезке $[a;\ b]$ длины 4 и имеет на нём непрерывную производную f'. Докажите, что внутри отрезка $[a;\ b]$ найдется точка x, для которой

$$f'(x) - (f(x))^2 < 1.$$

С. Фомин

M564. Для каких точек M стороны BC треугольника ABC верно утверждение: $\triangle MPQ \cong \triangle ABC$, если точки P и Q являются:

а) центрами окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM и ACM (рис. 1);

б) точками пересечения их медиан;

в) точками пересечения их высот?

Э. Туркевич

M565. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные положительные числа. Обозначим через b_k среднее арифметическое всевозможных произведений по k данных чисел ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$$b_2 = \frac{a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n = a_1a_2 \ldots a_n.$$

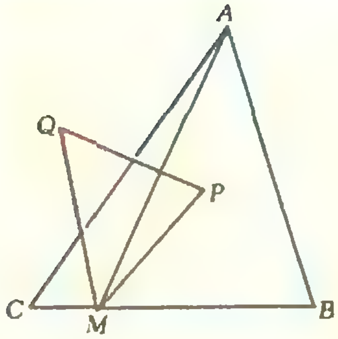


Рис. 1.

Докажите неравенства:

а) $b_1 \geqslant \sqrt{b_2}$;

б)* $b_k^2 \geqslant b_{k-1} b_{k+1}$ $(k = 2, \ldots, n-1)$;

в)* $\sqrt[k]{b_k} \geqslant \sqrt[k+1]{b_{k+1}}$ $(k = 2, \ldots, n-1)$.

М. Розенберг

Ф573. Оцените, какое количество воды можно унести в решете с квадратными ячейками размером 2 × 2 мм. Диаметр решета равен 20 см. Нити решета не смачиваются водой.

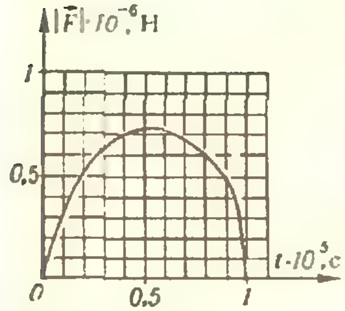


Рис. 2.

Ф574. Два шара с массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг летят навстречу друг другу со скоростью $v = 20$ м/с каждый. График зависимости от времени силы взаимодействия шаров при столкновении показан на рисунке 2. Какое количество тепла выделилось при столкновении шаров?

И. Слободецкий

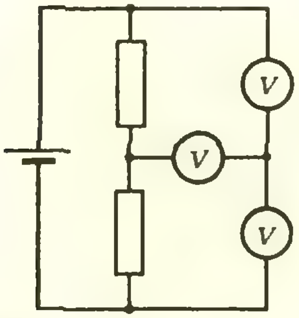


Рис. 3.

Ф575. В схеме, приведенной на рисунке 3, все вольтметры и резисторы одинаковые. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 5$ В, ее внутреннее сопротивление мало́. Верхний вольтметр показывает $U = 2$ В. Что показывают остальные вольтметры?

А. Зильберман

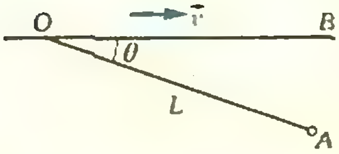


Рис. 4.

Ф576. По прямой OB равномерно движется самолет со скоростью $v > c$ (c — скорость звука). Наблюдатель следит за полетом из точки A (рис. 4). В тот момент, когда самолет находится в точке O, специальное устройство, установленное на самолете, испускает два коротких звуковых импульса: сначала импульс с малой амплитудой, затем — с большой. Временно́й интервал между импульсами равен τ. При каких условиях наблюдатель сможет зарегистрировать сначала импульс с большой амплитудой, а потом с малой? Расстояние OA равно L, угол AOB равен θ.

Б. Болотовский

Ф577. При температуре на улице $t_0 = -20$ °С работающая батарея поддерживает в комнате температуру $t_1 = 16$ °С. Когда кроме батареи включили электроплитку мощностью $P_1 = 1$ кВт, в комнате установилась температура, равная $t_2 = 22$ °С. Определите тепловую мощность батареи.

Примечание. Теплопередача от одного тела к другому пропорциональна разности температур этих тел ($\Delta P = k\Delta t$, $k = \mathrm{const}$).

Решения задач

М513, М514; Ф514, Ф521—Ф525

М513. *Докажите, что существует число A такое, что в график функции $y = A\sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неконгруэнтных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)*

Для того чтобы точка $(x;\ y)$ была вершиной вписанного в график Γ квадрата с центром $O = (0;\ 0)$, достаточны условия $(x;\ y)\in\Gamma$ и $(-y;\ x)\in\Gamma$, то есть условия

$$y = A\sin x,\quad -x = A\sin y;$$

при этом $(-x;\ -y)\in\Gamma$ и $(y;\ -x)\in\Gamma$, так как O — центр симметрии графика Γ (рис. 1; функция $y = A\sin x$ нечетна). Тем самым каждому корню уравнения

$$\sin(A\sin x) = -\frac{x}{A},\quad x > 0,\quad y = A\sin x > 0 \qquad (1)$$

соответствует вписанный квадрат с центром O. Покажем, что при большом A это уравнение имеет много корней.

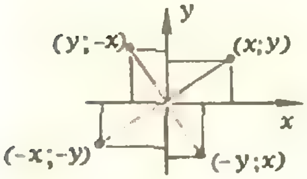


Рис. 1.

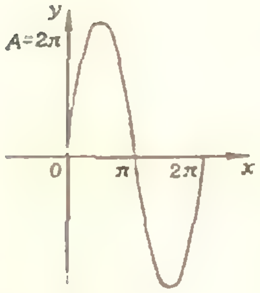


Рис. 2.

На каждом из отрезков $x\in[2\pi k;\ 2\pi k + \pi/2]$ величина $y = A\sin x$ увеличивается от 0 до A; на каждом из отрезков $x\in[2\pi k + \pi/2;\ 2\pi k + \pi]$ — уменьшается от A до 0 (рис. 2; $k = 1, 2, \ldots$). Возьмем $A = 2\pi n$. Тогда величина $z = \sin y$ при y, меняющемся от 0 до A, пробегает отрезок $[-1;\ 1]$ $2n$ раз (начинается и заканчивается этот «пробег» при $z = 0$. Пусть $k < n$. Тогда на каждом отрезке $[2\pi k;\ 2\pi k + \pi/2]$ и $[2\pi k + \pi/2;\ 2\pi k + \pi]$ уравнение (1) будет иметь $2n$ корней — при каждом переходе z от 0 к (-1) и обратно график $z = \sin(A\sin x)$ пересекает прямую $z = -\frac{x}{A}$ $2n$ раз, поскольку $|x/A| < 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi k + \pi < A$,— а всего уравнение (1) будет иметь $4n^2$ корней ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$).

Чтобы быть уверенными в том, что квадраты попарно неконгруэнтны, возьмем лишь $x\in[0;\ \pi/2]$. При $A > 1978\pi$ уравнение (1) будет иметь на этом отрезке не менее 1978 корней, причем чем больше x, тем больше $y = A\sin x$ и $\sqrt{x^2 + y^2}$; значит, все соответствующие 1978 квадратов неконгруэнтны.

Другое, более геометрическое решение задачи М513 можно получить, основываясь на таком соображении: повернем график Γ функции $y = A\sin x$ на 90° вокруг точки O. Тогда любая точка пересечения графика Γ и повернутого графика Γ' (кроме O) служит вершиной квадрата с центром O, вписанного в Γ.

Заметим, что все квадраты, о которых шла речь в наших решениях, имеют центры симметрии в точке O. По-видимому, *любой квадрат, вписанный в Γ, имеет центр симметрии в одной из точек $(2\pi n;\ 0)$* (т. е. в одном из центров симметрии графика Γ); попробуйте это доказать.

Н. Васильев

◆

М514. *Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность (x_n), что для любых различных m и k выполнено неравенство*

$$|x_m - x_k| \geqslant |m - k|^{-1}.$$

Мы приведем два решения задачи, предоставив читателю судить о достоинствах и недостатках каждого из них.

Заметим, что достаточно построить ограниченную последовательность (x_n), удовлетворяющую неравенству

$$|x_m - x_k|\cdot|m - k| \geqslant \varepsilon \text{ при } m \neq k \qquad (1)$$

для некоторого положительного ε. Разделив все члены такой последовательности на ε, мы получим искомую последовательность.

Первое решение. Попробуем построить на *отрезке* $[0;\ 1]$ последовательность, удовлетворяющую неравенству (1) для $\varepsilon = {}^1/_{10}$. В этом случае необходимо, чтобы члены последовательности, номера которых отличаются на 1, отличались бы не менее чем на ${}^1/_{10}$, члены по-

Внимание! Как указали некоторые читатели (первым — *С. И. Шварцбурд*), формулировка задачи **М545 г)** («Квант», № 1, 1979 г.) нуждается в уточнении. Приводим несколько измененную формулировку этой задачи.

На плоскости задано n точек. Кроме того, в некоторой точке O плоскости расположены n «прожекторов», которые освещают углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (с вершиной в точке O), *причем* $0<\alpha_k<\pi$ *для каждого* $k=1, 2, \ldots, n$, и все прожекторы вместе целиком освещают плоскость. (Условие, выделенное курсивом, было пропущено. Подумайте, существенно ли оно? А если прожекторы разрешается вращать?) Докажите, что можно перенести в каждую из данных n точек по одному из прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.

(В предыдущих пунктах задачи **М545** рассматривается случай $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=2\pi/n$ при $n=3$, $n=4$ и произвольном n, причем прожекторы разрешается вращать.)

Это — очень трудная задача, решению которой предполагается посвятить отдельную заметку в конце года. Срок присылки решений задачи продлевается до 1 октября 1979 г. Мы будем рады, если кому-либо из читателей удастся найти интересные обобщения этой задачи — например, рассмотреть ее пространственный аналог.

следовательности, номера которых отличаются на 10, отличались бы не менее чем на $^1/_{100}$ и т. д. Учитывая это замечание, возьмем $x_0=0$, $x_1=0{,}1$, $x_2=0{,}2$, …, $x_9=0{,}9$ (рис. 3). Поместим x_{10} правее x_0 на расстоянии 0,01 (это — минимальное расстояние, если мы хотим, чтобы выполнялось неравенство (1) для $\varepsilon={}^1/_{10}$), x_{11} поместим правее x_1 на том же расстоянии и т. д.; наконец, x_{19} поместим правее x_9 на том же расстоянии (рис. 4). Поместим, далее, x_{20} на расстоянии 0,01 правее x_{10}, x_{21} на расстоянии 0,01 правее x_{11} и т. д. (рис. 5). Мы видим, что десятичное разложение числа x_n получается из десятичного разложения числа n «переворачиванием» и приписыванием слева «нуля целых и запятой»:

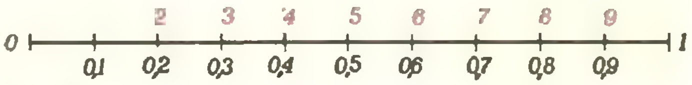


Рис. 3.

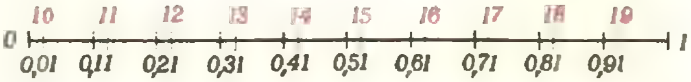


Рис. 4.

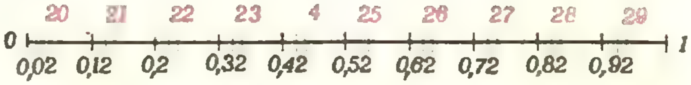


Рис. 5.

$$x_{\overline{a_l a_{l-1} \ldots a_2 a_1}} = 0{,}\overline{a_1 a_2 \ \ldots \ a_{l-1} a_l}.$$

Возьмем эту формулу в качестве определения последовательности (x_n). Например $x_{129}=0{,}921$, $x_{100}=0{,}001$.

Будет ли построенная последовательность (x_n) удовлетворять неравенству (1) для $\varepsilon={}^1/_{10}$ или вообще для какого-нибудь положительного ε? Ответ на этот вопрос отрицателен. Возьмем, например, $m=1001$ и $k=990$. Тогда $m-k=11$, и $x_m-x_k=0{,}1001-0{,}990=0{,}0011$, откуда $|x_m-x_k|\cdot|m-k|=0{,}0121<0{,}1$. Аналогично можно взять

$$m=\underbrace{10\ \ldots\ 01}_{s\text{ цифр}},\quad k=\underbrace{99\ \ldots\ 90}_{s-1\text{ цифр}},\ \text{тогда}$$

$$|x_m-x_k|\cdot|m-k|=11\cdot 11\cdot 10^{-s}.$$

Подобные явления возникают из-за того, что числа m и k, хотя и записываются совершенно разными цифрами, тем не менее оказываются мало отличающимися друг от друга как до «переворачивания», так и после него.

Чтобы избежать этого, подвергнем последовательность (x_n) «шифровке». Каждую цифру каждого члена последовательности (x_n) заменим ее «шифром» по следующему правилу:

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
шифр	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

(этот шифр описывается простым правилом; угадайте, каким). Для нас будут существенны три свойства шифра:

n	x_n	y_n
1	0,1	0,3
2	0,2	0,6
3	0,3	0,9
4	0,4	0,2
. . .	. . .	. . .
9	0,9	0,7
10	0,01	0,03
11	0,11	0,33
12	0,21	0,63
. . .	. . .	. . .
19	0,91	0,73
20	0,02	0,06
21	0,12	0,36
. . .	. . .	. . .

1) *шифр цифры* 0 *есть цифра* 0;

2) *любая цифра однозначно восстанавливается («дешифруется») по ее шифру;*

3) *если шифры двух цифр соседние, т. е. отличаются на* 1 *или на* 9, *то сами цифры не являются соседними.*

Обозначим шифрованную последовательность через (y_n). Докажем, что последовательность (y_n) такова, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|y_m - y_k| \cdot |m-k| \geqslant {}^1/_{100}.$$

Пусть $m > k$, $m = \overline{a_l \ldots a_1}$, $k = \overline{b_l \ldots b_1}$ (мы всегда можем считать, что в k столько же цифр, сколько в m, пополнив в случае необходимости число k слева некоторым количеством нулей; при этом согласно 1) число y_k пополнится нулями справа).

Пусть $y_m = 0,\overline{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}\alpha_s \ldots \alpha_l}$,

$y_k = 0,\beta_1 \ldots \beta_{s-1}\beta_s \ldots \beta_l$,

и $y_m - y_k = 0,0 \ldots 0{\bullet}? \ldots ?$

(Мы считаем, что $y_m > y_k$; звездочка $\bullet$ указывает первую значащую цифру, знаки? — какие угодно цифры.) Тогда $|y_m - y_k| \geqslant 10^{-s}$. Сравним теперь числа m и s. Для этого сравним числа $\overline{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}}$ и $\overline{\beta_1 \ldots \beta_{s-1}}$. Поскольку в разложении числа $y_m - y_k$ после запятой стоит $s-1$ нуль, эти два числа либо совпадают, либо отличаются на 1.

Случай 1. Если $\overline{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}} = \overline{\beta_1 \ldots \beta_{s-1}}$, то $\alpha_s \neq \beta_s$; значит, $a_s \neq \beta_s$, откуда $|m-k| \geqslant 10^{s-1}$, так как при вычитании k из m мы получим ненулевое число, кончающееся на $s-1$ нуль.

Случай 2. Если $\overline{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}} = \overline{\beta_1 \ldots \beta_{s-1}} + 1$, то цифры α_{s-1} и β_{s-1} являются соседними. Тогда по свойству 3) цифры a_{s-1} и b_{s-1} не являются соседними, а значит, в десятичном разложении числа $m-k$ цифра, стоящая в разряде 10^{s-2}, не равна нулю, откуда $|m-k| \geqslant 10^{s-2}$.

В обоих случаях $|y_m - y_k| \cdot |m-k| \geqslant 10^{-2}$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Положим $x_n = n\sqrt{2} - a_n$, где a_n — наибольшее целое число, не превосходящее $n\sqrt{2}$. Ясно, что $0 < x_n < 1$. Покажем, что для любых $m > k > 1$

$$|x_m - x_k| \cdot (m-k) > {}^1/_4,$$

то есть что последовательность $(4x_n)$ — искомая.

Оценим снизу величину

$$|x_m - x_k| = |(m-k)\sqrt{2} - a_m - a_k| =$$

$$= \frac{|2(m-k)^2 - (a_m - a_k)|}{|(m-k)\sqrt{2} + (a_m - a_k)|}.$$

Числитель — целое число, отличное от нуля (число $\sqrt{2}$ иррационально), поэтому он не меньше 1. Знаменатель легко оценить, пользуясь тем, что $a_m < m\sqrt{2}$ и $a_k > k\sqrt{2} - 1$:

$$(m-k)\sqrt{2} + (a_m - a_k) < 2(m-k)\sqrt{2} + 1 <$$

$$< (m-k)(2\sqrt{2} + 1) < 4(m-k).$$

Отсюда получаем $|x_m - x_k| > \dfrac{1}{4(m-k)}$.

С. Конягин, А. Кушниренко

Ф514. *Резино-кордное полотно изготовлено из прочных упругих нитей (корда), залитых мягкой эластичной резиной. Нити корда образуют угол 2α друг с другом (рис. 6). Из такого полотна сделан круговой цилиндр, к торцам которого прикреплены металлические крышки (рис. 7). Внутрь цилиндра нагнетается воздух. В опытах было замечено, что при нагнетании воздуха цилиндр принимает одну из трех форм, показанных на рис. 8. Форма зависит от угла 2 α между нитями. Каким значениям угла соответствует каждая из форм?*

Обозначим Q_1 абсолютное значение силы натяжения, приходящейся на единицу длины ткани в вертикальном направлении (вдоль оси цилиндра) и Q_2 — абсолютное значение силы натяжения, приходящейся на единицу длины в горизонтальном направлении. Q_1 и Q_2 — это модули сил, действующих на квадратик полотна со стороной, равной единице длины. Изменение формы цилиндра связано с изменением угла между нитями при деформации полотна. Если бы полотно было плоским, то для того чтобы любой квадратик не менял своей формы, Q_1 должно было бы быть равным Q_2. В случае цилиндрической поверхности Q_2 для этого должно быть равно $2Q_1$. Докажем это. Рассмотрим равновесие нижней части цилиндра. На его дно действует сила давления

$$F_1=pS=\pi R^2 p,$$

где p — давление в цилиндре и R — его радиус. Эта сила уравновешивается силой $F_2=2\pi RQ_1$, действующей на полотно (F_1, F_2 — абсолютные значения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$): $\pi R^2p=2\pi RQ_1$. Отсюда $Q_1=\frac{1}{2}pR$.

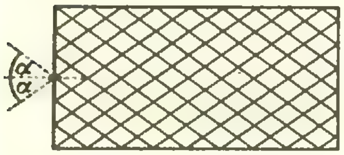


Рис. 6.

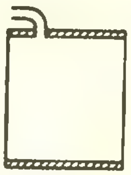
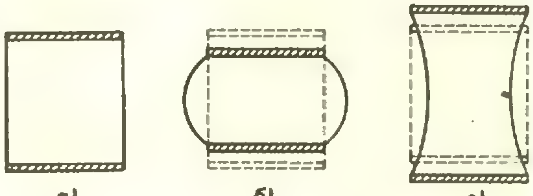


Рис. 7.



а) б) в)

Рис. 8.

Теперь рассмотрим равновесие квадратика полотна со стороной l, который «виден» под углом φ от оси цилиндра, причем $\varphi \ll 1$. На этот квадратик действует горизонтальная сила давления $F_3\approx pl^2$, а со стороны остальной части полотна — горизонтальная сила $F_4=2Q_1l\sin\frac{\varphi}{2}\approx$ $\approx Q_2l\varphi$ (рис. 9). Так как $\varphi=\frac{l}{R}$, то $F_4=\frac{Q_2l^2}{R}$.

При равновесии $F_3=F_4$, то есть $pl^2=\frac{Q_2l^2}{R}$, откуда

$$Q_2=pR=2Q_1.$$

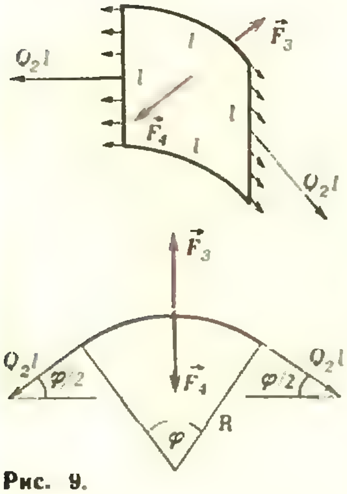


Рис. 9.

Силы Q_1 и Q_2 представляют собой равнодействующие сил натяжения нитей. Найдем их, полагая, что натяжение нитей равно T, а сторона ячейки, образуемой нитями, равна a. Нетрудно увидеть, что горизонтальное расстояние между точками пересечения нитей в этом случае равно $2a\cos\alpha$, а вертикальное — $2a\sin\alpha$. Это означает, что на горизонтальной стороне квадратика со стороной l оканчивается $n_1=2\frac{l}{2a\cos\alpha}=\frac{l}{a\cos\alpha}$ нитей, а на вертикальной — $n_2=\frac{l}{a\sin\alpha}$ нитей. Вертикальная равнодействующая Q_1l сил натяжения нитей, очевидно, равна $n_1T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=n_1T\sin\alpha=\frac{Tl\,\mathrm{tg}\,\alpha}{a}$, горизонтальная — $Q_2l=n_2T\cos\alpha=\frac{Tl}{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ (рис. 10).

В случае цилиндрической поверхности $Q_2=2Q_1$, так что $\frac{T}{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}=2\frac{T\,\mathrm{tg}\,\alpha}{a}$, откуда $\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha\approx 35^\circ16'$. При $\alpha>35^\circ16'$ поверхность принимает такую форму, как на рисунке 8,б, а при $\alpha<35^\circ16'$ — как на рисунке 8, в.

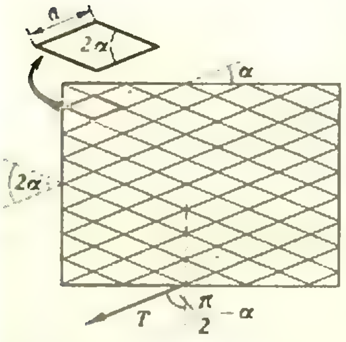


Рис. 10.

Ф521. *На рисунке 11 показана часть траектории движения хорошо обтекаемого тела, брошенного под углом к горизонту. В точке A тело имело скорость, равную по абсолютной величине 20 м/с. Сколько времени тело летело от точки A к точке B?*

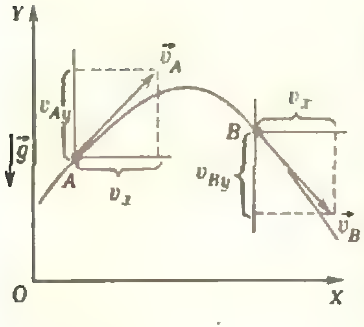


Рис. 11.

Тело, брошенное под углом к горизонту, движется равноускоренно с ускорением свободного падения $\vec{g}$; проекция его скорости на ось OX остается неизменной, а проекция скорости на вертикальную ось OY меняется со временем по закону

$$v_y = v_0 + gt,$$

где $g = -9{,}8$ м/с² — проекция вектора $\vec{g}$ на ось OY. Если t_0 — время движения тела от точки A к точке B, то $v_{By} = v_{Ay} + gt_0$, откуда

$$t_0 = \frac{v_{By} - v_{Ay}}{g} = \frac{\Delta v_y}{g}.$$

Следовательно, чтобы найти t_0, нужно найти изменение проекции скорости тела на ось OY.

Векторы $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ скорости тела в точках A и B направлены по касательным к траектории тела в этих точках. Нарисуем вектор $\vec{v}_A$ в произвольно выбранном масштабе и проведем касательную к траектории в точке B. Найдем проекцию v_x скорости тела на ось OX в точке A и отложим отрезок такой же длины на горизонтальной прямой, проведенной через точку B. Проведя теперь через конец отложенного отрезка вертикаль, найдем вектор $\vec{v}_B$ и его проекцию v_{By} на ось OY. Измерив с помощью линейки v_{Ay} и v_{By}, найдем значение Δv_y (оно не зависит от выбранного масштаба) и затем время t_0 движения тела от точки A до точки B.

В нашем случае $\Delta v_y = |v_{By}| + |v_{Ay}| \approx 33$ (м/с), $t_0 \approx 3{,}3$ с.

И. Слободецкий

◆

Ф522. *Цепь, показанная на рисунке 12, подключена к сети переменного тока с напряжением $U_0 = 220$ В. Каково напряжение между точками A и B?*

Построим векторную диаграмму напряжений для цепи. Вектор напряжения между точками a и b равен сумме векторов напряжения на конденсаторе и резисторе, то есть изображается диагональю прямоугольника, построенного на векторах $\vec{U}_C$ и $\vec{U}_R$ (рис. 13):

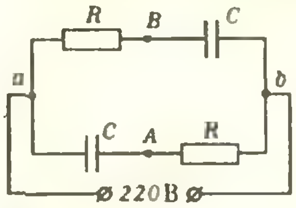


Рис. 12.

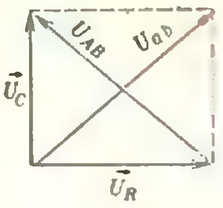


Рис. 13.

$$\vec{U}_{ab} = \vec{U}_C + \vec{U}_R;\quad U_{ab} = |\vec{U}_C + \vec{U}_R| = U_0 = 220 \text{ В}.$$

Вектор напряжения между точками A и B равен разности $\vec{U}_C$ и $\vec{U}_R$ и, следовательно, изображается другой диагональю того же прямоугольника. Так как диагонали прямоугольника равны, то

$$U_{AB} = U_{ab} = 220 \text{ В}.$$

А. Зильберман

◆

Ф523. *Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рисунке 14, сделанном в определенном масштабе, крестиками отмечены поло-*

Если массы осколков равны m_A и m_B, то расстояния r_A и r_B от осколков до центра масс в любые моменты времени должны быть такими, чтобы

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_1}{m_2} = \text{const}.$$

жения снаряда и одного из осколков через последовательно равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находился в точке B в тот момент, когда первый осколок находился в точке A. Стрелкой на рисунке показано направление ускорения свободного падения. Опишите способ построения.

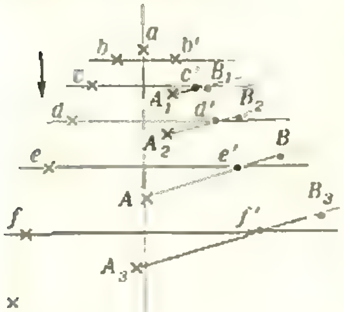


Рис. 14.

Центр же масс системы движется так, как движется частица с массой $M=m_1+m_2$, когда на нее действуют силы, действующие на систему. В нашем случае на систему действует только сила тяжести. Поэтому центр масс системы продолжает двигаться по той же параболе, по которой он двигался до разрыва снаряда.

Нетрудно найти последовательные положения центра масс. Из рисунка видно, что точка a — вершина параболы. Это следует из того, что предыдущая и последующая точки, в которых находился снаряд (b и b'), лежат на одной горизонтали. Следовательно, после разрыва снаряда центр масс системы через последовательно равные промежутки времени оказывается на тех же горизонтальных прямых, что и точки c, d, e, f и т. д. Точки c', d', e', f' и т. д., в которых находится центр масс, симметричны точкам c, d, e, f и т. д. относительно вертикали, проходящей через точку a.

В тот момент, когда осколки находятся в точках A и B, центр масс их находится в точке e'. По рисунку находим, что точка e' делит отрезок AB на части, длины которых относятся как $r_A:r_B=2:1$ (следовательно, $m_A:m_B=1:2$).

Чтобы найти положение второго осколка через последовательно равные промежутки времени, проведем прямые через точки A_1 и c', A_2 и d', A_3 и f' и т. д. На этих прямых от точек c', d', e', f' и т. д. отложим отрезки, длины которых равны соответственно $^1/_2|A_1c'|$, $^1/_2|A_2d'|$, $^1/_2|A_3f'|$ и т. д. Концы этих отрезков — точки B_1, B_2, B_3 и т. д. — и указывают положения второго осколка в соответствующие моменты времени.

◆

Ф524. *Модель вертолета, изготовленная в 1/10 натуральной величины, удерживается в воздухе при мощности мотора 30 Вт. Какой должна быть минимальная мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель?*

Вертолет (или модель) удерживается в воздухе благодаря реактивной силе, возникающей, когда винт «отбрасывает» вниз воздушную струю. Согласно III закону Ньютона действующая на вертолет (на винт) реактивная сила равна по абсолютному значению силе, действующей на струю.

Обозначим ρ плотность воздуха, S — площадь струи и v — абсолютное значение скорости струи. Тогда за время Δt винтом отбрасывается вниз объем воздуха $Sv\Delta t$ с массой $m=\rho Sv\Delta t$, и импульс воздуха изменяется на величину

$$\Delta p=mv=\rho Sv^2\Delta t.$$

Согласно II закону Ньютона на воздух действует сила $\vec{F}$ такая, что абсолютное значение ее равно

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\rho Sv^2.$$

Такая же по абсолютному значению сила действует на вертолет. Чтобы вертолет удерживался в воздухе, F должно быть равно абсолютному значению Mg силы тяжести, действующей на вертолет:

$$\rho Sv^2=Mg. \qquad (*)$$

Мощность N двигателя равна энергии, сообщаемой воздуху за 1 секунду:

$$N=\frac{mv^2}{2\Delta t}=\frac{\rho Sv^3}{2}.$$

Подставляя сюда из (*) $v=\sqrt{\dfrac{Mg}{\rho S}}$, получим

$$N=\frac{1}{2}Mg\sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}. \qquad (**)$$

Так как масса M вертолета пропорциональна его объему, то есть кубу линейных размеров — $M\sim L^3$, а $S\sim L^2$, то из (**) имеем:

$$N \sim L^{7/2}.$$

Это означает, что отношение мощностей двигателей вертолета и модели должно быть равно отношению их линейных размеров в степени 7/2, то есть

$$\frac{N}{N_{\text{мод}}} = \left(\frac{L}{L_{\text{мод}}}\right)^{7/2}.$$

Отсюда

$$N = N_{\text{мод}} \cdot 10^{7/2} \approx 95 \text{ кВт}.$$

◆

Ф525. *При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в сеть последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика для такой цепи показана на рисунке 15. 1) Постройте вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. 2) Используя полученный график, определите максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U=85$ В.*

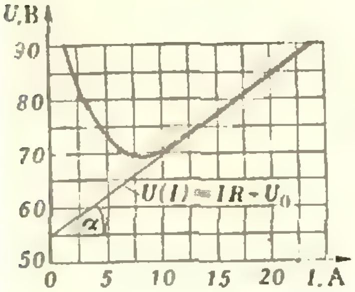


Рис. 15.

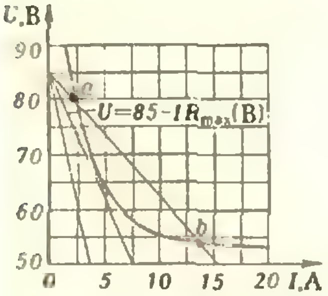


Рис. 16.

1) Напряжение U на входе системы равно сумме напряжения $U_{\text{д}}$ на разрядном промежутке дуги и напряжения U_R на резисторе. Так как $U_R = IR$, где I — ток в цепи, то

$$U(I) = U_{\text{д}}(I) + IR.$$

Значение $U_{\text{д}}(I)$ убывает при увеличении I и при больших значениях тока стремится к некоторому постоянному значению U_0. Это означает, что при больших токах зависимость $U(I)$ становится линейной —

$$U(I) = IR + U_0,$$

причем тангенс угла α наклона графика к оси токов равен R:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta U}{\Delta I} = R.$$

Из рисунка 15 видно, что при $I > 10$ А график $U(I)$ — практически прямая линия. По рисунку находим

$$R = \frac{80-55}{17{,}5} \approx 1{,}4 \text{ (Ом)}.$$

Чтобы построить вольтамперную характеристику дуги, надо для каждого значения тока I_i найти значение $U_{\text{д}}(I_i) = U_i - I_i R$ (*значения* U_i, *берем из графика*, $I_i R = 1{,}4\, I_i$). Вольтамперная характеристика дуги приведена на рисунке 16. 2) Определим максимальное сопротивление $R_{\max}$ балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U=85$ В.

На график $U_{\text{д}}(I)$ нанесем нагрузочные прямые $U - IR$ ($U=85$ В), отвечающие разным значениям R. Очевидно, что чем больше значение R, тем меньший угол α составляет нагрузочная прямая с осью токов. Если нагрузочная прямая не имеет общих точек с графиком $U_{\text{д}}(I)$ — горение дуги невозможно. Поэтому ясно, что максимальному значению сопротивления $R_{\max}$ резистора, при котором дуга горит, соответствует нагрузочная прямая, касающаяся графика $U_{\text{д}}(I)$. Из рисунка 16 находим, что

$$R_{\max} = \frac{\Delta U}{\Delta I} \approx \frac{35}{7} = 5 \text{ (Ом)}.$$

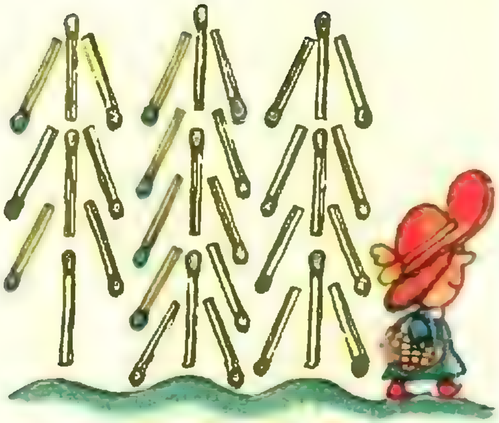
(Точки пересечения нагрузочной прямой с графиком $U_{\text{д}}(I)$ (например, точки a и b) определяют возможные значения тока и напряжения на дуге при данном значении сопротивления *балластного резистора*. Точка a соответствует неустойчивому горению дуги, а точка b — устойчивому.)

И. Слободецкий

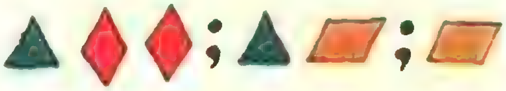
Квант для младших школьников

Задачи

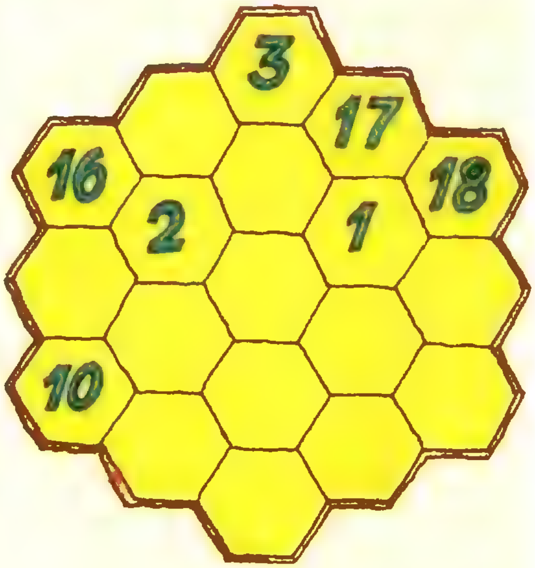
1. На рисунке изображен лес (из спичек) и Красная Шапочка, идущая к Бабушке. Переложите две спички так, чтобы Красная Шапочка возвращалась обратно.



2. Дано трехзначное число. Найдем произведение его цифр. Затем найдем произведение цифр результата. Исходное число и два полученных произведения можно изобразить соответственно так, как показано на рисунке (одинаковые фигурки заменяют одинаковые цифры). Каким было исходное число? Сколько решений имеет задача?



3. Заполните свободные клетки шестиугольника натуральными числами так, чтобы в них оказались все числа от 1 до 19, и во всех пяти рядах каждого из трех направлений (вертикального и двух наклонных) сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.



4. Студенты Вадим и Коля играют в шахматы. Мимо проходит Надя — младшая сестра Коли. На вопрос, сколько лет Наде, Коля ответил так: «Если умножить номер сегодняшнего дня недели на число Надиного дня рождения и на номер месяца, в котором она родилась, то получится год рождения Нади». В какой день недели Вадим и Коля играли в шахматы?

5. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых он выставляет испытуемому средний балл. Ответив на последний тест, Джон понял, что если бы за этот последний тест он получил 97 очков, то его средний балл равнялся бы 90. С другой стороны, если бы он получил за последний тест всего 73 очка, то его средний балл составил бы 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

Обычно для исследования различных физических явлений используются разные приборы. Существуют, однако, и универсальные приборы, позволяющие разобраться во многих физических явлениях. Одним из таких приборов является ... хорошо вам знакомый воздушный шарик.

В. Тихонов

Опыты с воздушными шариками

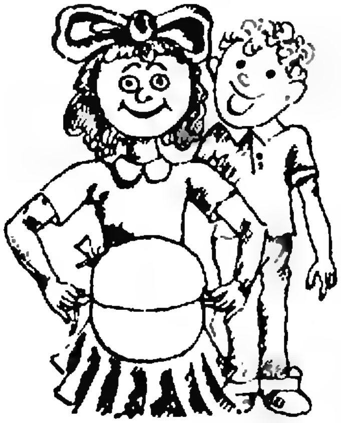


Рис. 1.

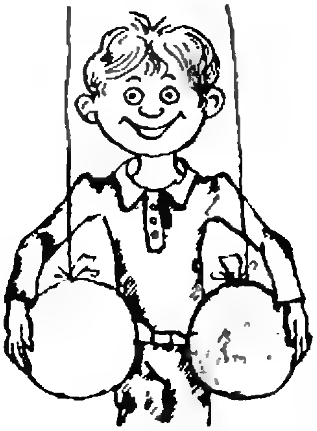


Рис. 2.

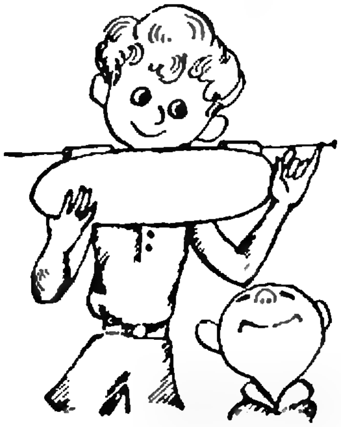


Рис. 3.

1. Хорошенько надуйте шарик и завяжите его. Перевяжите шарик по диаметру ниткой (рис. 1), поместите его часа на 3—4 в холодильник и затем выньте оттуда.

Изменились ли размеры шарика? Стал ли он холоднее на ощупь? Изменилась ли температура воздуха внутри шарика?

Вынув воздушный шарик из холодильника, вы, конечно, заметите, что он как-то сжался, сморщился. Нитка, повязанная по диаметру шарика, будет на нем болтаться и легко снимется с него. Значит, объем шарика уменьшился.

Резина, из которой сделана оболочка шарика,— неплохой теплоизоляционный материал, поэтому вы вряд ли ощутите изменение температуры шарика.

А вот воздух внутри шарика стал холоднее. Попробуйте объяснить, почему.

2. Возьмите в каждую руку по сухому туго надутому шарику, привязанному к нитке. Попросите вашего товарища натереть шарики (рис. 2): один раз оба шарика — шерстяной тряпочкой, а другой раз один шарик — шерстяной тряпочкой, другой — шелковой. Теперь сближайте руки.

Что произойдет с шариками — будут они притягиваться или отталкиваться?

Как известно, при трении тела электризуются. Если натереть оба шарика шерстяной (или шелковой) тряпочкой, они приобретут одноименные заряды и будут отталкиваться друг от друга. Если же один шарик натереть шерстяной тряпочкой, а другой — шелковой, заряды на шариках окажутся разноименными, и шарики будут притягиваться друг к другу.

3. Надуйте шарик. Затем, не завязывая его, вытяните в виде сигары (рис. 3) и отпустите.

Что случится с шариком?

Ответ на этот вопрос очень простой — сокращаясь, растянутая резиновая оболочка как бы выбрасывает воздух из шарика, в результате шарик приходит в движение подобно ракете.

4. Возьмите открытую жестяную банку и проделайте в ее дне небольшое отверстие. Прислоните к банке надутый воздушный шарик и сквозь отверстие втягивайте в себя воздух (рис. 4).

Как поведет себя шарик?

Давление внутри банки станет меньше, чем снаружи, поэтому сила давления наружного воздуха будет прижимать шарик к банке. Кроме того, шарику мешает соскользнуть с банки сила трения.

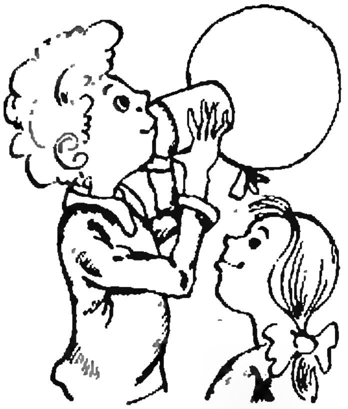


Рис. 4.

5. Натяните резиновую оболочку воздушного шарика на пустую банку, прикрепите к оболочке указатель, а рядом поставьте измерительную шкалу (рис. 5). Вы получите некий измерительный прибор. Проследите, какое положение на шкале занимает стрелка, когда прибор находится в комнате, в ванне, на улице.

Как вы думаете, что именно измеряет этот прибор?

Конечно, вы догадались, что изготовленный вами прибор — это барометр. С помощью такого барометра легко следить за изменениями давления воздуха. Если давление наружного воздуха увеличивается (становится больше давления внутри банки), оболочка вдавливается внутрь банки, и стрелка поднимается по шкале. Если же давление снаружи уменьшается (и оказывается меньше внутреннего), оболочка выгибается наружу, а стрелка опускается.

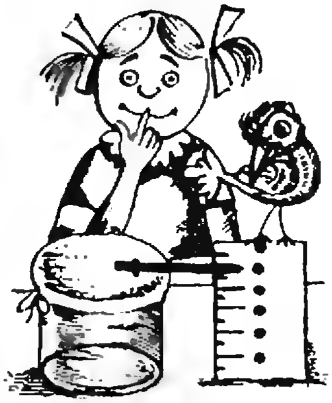


Рис. 5.

А. Дозоров

Шарик, который не сдувается

Возьмите большую стеклянную банку и плотно закройте ее пробкой, в которую вставлены две стеклянные трубочки (рис. 6). На верхние концы трубочек предварительно наденьте резиновые шланги, а к нижнему концу одной из трубочек привяжите резиновую оболочку воздушного шарика. (Роль трубки T_1 может играть кран K, показанный на рисунке 6 пунктиром.)

Оставьте шланг трубки T_1 свободным, а через трубку T_2 надуйте шарик. Если затем освободить T_2, шарик, естественно, будет сдуваться.

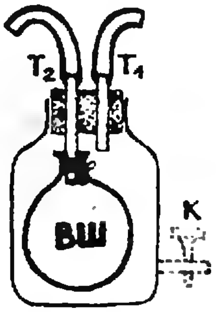


Рис. 6.

Теперь сделайте следующее. При открытой трубке T_1 надуйте шарик и сразу же пережмите шланги обеих трубок. Если после этого открыть трубку T_2, шарик практически не сдуется. Почему?

Объяснить это довольно легко. Как только мы освободим трубку T_2, под действием растянутой резиновой оболочки шарик начнет сдуваться. При этом его объем будет уменьшаться, а объем воздуха в банке (при закрытой трубке T_1) — увеличиваться. В результате давление воздуха в банке будет уменьшаться. В какой-то момент оно окажется меньше давления воздуха внутри шарика. Этот перепад давлений скомпенсирует действие растянутой оболочки — шарик сдуваться перестанет. Очевидно, что чем сильнее был надут шарик, тем меньше он сдуется.

М. Крайзман

Заменим фигуру

Общеизвестно, что метод замены переменной широко применяется в алгебре. Не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условиях задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

В первых двух задачах речь пойдет о простейшей замене — замене одного отрезка другим.

Задача 1. *Из точки C, взятой вне угла AOB, равного $60°$, опущены перпендикуляры CD, CM и CN соответственно на стороны OA, OB и на биссектрису ON данного угла. Определить $|ON|$, если $|CM|=d_1$ и $|CD|=d_2$.*

Решение. Пусть E и P — точки пересечения (CN) с (OB) и (OA) (рис. 1). Образовавшийся треугольник OEP, очевидно, равносторонний. Анализ рисунка приводит к идее замены отрезка ON конгруэнтным отрезком EF, где $(EF)\perp(OP)$: длину отрезка EF легче увязать с данными длинами отрезков CD и CM.

Проведем $[EK]\perp[CD]$ (см. рис. 1); тогда

$$|EF| = |KD| = |CD| - |CK| = |CD| - |CM| = d_2 - d_1.$$

Мы предполагали здесь, что $d_2>d_1$. Случай $d_1>d_2$ показан на рисунке 2 и аналогичен случаю $d_2>d_1$. Окончательный ответ: $|ON| = |d_1-d_2|$.

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|$) из вершины A проведен перпендикуляр AD к стороне BC. В треугольники ABD и ACD вписаны полукруги так, что их диаметры лежат соответственно на $[BD]$ и $[AD]$. Найти отношение площадей этих полукругов, если величина угла B равна $\frac{\pi}{4}$.*

Решение. Если учесть, что $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$, то искомая величина будет найдена, если удастся найти отношение радиусов полукругов; для этого заменим радиус O_1M (рис. 3) на конгруэнтный ему отрезок, являющийся гипотенузой прямоугольного треугольника с известным острым углом. Из того, что $\widehat{B}=\frac{\pi}{4}$, следует $|AD|=|BD|$, $|MB|=|MO_1|=r_1$. Учитывая, что $|AD|=|AM|$ и $|BA|=|BC|$, получаем $|MB|=|CD|$ — отрезок MB можно заменить отрезком CD. В прямоугольном треугольнике O_2CD

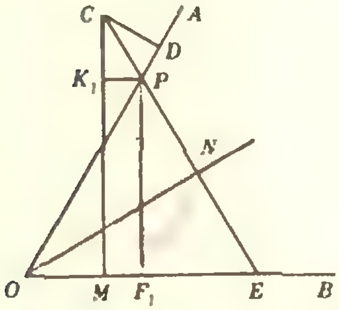


Рис. 1.

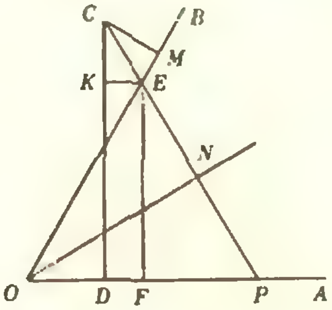


Рис. 2.

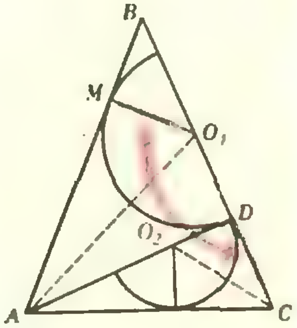


Рис. 3.

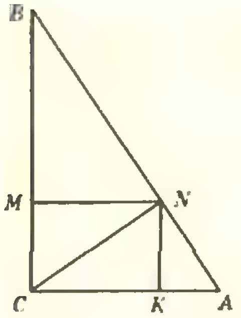


Рис. 4.

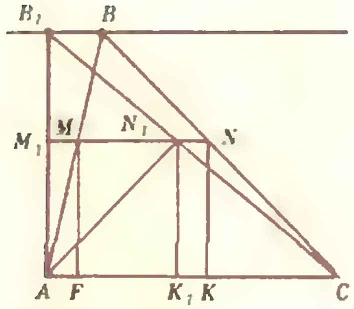


Рис. 5.

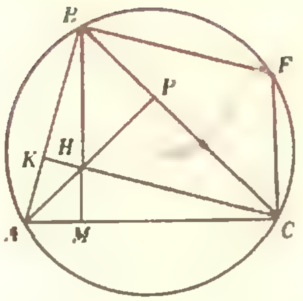


Рис. 6.

$\widehat{O_2CD}=\frac{1}{2}\widehat{ACD}=\frac{3\pi}{16}$; следовательно, $\frac{S_1}{S_2}=\text{ctg}^2\frac{3\pi}{16}$.

В следующих трех задачах мы будем заменять более сложную фигуру (треугольник, пирамиду).

Задача 3. *В данный треугольник вписать прямоугольник с диагональю наименьшей длины так, чтобы одна сторона треугольника (или ее продолжение) содержала две вершины, а две другие стороны — по одной вершине этого прямоугольника.*

Решение. Если бы в этой задаче шла речь не о произвольном треугольнике, а о прямоугольном, имеющем с данным прямоугольником общий прямой угол, то решение не вызвало бы никаких затруднений: искомым прямоугольником был бы тот, в котором диагональ перпендикулярна к гипотенузе треугольника (рис. 4). Попробуем заменить данный треугольник прямоугольным треугольником с вписанным прямоугольником конгруэнтным искомому.

Пусть B_1AC — прямоугольный ($\hat{A}=90°$) треугольник с тем же основанием AC, причем $(B_1B)\parallel(AC)$ (рис. 5). Тогда $|M_1N_1|=|MN|$ (докажите самостоятельно). В треугольник B_1AC впишем прямоугольник $AM_1N_1K_1$ с наименьшей диагональю (рис. 5). Прямая M_1N_1 пересечет стороны BA и BC соответственно в точках M и N. Проведем $[MF]\perp[AC]$ и $[NK]\perp[AC]$. Прямоугольник $FMNK$ — искомый.

Задача 4. *Доказать, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB, BHC и AHC, где H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, равны между собой.*

Решение. Заменим один из этих треугольников (например, $\triangle BHC$) конгруэнтным ему треугольником и найдем радиус окружности, описанной вокруг замененного треугольника.

1 способ. Через вершину B проведем прямую, параллельную высоте CK, а через C — прямую, параллельную высоте BM; пусть F — точка пересечения этих прямых (рис. 6).

Четырехугольник $BHCF$ — параллелограмм, поэтому $\triangle BFC\cong\triangle BHC$. Рассмотрим четырехугольник $ABFC$:

$$\begin{pmatrix}[FB]\parallel[CK]\\ [FC]\parallel[BM]\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\widehat{ABF}=\widehat{ACF}=90°\right).$$

Следовательно, точки A, B, F и C лежат на одной окружности, поэтому $R_{\triangle ABC}=R_{\triangle BFC}$ ($R_{\triangle ABC}$ обозначает радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$)

$(\triangle BFC\cong\triangle BHC)\Rightarrow(R_{\triangle BFC}=R_{\triangle BHC})$.

Далее, $\begin{pmatrix}R_{\triangle ABC}=R_{\triangle BFC}\\ R_{\triangle BFC}=R_{\triangle BHC}\end{pmatrix}\Rightarrow$
$\Rightarrow(R_{\triangle ABC}=R_{\triangle BHC})$.

Аналогично доказывается, что $R_{\triangle AHB}=R_{\triangle AHC}=R_{\triangle ABC}$.

2 способ. Опишем около данного треугольника ABC окружность и продолжим его высоту AP до пересечения с проведенной окружностью в точке E (рис. 7). Заметим, что $\widehat{CBM}=\widehat{PAC}$ (каждый из этих углов дополняет угол ACB до 90°) и $\widehat{PAC}=\widehat{CBE}$

(каждый из них измеряется половиной угловой величины дуги EC, на которую они опираются); следовательно, $\angle CBE \cong \angle CBH$. Аналогично доказываем, что $\angle BCE \cong \angle BCH$. Таким образом, $\triangle BEC \cong \triangle BHC$, следовательно, $R_{BEC} = R_{BHC}$.

Точки A, B, C и E лежат на одной окружности, поэтому $R_{BEC} = R_{ABC}$. Окончательно получаем $R_{BHC} = R_{ABC}$.

Аналогично доказываем, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB и AHC, равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 5*). *Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Найти объем тетраэдра AD_1EF, где E — середина ребра DC и F — середина ребра BB_1, если ребро куба равно 1.*

Решение. Проведем через точку D_1 прямую l параллельно $[AF]$ (рис. 8).

$$\left(\begin{array}{l} l \parallel [AF] \\ [AF] \subset (AA_1B_1) \end{array}\right) \Rightarrow (l \parallel (AA_1B_1)).$$

Так как $D_1 \in (DD_1C_1)$ и $(DD_1C_1) \parallel (AA_1B_1)$, любая прямая (в частности, прямая l), проведенная через точку D_1 параллельно (AA_1B_1), будет лежать в плоскости грани DD_1C_1C. Пусть $l \cap (DC) = K$. Из того, что, $(D_1K) \parallel [AF]$ и $[AF] \subset (AFE)$, получаем $(D_1K) \parallel (AFE)$, и потому пирамида D_1AFE равновелика пирамиде $KAFE$ (у них общее основание — $\triangle AFE$, а вершины D_1 и K лежат на прямой, *параллельной* (AFE)). Заменим теперь пирамиду D_1AFE пирамидой $KAFE$.

Примем за основание пирамиды $KAFE$ треугольник AKE; тогда высотой пирамиды будет $[FB]$, поэтому

$$V_{FAKE} = \frac{1}{3} S_{\triangle AKE} \cdot |FB|.$$

Из подобия треугольников AFB и KD_1D следует $|DK| = 2$. Далее находим: $|KE| = 2\frac{1}{2}$, $S_{AKE} = \frac{1}{2}|KE| \cdot |AD| = \frac{5}{4}$. Окончательно получаем $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$.

В следующих трех задачах мы будем заменять параллелепипед тетраэдром.

Задача 6. *Из одной из вершин прямоугольного параллелепипеда проведены диагонали всех граней, проходящих через эту вершину. Доказать, что сумма углов, попарно образованных этими диагоналями, равна 180°.*

Решение. Соединим между собой точки A, D_1 и C — концы диагоналей, проведенных из вершины B_1 (рис. 9). Заменим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образовавшимся тетраэдром B_1AD_1C и докажем, что сумма плоских углов при вершине этого тетраэдра равна 180°.

Заметим, что $\triangle AB_1 \cong C\triangle AD_1C$, $\triangle CB_1D_1 \cong \triangle CAD_1$ и $\triangle AB_1D_1 \cong \triangle ACD_1$; следовательно, $\angle AB_1C \cong \angle AD_1C$, $\angle CB_1D_1 \cong \angle CAD_1$ и $\angle AB_1D_1 \cong \angle ACD_1$.

---

*) Эта задача предлагалась в 1969 г. на вступительных экзаменах на физический факультет МГУ.

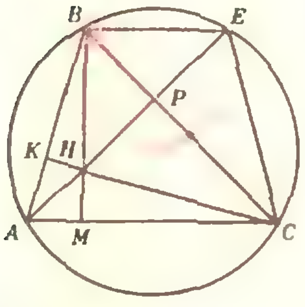


Рис. 7.

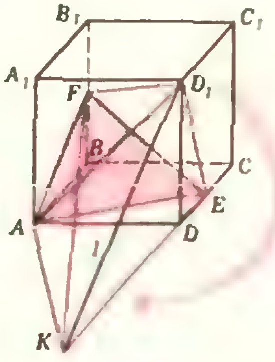


Рис. 8.

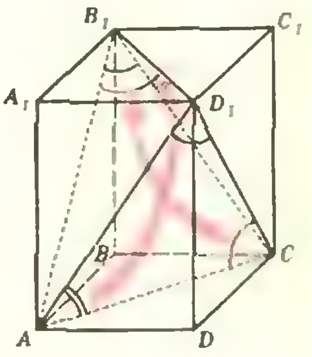


Рис. 9.

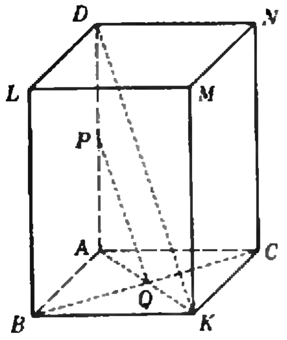


Рис. 10.

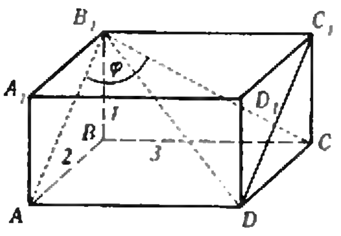


Рис. 11.

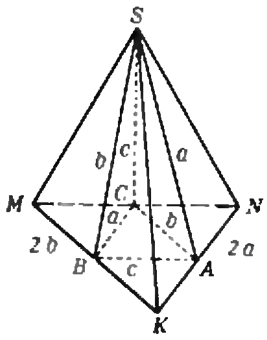


Рис. 12.

Учитывая $\widehat{AD_1C}+\widehat{CAD_1}+\widehat{ACD_1}=180^\circ$ (сумма углов треугольника), получим $\widehat{AB_1D_1}+\widehat{AB_1C}+\widehat{CB_1D_1}=180^\circ$.

Задача 7. *Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины скрещивающихся ребер тетраэдра с прямым трехгранным углом при вершине, равна радиусу сферы, описанной около данного тетраэдра.*

Решение. Дополним тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине A до прямоугольного параллелепипеда $ABKCDLMN$ (рис. 10). Сфера, описанная около данного параллелепипеда, будет также описанной около тетраэдра $ABCD$. Из треугольника AKD следует, что $|PQ|=\frac{1}{2}|DK|$. Так как диагональ DK параллелепипеда является диаметром описанной сферы, длина отрезка PQ равна радиусу этой сферы.

Задача 8. *Длина ребер прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2 и 3. Определить расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней этого параллелепипеда.*

Решение. Вместо параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим тетраэдр DB_1C_1C (рис. 11). Объем этого тетраэдра равен

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1C_1C}\cdot|DC|=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\right)\cdot2=1. \qquad (1)$$

Найдем теперь его объем, воспользовавшись соотношением $V=\frac{1}{6}\times l_1\cdot l_2\cdot d\cdot\sin\varphi$\*), где l_1 и l_2 — длины скрещивающихся ребер этого тетраэдра, d и φ — расстояние и угол между ними. Получим

$$V=\frac{1}{6}|B_1C|\cdot|DC_1|\cdot d\cdot\sin\widehat{AB_1C}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{50}\cdot d\cdot\sin\varphi.$$

В трехгранном угле $BACB_1$ косинус плоского угла φ, лежащего против ребра B_1B прямого двугранного угла, равен произведению косинусов плоских углов, ограничивающих этот прямой двугранный угол, т. е.

$$\cos\widehat{AB_1C}=\cos\widehat{AB_1B}\cdot\cos\widehat{BB_1C};$$

из этого равенства получаем

$$\cos\widehat{AB_1C}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{50}};$$

$$\sin\widehat{AB_1C}=\sin\varphi=\frac{7}{\sqrt{50}}.$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{50}\cdot d\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}=\frac{7}{6}d. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует $1=\frac{6}{7}d$.

Отсюда $d=\frac{6}{7}$.

Приведем замену, при которой три боковых ребра заменяемого тетраэдра являются медианами боковых граней заменяющего тетраэдра.

---

*) Эту формулу тоже можно доказать методом замены!

Задача 9. *Длины ребер SA и BC тетраэдра $SABC$ равны a, ребер SB и AC—b, ребер SC и AB—c. Определить его объем.*

Решение. Пусть вершины A, B, C тетраэдра $SABC$ являются серединами ребер NK, MK и MN тетраэдра $SMNK$ (рис. 12). Тогда $|KN|=2|BC|=2a$, $|MN|=2|AB|=2c$, $|KM|=2|AC|=2b$. По условию задачи $|AS|=a$, $|BS|=b$, $|CS|=c$. Следовательно, в треугольнике KSN длина медианы AS равна половине длины стороны KN и, следовательно, $\triangle KSN$ — прямоугольный ($\widehat{KSN}=90^\circ$). Аналогично доказываем, что $\widehat{NSM}=\widehat{MSK}=90^\circ$. Если тетраэдр $SMNK$ поставить на боковую грань, например, SKM, то ребро SN будет его высотой и, следовательно, $V_{SKNM}=\frac{1}{6}|SK|\times$ $\times|SN|\cdot|SM|$.

Объем искомой пирамиды составляет $^1/_4$ часть объема пирамиды $SKNM$ (тетраэдры $SKAB$, $SANC$, $SMCB$ и $SABC$ равновелики), поэтому $V_{SABC}=\frac{1}{24}|SK|\cdot|SN|\cdot|SM|$.

Положим $|SM|=x$, $|SN|=y$, $|SK|=z$; тогда

$$\begin{cases} x^2+y^2=4c^2, \\ x^2+z^2=4b^2, \\ y^2+z^2=4a^2. \end{cases} \qquad (3)$$

Отсюда

$$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2). \qquad (4)$$

Вычтя из уравнения (4) каждое из уравнений системы (3), получим

$$\begin{cases} z^2=2(a^2+b^2-c^2), \\ y^2=2(a^2+c^2-b^2), \\ x^2=2(b^2+c^2-a^2). \end{cases} \qquad (5)$$

Отсюда

$$x^2y^2z^2=$$
$$=8(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2).$$

Искомый объем равен:

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)\times}$$
$$\overline{\times(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}.$$

Упражнения

1. Для данного треугольника построить прямоугольник с данной диагональю так, чтобы на прямой, содержащей одну сторону треугольника, лежали две вершины прямоугольника, а на двух других сторонах треугольника — по одной вершине этого прямоугольника.

2. Построить квадрат так, чтобы на прямой, содержащей одну сторону данного треугольника, лежали две вершины квадрата, а две другие стороны треугольника содержали по одной вершине квадрата.

3. Большее основание правильной четырехугольной усеченной пирамиды образует с боковой гранью угол α, а с плоскостью, проходящей через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, угол β. Найти отношение площадей оснований.

4. Длины оснований равнобедренной трапеции равны a и b ($a>b$), величина угла при большем основании равна α. Найти длину радиуса окружности, описанной около трапеции.

5. Определить длину радиуса сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра с боковым ребром a.

Где ошибка?

Не вызывает сомнения следующее **логическое правило:** *если из высказывания A следует высказывание B и из B следует высказывание C, то из A следует C.*

Применим это правило к предложениям:

Я утверждаю, что Сократ — буйный человек (*A*)

Я утверждаю, что Сократ — человек (*B*)

Я говорю правду (*C*)

Очевидно, если я утверждаю, что Сократ — буйный человек, то тем самым я утверждаю, что Сократ — человек. Но если я утверждаю, что Сократ — человек, то я, разумеется, говорю правду. Получается, что если я утверждаю, что Сократ — буйный человек, то я говорю правду.

Где ошибка?

Н Михайленко

Н. Берюлева

Построение изображений в линзах и сферических зеркалах

Определить положение изображения, полученного с помощью линзы или зеркала, можно двумя способами — алгебраическим расчетом с помощью формулы линзы (зеркала) и геометрическим построением.

Первый способ, пожалуй, более универсален; во многих случаях, особенно в сложных оптических системах, без него не обойтись. Зато второй способ обладает важным достоинством — наглядностью. Поэтому, даже решая задачу алгебраически, мы обычно делаем чертеж, который помогает составить необходимую систему уравнений. Если же задача не слишком громоздкая, геометрическое решение — решение построением — является и более простым.

При построении изображений в тонких линзах обычно используют три характерных луча (рис. 1):

1) луч AA_1, проходящий через оптический центр O линзы (побочная оптическая ось), идет не преломляясь;

2) луч BB_1, падающий на линзу параллельно главной оптической оси MN, преломившись, проходит *) через задний фокус F' линзы;

3) луч CC_1, проходящий через передний фокус F, после преломления идет параллельно главной оптической оси линзы.

Обратите внимание, что задним фокусом F' называется точка, в которой после преломления сходятся лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси. Передний F и задний F' фокусы расположены симметрично относительно плоскости тонкой линзы. Через F проходит передняя фокальная плоскость, через F' — задняя.

Иногда удобно пользоваться такими правилами:

1) лучи, падающие на линзу параллельным пучком, после преломления в линзе сходятся в задней фокальной плоскости (рис. 2);

2) лучи, выходящие из линзы параллельным пучком, до встречи с линзой пересекались в передней фокальной плоскости (рис. 3).

Строго говоря, все сказанное справедливо только для *параксиальных* (то есть очень близких к главной оптической оси) лучей. Подробнее об этом можно прочитать в статье Е. Кузнецова «Линзы и системы линз» («Квант», 1977, № 4).

Среди оптических задач больше всего затруднений у абитуриентов вызывают задачи на построение изображений в рассеивающих линзах. По-видимому, трудности возникают у тех, кто не уяснил себе достаточно четко, что линза имеет два фокуса и что роли этих фокусов различны.

Напомним еще раз, что задний фокус — это точка на главной оптической оси линзы, где сойдутся после преломления лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси. У собирающей (положительной) линзы задний фокус F' расположен за линзой (по ходу лучей), у рассеивающей (отрицательной) — перед линзой (см. рис. 1, 2, 3). Если лучи вышли из линзы параллельно главной оптической оси, значит, перед тем как встретиться с линзой, они пересекались в переднем фокусе F. У собирающей линзы передний фо-

---

*) Уточним, что для отрицательной линзы через F' проходит не сам преломленный луч, а его продолжение. В дальнейшем уточнения такого рода мы будем для краткости опускать.

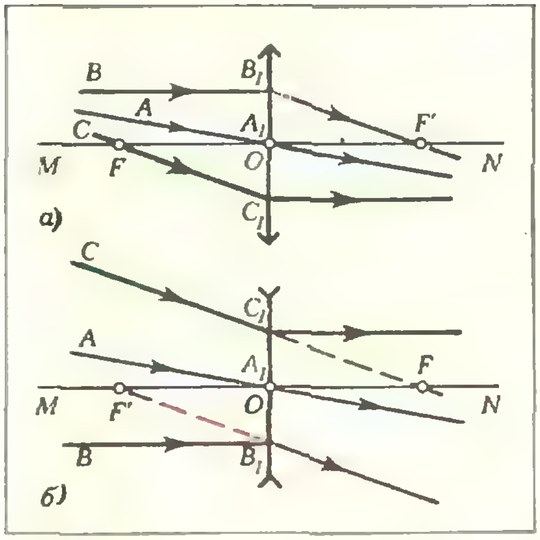

B
B_1
A
A_1
C
F'
M
F
O
N
C_1
а)
C
C_1
A
A_1
F
M
F'
O
N
B
B_1
б)

Рис. 1.

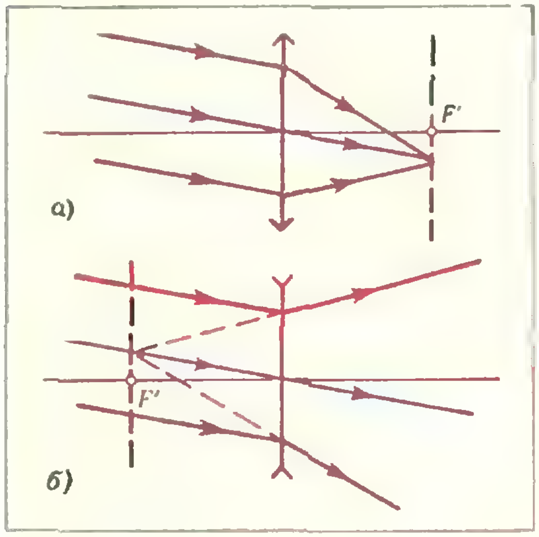


Рис. 2.

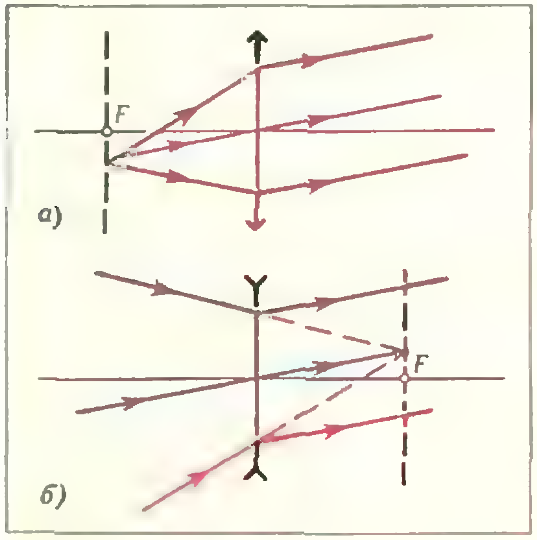


Рис. 3.

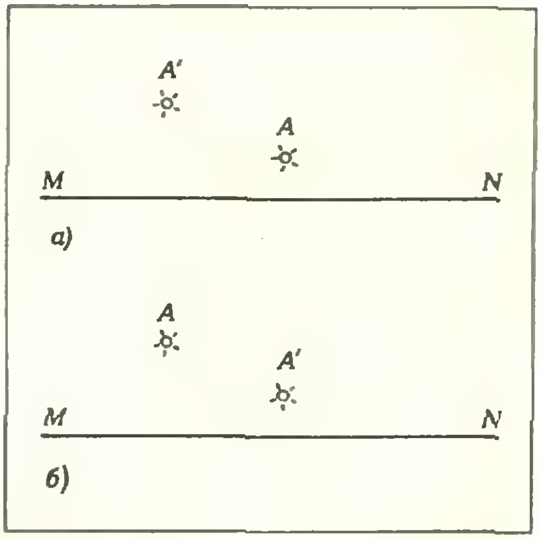

A'
A
M
N
а)
A
A'
M
N
б)

Рис. 4.

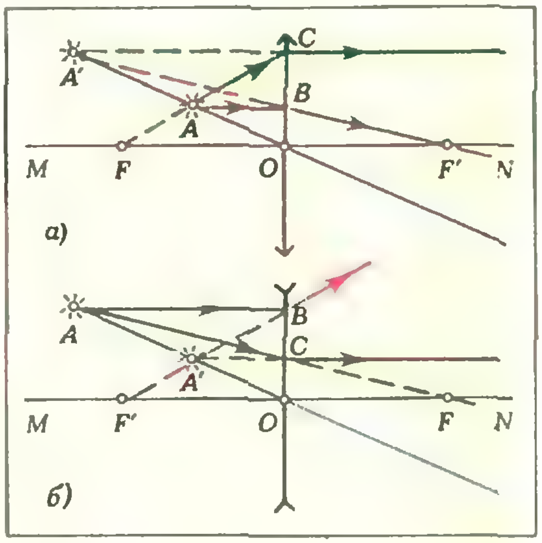

C
A'
B
A
M
F
O
F'
N
а)
A
B
C
A'
M
F'
O
F
N
б)

Рис. 5.

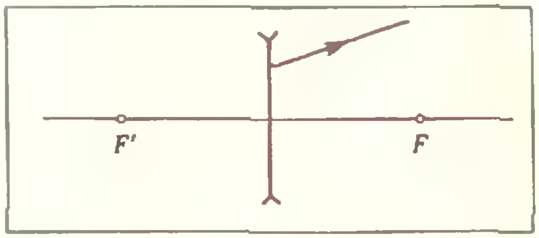


Рис. 6.

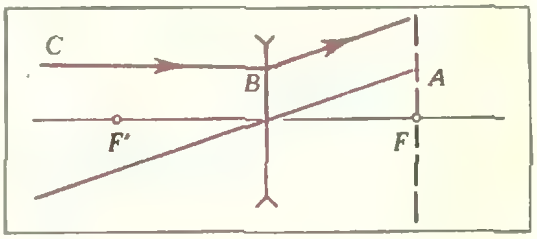


Рис. 7.

кус F лежит перед линзой (по ходу лучей), у рассеивающей — за линзой.

Термины «передний фокус» и «задний фокус» помогают в лаконичной форме сформулировать правила построения изображений, единые для положительной и отрицательной линз.

Рассмотрим несколько конкретных задач. Все они предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Зная расположение предмета A и изображения A' относительно главной оптической оси MN линзы (рис. 4), найти построением положение фокусов линз.*

Прямая, проходящая через точки A и A', при пересечении с осью MN дает центр линзы O (рис. 5). Перпендикуляр к оси MN, восстановленный из точки O, определяет положение плоскости линзы.

Луч AB, параллельный оси MN, преломившись в линзе, проходит через точку A' и задний фокус F' линзы. Если F' лежит за линзой (рис. 5, *а*) — линза собирающая, если перед линзой (рис. 5, *б*) — рассеивающая. Симметрично относительно линзы расположен передний фокус F.

Построив луч AC, проходящий через передний фокус, убедимся, что он после преломления в линзе попадает в точку A'.

Задача 2. *На рисунке 6 изображен луч, вышедший из рассеивающей линзы. Построить ход луча до линзы.*

Проведем побочную оптическую ось параллельно лучу, вышедшему из линзы (рис. 7). Лучи, идущие после линзы параллельным пучком, до встречи с линзой пересекались в ее передней фокальной плоскости. Соединив точку A, в которой побочная ось пересекается с передней фокальной плоскостью, и точку B, в которой вышедший луч пересекается с плоскостью линзы, определим направление падающего луча CB.

Задача 3. *С помощью собирающей линзы получен сходящийся пучок лучей. Как пойдут лучи, если на пути пучка поставить рассеивающую линзу (рис. 8)?*

Проведем побочную оптическую ось, параллельную верхнему лучу пучка (рис. 9). Параллельные лучи после линзы пересекаются в ее задней фокальной плоскости (точка A). Продолжив прямую AB, найдем ход верхнего луча за линзой. Симметрично построим нижний луч пучка.

Задача 4. *Рассеивающую линзу с известным расположением фокальных плоскостей распилили по диаметру. Половинки раздвинули по вертикали на расстояние h друг от друга (рис. 10). Построить изображения точки A, лежащей на оси симметрии системы.*

Каждая половина линзы дает свое изображение точки A. Сначала построим изображение в верхней половине линзы. Главная оптическая ось M_1N_1 верхней половины проходит через срез линзы параллельно оси симметрии системы, O_1 — оптический центр верхней части, AO_1 — ее побочная оптическая ось (рис. 11).

Проведем произвольный луч AB, падающий из точки A на верхнюю часть линзы, и параллельную ему побочную оптическую ось CD. После встречи с линзой параллельные лучи пересекаются в задней фокальной плоскости в точке E. Точка пересечения прямых BE и AO_1 определяет положение изображения A'.

Нижняя часть линзы дает симметрично расположенное изображение A''.

* * *

В сферических зеркалах изображения строятся по тем же правилам, что и в линзах (рис. 12):

1) луч AO, проходящий через центр зеркала O, при отражении от зеркала не меняет своего направления;

2) луч BB_1, падающий на зеркало параллельно главной оптической оси, отразившись, идет через фокус F зеркала (напомним, что фокус сферического зеркала расположен посередине между полюсом зеркала P и его центром O);

3) луч DF, проходящий через фокус, отразившись, идет параллельно главной оптической оси.

Удобно использовать еще один луч:

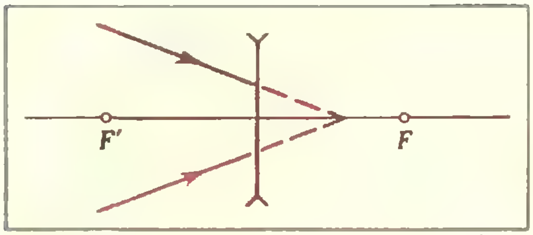


Рис. 8.

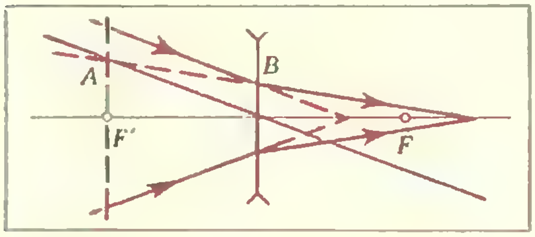


Рис. 9.

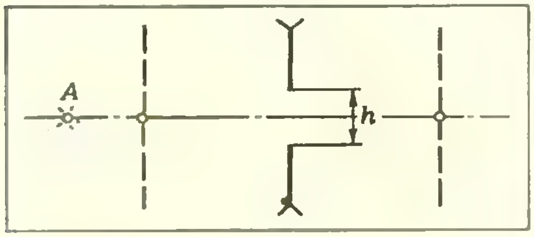


Рис. 10.

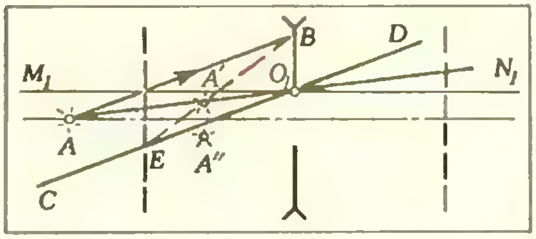

B
D
M1
N1
A′
O1
A
E
A″
C

Рис. 11.

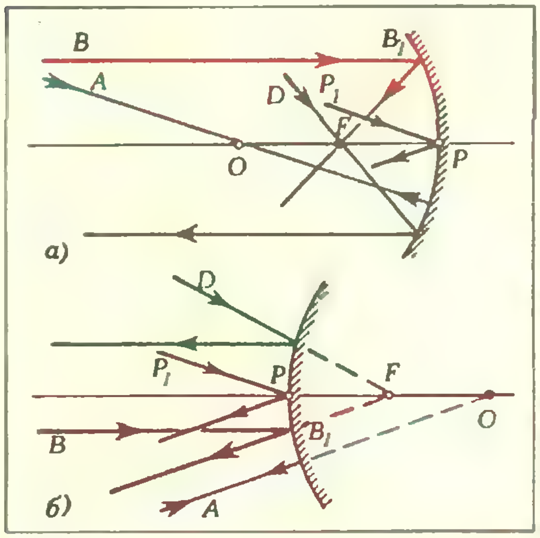

B
B1
A
D
P1
F
O
P
а)
D
P1
P
F
B
B1
O
б)
A

Рис. 12.

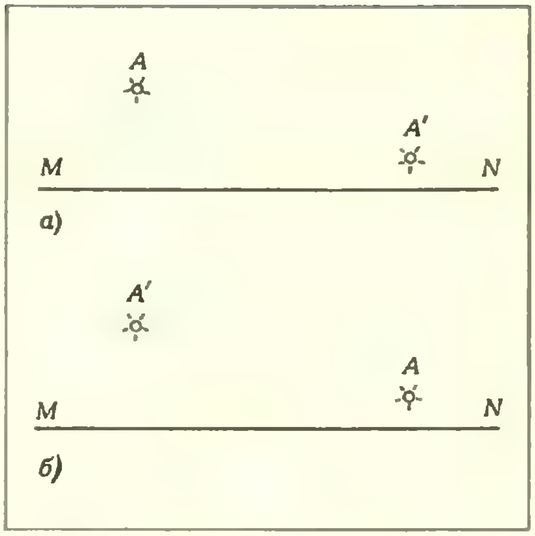

A
A′
M
N
а)
A′
A
M
N
б)

Рис. 13.

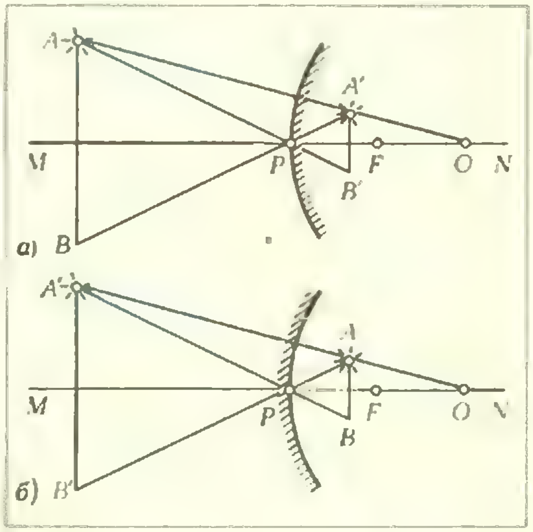

A
A′
M
P
F
O
N
B′
а)
B
A′
A
M
P
F
O
N
B
б)
B′

Рис. 14.

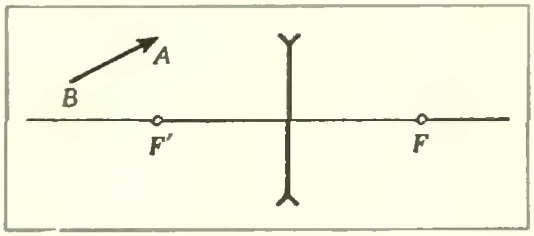


Рис. 15.

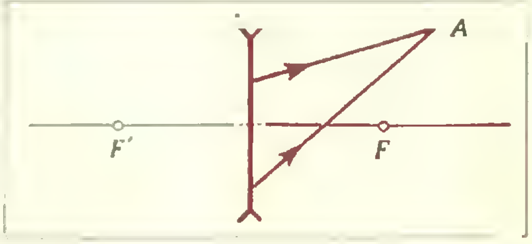


Рис. 16.

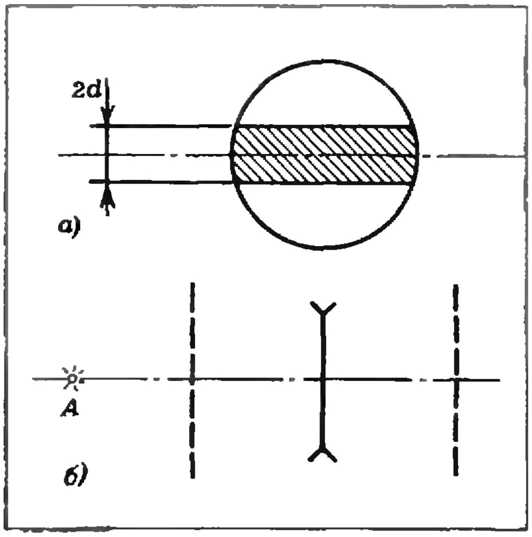


Рис. 17.

4) луч P_1P, падающий на полюс зеркала P, отражается симметрично относительно главной оптической оси OP.

Разберем такую задачу:

Задача 5. *Известно расположение предмета A и его изображения A' относительно главной оптической оси MN сферического зеркала (рис. 13). Найти построением фокус зеркала.*

Пересечение прямой, проходящей через точки A и A', с осью MN дает центр сферического зеркала (рис. 14).

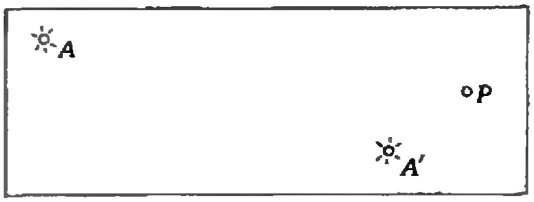


Рис. 18.

Проведем отрезки AB и $A'B'$, перпендикулярные к оси MN (точки B и B' симметричны точкам A и A' соответственно). Прямые AB' и BA', пересекаясь с осью MN, определяют полюс зеркала P.

Окружность радиуса $|OP|$ с центром в точке O определяет положение зеркала. Отражающая поверхность зеркала обращена к предмету.

Фокус зеркала F делит отрезок OP пополам.

Упражнения

1. Построить изображение предмета AB в рассеивающей линзе. Положения фокусов указаны на рисунке 15.

2. После рассеивающей линзы пучок лучей сошелся в точке A (рис. 16). Начертить ход лучей до линзы.

3. Рассеивающую линзу распилили, как показано на рисунке 17, *а*, середину удалили, а оставшиеся части сдвинули вплотную. Построить изображение предмета A, лежащего на оси симметрии оптической системы (рис. 17, *б*).

4. Известно расположение предмета A и изображения A' относительно полюса P сферического зеркала (рис. 18). Найти положение зеркала и его фокус.

Знаю ли я неравенства?

С помощью несложного задания вы можете проверить, хорошо ли вы усвоили раздел «Неравенства». Для этого вам нужно решить восемь предлагаемых задач не более чем за 25 минут. Сверив получившиеся ответы с ответами на с. 62, вы сможете тут же сами себе поставить оценку (по пятибалльной системе), вычислив ее по формуле

$$k=\left[\frac{n}{2}+1\right],$$

где n — количество правильно решенных задач.

Вы готовы? Засекайте время... Начали!

Задание

Решить неравенства:

1. $x^{-2}<x^{-3}$.

2. $\dfrac{(x+3)(x+4)}{x+3}>0$.

3. $\log_{\sqrt{x}}x>1$.

4. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x<3$.

5. $\sin x>\cos x$.

6. $\sin x\leqslant\log_2 3$.

7. Что больше: $\log_6\cos 6$ или $\sqrt{\cos 6}$?

8. Упростить выражение $|-a|+\sqrt{a^2}$ при $a<0$.

Если вы (не превысив лимит времени) заработали «пятерку», можете перейти к следующему, более трудному заданию. Впрочем, если ваша оценка «четыре» и вы осознали свои ошибки, попробуйте реабилитировать себя. Не торопитесь: время теперь не ограничено.

Решить неравенства:

1. $\log_{\sqrt{2}-0,5}\left(x^2\left(x-3\sqrt{2}\right)+2\left(3x-\sqrt{2}\right)\right)<6$.

2. $\dfrac{\arcsin\left(x^2-3x+3\right)}{x^3-x^2+x+\log_x x^2}>0$.

Л. Слукин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов 1978 года.

Математика

Механико-математический факультет

Вариант I

1. Разность

$$\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$$

является целым числом. Найдите это целое число.

2. Найти все решения уравнения

$$\int\limits_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)\,dx=\sin\alpha,$$

принадлежащие отрезку $[2;\ 3]$.

3. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а длина отрезка PQ равна $2\sqrt{2}$. Вычислить радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Найти все значения параметра a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2\geqslant \dfrac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2+10xy-5y^2\leqslant -2, \end{cases}$$

имеет решение.

5. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$$

2. Найти точки минимума функции

$$\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\frac{x-3}{2}.$$

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, касающейся графика функции $y=-\frac{x^2}{2}+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

5. Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Задачи устного экзамена

1. Найти min и max функции $f(x)=a\sin x+b\cos x$.

2. Решить в натуральных числах уравнение

$$A_{x+3}^2=C_{x+2}^3+20.$$

3. Доказать, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

4. Доказать неравенства $3<\pi<4$.

5. Построить график функции

$$y=\log_{|\sin x|}\frac{1}{2}.$$

6. Вычислить $\log_9 40$, если известно, что $\lg 15=a$, $\log_{20} 50=b$.

Физика

(задачи устного экзамена)

Физический факультет

1. Зенитное орудие может производить выстрелы во всевозможных направлениях. Определить границу области, которая простреливается из этого орудия,

если модуль начальной скорости снаряда равен v_0.

2. Определить ускорения грузов массой m_1 и m_2 в системе, изображенной на рисунке 1. (Массами блоков и нитей, растяжением нитей и трением в блоках пренебречь.)

3. Влажный воздух при температуре T и давлении p занимает объем V. Относительная влажность воздуха ε%, давление насыщенных паров при этой температуре $p_н$. Найти плотность влажного воздуха и массу содержащихся в нем паров воды.

4. Относительная влажность водяных паров, находящихся в объеме $V = 20$ л при температуре $t = 100°$ С, равна $\varepsilon = 90\%$. Пары изотермически сжимают, уменьшая объем в два раза. Найти массу сконденсировавшейся воды, если давление насыщенных паров при этой температуре равно $p_н = 1$ атм. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(К·моль). Объемом воды пренебречь.

5. Идеальный газ массой m, находящийся при температуре T, охлаждается изохорически так, что его давление падает в k раз. Затем газ расширяется изобарически, пока его температура не станет равной первоначальной. Определить произведенную газом работу. Молярная масса газа равна μ.

6. Какое количество теплоты выделится в цепи при переключении ключа K из положения *1* в положение *2* (рис. 2)?

7. Определить разность потенциалов на конденсаторе емкостью C_0 в схеме, изображенной на рисунке 3. Величины сопротивлений, ЭДС батарей и их полярность указаны на рисунке. Внутренним сопротивлением источников пренебречь. Какой знак будет иметь заряд на верхней пластине конденсатора?

8. Контур AOB, имеющий вид сектора, образован дугой AB радиусом $L = 10$ см из оголенного проводника и двумя радиальными проводниками OA и OB с сопротивлениями $R_1 = 1$ Ом и $R_2 = 2$ Ом (рис. 4). В центре O дуги шарнирно закреплена перемычка OC, другой конец которой может двигаться вдоль дуги, сохраняя с ней контакт. Сопротивление перемычки $R_3 = 3$ Ом. Контур находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}| = 0{,}2$ Т), направленной перпендикулярно к плоскости контура. Найти силу тока I в перемычке при ее вращении с постоянной угловой скоростью $\omega = 11$ рад/с. Сопротивлением дуги пренебречь.

9. В сферическую чашу с зеркальной внутренней поверхностью налито немного воды. Сверху на чашу падает пучок параллельных лучей света. В результате отражения от сферического зеркала чаши и преломления на поверхности воды пучок фокусируется в точку. Радиус кривизны зеркала равен R, показатель преломления воды равен n. Диаметр пучка много меньше радиуса кривизны зеркала, поэтому синусы углов падения можно заменить углами. На каком расстоянии от поверхности воды лучи собираются в фокус?

10. Точечный источник света помещен в фокусе рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 4$ см. На экране, расположенном за линзой на расстоянии $l = 3$ см, получено светлое пятно. На какое расстояние по оптической оси надо переместить источник, чтобы диаметр пятна уменьшился на 20%?

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Шарик подвешен на нити длиной $l = 32$ см так, что точка подвеса находится на высоте $H = 50$ см над гладким столом. Шарик вывели из положения равновесия, отклонив нить в натянутом состоянии на угол 90°, и отпустили без толчка. Нить оборвалась в тот момент, когда ее угол отклонения от вертикали был $\alpha = 60°$. Найти высоту h, на которую шарик подпрыгнет после удара о стол, если этот удар абсолютно упругий. Нить нерастяжима.

2. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $l = 1$ м от оси вращения лежит груз. Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0{,}1$. Через какое время после начала вращения платформы груз соскользнет с нее, если платформа начинает вращаться равноускоренно и через $t = 2$ мин приобретает угловую скорость $\omega = 1{,}2$ рад/с? Ус-

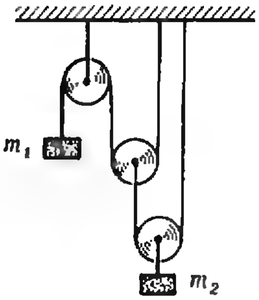


Рис. 1.

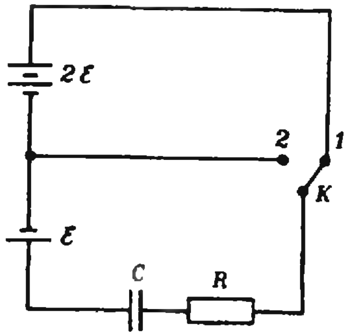


Рис. 2.

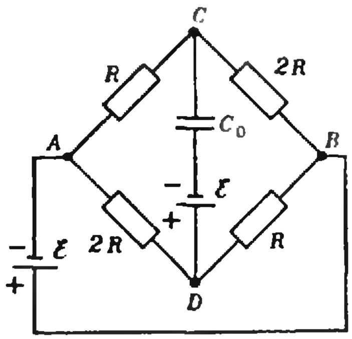


Рис. 3.

корение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.

3. Спутник, масса которого $m = 2\cdot10^3$ кг, из-за торможения в верхние слои атмосферы переходит с орбиты, расположенной на высоте $h_1 = 210$ км над поверхностью Земли, на орбиту с высотой $h_2 = 200$ км. Какую энергию теряет при этом спутник? В обоих случаях орбиту спутника считать круговой. Ускорение свободного падения можно считать постоянным и равным $g = 10$ м/с^2.

4. В запаянной с левого конца U-образной трубке высота столбика воздуха $l_0 = 300$ мм, а избыточная высота столба ртути в правом колене $h_0 = 110$ мм. В правое колено долили столько ртути, что ее уровень в левом колене поднялся на $l = 10$ мм. На сколько поднялся уровень ртути в правом колене? Атмосферное давление $p = 760$ мм рт. ст. Температура постоянна.

5. Два сосуда соединены тонкой трубкой, содержащей капельку ртути, которая исключает перемешивание газов, находящихся в сосудах (рис. 5). В первом сосуде заключено $m_1 = 2$ г гелия (молярная масса $\mu_1 = 4$ кг/кмоль), во втором — $m_2 = 4$ г неона (молярная масса $\mu_2 = 20$ кг/кмоль). Температура в обоих сосудах одинакова и равна T_1. Во сколько раз увеличится давление в системе, если гелий нагреть до температуры $T_2 = 2T_1$, не меняя температуры неона? Расширения сосудов не учитывать.

6. Найти разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рисунке 6. Емкости конденсаторов: $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ. Электродвижущие силы источников: $\mathscr{E}_1 = 4$ В, $\mathscr{E}_2 = 6$ В.

7. Найти величину сопротивления R_1, при которой разность потенциалов между точками A и B в схеме, изображенной на рисунке 7, равна нулю ($R_2 = 60$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 80$ Ом, $R_5 = 20$ Ом).

8. В однородном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}| = 2$ Т находится прямоугольная рамка. Плоскость рамки перпендикулярна к магнитным линиям. Сопротивление рамки $R = 0{,}25$ Ом. Какая мощность затрачивается, если рамка выдвигается из магнитного поля с постоянной скоростью $|\vec{v}| = 6{,}2$ м/с перпендикулярно к направлению магнитных линий? Поле имеет резко очерченную границу, и сторона рамки длиной $l = 20$ см параллельна этой границе.

9. Съемка чертежа размером 30 см × 40 см ведется фотоаппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 20$ см. Расстояние от объектива до чертежа $d = 1{,}6$ м. Каким должно быть фокусное расстояние насадочной линзы (т. е. линзы, приставляемой вплотную к к объективу), чтобы изображение чертежа точно уложилось на фотопластинку размером 9 см × 12 см?

10. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 10$ см от собирающей линзы, имеющей фокусное расстояние $F = 12$ см, на ее главной оптической оси. Лучи света, преломившись в линзе, падают на выпуклое зеркало, отражаются от него и вновь проходят через линзу, в результате чего получается пучок лучей, параллельный главной оптической оси линзы. Определить радиус кривизны зеркала, если оно находится на расстоянии $l = 3$ см от линзы.

Химический факультет

1. Шарик массы m_1 движется без трения по горизонтальной поверхности и сталкивается с покоящимся шариком массы m_2. Удар считать центральным и абсолютно упругим. При каком соотношении масс шариков они разлетятся в противоположные стороны с равными по абсолютной величине скоростями?

2. В теплоизолированном сосуде содержится смесь воды массы $m_1 = 500$ г и льда $m_2 = 55$ г при температуре $t_1 = 0$ °С. В сосуд вводится сухой насыщенный пар массой $m_3 = 6{,}6$ г при температуре $t_2 = 100$ °С. Какой будет температура t содержимого сосуда после установления теплового равновесия? Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $r = 0{,}33\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

3. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора $d = 5$ см. Конденсатор заряжен при помощи бата-

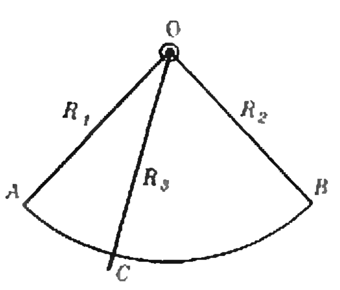


Рис. 4.

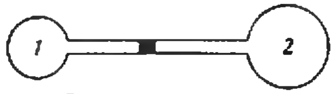


Рис. 5.

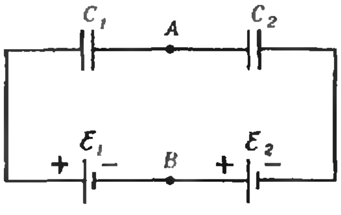


Рис. 6.

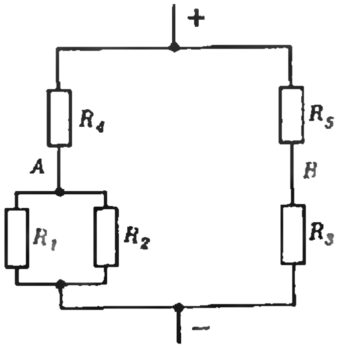


Рис. 7.

реи до напряжения $U_1 = 150$ В, а затем отключен от нее. Внутрь конденсатора параллельно его пластинам ввели незаряженную металлическую пластину толщиной $l = 1$ см, длина и ширина которой такие же, как и у конденсатора. Определить разность потенциалов U_2 между пластинами конденсатора после введения в него металлической пластины.

4. В однородном магнитном поле, магнитная индукция которого $|\vec{B}| = 5\cdot10^{-2}$ Т, на двух легких нитях AB и CD подвешен горизонтальный проводник BD длиною $l = 40$ см и массой $m = 5{,}1$ г. Каждая нить разрывается при нагрузке, превышающей $T_0 = 4\cdot10^{-2}$ Н. Какой величины ток I надо пропустить через проводник в направлении от B к D, чтобы одна из нитей разорвалась? Индукция магнитного поля направлена горизонтально, перпендикулярно к проводнику, к наблюдателю.

5. Глаз человека может быть сфокусирован на объект, находящийся на расстоянии от $a_1 = 25$ см до $a_2 \to \infty$ от глаза. Между какими двумя предельными расстояниями s_1 и s_2 от глаза должен быть расположен предмет, чтобы его было ясно видно через линзу с фокусным расстоянием $F = 10$ см, расположенную непосредственно перед глазом?

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Тело массой $m = 1$ кг вращается на веревке длиной $l = 1$ м в вертикальной плоскости с постоянной скоростью $v = 4$ м/с. Определить натяжение веревки в момент, когда веревка составляет с вертикалью угол $\alpha = 60°$.

2. Кастрюле с водой сообщили количество теплоты $Q = 1{,}82\cdot10^6$ Дж; при этом часть воды выкипела. Определить долю выкипевшей воды. Масса и удельная теплоемкость кастрюли равны $m_1 = 1$ кг и $c_1 = 400$ Дж/(кг·К), воды — $m_2 = 5$ кг и $c_2 = 4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Начальная температура воды $t = 20°$ С. Удельная теплота парообразования воды $\lambda = 2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

3. Два одинаковых проводящих шарика, расположенных в вакууме, с зарядами $q_1 = +3{,}8\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2 = -1{,}8\cdot10^{-8}$ Кл, вследствие притяжения соприкоснулись и вновь разошлись на расстояние $r = 0{,}1$ м. Определить силу взаимодействия между ними после соприкосновения. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

4. Две лампочки, рассчитанные на одно и то же напряжение и имеющие номинальные мощности $P_1 = 100$ Вт и $P_2 = 200$ Вт, включены последовательно в сеть с тем же напряжением. Какие мощности P_1' и P_2' будут потреблять лампочки?

С. Алешин, В. Круглов, Л. Михеева,
А. Сапоженко, А. Склянкин

Новосибирский государственный университет

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов 1978 года.

Математика

(письменный экзамен)

Механико-математический, физический, экономический факультеты

1. Автомобиль двигался с постоянной скоростью, а затем стал тормозить с постоянным ускорением — 2 м/сек² и остановился. Известно, что за последние 5 сек перед остановкой он прошел $\frac{1}{7}$ часть расстояния, пройденного за предыдущие 10 сек. Определить начальную скорость автомобиля.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\sqrt{2}\,|\cos x|} = \sin 2x + \cos 2x.$$

3. На плоскости заданы две окружности радиусов 3 и 1, расстояние между центрами которых равно $2\sqrt{2}$. Прямая l — общая касательная этих двух окружностей. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания и ближайшая к l точка пересечения окружностей.

4. Определить, для каких действительных значений параметра a все решения неравенства $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2$ являются одновременно решениями неравенства $x^2 - 2x - a^4 + 1 \geqslant 0$.

5. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде $ABCDA'B'C'D'$ нижнее основание $ABCD$ — квадрат со стороной 3, верхнее основание $A'B'C'D'$ — квадрат со стороной 1, боковые ребра AA', BB', CC', DD' имеют длину 3. Точка M — середина ребра $C'D'$. Через точку M проходит прямая, пересекающая прямые AA' и BC в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ.

Факультет естественных наук, геолого-геофизический факультет

1. Решить систему

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12, \\ (x+y)^2 - \dfrac{1}{2}y^2 = 7. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$1 - \cos 3x\cdot\operatorname{ctg} x = \sin 3x.$$

3. В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D таким образом, что длина отрезка BD в 4 раза больше длины отрезка AD. Точки O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ACD и BCD. Известно, что прямая O_1O_2 параллельна прямой BC. Определить, в каком отношении прямая O_1O_2 делит площадь треугольника ABC.

4. Решить неравенство

$$\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{4}\right)\geqslant 1.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Точка N — середина ребра AB, точка M — середина ребра BB', O — точка пересечения диагоналей грани $BCC'B'$. Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые AM и CN в точках P и Q соответственно. Определить длину отрезка PQ, если известно, что длина ребра куба 1.

Физика

В 1978 году на физическом факультете НГУ каждый вариант письменного экзамена по физике состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные задачи различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для решения этой задачи надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических параметров и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент, хорошо представляя явление или задачу, может сам задать необходимые величины и получить численный ответ. Опыт вступительных экзаменов показывает, что с задачами-оценками справляется значительная часть абитуриентов, зачисленных на физический факультет.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое на экзамене. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Ниже приводятся первые три задачи трех вариантов, а также некоторые задачи-оценки и задачи-демонстрации.

Вариант 1

1. В U-образной трубке с воздухом на одинаковой высоте h удерживают два поршня массой m каждый (рис. 1). Сечение левого колена $2S$, правого и нижнего S. Длина нижнего колена $3h$. Давление воздуха внутри трубки равно атмосферному давлению p_0. В некоторый момент поршни отпускают. Найти установившиеся высоты поршней. (Температура газа в начале и в конце одна и та же, поршни могут перемещаться только по вертикальным участкам.)

2. В схеме, изображенной на рисунке 2, ключ K вначале находится в положении O. Конденсаторы емкостью C_1 и C_2 разряжены. ЭДС батарей равны $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Затем ключ K замыкается на клемму 1 и через некоторое время переключается на клемму 2. Какая разность потенциалов установится на конденсаторе емкостью C_1?

3. Две одинаковые собирающие линзы с фокусным расстоянием F расположены так, что их главные оптические оси образуют угол α и ось второй линзы проходит через центр O_1 первой (рис. 3). В фокусе первой линзы расположен точечный источник света S_0. Найти расстояние $|S_0S|$ между источником S_0 и его изображением S в системе линз, если расстояние между центрами линз $|O_1O_2| = 2F$.

Вариант 2

1. Динамометр D поставили между двумя отрезками троса ABC и AEC так, что он находится на диагонали BE ромба ($\widehat{EAB} = \widehat{BCE} = \alpha$) (рис. 4). Точка C закреплена. Найти силу, которая приложена к точке A, если динамометр показывает абсолютную величину силы F_0.

2. Цилиндрический сосуд высотой l наполнен сжимаемой жидкостью, плотность которой ρ меняется с глубиной h по закону $\rho = \rho_0(1+\alpha h)$. Каким должен быть коэффициент α, чтобы этой жидкостью можно было наполнить три одинаковых сосуда высотой $l/2$ с сечением, равным сечению исходного сосуда?

3. Автомобиль движется со скоростью $\vec{v}$ мимо длинной стены под углом α к ней (рис. 5). В момент, когда расстояние до стены равно l, автомобиль подает звуковой сигнал. Какое расстояние проедет

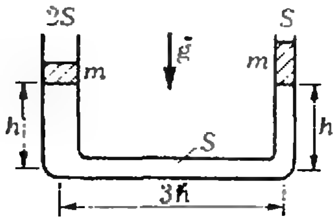


Рис. 1.

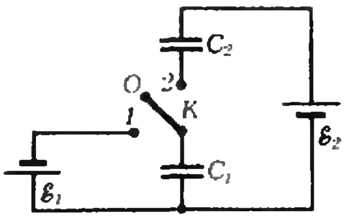


Рис. 2.

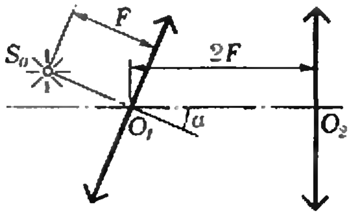


Рис. 3.

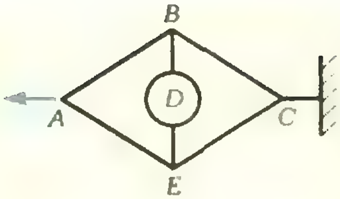


Рис. 4.

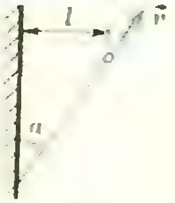


Рис. 5.

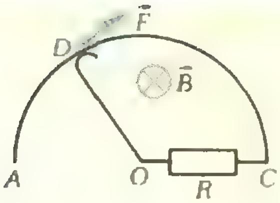


Рис. 6.

он до момента, когда шофер услышит эхо? Скорость звука c.

Вариант 3

1. Вдоль трубы радиусом R распространяется свет. Трубу замыкает стеклянный (с показателем преломления n) шар радиусом R, внутренняя область которого от центра вплоть до расстояния r ($r < R$) заполнена поглощающим свет веществом. Какая доля энергии света проходит сквозь шар? (Отражением света пренебречь.)

2. Цепь образована незамкнутой проводящей дугой ADC радиуса a и сопротивлением R, включенном на участке OC (рис. 6). Перпендикулярно к плоскости цепи включено постоянное однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Какую силу $\vec{F}$ надо приложить к концу проводника OD, скользящего по дуге ADC, чтобы вращать проводник OD с постоянной угловой скоростью ω? Сопротивлением всех проводников по сравнению с R можно пренебречь.

3. К концам двух нерастянутых пружинок жесткостью k_1 и k_2 прикреплено тело массой m так, что оно может без трения двигаться вдоль прямой AB (рис. 7). Конец A левой пружинки закреплен. Удерживая тело на месте, конец B правой пружинки отводят на расстояние $|BB_1| = a$ и закрепляют в точке B_1, после чего тело отпускают. Найти наибольшую скорость тела.

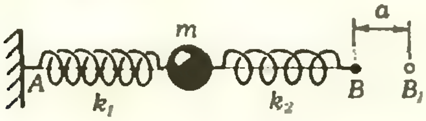


Рис. 7.

Задачи-оценки

1. Оценить среднее усилие, развиваемое ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа.

2. Оценить, во сколько раз собирающая линза от очков увеличивает световую мощность (на единицу площади), приходящую от Солнца.

3. Оценить давление в центре Земли.

Задачи-демонстрации

Объясните следующие явления:

1. Между пластинами плоского конденсатора подвешен легкий металлический шарик. При подаче на конденсатор постоянного напряжения шарик притягивается к одной из пластин, касается ее и отскакивает к другой пластине. Такие перескоки повторяются многократно.

2. Электрическая цепь, состоящая из двух катушек индуктивности и лампочки, подключена к генератору переменного напряжения. Если в одну из катушек вдвинуть железный сердечник, свечение лампочки усиливается. Если же сердечник вдвинуть во вторую катушку, свечение лампочки ослабевает. Составить схему электрической цепи.

3. Железный стержень вставлен в катушку. На стержень надевают кольцо. В первом случае это кольцо — алюминиевое сплошное, а во втором — алюминиевое с разрезом. При пропускании переменного тока через катушку кольца ведут себя существенно по-разному.

В. Ильин, Г. Меледин,
А. Слинько, М. Фокин

Московский институт стали и сплавов

В Московском институте стали и сплавов пять факультетов: факультет металлургии черных металлов и сплавов, технологический факультет, физико-химический факультет, факультет полупроводниковых материалов и приборов и факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов. На этих факультетах готовят специалистов в области металлургии черных, цветных, редких и радиоактивных металлов, высокотемпературных материалов, алмазов и сверхтвердых сплавов, физики металлов, физико-химических методов исследований, полупроводниковой техники, экономики и кибернетики металлургических процессов.

Расскажем подробно о физико-химическом факультете МИСиСа.

Среди многих разделов современной физики особое место занимает физика твердого тела. Можно смело утверждать, что в этой области работает больше всего исследователей, печатается больше всего научных статей, получаются самые важные результаты. Такой особый интерес к изучению вещества в твердом состоянии, очевидно, связан с огромной практической важностью твердых тел. Однако реальные твердые тела устроены столь сложно, что даже при современном уровне развития науки чисто физический подход, основанный на фундаментальных законах, при объяснении разнообразных свойств конкретных материалов не эффективен, не в состоянии указать, как именно получать материалы с нужными свойствами.

А современная техника требует все новых и новых материалов — материалов, работающих при сверхвысоких и сверхнизких температурах, в сильных магнитных и электрических полях, в космосе и т. п. Исследование материалов, разработка новых веществ и, в особенности, металлов с особыми свойствами становятся возможными лишь при умелом сочетании фундаментальных знаний о веществе с эмпирическими законами, найденными в результате обобщения огромного опыта по изучению материалов. Необходимо также знать методы и технологию изготовления новых веществ, владеть различными экспериментальными методиками их исследования.

Такое уникальное сочетание знаний и навыков дает студентам физико-химический факультет Московского института стали и сплавов. Этот факультет готовит инженеров-исследователей по целому ряду специальностей, связанных с изучением материалов, разработкой новых методов их получения и исследования. Студентам читаются обширные курсы математики, общей и теоретической физики, специальных дисциплин, а главное,— даже на младших курсах студенты приобщаются к научной работе на кафедрах, а в конце обучения уже обязательно выполняют самостоятельное исследование. Такой подход позволяет развить у студентов творческие способности, умение думать самостоятельно, отыскивать новые пути решения задач — качества, совершенно необходимые исследователю.

В этой заметке невозможно рассказать о всех специализациях на факультете, и мы остановимся лишь на тех, которые могут представлять особый интерес для читателей «Кванта».

Специалистов по изучению физических свойств металлов готовит кафедра теоретической физики, которую возглавляет член-корреспондент АН СССР А. А. Абрикосов. Студентов обучают теоретическим расчетам свойств реальных веществ и различным экспериментальным методам их изучения. Для того чтобы использовать физические законы для описания свойств металлов, необходимо делать различные приближения, предвидеть, какой именно метод окажется наиболее эффективным. Тут имеется своя особая «кухня», секретами которой охотно делятся со студентами преподаватели кафедры. Студенты, специализирующиеся на кафедре, в курсовых и дипломных работах используют большие электронно-вычислительные машины вычислительного центра института.

Другая специализация — «сверхпроводящие материалы». Известные сейчас материалы становятся сверхпроводящими (не оказывают сопротивления электрическому току) только при очень низких температурах (меньших чем -250°C). Понятно, что это ограничивает возможности использования сверхпроводников в технике. Как найти материалы, остающиеся сверхпроводящими и не при столь низких температурах? Чтобы работать в этом направлении, нужно не только хорошо понимать физику сверхпроводимости, но и знать свойства веществ, уметь синтезировать нужные соединения и предугадывать их свойства. Именно такой комплекс знаний дают студентам, обучающимся по этой специализации, причем обучение студентов ведется не только в стенах института, но в крупнейшем научном центре — Институте физики твердого тела АН СССР.

Новая специализация «получение алмазов и других высокотвердых материалов» создана на кафедре высокотемпературных материалов, которую возглавляет член-корреспондент АН СССР В. П. Елютин. Студенты этой специализации наряду с изучением свойств природных алмазов получают глубокие знания в области теоретических основ процессов получения искусственных алмазов, нитрида бора и других важнейших материалов современной техники. Искусственные алмазы рождаются буквально на глазах студентов в лабораториях, оборудованных самыми современными приборами.

Об экспериментах по изучению материалов в космосе в наше время знают все; понятно, что для подготовки и проведения таких экспериментов нужны особые специалисты, которых готовит кафедра металлографии по специализации «космическая технология и материаловедение». Студентам читаются специальные курсы по подготовке и проведению эксперимента и технологических процессов в специфических условиях космоса и космического корабля, по космическому материаловедению, теории тепломассопереноса, по конструированию аппаратуры для экспериментов в космосе.

Специализацию «кибернетика металлургических процессов» можно посоветовать тем выпускникам, которые особенно увлекаются математикой, но в то же время интересуются и ее практическими приложениями. Подготовку таких специалистов осуществляет кафедра инженерной кибернетики, которой руководит член-корреспондент АН СССР С. В. Емельянов. Студенты изучают различные математические дисциплины, получают глубокие знания по системам управления и методам использования современных вычислительных средств, учатся творчески использовать полученные знания в работе по синтезу и исследованию математических моделей металлургических процессов.

Много и других специализаций имеется на факультете. Это — коррозия и защита металлов, металлургия черных металлов, высокотемпературные материалы, высокопрочные сплавы, термическая обработка металлов и др. О них вы сможете прочесть в проспекте института.

Ниже приводятся образцы устного экзамена по физике на физико-химическом факультете в 1978 году (материалы письменного экзамена по математике на всех факультетах МИСиСа будут опубликованы в следующем номере журнала).

1. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Гири A и B равной массы $m_1 = m_2 = 1$ кг соединены нитью и перекинуты через блок. Найти: 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением гирь A и B о наклонные плоскости, а также трением в блоке пренебречь.

2. В сосуд, содержащий $m_1 = 10$ кг воды при температуре $t_1 = 10^\circ$С, положили кусок льда, охлажденный до $t_2 = -50^\circ$С, после чего температура образовавшейся массы оказалась равной $\theta = +4^\circ$С. Какое количество льда было положено в сосуд? Удельные теплоемкости льда $c_2 = 2100$ Дж/(кг·К) и воды $c_1 = 4200$ Дж/(кг·К), теплота плавления льда $r = 3{,}3\cdot 10^5$ Дж/кг.

3. Цилиндрический сосуд делится на две части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, когда в одну часть сосуда помещено некоторое весовое количество кислорода, в другую — такое же количество водорода, если общая длина сосуда равна $L = 85$ см?

4. Электрон движется в плоском горизонтальном конденсаторе параллельно его пластинам со скоростью $|\vec{v}| = 3{,}6 \times 10^4$ км/с. Напряженность поля внутри конденсатора $|\vec{E}| = 37$ В/см. Длина пластин конденсатора $L = 20$ см. На сколько сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе? Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

5. Два одинаковых сопротивления $r = 100$ Ом, соединенных параллельно, и последовательно соединенное с ними сопротивление $R = 200$ Ом подключены к источнику постоянного тока. К концам параллельно соединенных сопротивлений подключен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определить ЭДС источника тока, если заряд на конденсаторе $q = 2{,}2\cdot 10^{-4}$ Кл. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.

6. Преломляющий угол равнобедренной призмы равен $\gamma = 10^\circ$. Монохроматический луч падает на боковую грань под углом $\alpha = 10^\circ$. Найти угол δ отклонения луча от первоначального направления, если показатель преломления материала призмы $n = 1{,}6$.

Л. Асламазов

Спрашивайте — отвечаем

Сообщите, пожалуйста, адреса магазинов, высылающих наложенным платежом литературу по математике.

Л. Старшов (Владимирская обл.) и др.

Заказы на книги по математике, физике и астрономии можно направлять (на почтовых открытках) в специализированные магазины и отделы «Книга — почтой». При наличии книг на складе они будут высланы наложенным платежом без задатка. Вот адреса некоторых магазинов.

1. 103050, Москва, К-50, ул. Медведева 1, маг. № 8;
2. 117192, Москва, Мичуринский просп. 12, маг. «Книга — почтой»;
3. 191049, Ленинград, Пушкинская ул. 2, маг. № 5 «Техническая книга»;
4. 197110, Ленинград, Петрозаводская ул. 7, маг. «Книга — почтой»;
5. 193168, Ленинград, просп. Большевиков 19, маг. № 103 «Техническая книга»;
6. 220005, Минск, Ленинский просп. 48, маг. № 13 «Научно-техническая книга»;
7. 458000, Кустанай, ул. Баймагамбетова 69;
8. 630091, Новосибирск, Красный просп. 60, маг. № 7;
9. 226047, Рига, ул. Ленина 17, маг. «Гайсма»;

10. 200001, Таллин, бульвар Ленина 7, маг. «Техническая и медицинская книга»;

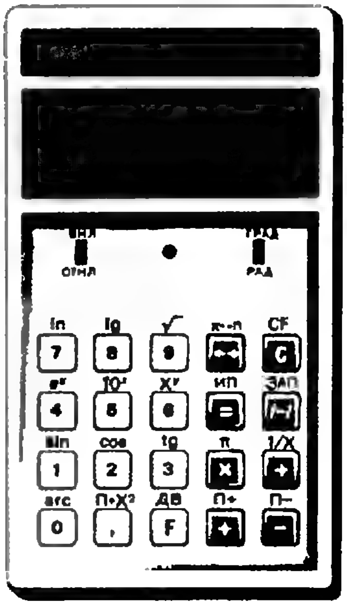
11. 480003, Алма-Ата, ул. Гоголя 109, маг. «Прогресс».

Можно ли школьникам пользоваться на уроках микрокалькуляторами? Разрешается ли применение микрокалькуляторов на экзаменах?

В. Ананьев (Волгоградская обл.) и др.

Появление малой электронно-счетной техники — это реальность. Микрокомпьютеры получают все большее и большее распространение в народном хозяйстве. Внедрение их в школу — дело завтрашнего дня.

Известно, что в настоящее время учащиеся тратят массу времени на отработку различного рода вычислительных навыков. Внедрение в школу микро-ЭВМ высвободит часть этого времени. Естественно, возникает необходимость определения круга вопросов, которые можно изучить с учащимися в связи с этим дополнительно. В первую очередь важно определить содержание образования в младших классах. Сейчас уже ведутся эксперименты по использованию микрокомпьютеров в школе. В частности, с будущего года в нескольких классах г. Еревана начинается проверка возможностей внедрения в учебный процесс малых ЭВМ, начиная с 1 класса.



Очевидно, что через 10 лет люди уже не будут считать «в столбик» и даже логарифмическая линейка уйдет в прошлое. Но массовое внедрение микрокомпьютера в школу без предварительно продуманной методики работы с ними, разработки определенной системы упражнений может привести к потере «чувства числа» у учащихся. Освобождение их от необходимости считать устно приводит к тому, что ученики забывают таблицу умножения и сложения чисел и разучиваются производить даже простейшие устные вычисления, не могут оценить полученный результат вычислений, хотя бы его порядок. Опыт зарубежной школы предостерегает нас от подобной ошибки.

Однако, если ученик умело и разумно применяет микрокомпьютер, умеет оценить порядок результата, то запрещать ему пользоваться достижениями техники было бы нецелесообразно. Особенно полезно использование малых ЭВМ на уроках геометрии, при решении, например, треугольников, возможно их применение на уроках физики, химии, при решении задач, во время проведения лабораторных и практических работ, особенно различного рода расчетных работ.

Естественно, если ученик в течение года пользовался при расчетах малой электронной счетной техникой, то было бы не логично лишать его этой возможности на экзаменах.

З. Моисеева.
Инспектор Главного управления школ
Министерства просвещения СССР

Филлотаксис и последовательность Фибоначчи

Рисунок на первой странице обложки можно рассматривать как упрощенное изображение соцветия подсолнуха, семечки в котором вылущены через одно, в шахматном порядке. Реальные соцветия подсолнуха (см. рисунок на этой странице) также содержат два семейства логарифмических спиралей (об этих спиралях читайте «Квант», 1977, № 4, с. 42). Спирали одного семейства закручиваются к центру против хода часовой стрелки, другого — по ходу. В ботанике такое сочетание двух семейств спиралей называют филлотаксисом (в переводе с греческого слово это означает «устройство листа»).

Оказывается, числа спиралей в соцветиях подсолнечника приближенно равны двум соседним членам так называемой последовательности Фибоначчи: 34 и 55 или 89 и 144.

Филлотаксис подсолнечника — одна из многих неожиданных встреч с последовательностью Фибоначчи. Впервые с ней столкнулся в прошлом столетии французский математик Эдуард Люка. Читая книгу «Искусство абака» знаменитого итальянского математика эпохи Возрождения Леонардо Пизанского, известного больше по прозвищу Фибоначчи, и решая одну из задач Леонардо, Люка составил последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . , в которой

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Неожиданная встреча с этой последовательностью состоится сейчас и у нас. Предположим, что $\alpha^2 = 1 - \alpha$. Выразим значения степеней α^3, α^4, α^5, ... через $1 = \alpha^0$ и α:

$$\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha^2 = 2\alpha - 1,$$

$$\alpha^4 = 2 - 3\alpha,$$

$$\alpha^5 = 5\alpha - 3, \ldots$$

Вы узнали в коэффициентах последовательность Фибоначчи, начиная с члена a_1? По-видимому, и для любого n можно записать формулу

$$\alpha^n = (-1)^n (a_{n-1} - a_n\alpha),$$

где a_{n-1} и a_n — члены последовательности Фибоначчи. Докажем это методом математической индукции:

$$\alpha^{n+1} = (-1)^n (a_{n-1}\alpha - a_n\alpha^2) = (-1)^n (-a_n + (a_{n-1} + a_n)\alpha) = (-1)^{n+1}(a_n - a_{n+1}\alpha).$$

У уравнения $\alpha^2 = 1 - \alpha$ два корня — положительный $\alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и отрицательный $\alpha_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Как мы убедились,

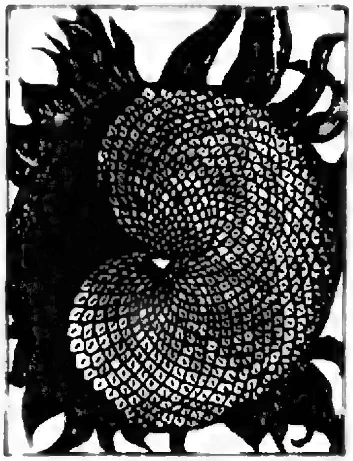
$$\begin{cases} (-1)^n\alpha_1^n = a_{n-1} - a_n\alpha_1 \\ (-1)^n\alpha_2^n = a_{n-1} - a_n\alpha_2. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно a_n, получаем, что

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

И этот результат довольно неожидан — последовательность целочисленная, а общий ее член выражается через квадратные радикалы.

Следующую неожиданность получим, если вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Это знаменитое «золотое сечение» (о нем см., например, «Квант», 1973, № 8, с. 22 и далее). Прямоугольный предмет с таким отношением сторон наиболее приятен для глаза.



Существует много формул, связывающих между собой члены последовательности Фибоначчи. Вот некоторые из них:

$$a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + 1$$

$$a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n-1}$$

$$a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$$

$$a_{2n-2} + 1 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1}$$

$$a_{2n}^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{2n-1}a_{2n}$$

$$a_{2n-1} = a_n^2 + a_{n-1}^2.$$

Попытайтесь их доказать.

О последовательности Фибоначчи вы можете прочесть в популярной и интересной книге Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М., «Наука», 1978). О филлотаксисе — в другой интересной книге: Г. С. М. Кокстер «Введение в геометрию» (М., «Наука», 1966).

В. Березин

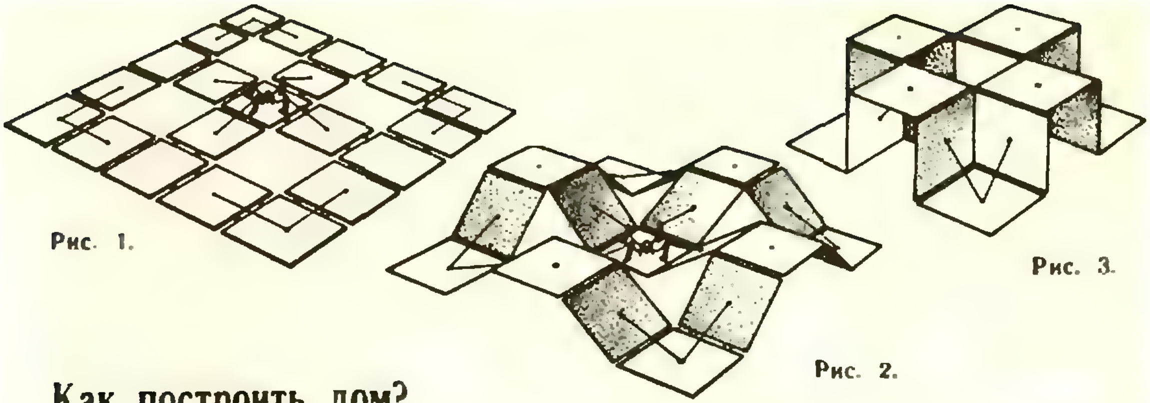


Рис. 1.

Рис. 2.

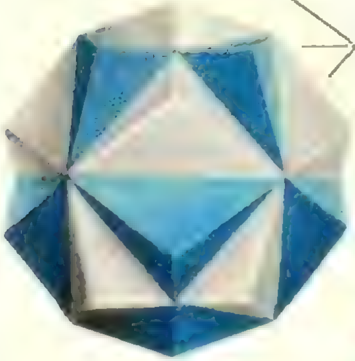
Рис. 3.

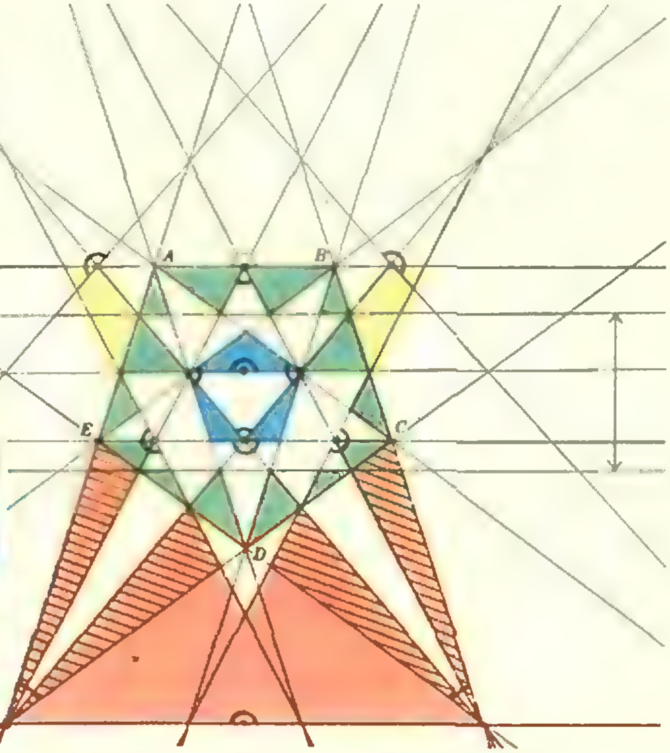
Как построить дом?

(ко второй странице обложки)

Представьте себе строительную площадку в горах или в космосе, на которую затруднительно доставить высокий подъемный кран. Как в такой ситуации построить дом? На рисунке 1 приведен один из способов. Квадратные панели соединены между собой шарнирно. Кроме того, они соединены тросами. Если начать «выбирать» тросы с помощью лебедки, установленной в центре набора (рис. 2), то возникает дом (рис. 3).

В. Колейчук





Пересекающиеся додекаэдры

(к четвертой странице обложки)

В «Кванте» № 1 на с. 27 была приведена фотография многогранника, являющегося объединением пяти кубов, вписанных в додекаэдр. А сколько разных додекаэдров можно описать около одного куба? Нетрудно догадаться, что два. На этой фотографии вы видите многогранник, являющийся объединением двух таких додекаэдров. Понятно, что этот многогранник равногранно полуправильный: для любой пары его граней можно указать такое перемещение, при котором сам многогранник займет прежнее положение, а первая грань перейдет во вторую. На рисунке приведена полученная из этого многогранника эпюра. (О том, что это такое и как пользоваться эпюрами, рассказывалось в «Кванте» № 3 на с. 50, 53.) При копировании эпюры следует учесть, что пятиугольник $ABCDE$ — правильный.)

В. Гамаюнов

Подарок учителю и школьнику

Новая программа по математике требует от школьника твердых знаний по таким фундаментальным понятиям «высшей математики», как предел функции, непрерывность, производная, интеграл. Естественно, что в школе все эти понятия в первую очередь изучаются на элементарных функциях: степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функциях.

Однако из-за недостатка времени и перегруженности школьной программы в логическом обосновании этих понятий существует значительный пробел — практически полностью отсутствует теория действительных чисел. А между тем теория действительного числа не только лежит в основе теории пределов, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости функций, но и в основе построения теории элементарных функций, на базе которых проходит изучение анализа в средней школе. Из учебников школьники узнают только, что существует некое множество, элементы которого называются действительными числами. Эти числа можно складывать, вычитать, умножать и делить по определенным правилам. Утверждается, что все элементы этого множества могут быть разбиты на два непересекающихся подмножества, каждое из которых содержит только рациональные или иррациональные числа, и что каждое из этих чисел может быть изображено в виде бесконечной периодической (рациональное число) или непериодической (иррациональное число) десятичной дробью. Однако, повторяем, стройной теории действительного числа в школьном курсе математики не излагается.

Рецензируемое пособие*) ставит своей основной целью содействовать углубленному пониманию тех начальных глав математического анализа, которые ближе всего лежат к кругу математических занятий преподавателя средней школы. Основное содержание книги — изложить теорию действительных чисел, а затем уже на этой базе строится теория пределов последовательностей, определяются основные элементарные функции и изучаются свойства непрерывных функций. Несомненно, такое изложение является естественным дополнением школьного курса математики и логически оформляет те интуитивные представления, которые уже имеются у учащихся.

Пособие состоит из введения и четырех глав. Во введении излагаются основные понятия теории множеств, даются определения соответствия, функции и последовательности, вводятся некоторые обозначения из математической логики.

В первой главе изложена теория пределов для последовательностей рациональных чисел.

Во второй, центральной главе пособия излагается теория действительных чисел и теория числовых последовательностей. В основу изложения положена теория действительных чисел, развитая Г. Кантором и Ш. Мере. Мы считаем, что такое изложение теории действительных чисел соответствует духу школьной математики. Автор определяет понятия равенства и неравенства действительных чисел и подробно излагает арифметику действительных чисел.

В третьей главе рассказывается об основных элементарных функциях и даются определения предела и непрерывности функции и доказываются основные теоремы, связанные с этими понятиями.

В четвертой главе вводится производная и доказываются основные свойства дифференцируемых функций.

Значительное место в пособии занимают удачно подобранные упражнения. Они помогают читателям разобраться в трудных вопросах курса и прививают хорошие навыки в решении задач. Наряду с обычными задачами в пособие включено значительное число задач повышенной трудности. Темп возрастания трудности задач достаточно высок. Он значительно быстрее приводит читателя к трудным упражнениям, чем это делается в учебнике.

Многие вопросы излагаются в книге свежо и оригинально. Автор умело использует символику и язык математической логики.

Некоторые недоумения вызывает малый тираж книги, а ведь эта книга представляет большой интерес как для учителей средней школы, так и для учащихся старших классов и, несомненно, вызовет большой спрос. Надо надеяться, что второе издание этой весьма полезной книги не заставит себя долго ждать.

Г. Луканкин,
М. Смолянский

---

*) Г. Н. Яковлев. «Числовые последовательности и непрерывные функции» (М., «Просвещение», 1978)

Заменим фигуру

3. $\dfrac{Q}{q}=\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}$.

4. $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$.

5. $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Построение изображений в линзах и сферических зеркалах

1. Проведем побочную оптическую ось AO (рис. 1). Луч AC, параллельный главной оптической оси, после встречи с линзой проходит через задний фокус F'. Пересечение прямых AO и CF' дает точку A' — изображение точки A. Аналогично находим точку B' — изображение точки B. Соединив точки A' и B', получим изображение предмета.

2. Побочная оптическая ось OD, параллельная верхнему лучу пучка, пересекает переднюю фокальную плоскость в точке D (рис. 2). Лучи BA и OD, вышедшие из линзы параллельно друг другу, до встречи с ней пересекались в передней фокальной плоскости линзы; следовательно, продолжение прямой BD определяет ход луча BA до линзы. Аналогично найдем входящий луч, соответствующий выходящему лучу CA.

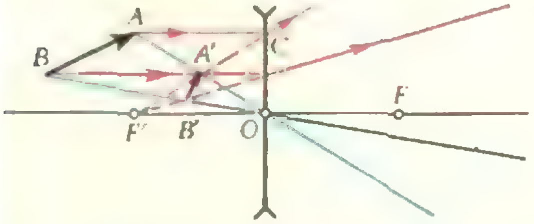


Рис. 1.

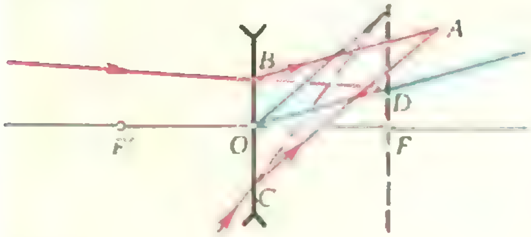


Рис. 2.

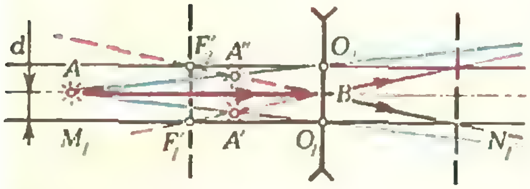


Рис. 3.

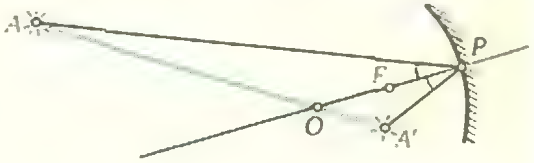


Рис. 4.

3. Части линзы работают так же, как целая линза. Главная оптическая ось M_1N_1 верхней части сложной линзы смещена вниз на расстояние d относительно оси симметрии системы (рис. 3); O_1 — оптический центр. AO_1 — побочная оптическая ось верхней части линзы. Луч AB, параллельный оси M_1N_1, после встречи с линзой идет через задний фокус F'_1 верхней части линзы. Пересечение прямых BF'_1 и AO_1 дает положение изображения A', образованного верхней частью сложной линзы. Нижняя часть линзы дает симметрично расположенное изображение A''.

4. Соединим полюс P с точками A и A' (рис. 4). Ось зеркала проходит через точку P и делит угол $\widehat{APA'}$ пополам. Центр зеркала O лежит в точке пересечения оси с прямой AA'. Окружность радиуса $|OP|$ определяет положение зеркала. Зеркало своей отражающей поверхностью обращено к предмету; следовательно, оно вогнутое. Фокус F делит отрезок $|OP|$ пополам.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Механико-математический факультет

Вариант 1

1. -10. Указание. $a\notin Z\Rightarrow a^2\notin Z$.

2. $\left\{\sqrt{2\pi},\ \dfrac{-1+\sqrt{1+8\pi}}{2}\right\}$.

3. $\dfrac{9}{2}$. Решение. Поскольку $\widehat{AQC}=\widehat{APC}=90^\circ$, около четырехугольника $AQPC$ можно описать окружность. Поэтому $\widehat{BAC}+\widehat{QPC}=180^\circ$. Из $\widehat{BPQ}+\widehat{QPC}=180^\circ$ следует $\widehat{BAC}=\widehat{BPQ}$. Значит, $\triangle ABC\backsim\triangle QBP$. Коэффициент подобия $k=\sqrt{\dfrac{S_{QBP}}{S_{ABC}}}=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $\dfrac{|BP|}{|AP|}=\dfrac{1}{3}$. Обозначим $\widehat{ABC}$ через β, ис-

комый радиус через R. Из $\triangle ABP$ $\cos\beta = \frac{1}{3}$. Поскольку $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Далее $|AC| = \frac{|QP|}{k} = 6\sqrt{2}$. Из равенства $\frac{|AC|}{\sin\beta} = 2R$ («Геометрия 8», п. 112) находим R.

4. $a < -1$. Решение. Предположим сначала, что данная система имеет решения. Тогда имеет решения и неравенство, полученное сложением первого неравенства данной системы, умноженного на -2, и второго ее неравенства: $(x-3y)^2 \leqslant -\frac{4}{a+1}$. Значит, $a+1<0$, $a<-1$. Пусть теперь $a_0<-1$. Тогда $\frac{1-a_0}{a_0+1} < -1$. Поэтому, если имеет решения система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2xy-7y^2=-1, \\ 3x^2+10xy-5y^2=-2, \end{cases} \qquad (1)$$

то имеет решения и данная система неравенств. Но система (1) имеет решения — например, $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. (Найти указанное решение можно, умножив первое уравнение на -2 и сложив со вторым.)

5. 3. Решение. Пусть K — середина $[AD]$, N — середина $[BC]$, $O = (AC) \cap (KM)$ (рис. 5). Из $O \in (KMN) \cap (ABC)$ и $N \in (KMN) \cap (ABC)$ вытекает, что плоскости KMN и ABC пересекаются по прямой ON. Следовательно, $[AB]$ пересекает (KMN) в точке $L = (AB) \cap (ON)$. Таким образом, искомое сечение есть четырехугольник $KLNM$.

В дальнейшем нам будет полезна простая

Лемма. *Если отрезок FG пересекается с плоскостью α в точке H и h_F, h_G — расстояния, соответственно, от точек F и G до α, то*

$$\frac{|FH|}{|HG|} = \frac{h_F}{h_G}.$$

Обозначим через β плоскость, параллельную скрещивающимся прямым AB и DC и равноудаленную от них. Поскольку расстояния от точек A и D до плоскости β одинаковы, по лемме плоскость β делит отрезок AD пополам. Значит, $K \in \beta$. Аналогично, $N \in \beta$. Следовательно, $[KN] \subset \beta$. Поэтому прямая LM пересечет плоскость β в точке $Q = [KN] \cap [LM]$. Поскольку расстояния от M и L до β одинаковы, по лемме $|MQ| = |LQ|$. Значит, по «плоскому» аналогу леммы, одинаковы расстояния от M и L до прямой KN. Следовательно, $S_{\triangle KLN} = S_{\triangle KMN}$.

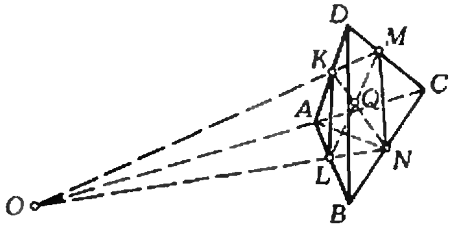


Рис. 5.

Пусть h_A, h_B, h_C, h_D — расстояния, соответственно, от точек A, B, C, D до плоскости $KLNM$. Применяя несколько раз лемму, последовательно получаем $h_A = h_D$, $h_B = h_C$, $\frac{h_D}{h_C} = \frac{2}{3}$, $\frac{|AL|}{|LB|} = \frac{h_A}{h_B} = \frac{h_D}{h_C} = \frac{2}{3}$.

Так как $|AL| = \frac{2}{5}|AB|$ и расстояние от N до (AB) равно половине расстояния от C до (AB), $S_{\triangle ANL} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC}$. Так как расстояние от K до (ABC) равно половине расстояния от D до (ABC), $V_{KANL} = \frac{1}{10} V_{DABC} = \frac{1}{2}$. С другой стороны, $V_{KANL} = V_{AKLN} = \frac{1}{3} h_A \cdot S_{\triangle KLN} = \frac{1}{3} S_{\triangle KLN}$. Поэтому $S_{\triangle KLN} = \frac{3}{2}$, $S_{KLNM} = 3$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 2

1. $\{-1\} \cup [2; +\infty[$.

2. $x = -\frac{4}{3}\pi + 4\pi k \ (k \in \mathbf{Z})$.

3. $y = -x + \frac{5}{2}$.

4. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$. Решение. Поскольку наименьшее общее кратное всех чисел из A равно $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, множество A является подмножеством множества $B = \{2, 3, 5, 7, 2\cdot3, 2\cdot5, 2\cdot7, 3\cdot5, 3\cdot7, 5\cdot7, 2\cdot3\cdot5, 2\cdot3\cdot7, 2\cdot5\cdot7, 3\cdot5\cdot7, 2\cdot3\cdot5\cdot7\}$. Поскольку произведение всех чисел из A делится на $1920 = 2^7 \cdot 15$, в A входят 7 или 8 чисел из восьмиэлементного множества $C = \{2, 2\cdot3, 2\cdot5, 2\cdot7, 2\cdot3\cdot5, 2\cdot3\cdot7, 2\cdot5\cdot7, 2\cdot3\cdot5\cdot7\}$. Во втором случае $A = C$, потому что остальные числа из B взаимно просты с числом 2; так как произведение всех чисел из C есть квадрат некоторого целого числа, это невозможно. Итак, в A входит ровно 7 чисел из C. Если $2 \in A$, то в A не может войти ни одно число из B, не входящее в C (см. выше). Поскольку количество чисел в A больше семи, мы получаем, что $A = C$, т. е. в A снова входит 8 чисел из C — противоречие. Значит, $2 \notin A$. Следовательно, каждое число из $D = \{2\cdot3, 2\cdot5, 2\cdot7, 2\cdot3\cdot5, 2\cdot3\cdot7, 2\cdot5\cdot7, 2\cdot3\cdot5\cdot7\}$ входит в A. В A должно входить еще, по крайней мере, одно число. Перебором убеждаемся, что из оставшихся семи чисел только число $2\cdot3\cdot5\cdot7$ не взаимно просто со всеми числами из D. Следовательно, $A = D \cup \{2\cdot3\cdot5\cdot7\}$.

5. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Решение. Пусть V — объем пирамиды $HABCE$, h — длина высоты пирамиды, $h_1 = |HO|$ — высота треугольника AHE (рис. 6). Положим $|AE| = x$. Тогда $S_{ABE} = \frac{1}{2} x \cdot \sin \widehat{BAE} \leqslant \frac{x}{2}$. Положим $|AH| = y$; тогда $|EH| = \sqrt{2} - y$. Из равенства $S_{\triangle AHE} = \frac{1}{2} x h_1$, применяя формулу Герона, находим

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{1 - \frac{2(1-\sqrt{2}y)^2}{x^4}};$$

следовательно, $h_1 \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$. (Замечание. Высота равнобедренного треугольника с основанием длины x и боковой стороной длины $\frac{\sqrt{2}}{2}$ равна $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$. Таким образом, мы доказали, что из треугольников с основанием фиксированной длины и фиксированной суммой длин боковых сторон наибольшую высоту имеет равнобедренный треугольник. Докажите это непосредственно геометрически!)

Поскольку $S_{\triangle BAE} = S_{\triangle BCE}$, пирамиды $HBAE$ и $HBCE$ имеют одинаковый объем $\frac{1}{12}$. Значит,

$$\frac{1}{12} = V_{HBAE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot h \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABE} \cdot h_1 \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}. \quad (1)$$

Решив неравенство $\frac{1}{12} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}}$, получаем $x = 1$. Тогда $\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{12}$ и во всех нестрогих неравенствах (1) выполняется равенство. Значит, $h = h_1 = \frac{1}{2}$ и $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $|AB| = |AE|$ и $\widehat{BAE} = \frac{\pi}{2}$. Учитывая условие $S_{\triangle BAE} = S_{\triangle BCE}$, заключаем, что основание $ABCE$ — квадрат. Кроме того, $|AH| = |EH| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, плоскость AHE перпендикулярна к плоскости $ABCE$ и $[HO]$ — высота пирамиды.

Радиус r_1 окружности, вписанной в треугольник AHE, равен (задача 10 к п. 112 «Геометрии 8») $\frac{S_{\triangle AHE}}{p_{\triangle AHE}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Опустим из точки H перпендикуляр HK на BC (рис. 7). По теореме о трех перпендикулярах $OK \perp BC$. Значит, $|OK| = 1$. Радиус r_2 окружности, вписанной в треугольник HOK, равен $\frac{S_{\triangle HOK}}{p_{\triangle HOK}} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Легко проверить, что $r_2 < r_1$.

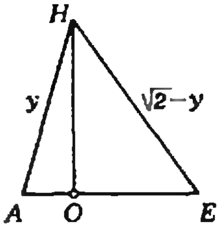


Рис. 6.

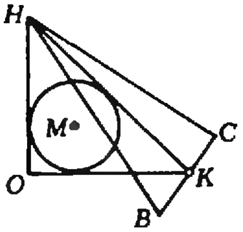


Рис. 7.

Рассмотрим шар радиуса r_2 с центром в точке M (см. рис. 7). Он касается граней AHE, $ABCE$ и BHC. Поскольку его ортогональная проекция на плоскость AHE есть круг радиуса r_2 с центром на HO, касающийся $[AE]$, и $r_2 < r_1$, мы заключаем, что этот круг лежит внутри треугольника AHE. Поскольку пирамида $HABCE$ проектируется при этом на $\triangle AHC$, сам шар лежит внутри пирамиды.

Ортогональная проекция произвольного шара, помещающегося в пирамиде $HABCE$, на плоскость HOK есть круг того же радиуса, лежащий внутри треугольника HOK. Следовательно, радиус этого шара не превосходит r_2.

Итак, некоторый шар радиуса r_2 помещается в данной пирамиде и радиус любого шара, помещающегося в ней, не превосходит r_2.

Задачи устного экзамена

1. Если $a \neq 0$ или $b \neq 0$, $\min\limits_{\mathbf{R}} f(x) = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\max\limits_{\mathbf{R}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Если $a = b = 0$, $\min\limits_{\mathbf{R}} f(x) = \max\limits_{\mathbf{R}} f(x) = 0$.

2. $\{3\}$. 3. Указание. Длина любой стороны треугольника меньше суммы длин прилегающих к ней биссектрис. 4. Указание. Длина окружности радиуса 1 — 2π, площадь соответствующего круга — π. 6. $\frac{5-b}{2(ab+a-2b+1)}$.

Физика

Физический факультет

1. Границей простреливаемой области является парабола, уравнение которой таково:

$$y_{\text{гр}} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_{\text{гр}}^2.$$

2. Проекции ускорений грузов на ось, направленную вертикально вниз, равны,

соответственно,

$$a_1 = 4\,\frac{4\,m_1 - m_2}{16\,m_1 + m_2}g$$

и

$$a_2 = \frac{m_2 - 4\,m_1}{16\,m_1 + m_2}g.$$

3. $\rho = \rho_в + \rho_п = \frac{1}{RT}\left(\mu_в\left(p - \frac{\varepsilon}{100}p_н\right) + \mu_п\frac{\varepsilon}{100}p_н\right)$; $m_п = \frac{\mu_п V}{RT}\cdot\frac{\varepsilon}{100}p_н$.

4. $\Delta m = \frac{p_н V \mu}{RT}\left(\frac{\varepsilon}{100} - \frac{1}{2}\right) = 0{,}0047$ кг.

5. $A = \frac{k-1}{k}\frac{m}{\mu}RT$, где R — универсальная газовая постоянная.

6. $Q = 2C\mathscr{E}^2$.

7. $U = 2/3\,\mathscr{E}$; верхняя пластина конденсатора заряжена положительно.

8. $I = \frac{|\vec{B}|\,\omega L^2}{2\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\right)} = 3\cdot 10^{-3}$ А.

9. $x \approx R/(2n)$.

10. Источник надо сместить влево на 8 см.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $h = H - l\cos^3\alpha = 46$ см.

2. $t_1 = \frac{l}{\omega}\sqrt{\frac{\mu g}{l}} = 100$ с $= 1$ мин 40 с.

3. $\Delta E = \frac{3}{2}mg(h_1 - h_2) = 3\cdot 10^8$ Дж.

4. $h = l_0\frac{H + h_0}{l_0 - l} + l - H - h_0 = 40$ мм (здесь $H = 760$ мм).

5. $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{m_1}{\mu_1}\frac{T_2}{T_1} + \frac{m_2}{\mu_2}}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = \frac{12}{7} \approx 1{,}7$.

6. $U_{BA} = \frac{\mathscr{E}_2 C_2 - \mathscr{E}_1 C_1}{C_1 + C_2} \approx 2{,}7$ В.

7. $R_1 = \frac{R_2 R_3 R_4}{R_2 R_5 - R_3 R_4} = 120$ Ом.

8. $P = \frac{\left(|\vec{B}|\,l\,|\vec{v}|\right)^2}{R} \approx 24{,}6$ Вт.

9. $F_x = \frac{\Gamma d F}{\Gamma(F - d) + F} \approx -43{,}6$ см $\left(\text{здесь } \Gamma = \frac{9\text{ см}}{30\text{ см}} = \frac{12\text{ см}}{40\text{ см}} = 0{,}3\right)$.

10. $R = 21$ см (вычисления удобно проводить по этапам).

Химический факультет

1. $m_2 = 3\,m_1$.

2. $t = 0$ °С.

3. $U_2 = U_1\frac{d - l}{d} = 120$ В.

4. $I \geqslant \frac{2T_0 - mg}{|\vec{B}|\,l} = 1{,}5$ А.

5. $s_1 = \frac{a_1 F}{a_1 + F} \approx 7$ см; $s_2 = F = 10$ см.

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $|\vec{T}| = m(v^2/l - g\cos\alpha) = 9$ Н.

2. $k = \frac{Q - (c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_к - t)}{m_2\lambda} \approx 0{,}01$ (здесь $t_к = 100$ °С — температура кипения воды).

3. $|\vec{F}| = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 r^2} = 9\cdot 10^{-5}$ Н.

4. $P_1' = \frac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} \approx 44{,}4$ Вт; $P_2' = \frac{P_1^2 P_2}{(P_1 + P_2)^2} \approx 22{,}2$ Вт.

Новосибирский государственный университет

Математика

Механико-математический, физический, экономический факультеты

1. 20 м/сек. Указание. Обозначим время от начала торможения до остановки через t. Рассмотрите три случая: $t \geqslant 15$, $5 < t < 15$, $t \leqslant 5$; покажите, что первый и третий случаи невозможны. 2. $x_1 = -\frac{5}{16}\pi + 2\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{16} + 2\pi l$, $x_3 = \frac{3}{16}\pi + 2\pi m$, $x_4 = \frac{7}{16}\pi + 2\pi n$ $(k, l, m, n \in Z)$.

3. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Указание. Если O_1 и O_2 — центры окружностей, A и B — точки их касания с прямой l, C — ближайшая к l точка их пересечения и $O_2K \perp O_1A$, то $\widehat{O_1O_2K} = 45^\circ$ (из $\triangle O_1O_2K$) и $\widehat{O_1O_2C} = 90^\circ$ (из $\triangle O_1O_2C$).

4. $\left[-\sqrt{\frac{2}{5}};\ \sqrt{\frac{2}{5}}\right]$. **Указание.** Первое неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 5x^2 - 8x + 3 > x^2, \\ x > 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 0 < 5x^3 - 8x + 3 < x^2, \\ 0 < x < 1. \end{cases}$$

5. $|PQ| = \frac{3\sqrt{101}}{5}$. **Решение.** Рассмотрим гомотетию с центром в точке P, которая переводит A' в A (рис. 8). Так как основания усеченной пирамиды параллельны, образ верхнего основания будет лежать в плоскости нижнего основания. Поэтому образом точки M будет точка Q, а образом D' — точка S на продолжении AD такая, что $(QS) \parallel (CD)$. Мы видим, что $\frac{|QS|}{|MD'|} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$, т. е. коэффициент гомотетии равен шести. Отсюда, в частности, следует, что $|AQ| = 6|A'M| = 3\sqrt{5}$. Из $\triangle QAB$ находим $|QB| = 6$, тогда $|QC| = 3$. Пусть P' — проекция точки P на плоскость основания (рис. 9). Из $\triangle AQC$ по теореме косинусов находим $\cos\widehat{QAP'} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Из $\triangle PAP'$ вычисляем $|P'A| = \frac{6\sqrt{2}}{5}$. Тогда из $\triangle QAP'$ по теореме косинусов $|QP'| = \frac{3\sqrt{73}}{5}$. Наконец, из $\triangle QPP'$ находим $|PQ|$.

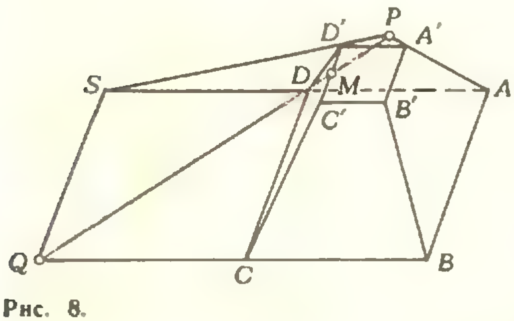


Рис. 8.

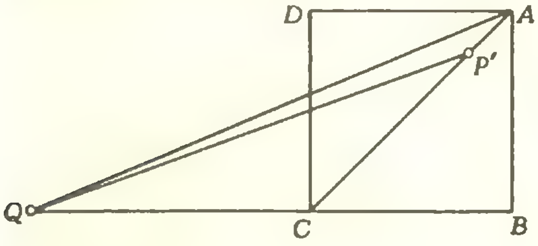


Рис. 9.

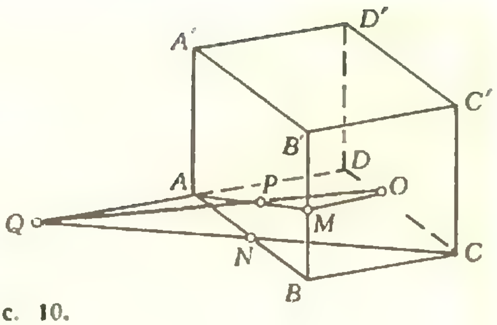


Рис. 10.

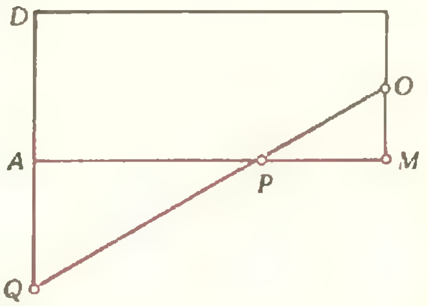


Рис. 11.

Факультет естественных наук, геолого-геофизический факультет

1. $\{(1;2),\ (-1;-2),\ (\sqrt{2};\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2};-\sqrt{2})\}$. 2. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = (-1)^l\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k,\ l \in \mathbb{Z})$. 3. $9:16$.

Указание. Точки O_1 и O_2 лежат на перпендикуляре к $[CD]$, проходящем через его середину. Отсюда и из условия вытекает, что $\widehat{DCB} = 90^\circ$ и, следовательно, $[DB]$ — диаметр одной из окружностей.

4. $]-4;\ -1-\sqrt{3}] \cup]0;\ -1+\sqrt{3}]$.

5. $|PQ| = \frac{\sqrt{14}}{3}$. **Указание.** Прямая PQ лежит в плоскости OAM. Следовательно, точка пересечения этой плоскости с прямой CN есть Q. Кроме того, точка Q лежит на линии пересечения плоскости OAM и плоскости ABC, т. е. на прямой AD (рис. 10). Сечение куба плоскостью OAM изображено на рисунке 11.

Физика

Вариант I

1. Правый поршень дойдет до горизонтального участка трубки. Высота x левого поршня будет равна

$$x = \begin{cases} \frac{3}{2}h\,\frac{p_0 - mg/(2S)}{p_0 + mg/(2S)} & \text{при } \frac{mg}{2S} < p_0, \\ 0 & \text{при } \frac{mg}{2S} \geq p_0. \end{cases}$$

2. $U_1 = \dfrac{\mathscr{E}_2 C_2 - \mathscr{E}_1 C_1}{C_1 + C_2}$.

3. $|S_0 S| = F\sqrt{(3+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha\,(1 + 1/\cos\alpha)^2}$

Указание. Изображение S находится в фокальной плоскости второй линзы (рис. 12).

Вариант 2

1. $F = F_0 \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

2. $\alpha = 4/l$.

3. $x = \dfrac{2l}{\left(c^2/|\vec{v}|^2\right) - 1}\left(\sin\alpha \pm \sqrt{\left(c^2/|\vec{v}|^2\right) - \cos^2\alpha}\right)$;

знак «минус» соответствует движению автомобиля в противоположную сторону.

Указание. При отражении звука угол падения равен углу отражения (рис. 13).

Вариант 3

1. $\delta = \begin{cases} 1 - (nr/R)^3 & \text{при } nr < R, \\ 0 & \text{при } nr \geqslant R. \end{cases}$

Указание. Ход граничного луча, еще не поглощенного внутренней частью шара, показан на рисунке 14.

2. $|\vec{F}| = \dfrac{\omega a^3 |\vec{B}|^2}{4R}$.

3. $|\vec{v}_{\max}| = \dfrac{k_2 a}{\sqrt{m(k_1 + k_2)}}$.

Задачи-оценки

1. Накопленная при падении с высоты h энергия mgh расходуется на работу $A \sim |\vec{F}|\,l$ против средней силы $\vec{F}$, действующей на ноги (l — путь центра тяжести за время действия силы, примерно равный длине ног). Таким образом,

$$|\vec{F}| \sim mg\frac{h}{l}.$$

Взяв $m = 70$ кг, $h = 5$ м, $l = 1$ м, получим $|\vec{F}| \sim 3500$ Н.

2. Лучи, идущие от краев Солнца через центр линзы (угол между ними равен отношению диаметра Солнца к расстоянию до него: $\alpha = D_C/r_C$), не преломляются и создают в фокальной плоскости линзы изображение Солнца (рис. 15). Диаметр изображения

$$d = \alpha F = \frac{D_C}{r_C}F,$$

где F — фокусное расстояние линзы. Энергия, упавшая на площадь линзы $\pi D^2/4$, концентрируется на существенно меньшей площади изображения $\pi d^2/4$. Таким образом, происходит увеличение энергии на единицу площади в

$$\beta = \frac{D^2}{d^2} = \left(\frac{D r_C}{D_C F}\right)^2 \text{ раз}.$$

Выбирая, например, $D = 5$ см, $F = 25$ см и подставляя значение углового диаметра Солнца $\alpha = D_C/r_C$, получим $\beta \sim 400$.

3. Оценим давление, пользуясь гидростатической формулой

$$p = \rho g_{\text{средн}} R \sim \rho\frac{g}{2}R,$$

($g_{\text{средн}} = \dfrac{g}{2}$, так как ускорение силы тяжести от центра Земли до ее поверхности растет по линейному закону). Оценим

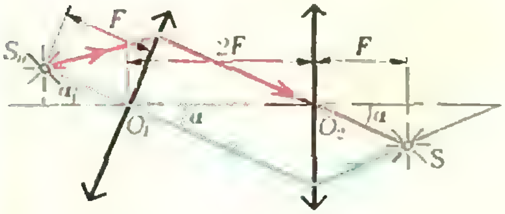


Рис. 12.

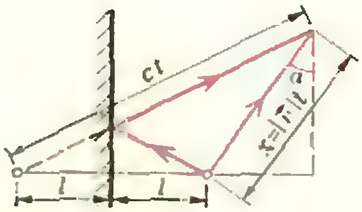


Рис. 13.

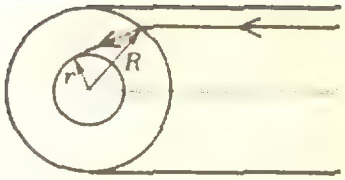


Рис. 14.

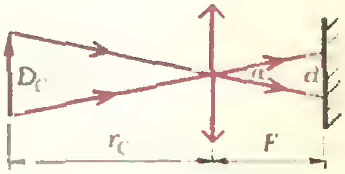


Рис. 15.

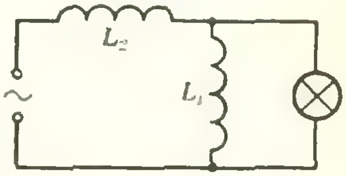


Рис. 16.

плотность Земли:

$$\rho = \frac{M_З}{V_З} = \frac{gR^2/\gamma}{4/3\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi R\gamma}.$$

Таким образом,

$$p \sim \frac{3g^2}{8\pi\gamma} \sim 10^6 \text{ атм.}$$

Задачи-демонстрации

1. Под действием поля внутри конденсатора на шарике индуцируются заряды. Они распределяются так, чтобы одноименные к ближней пластине конденсатора заряды расположились подальше от нее, а разноименные — поближе. Это приводит к возникновению силы, притягивающей шарик к одной из пластин. При соприкосновении шарика с пластиной на него переходит заряд, одноименный с зарядом пластины, возникает отталкивание от этой пластины и притяжение к другой. Далее все повторяется. Шарик на себе переносит заряды с одной обкладки конденсатора на другую.

2. При вдвигании железного сердечника индуктивность катушки и, следовательно, ее индуктивное сопротивление возрастают. Свечение лампочки при увеличении индуктивности первой катушки будет возрастать, если эта катушка включена в цепь параллельно лампочке. Аналогично, свечение лампочки при увеличении индуктивности второй катушки будет уменьшаться, если катушка включена в цепь последовательно с лампочкой. Таким образом, приходим к схеме, изображенной на рисунке 16.

3. В сплошном кольце индуцируется кольцевой вихревой ток такого направления, что его взаимодействие с магнитным полем катушки приводит к отталкиванию кольца (вдоль стержня) от катушки. Когда кольцо разрезано, такой кольцевой ток возникнуть не может, и выталкивание кольца не наблюдается.

Московский институт стали и сплавов

Физика

1. $\left|\vec{a}\right| = \dfrac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} g = 1$ м/с;

$$\left|\vec{T}\right| = \frac{m_1 m_2 g(\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2} = 6 \text{ Н}.$$

2. $m_2 = m_1 \dfrac{c_1(t_1 - \theta)}{c_1\theta + r - c_2 t_2} \approx 0{,}56$ кг.

3. $l_1 = \dfrac{L\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 5$ см и $l_2 = \dfrac{L\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} = 80$ см (здесь $\mu_1 = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль и $\mu_2 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярные массы, соответственно, кислорода и водорода).

4. $h = \dfrac{e\left|\vec{E}\right| L^2}{2m\left|\vec{v}\right|^2} \approx 10^{-2}$м $= 1$ см.

5. $\mathscr{E} = \dfrac{(2R + r)q}{rC} = 110$ В.

6. $\delta \approx 0{,}1$ рад $\approx 6°$.

Где ошибка?

(см. с. 38)

Логическое правило, сформулированное в задаче, относится к высказываниям. *Высказыванием* называют обычно такое предложение, про которое говорящие согласны, что оно истинно или ложно.

Если еще можно спорить о предложениях A и B, являются или не являются они высказываниями (в самом деле, как по-вашему: предложение A истинно? ложно?), то предложение C без дополнительных уточнений (очевидно, предложение C есть сокращение для «Говоря X, я говорю правду»; высказыванием оно становится только после конкретизации X, причем при одних X оно становится истинным высказыванием, при других — ложным) считать высказыванием явно неразумно.

Причину ошибки можно объяснить немного короче: в предложениях «Из B следует C» и «Из A следует C» C имеет различный смысл.

Знаю ли я неравенства?

(см. с. 43)

1. $]0; 1[$. 2. $]-4; -3[\,\cup\,]-3; \infty[$. 3. $]0; 1[\,\cup\,]1; \infty[$. 4. $]\log_{1/\sqrt{2}} 3; \infty[\, = \,]-2\log_2 3; -\infty[$. 5. $]\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k[$ $(k \in Z)$ 6. $]-\infty; +\infty[$. 7. $\sqrt{\cos 6}$ больше. 8. $-2a$.

1. Ответ. $]{}^9/_4; \infty[$. Решение. Обозначим $\sqrt{2} = a$; тогда $2 = a^2$ и исходное неравенство перепишется в виде:

$$\log_{a-0,5}(x^2(x - 3a) + a^2(3x - a)) < 6.$$

$$\log_{a-0,5}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3) < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{a-0,5}(x - a)^3 < 6 \Leftrightarrow 3\log_{a-0,5}(x - a) < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{a-0,5}(x - a) < 2 \Leftrightarrow x - a > (a - 0{,}5)^2.$$

2. Легко видеть, что $x^2 - 3x + 3 > 0$ при любых x. Следовательно, $\arcsin(x^2 - 3x + 3)$ больше нуля при всех таких x, что $x^2 - 3x + 3 \leq 1$. Но очевидно, $x^2 - 3x + 3 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

При $x = 1$ теряет смысл $\log_x x^2$, поэтому для исходного неравенства допустимыми являются значения $1 < x \leq 2$. Знаменатель исходной дроби равен $x^3 - x^2 - x + 2$. Нетрудно проверить (хотя бы с помощью производной), что на $]1; 2]$ это выражение положительно. Ответ $]1; 2]$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1.
$$\begin{array}{r} 1311-952=359 \\ +\;\; 313+\;17=330 \\ \hline 1624\;:\;56=\;29 \end{array}$$

$$333^3=36926037;$$
$$477^3=108531333;$$
$$997^3=991026973;$$

2. а) $1233=12^2+33^2$; б) $8833=88^2+33^2$.

3. Заменим все числа их остатками от деления на 5 (см. таблицу), а сверху над остатками проставим точки в количестве, равном остаткам от деления первоначальных чисел на 3. Теперь нетрудно сообразить, почему в центре не может стоять число 3: чисел с одной точкой наверху — три, с двумя точками — пять, так что на концах одного из четырех диаметров придется поставить по числу с разным количеством точек наверху; но тогда соответствующая сумма первоначальных чисел на этом диаметре будет делиться на 3. Возможные способы расстановки данных чисел (когда в центре стоят числа 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29 соответственно) приведены на рисунке 17.

3	5	7	11	13	17	19	23	29
3	$\ddot{0}$	$\dot{2}$	$\ddot{1}$	$\dot{3}$	$\ddot{2}$	$\dot{4}$	$\ddot{3}$	$\ddot{4}$

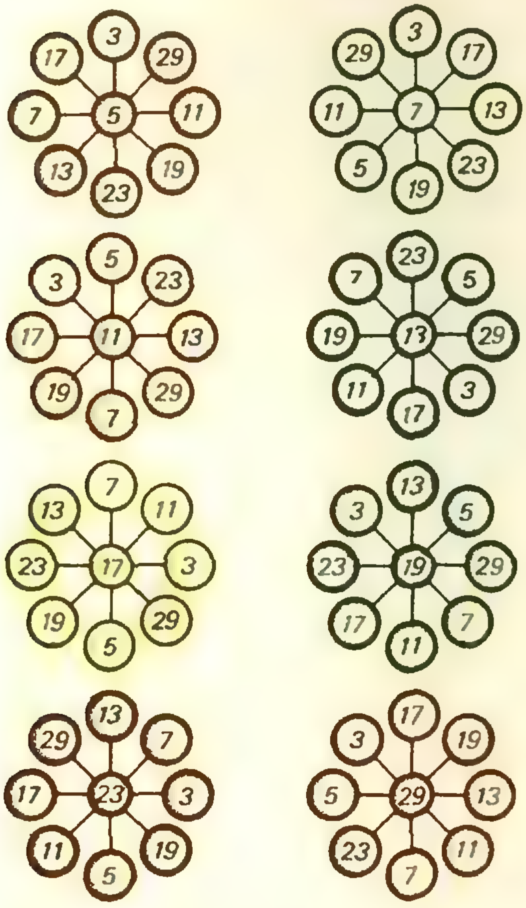


Рис. 17.

4. Задача имеет два решения: параллелограмм с острым углом 72° и параллелограмм с острым углом $\frac{360°}{7}$ (см. рисунки 18, *а—в*).

5. Второй мальчик выиграет, если он будет ставить свои ладьи симметрично ладьям первого мальчика относительно центра доски.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

(см. «Квант» № 4)

1. $$\left|\vec{E}\right|=\frac{4\left|\vec{v}\right|^2\sin^2\alpha\,(h\operatorname{ctg}\alpha-d)}{h^2e/m}=$$
$$=1{,}82\cdot10^4\ \text{В/м}.$$

2. $R=\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 W}=5{,}2\cdot10^{-11}$ м, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

3. $$\frac{\Delta U}{U_0}\leqslant\frac{A_2-A_1}{A_1+A_2}=\frac{1}{40}=2.5\%.$$

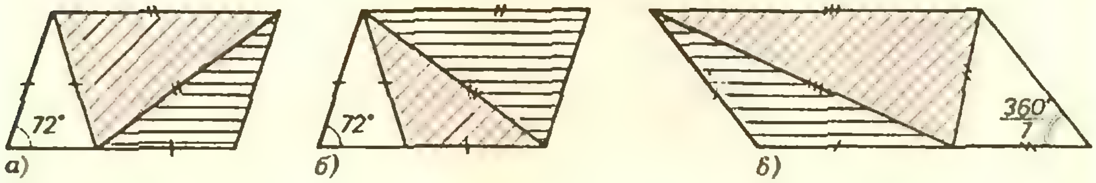
Указание. Пучки изотопов калия не будут перекрываться, если $R_{2\min}\geqslant R_{1\max}$. Здесь

$$R_{2\min}=\frac{1}{e\left|\vec{B}\right|}\sqrt{2em_2(U_0-\Delta U)}\ ,$$

$$R_{1\max}=\frac{1}{e\left|\vec{B}\right|}\sqrt{2em_1(U_0+\Delta U)}$$

($m_1\sim A_1$ и $m_2\sim A_2$ — массы соответствующих ионов калия).

4. $T_p=T_e\dfrac{m_p}{m_e}$.



а) б) в)

Рис. 18.

Московский архитектурный институт

(*см. «Квант» № 4*)

Математика

Билет 1

2. 1) m^2-2; 2) $m(m^2-3)$; 3) $\sqrt{m^2-4}$ или $-\sqrt{m^2-4}$. 3. $a^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4\sin^2 75^\circ}-1\right)=a^2\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)$.

Указание. Фигура, площадь которой требуется найти, является объединением квадрата и четырех сегментов.

Билет 2

2. 8. 3. $\sqrt{41{,}36}\approx 6.4$ (м). Указание. Пусть $\alpha(x)$ — угол, под которым человек, стоящий на расстоянии x, видит статую. Тогда функции $x\to\alpha(x)$ и $x\to\operatorname{tg}\alpha(x)$ принимают наибольшее значение в одной и той же точке.

Физика

1. $\alpha=\arccos\left(1-\frac{m^2|\vec{v}|^2}{2(m+M)^2 gl}\right)$.

2. $|\vec{F}_1|=Mg\cos\alpha$; $|\vec{F}_2|=Mg\sin\alpha$.

3. $|\vec{F}_{\text{ср}}|=\frac{m}{s}\left(g(H+s)+\frac{|\vec{v}_0|^2}{2}\right)=761$ Н.

4. $q=2l\sin\alpha\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mg\sin\alpha}\approx 3{,}3\cdot 10^{-8}$ Кл.

5. $t_3=t_1+t_2=45$ мин; при увеличении продолжительности нагревания увеличиваются потери тепла в окружающую среду, следовательно, в каждом последующем случае КПД меньше, чем в предыдущем.

6. $I_{\text{кз}}=\frac{I_2^2P_1-I_1^2P_2}{P_1I_2-P_2I_1}=112$ А.

Домино-пасьянс

(*см. «Квант» №4, с. 56*)

См. рисунки 19, 20, 21.

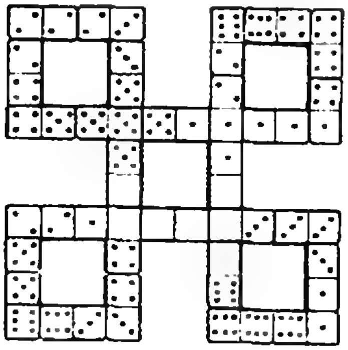


Рис. 19.

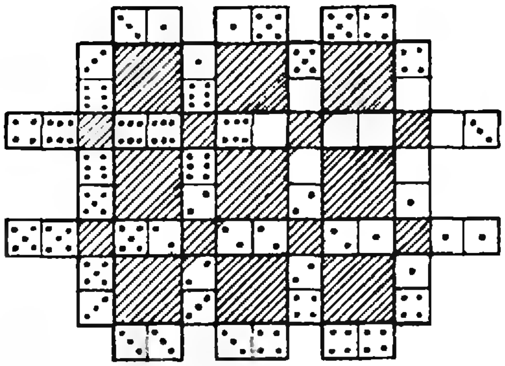


Рис. 20.

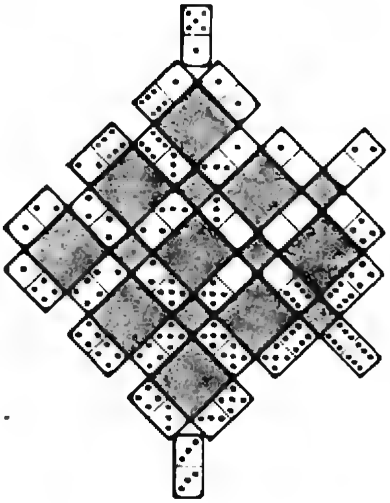


Рис. 21.

Номер готовили:
А. Виленкин, Н. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красников, С. Лухин,
Э. Назаров, И. Смирнова, В. Чернов
В. Шептовицкий

Зав. редакцией Л. Чернова

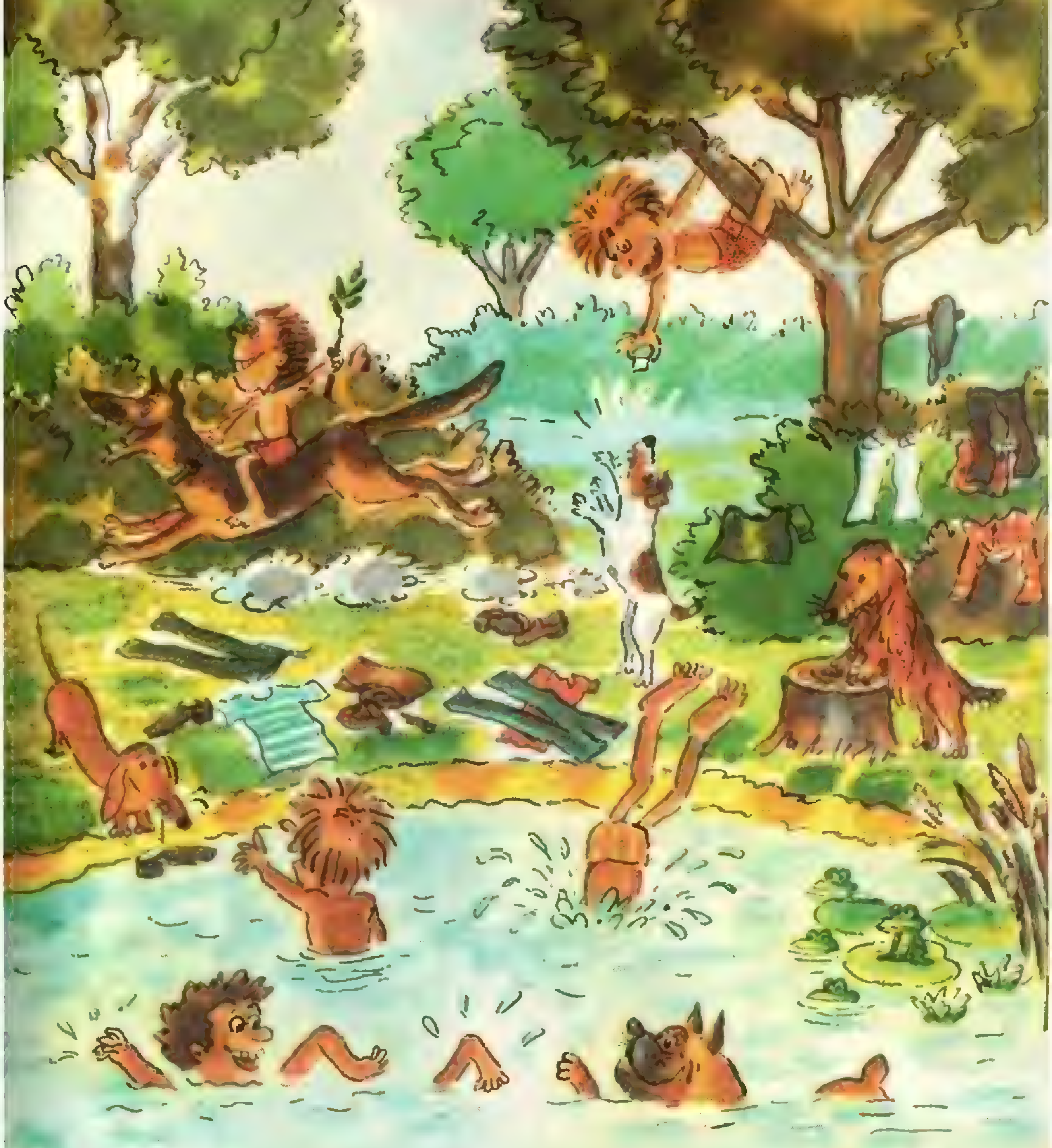
Художественный редактор Н. Вершинина

Корректор А. Ипатова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 29/I-79
Подписано в печать 13/IV-79
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,77 Т-08943
Цена 30 коп. Заказ 423
Тираж 287 200 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Петя, Вася, Коля, Саша и Дима — друзья. У каждого из них есть собака — боксер, овчарка, фокстерьер, такса и спаниель, с которыми они гуляют всегда вместе.

Как-то раз, усевшись на свою любимую скамейку, ребята размышляли, чем бы им заняться. Все они были одеты по-разному: в черные, синие, белые, коричневые и зеленые брюки; в красную, серую, клетчатую, полосатую и цветастую рубашки; и у всех были разные головные уборы — бескозырка, берет, кепка, тюбетейка и пилотка.

Синие брюки сидели рядом с красной рубашкой, а коричневые — рядом с серой.

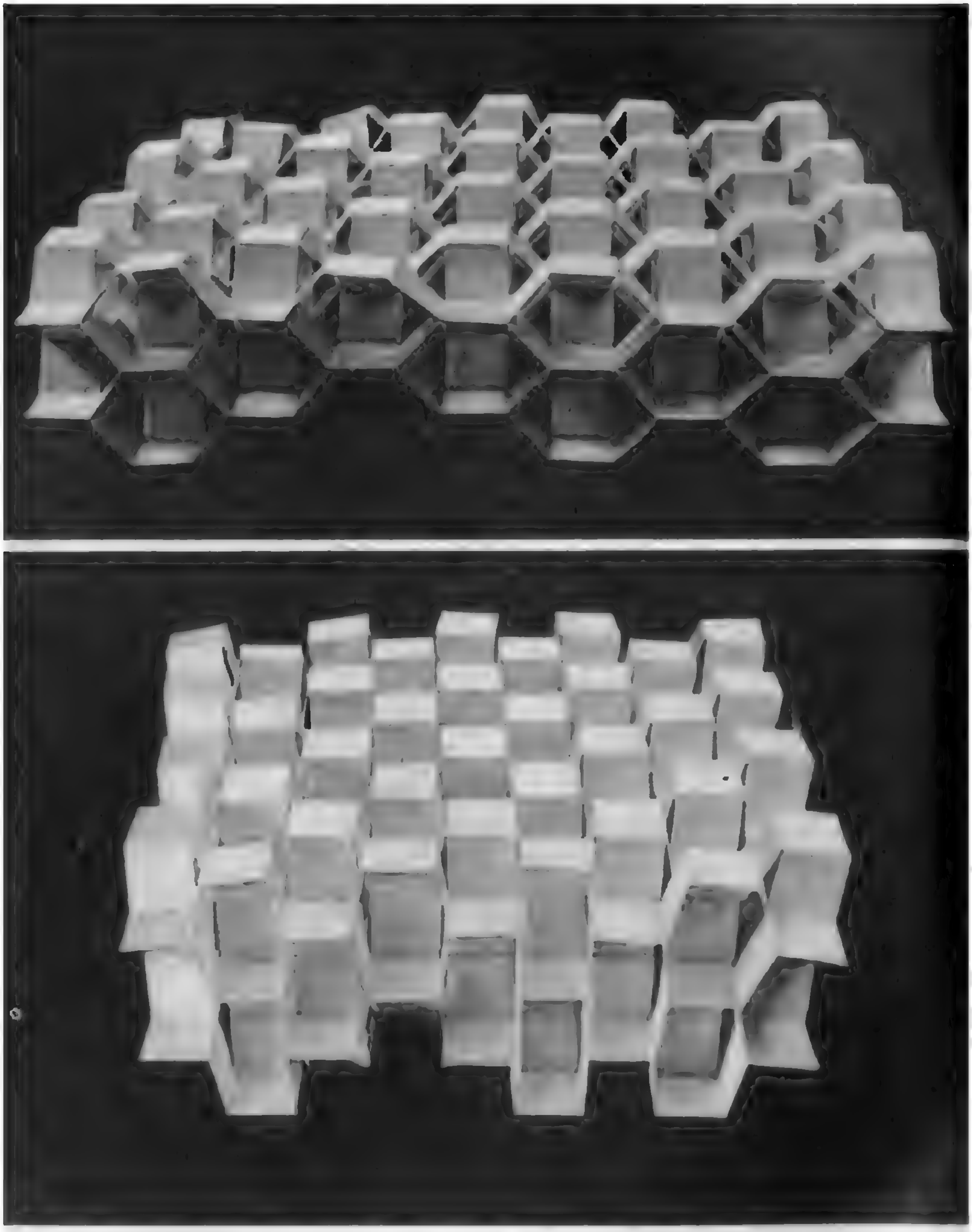
Хозяин спаниеля сидел справа от хозяина фокстерьера, а Коля — рядом с хозяином боксера.

Коля сидел с краю, а Петя — в зеленых брюках.

Кепка сидела в середине, а черные брюки — в бескозырке.

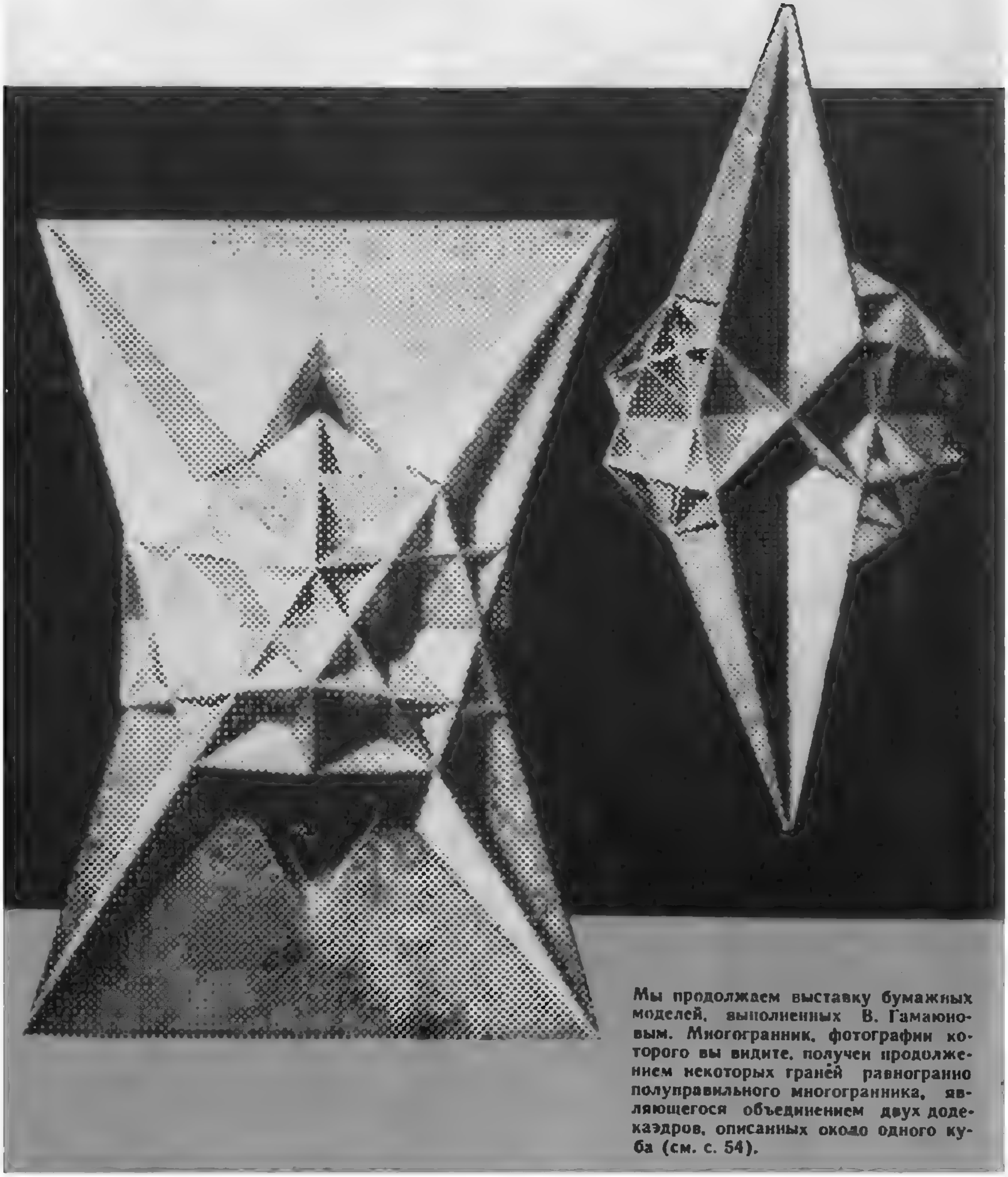
День был жаркий, и приятели решили пойти купаться.

Определите, у кого была полосатая рубашка и на ком была пилотка, если известно, что у Димы — овчарка, а у Васи — клетчатая рубашка, у хозяина спаниеля — тюбетейка, а у Саши — берет, у хозяина таксы — коричневые брюки, а белые брюки — в цветастой рубашке.



На этих фотографиях вы видите бумажные модели «самовозводящегося домика» в разных стадиях готовности. Подробнее об этой конструкции вы можете прочитать на странице 54.

Цена 30 коп.
Индекс 70465



Мы продолжаем выставку бумажных моделей, выполненных В. Гамаюновым. Многогранник, фотографии которого вы видите, получен продолжением некоторых граней равногранно полуправильного многогранника, являющегося объединением двух додекаэдров, описанных около одного куба (см. с. 54).

НОМЕР
6

Основан в 1970 году

Квант

6
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

2 *П. Блехер, М. Кельберт.* Алгоритмы классификации
9 *А. Левашов.* Опыты Франка и Герца

Математический кружок

14 *С. Поздняков.* «Теория вероятностей» без теории

Задачник «Кванта»

16 Задачи М566—М570; Ф578—Ф582
17 Решения задач М515; Ф527—Ф529

По страницам школьных учебников

24 *В. Григоренко* Когда критических точек слишком много

«Квант» для младших школьников

27 Задачи
28 Животные на . . плоскости

Практикум абитуриента

30 *Е. Кузнецов* Глаз на вступительных экзаменах
33 *С. Овчинников, И. Шарыгин.* Нестандартные задачи по стереометрии

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

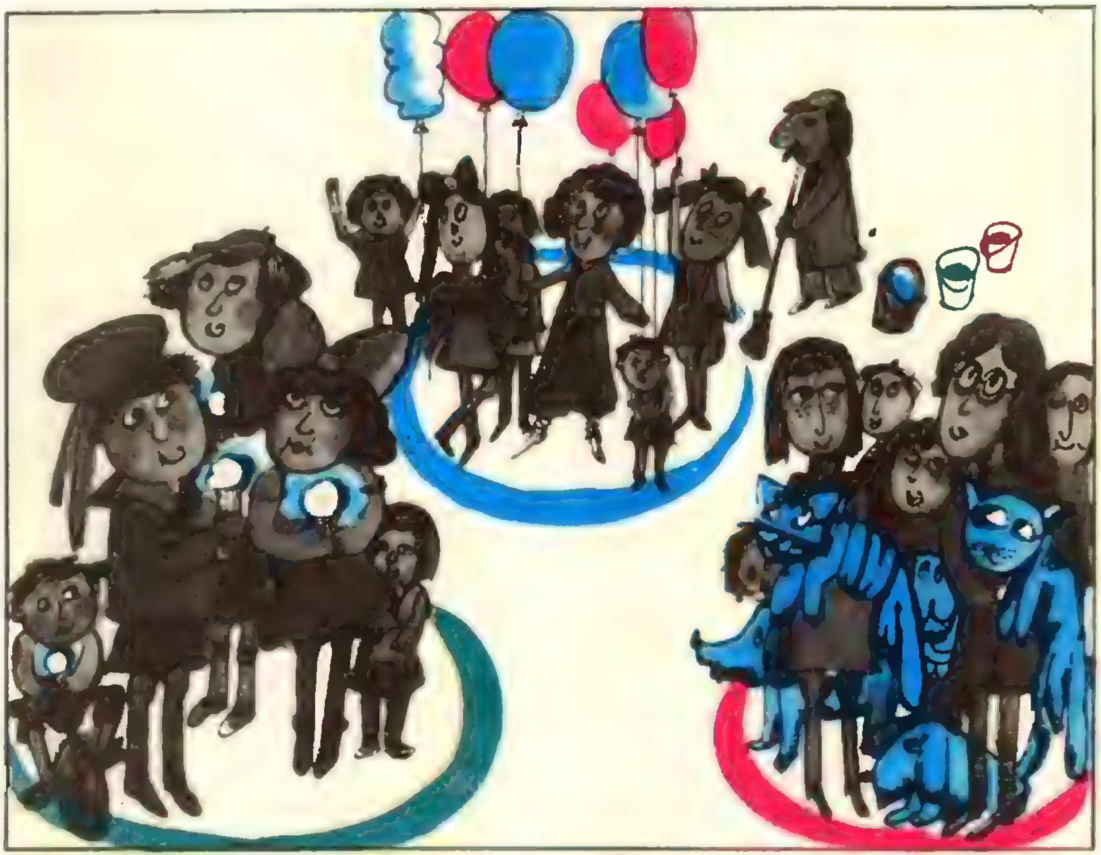
39 Московский институт стали и сплавов
41 Московский институт электронной техники
43 Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе
45 Московский энергетический институт
46 Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского
47 Московский геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе
48 Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии
49 Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (математический факультет)
50 Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской
52 Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена
53 Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева
54 Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники

Рецензии, библиография

56 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
58 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с. 8, 15,26, 38*)

Светильник-«ежик»
который вы видите
на первой странице обложки,
сделан из светопроводов
Подробнее о светопроводах
можно прочитать на с. 26

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979



П. Блехер, М. Кельберт

Алгоритмы классификации

В этой статье мы расскажем об одном из разделов не так давно возникшей науки — *теории распознавания образов* *). А именно: мы поговорим о методах классификации. *Классификация* — это разбиение некоторой совокупности объектов на группы объектов, близких в каком-то смысле. Можно классифицировать, например, фабрики данной отрасли, наблюдавшиеся в каком-то районе землетрясения, сентябрьскую погоду за много лет, вымерших ящеров и т. д. Важно только, чтобы классифицируемые объекты характеризовались определенным набором чисел и признаков. Для простоты мы рассмотрим случай, когда каждый объект описывается только набором чисел.

Как классифицировать школьников?

Пусть мы хотим разделить всех школьников девятых классов данной школы по тому, как они используют свое внешкольное время. Мы опросим каждого школьника и запишем, какую часть этого времени он тратит на уроки и какую — на развлечения. Оставшееся время (на еду, сон, транспорт и т. д.) нас сейчас не интересует. В результате каждый школьник будет характеризоваться двумя числами: временем на уроки и временем на развлечения. Поэтому он может быть изображен точкой на координатной плоскости. Таким образом, мы приходим к чисто математическому вопросу: *как разбить данное множество точек плоскости на группы близких точек?*

К этому же вопросу приводят и многие серьезные прикладные задачи, только в них число координат гораздо больше (порядка нескольких десятков).

Например, в текстильной промышленности работает огромное количество предприятий. Среди них есть и специализированные фабрики с небольшим ассортиментом продукции, и комбинаты, выпускающие разнообразные изделия. Есть фабрики-гиганты, есть фабрики средних размеров, есть и небольшие местные производства. Чтобы сравнивать деятельность отдельных предприятий и планировать их работу, необходимо классифицировать все эти предприятия — разбить их на группы однотипных предприятий. Предприятия раличаются по своим экономическим показателям. Выберем среди них несколько самых важных (например, стоимость валовой продукции, стоимость производственных фондов и фонд заработной платы) и будем проводить классификацию по ним. Число выбранных показателей обозначим через n.

---

*) Тем, кто хочет познакомиться с ней поближе, мы советуем прочесть увлекательную, хотя и не очень простую книгу М. М. Бонгарда *«Проблема узнавания»* (М., «Наука», 1967).

Сопоставим каждому предприятию набор чисел $(x_1; \dots; x_n)$, где x_1 — значение его первого показателя, x_2 — значение его второго показателя и т. д.

Пара чисел $(x_1; x_2)$ задает точку на плоскости, тройка чисел $(x_1; x_2; x_3)$ — точку в пространстве, а последовательность n чисел $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ по определению считается *точкой n-мерного пространства*.

Таким образом, на этот раз мы приходим к задаче классификации точек в n-мерном пространстве.

Без машин трудно

Для решения задач классификации разработаны различные алгоритмы, позволяющие использовать вычислительные машины. Необходимость применения вычислительных машин вызвана двумя причинами. Во-первых, как правило, объектов очень много, и обработка всех данных вручную просто невозможна. Во-вторых, классифицируемые объекты чаще всего многомерны.

Если, как в примере со школьниками, координат всего две и число объектов невелико, то человек может справиться с задачей классификации не хуже, чем вычислительная машина. А именно: он посмотрит на картинку, где изображены точки, представляющие объекты, и выделит области, отвечающие сгущению точек. Эксперименты показывают, что все люди делают это примерно одинаково. Это связано с тем, что они (люди) непроизвольно стремятся к тому, чтобы точки в одной группе были близки друг к другу, и различные группы были удалены на достаточное расстояние. Если же число параметров равно трем или больше, то соображения наглядности уже практически бесполезны и задача классификации становится труднодоступной для человека.

Психологами проводился следующий эксперимент *). Испытуемым выдавались наборы карточек с тремя числами, соответствующими координатам точек в пространстве. Требовалось разбить точки на две естественные группы. На самом деле существовала плоскость, идущая под углом к координатным осям, которая разбивала все точки на две группы так, что расстояние от любой точки до этой плоскости было достаточно велико по сравнению с расстояниями между точками внутри каждой группы. Большинство людей разбивало точки по значению одной из координат, что приводило к неестественным разбиениям; правильного разбиения не удалось построить почти никому.

Поэтому для точек в многомерном пространстве были разработаны *алгоритмы классификации*. Одним из критериев правильности работы этих алгоритмов служит требование, чтобы при классификации точек на плоскости они давали естественные разбиения — те же, какие находят люди.

Дерево минимальной длины

Мы сейчас опишем алгоритм построения связной системы отрезков, соединяющей данные точки, с минимальной суммой длин (система отрезков называется *связной*, если

---

*) Этот и некоторые другие подобные эксперименты описаны в книге Н. Г. Загоруйко *«Методы распознавания и их применения»* (М., «Советское радио», 1972). В этой книге можно подробнее прочесть о многих вопросах, о которых мы упоминаем только вскользь.

из любой данной точки по отрезкам этой системы можно добраться до любой другой данной точки). Для наглядности мы рассмотрим построение на плоскости. В многомерном пространстве алгоритм такой же, только нельзя нарисовать картинку.

Итак, пусть на плоскости даны N точек $A_1, \dots, A_N$. Для простоты мы будем считать, что все попарные расстояния между точками различны. Выпишем все пары точек (A_1, A_2), (A_1, A_3), ..., (A_{N-1}, A_N) и упорядочим их так, чтобы вначале шла пара с минимальным расстоянием между точками, за ней пара со вторым по величине значением расстояния и т. д. Соединим теперь первую пару точек, затем вторую пару и т. д. Если при проведении очередного отрезка появляется *цикл* (то есть из системы уже проведенных отрезков можно выбрать несколько отрезков, образующих замкнутую ломаную), то этот отрезок мы пропустим и перейдем к следующему и т. д.— до тех пор, пока не переберем все отрезки. Полученная система отрезков по построению не содержит циклов. (Связную систему отрезков без циклов называют *деревом*.)

Задача 1. Докажите, что построенная система отрезков имеет минимальную длину среди всех связных систем отрезков, соединяющих данные точки.

Задача 2. Докажите, что ту же систему отрезков можно получить следующим, как говорят математики, двойственным построением: соединим все пары точек отрезками и упорядочим эти отрезки в порядке убывания их длины; отбросим самый длинный отрезок, затем второй по величине отрезок и т. д.; если при отбрасывании очередного отрезка оставшиеся отрезки не образуют связного множества, то пропустим этот отрезок и перейдем к следующему и т. д. — до тех пор, пока не переберем все отрезки.

Задача 3*. Пусть среди попарных расстояний между точками $A_1, \dots, A_N$ есть совпадающие. Упорядочим произвольным образом отрезки одинаковой длины и проведем процедуру, описанную в тексте или в задаче 2. Докажите, что построенная система отрезков имеет минимальную длину независимо от того, как были упорядочены равные отрезки. Разумеется, в этом случае система отрезков минимальной длины может быть неединственной.

Описанный нами алгоритм построения дерева минимальной длины сравнительно прост, но требует большого перебора и, следовательно, долгой работы вычислительной машины. Существуют более быстрые (но и более сложные!) алгоритмы.

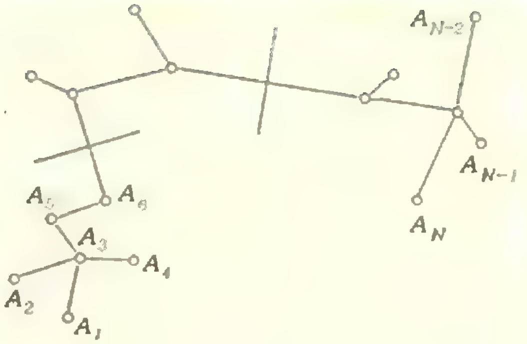


Рис. 1.

Разбиение на группы

После того как дерево Г минимальной длины построено, разбиение множества точек $A_1, \dots, A_N$ на группы осуществляется отбрасыванием некоторых отрезков, входящих в это дерево. Естественно отбрасывать достаточно длинные отрезки, но так, чтобы точки, попавшие в одну группу, были расположены как можно теснее. Это наглядное соображение можно формализовать, если ввести следующие величины. Пусть мы хотим разбить множество точек $A_1, \dots, A_N$ на $k+1$ групп. Выберем произвольные k отрезков дерева Г и отбросим их (рис. 1). Мы получим $k+1$ связных групп точек: $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1}$. Для каждой группы Γ_i разделим сумму длин отрезков дерева Г, соединяющих точки, входящие в нее, на число отрезков. Мы получили среднюю длину отрезков в каждой группе Γ_i. Если какая-то группа состоит из одной точки, то по определению эта средняя длина равна нулю. Обозначим вычисленные средние длины через $l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}$. Пусть, кроме того, длины отброшенных отрезков — $b_1, b_2, \dots, b_k$. Образуем величину

$$F = l_1 + l_2 + \dots + l_{k+1} - \\ - b_1 - \dots - b_k.$$

Ясно, что чем меньше величина F, тем теснее расположены точки каждой группы и тем дальше друг от друга находятся разные группы. Поэтому естественно предложить следующий алгоритм: из дерева минимальной длины всеми возможными способами отбрасываем k отрезков и вычисляем величину F; среди всех полученных разбиений выбираем то, для которого величина F минимальна; если «минимальных» разбиений несколько, берем любое из них.

В реально используемых алгоритмах величина F определяется, как правило, более сложным образом.

Вычислительная практика показала, что алгоритмы описанного типа приводят к достаточно разумным разбиениям. Главный недостаток этих алгоритмов заключается в том, что требуется производить слишком большой перебор. При увеличении числа точек задача становится недоступной даже для современных вычислительных машин.

Чтобы справиться с этой трудностью, используют следующую идею. Точки, расстояние между которыми меньше некоторой величины a, стараются отнести к одной группе. Все построение проводят в два этапа. На первом этапе множество точек $A_1, \ldots, A_N$ разбивают на более мелкие группы $G_1, \ldots, G_m$ так, чтобы для каждой группы G_i существовал круг S_i радиуса $R = a/2$, содержащий все точки группы G_i и только их. Как это сделать, мы обсудим ниже. На втором этапе рассматривают только центры $O_1, \ldots, O_m$ кругов $S_1, \ldots, S_m$ и строят дерево минимальной длины уже для множества $O_1, \ldots, O_m$. Минимизируя соответствующую этому дереву величину F, строят разбиение на группы множества точек $O_1, \ldots, O_m$ так, как это было описано выше. Тем самым мы получаем и разбиение множества точек $A_1, \ldots, A_N$. А именно, две точки A_i, A_j относятся к одной группе, если они лежат в одной мелкой группе G_i или если центры кругов соответствующих им мелких групп попали при разбиении точек $O_1, \ldots, O_m$ в одну группу. Смысл этой двухступенчатой процедуры состоит в уменьшении числа исходных точек: число m оказывается много меньше N, и такую процедуру уже можно реализовать на вычислительной машине.

Задача о движущемся круге

Нам осталось обсудить, как разбить множество точек $A_1, \ldots, A_N$ на мелкие группы. Для решения этой задачи используется алгоритм «Форель» (он несколько напоминает один из способов ловли форели). Опишем этот алгоритм для точек на плоскости, хотя точно так же он работает и в многомерных пространствах.

Итак, пусть на плоскости даны N точек $A_1, \ldots, A_N$. Поместим в эти точки шарики единичной массы и нарисуем какой-нибудь круг S_0 радиуса R, в котором лежит хотя бы один из шариков. Пусть O_1 — центр тяжести шариков, попавших в круг S_0, и S_1 — круг радиуса R с центром в точке O_1. Пусть O_2 — центр тяжести шариков, попавших в круг S_1, и S_2 — круг радиуса R с центром в точке O_2 и т. д. Например, на рисунке 2 изображены восемь точек $A_1, \ldots, A_8$. В начальный круг S_0 попадает одна точка A_3, которая и будет центром круга S_1. В круг S_1 попадают точки A_2, A_3, A_4, и центр круга S_2 совпадает с их центром тяжести. Круг S_3 содержит точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, и его центр совпадает с их центром тяжести, поэтому все последующие круги с ним совпадают. Далее мы докажем, что так происходит всегда, то есть *для любых точек $A_1, \ldots, A_N$ и произвольного выбора начального круга S_0, содержащего хотя бы одну точку A_i, все круги, начиная с некоторого шага, совпадают.* Другими словами, движение

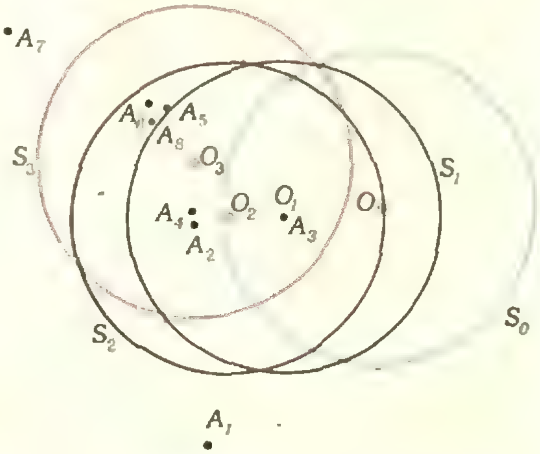


Рис. 2.

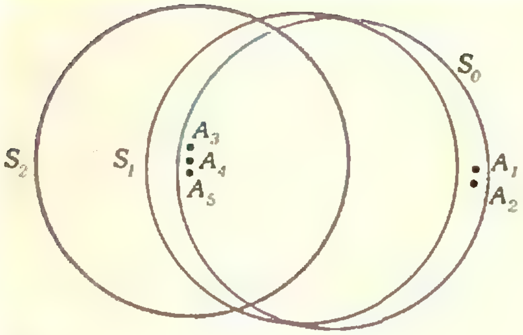


Рис. 3.

круга по маршруту $S_0 \to S_1 \to \to S_2 \to \dots$ не может происходить бесконечно. Точки, попавшие в последний круг, мы и отнесем к первой группе. К оставшимся точкам применяется та же процедура, то есть «выпускается» новый круг, конечное положение которого определяет вторую группу. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все точки не будут отнесены к какой-то группе.

Почему круг останавливается?

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству того, что круг действительно «останавливается». Рассматривая рисунок 2, мы замечаем, что круги $S_0, S_1, S_2, \dots$ захватывают все большее число точек и их конечное положение соответствует сгущению точек. Естественно предположить, что при любых расположениях точек $A_1, \dots, A_N$ и круга S_0 число точек, попавших в круги $S_0, S_1, S_2, \dots$, по крайней мере, не убывает. Рисунок 3 показывает, что это неверно; однако в некотором смысле сгущение точек в кругах $S_0, S_1, S_2, \dots$ действительно возрастает, только кроме числа точек, попавших в круг, нужно учитывать, насколько близко к центру круга они лежат.

А именно, пусть в какой-то круг S с центром O попали точки $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$; определим величину

$$F(S) = \left(R^2 - |OA_{i_1}|^2\right) + \dots \\ \dots + \left(R^2 - |OA_{i_k}|^2\right).$$

Чем ближе точка к центру круга S, тем больший вклад она вносит в величину $F(S)$. Докажем, что последовательность величин $F(S_0)$, $F(S_1)$, $F(S_2)$, … возрастает до тех пор, пока круг не остановится.

Для доказательства нам понадобится понятие момента инерции системы материальных точек $A_1, \dots, A_m$ относительно некоторой точки A и теорема Штейнера, которая очень полезна при решении многих задач не только из геометрии, но и из механики *).

Моментом инерции системы материальных точек $A_1, \dots, A_m$ относительно точки A называется величина

$$I(A) = |AA_1|^2 + \dots + |AA_m|^2.$$

Теорема Штейнера позволяет вычислить $I(A)$, если известен момент инерции $I(C)$ этой системы точек относительно их центра тяжести C. Эта теорема утверждает, что

$$I(A) = I(C) + m|CA|^2.$$

Докажем теорему Штейнера. Введем прямоугольную систему координат, поместив ее начало в центр тяжести точек $A_1, \dots, A_m$ — точку C. Обозначим координаты точек $A_1, \dots, A_m$ через $(x_1; y_1), \dots, (x_m; y_m)$. Тогда центр тяжести C имеет координаты $((x_1 + \dots + x_m)/m;\ (y_1 + \dots + y_m)/m)$, а поскольку C совпадает с началом координат, то $x_1 + \dots + x_m = y_1 + \dots + y_m = 0$. Пусть точка A имеет координаты $(x; y)$. Тогда

$$\begin{aligned} I(A) &= [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] + \dots + \\ &+ [(x_m - x)^2 + (y_m - y)^2] = \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + \dots + (x_m^2 + y_m^2) + \\ &+ m(x^2 + y^2) - 2x(x_1 + \dots + x_m) - \\ &- 2y(y_1 + \dots + y_m) = I(C) + m|CA|^2, \end{aligned}$$

поскольку $2x(x_1 + \dots + x_m) = 2y(y_1 + \dots + y_m) = 0$. Теорема Штейнера доказана.

Докажем, что *если круг S_1 не совпадает с кругом S_0, то $F(S_1) > F(S_0)$*. Перенумеруем точки $A_1, \dots, A_m$ так, чтобы точки, попавшие в круг S_0, но не попавшие в круг S_1, имели номера от 1 до p, точки, попавшие в пересечение кругов S_0 и S_1,— номера от $p + 1$ до q, а точки, попавшие в S_1, но не попавшие в S_0,— номера от $q+1$ до r. Таким образом, в круге S_0 лежат точки $A_1, \ldots, A_q$, а в круге S_1 — точки $A_{p+1}, \ldots, A_r$. Ясно, что величину $F(S_0)$ можно выразить через момент инерции $I(O)$ точек $A_1, \ldots, A_q$ относительно точки O — центра круга S_0, а именно,

---

*) См. книгу М. Б. Балка *«Геометрические приложения понятия о центре тяжести»* (М., Физматгиз, 1959).

$$F(S_0) = (R^2 - |OA_1|^2) + \ldots + (R^2 - |OA_q|^2) = qR^2 - I(O).$$

Точка O_1 — центр круга S_1 — является центром тяжести точек $A_1, \ldots, A_q$, поэтому по теореме Штейнера

$$I(O) = I(O_1) + q|OO_1|^2,$$

то есть

$$F(S_0) = qR^2 - I(O_1) - q|OO_1|^2 = (R^2 - |O_1A_1|^2) + \ldots + (R^2 - |O_1A_q|^2) - q|OO_1|^2.$$

Сравним это выражение с

$$F(S_1) = (R^2 - |O_1A_{p+1}|^2) + \ldots + (R^2 - |O_1A_r|^2).$$

В выражении $F(S_1)$ отсутствуют слагаемые

$$(R^2 - |O_1A_1|^2), \ldots, (R^2 - |O_1A_p|^2),$$

но появились слагаемые

$$(R^2 - |O_1A_{q+1}|^2), \ldots, (R^2 - |O_1A_r|^2).$$

Поэтому

$$F(S_1) - F(S_0) = -(R^2 - |O_1A_1|^2) - \ldots - (R^2 - |O_1A_p|^2) + (R^2 - |O_1A_{q+1}|^2) + \ldots + (R^2 - |O_1A_r|^2) + q|OO_1|^2.$$

Заметим теперь — и это решающее обстоятельство,— что точки $A_1, \ldots, A_p$ по построению лежат вне круга S_1. Следовательно, величины $R^2 - |O_1A_1|^2, \ldots, R^2 - |O_1A_p|^2$ отрицательны. Напротив, точки $A_{q+1}, \ldots, A_r$ лежат внутри круга S_1; поэтому величины $R^2 - |O_1A_{q+1}|^2, \ldots, R^2 - |O_1A_r|^2$ неотрицательны. Таким образом,

$$F(S_1) - F(S_0) \geqslant q|OO_1|^2,$$

то есть $F(S_1) > F(S_0)$, если точки O_1 и O не совпадают.

Точно так же доказывается, что $F(S_{k+1}) > F(S_k)$, если не совпадают точки O_{k+1} и O_k. Используя этот факт, теперь несложно показать, что, начиная с некоторого номера n, все круги $S_n, S_{n+1}, \ldots$ совпадают. По построению точка O_{m+1} является центром тяжести точек, попавших в круг S_m. Если рассмотреть все подмножества множества точек $A_1, \ldots, A_N$ и центры тяжести точек этих подмножеств, то точка O_{m+1} будет одним из этих центров тяжести. Поскольку множество центров тяжести конечно, в последовательности центров $O, O_1, O_2, \ldots$ должны встретиться совпадающие, скажем, O_l и O_j. Однако мы доказали, что

$$F(S_l) \leqslant F(S_{l+1}) \leqslant \ldots \leqslant F(S_j),$$

и так как $S_l = S_j$, $F(S_l) = F(S_j)$, поэтому $F(S_l) = F(S_{l+1}) = \ldots = F(S_j)$.

Вспомним теперь, что равенство $F(S_l) = F(S_{l+1})$ возможно лишь в том случае, если круги S_l и S_{l+1} совпадают. Остается заметить, что если два последовательных круга совпадают, то с ними совпадают по построению все последующие круги. Таким образом, мы доказали, что движение круга $S_0 \to S_1 \to S_2 \to \ldots$ не может быть бесконечным, или, как говорят математики, доказали *сходимость алгоритма* «Форель». Попутно мы разобрали решение задачи, которая предлагалась на последней Московской математической олимпиаде и в Задачнике «Кванта» (см. задачу М505 в «Кванте», 1978, № 5).

Две новые задачи

В заключение сформулируем еще две задачи. Процедуры, которые описываются в этих задачах, также применяются для классификации точек в многомерных пространствах. Как и раньше, ограничимся случаем плоскости.

Задача 4. *Пусть N точек $A_1, \ldots, A_N$ разбиты на l (непустых) групп $G_1, \ldots, G_l$. Пусть $O_1, \ldots, O_l$ — центры тяжести каждой из этих групп. Построим новое разбиение точек $A_1, \ldots, A_N$ по следующему правилу: каждую точку отнесем к i-й группе ($i \leqslant l$), если ближайшим к ней цен-*

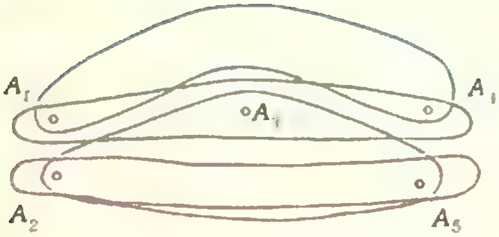


Рис. 4.

тром тяжести является точка O_i (если таких центров тяжести несколько, то выбирается тот из них, который имеет наименьший номер). Пусть после отбрасывания пустых групп (приведите пример, когда среди групп $G_1, \ldots, G_l$ появляются пустые!) осталось p групп ($p \leqslant l$). Перенумеровав их произвольным образом, получим новое разбиение $G_1^1, \ldots, G_p^1$.

Найдя центры тяжести $O_1^1, \ldots, O_p^1$ точек этих групп и повторив ту же процедуру, построим разбиение $G_1^2, \ldots, G_q^2$ ($q \leqslant p$) и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого шага, разбиения совпадают.

Для формулировки следующей задачи удобно ввести обозначение. Пусть на плоскости заданы точка A и произвольное подмножество G множества точек $A_1, \ldots, A_N$. Положим

$$I(A, G) = |AA_i|^2 + \ldots + |AA_j|^2$$

(сумма берется по точкам из G).

Задача 5. *Пусть, как и в задаче 4, задано начальное разбиение множества точек $A_1, \ldots, A_N$ на l непустых групп $G_1, \ldots, G_l$. Опишем правило построения нового разбиения $G_1^1, \ldots, G_p^1$ ($p \leqslant l$) точек $A_1, \ldots, A_N$ несколько отличающееся от правила задачи 4. При этом новое разбиение будет отличаться от начального только тем, что одна из точек попадает в новую группу. А именно, отнесем точку A_1 к той группе G_i, для которой величина $I(A_1, G_i)$ минимальна (если таких групп несколько, то отнесем точку A_1 к той из них, которая имеет наименьший номер). Если при этом точка A_1 была единственной в своей группе и в результате ее переноса группа стала пустой, то отбросим эту группу, а остальные группы перенумеруем произвольным образом. Полученное разбиение обозначим $G_1^1, \ldots, G_p^1$ ($p = l$ или $p = l - 1$). Повторим ту же процедуру для точек $A_2, \ldots, A_N$ и затем — снова для A_1, для A_2 и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого шага, все разбиения совпадают.*

Преимущество алгоритмов, описанных в задачах 4 и 5, по сравнению с алгоритмом «Форель» состоит в том, что эти алгоритмы быстро сходятся (то есть построение окончательного разбиения требует меньшего времени работы вычислительной машины). Однако при неудачном выборе начального разбиения эти алгоритмы могут привести к не очень естественному конечному разбиению на группы. Один из таких примеров приведен на рисунке 4.

Задачи наших читателей

1. Число a представили в виде $a = m_1 + n_1 = m_2 + n_2$. Докажите, что тогда

$$3m_1n_1 \leqslant m_2^2 + m_2n_2 + n_2^2.$$

В. Федюшкин
(г. Щекино)

2. Дан треугольник ABC, H — точка пересечения его высот, M — точка пересечения медиан. Докажите, что

а) $$\frac{|BM|}{\sin \widehat{AMC}} = \frac{|AM|}{\sin \widehat{BMC}} = \frac{|CM|}{\sin \widehat{AMB}};$$

б) $$\frac{|BH|}{\cos \widehat{AHC}} = \frac{|AH|}{\cos \widehat{BHC}} = \frac{|CH|}{\cos \widehat{AHB}}$$

(если все эти дроби определены).

А. Ягубьянц
(г. Ростов-на-Дону)

3. Докажите, что сумма $2k$ ($k > 1$)

а) нечетных последовательных степеней числа 7 делится на 350;

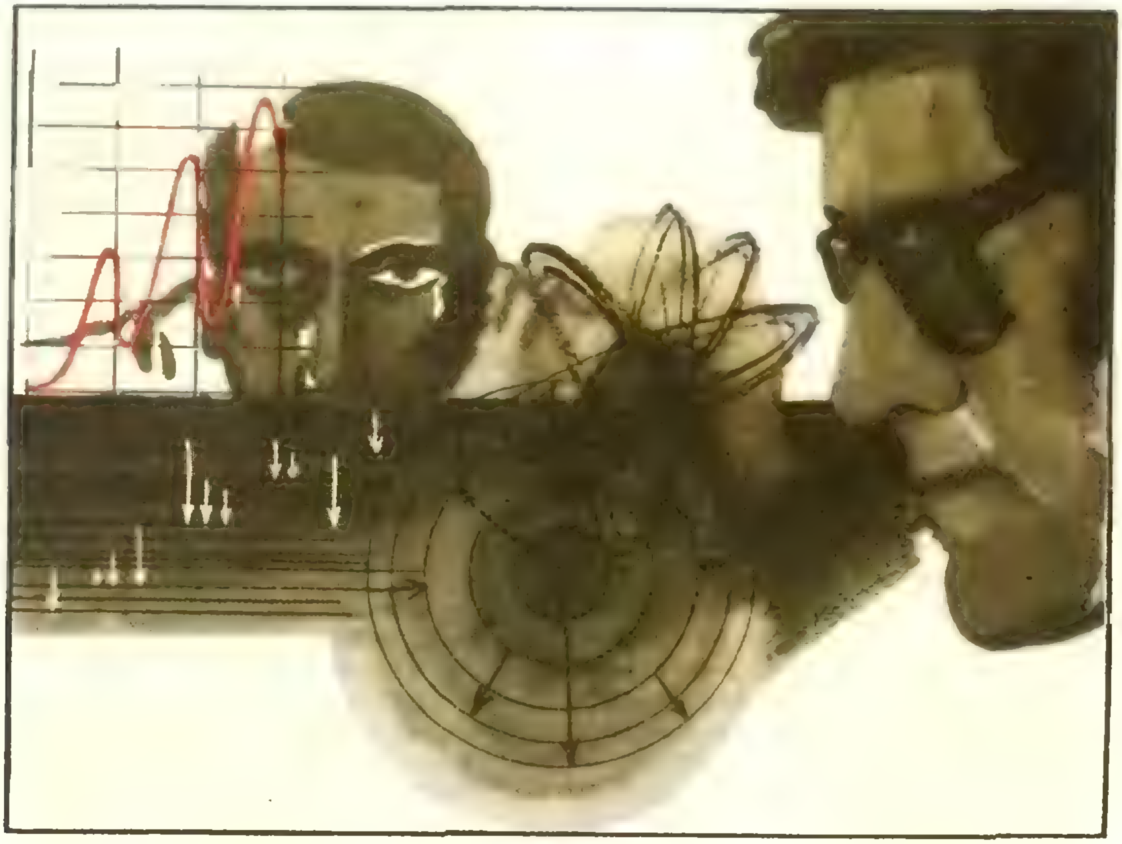
б) четных последовательных степеней числа 7 делится на 2450.

И. Михалкович
(Минская обл.)

4. Обозначим через $q(n)$ число нулей, которыми оканчивается число $n!$, а через $s(n)$ — сумму цифр числа n в пятеричной системе счисления. Докажите, что

$$n - s(n) = 4q(n).$$

В. Стовба
(г. Зеленоград)



А. Левашов

Опыты Франка и Герца

Начало XX века занимает в истории физики исключительное положение. Это был период пересмотра старых, устоявшихся представлений об устройстве материального мира. В ряде случаев этот пересмотр требовал отказа от законов классической механики и классической электродинамики.

В 1900 году Планк создает квантовую теорию излучения. В 1905 году Эйнштейн формулирует принципы специальной теории относительности. В этот же период наука вплотную подошла к вопросу о физической природе и внутреннем строении атома. В 1911 году публикуются результаты опытов Резерфорда, на основе которых создается ядерная модель атома, противоречащая классической физике. В 1913 году Бор формулирует квантовые постулаты, позволяющие объяснить резерфордовскую модель атома и характер атомных спектров, но противоречащие как классической механике, так и классической электродинамике.

Каждое из этих открытий указывало новые пути к познанию материального мира. Но развитие новых представлений всегда опирается на прочный экспериментальный фундамент. Именно поэтому экспериментальная проверка новых гипотез играет в науке исключительно важную роль.

Опыты немецких физиков Джеймса Франка и Густава Герца по существу явились первым экспериментальным подтверждением постулатов Бора.

Исторически эти опыты явились продолжением работ немецкого физика Ленарда, который пытался экспериментально определить энергию ионизации атомов задолго до возник-

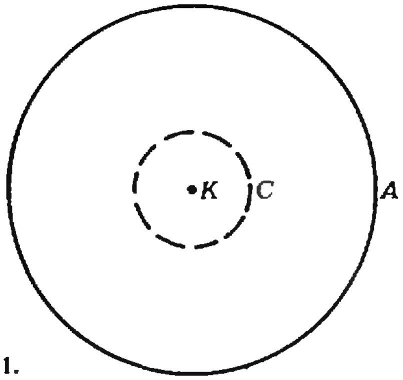


Рис. 1.

новения резерфордовской модели. В 1902 году Ленард поставил интересный опыт. Главной частью его установки была стеклянная трубка с тремя впаянными электродами — прообраз современного триода (рис. 1). Трубка наполнялась газом, энергию ионизации которого измеряли. Давление газа в трубке было около 0,01 мм рт. ст. Схема всей установки приведена на рисунке 2. Между катодом K и сеткой C от батареи $\mathscr{E}_1$ подается напряжение U_1, которое можно изменять с помощью потенциометра R_1. Между сеткой и анодом A подается напряжение U_2 от батареи $\mathscr{E}_2$. Это напряжение можно варьировать с помощью потенциометра R_2.

Идея опыта заключалась в следующем. Вылетающие из катода электроны попадают в электрическое поле в пространстве катод — сетка и, ускоряясь этим полем, движутся к сетке. (Напряжение U_1 называют ускоряющим.) Пройдя сетку, электроны попадают в пространство сетка — анод. Здесь электрическое поле имеет противоположное направление, и электроны тормозятся этим полем. (Напряжение U_2 называют тормозящим.) Ясно, что в зависимости от соотношения величин U_1 и U_2 электроны либо попадают на анод ($U_1 > U_2$), и тогда в анодной цепи появляется ток, регистрируемый гальванометром G, либо тормозятся полем сетка — анод ($U_2 > U_1$) и в конечном счете «улавливаются» сеткой и уходят в сеточную цепь. В опытах Ленарда тормозящее напряжение всегда было больше ускоряющего, так что вылетевшие из катода электроны не могли достичь анода.

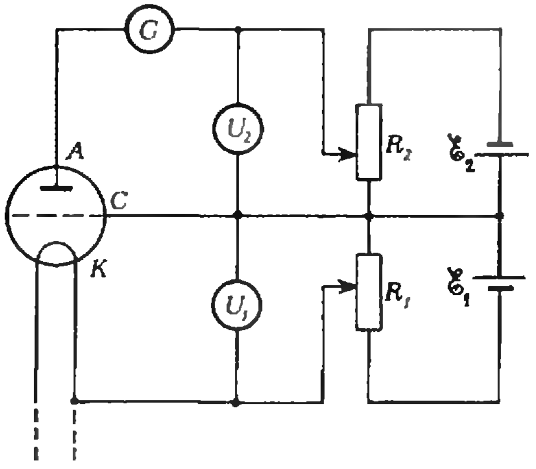


Рис. 2.

Приступая к определению энергии ионизации атомов, Ленард исходил из следующих представлений о взаимодействии электронов с атомами. В пространстве катод — сетка электроны испытывают столкновения с атомами газа. Эти столкновения могут быть двух типов — упругие и неупругие. При упругих столкновениях кинетическая энергия электронов практически не изменяется (изменяется только направление скорости электрона, а абсолютное значение скорости остается неизменным, так как масса атома в тысячи раз больше массы электрона). Так что электроны, ускоряясь электрическим полем, движутся зигзагообразно к сетке. Около сетки энергия электрона достигает максимального значения, определяемого из условия

$$K = \frac{mv^2}{2} = eU_1$$

(m — масса электрона, e — заряд электрона).

По мере увеличения ускоряющего напряжения U_1 энергия электрона растет. Ленард полагал, что, когда максимальная энергия электрона вблизи сетки равна или несколько превышает энергию ионизации атома газа, столкновение электрона с атомом становится неупругим. При этом электрон отдает практически всю свою энергию атому, и эта энергия идет на внутриатомные процессы — атом ионизуется. Возникают вторичные заряженные частицы — электроны и положительные ионы. Все электроны (и вторичные, и первичные — те, что вылетели из катода) в конце концов уходят в сеточную цепь. А положительные ионы, попав в пространство сетка — анод, под действием электрического поля движутся, ускоряясь к аноду. Поэтому в анодной цепи появляется ток, обусловленный вторичными заряженными частицами.

Итак, появление тока в анодной цепи, как считал Ленард, должно указывать на начало ионизации. Энергия ионизации численно равна $eU_и$, где $U_и$ — значение U_1, при котором возник анодный ток.

Хотя в эксперименте действительно наблюдалось возникновение анодного тока при определенных значениях ускоряющего потенциала, все же Ленарду не удалось получить надежных экспериментальных результатов из-за технического несовершенства его установки. Важно отметить, что Ленард исходил из неверных представлений о взаимодействии электронов с атомами, так как он не мог еще знать о существовании дискретных энергетических уровней у атома. По этой причине опыт Ленарда не оставил заметного следа в физике, хотя он несомненно интересен в историческом отношении. Усовершенствованная методика Ленарда была использована впоследствии при постановке классических опытов Франка и Герца.

Совместную работу Франк и Герц начали в 1911 году в Берлинском университете. В этот период они занимались изучением законов электрического тока в газах. Естественно, что для них представляла интерес величина энергии ионизации атомов. Для ее определения они сначала воспользовались методом Ленарда, а позднее внесли в него существенные изменения.

Прежде всего, была изменена конструкция лампы. Расстояние катод — сетка было сделано значительно бóльшим расстояния сетка — анод (рис. 3).

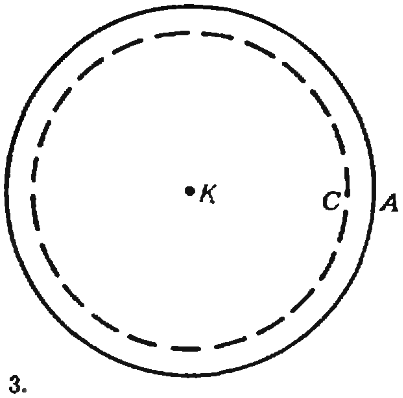


Рис. 3.

Давление газа (или пара), наполняющего трубку, было увеличено до 1 мм рт. ст. Поэтому электроны, вылетающие из катода, испытывали в пространстве катод — сетка многократные столкновения с атомами газа (или пара). Тормозящее напряжение Франк и Герц уменьшили и сделали постоянным (оно выбиралось в пределах 0,5—2 В). Поэтому ток в анодной цепи появлялся, как только ускоряющее напряжение U_1 становилось больше тормозящего U_2.

Приступая к опытам, Франк и Герц, как и Ленард, намеревались измерить энергию ионизации. Результаты одного из опытов с лампой, наполненной парами ртути, приведены на рисунке 4. Красная кривая на этом графике показывает характер изменения тока в анодной цепи при изменении ускоряющего напряжения (значения тока указаны в условных единицах). Прежде всего обращает на себя внимание тот факт, что через равные промежутки напряжения U_1 ток резко падает. Максимумы значения тока соответствуют напряжениям 4,9 В, 2·4,9 В и 3·4,9 В.

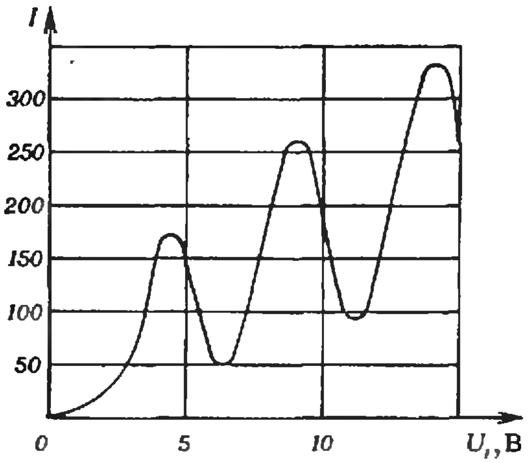


Рис. 4.

Полученные результаты Франк и Герц интерпретировали следующим образом. По мере увеличения ускоряющего напряжения ток в анодной цепи возрастает (с того момента, когда U_1 становится больше U_2). Когда U_1 становится равным (или немного бо́льшим) 4,9 В и электрон «набирает» на своем пути к сетке энергию 4,9 эВ, столкновение электрона с атомом у сетки становится неупругим — атом ионизуется, а электрон, потерявший энергию, улавливается сеткой. В результате ток в анодной цепи резко падает. При дальнейшем увеличении ускоряющего напряжения происходит следующее: электрон успевает набрать энергию 4,9 эВ, не доходя до сетки, так что область неупругого столкновения его с атомом «сдвигается» ближе к катоду. При этом электрон, потерявший при столкновении энергию, продолжает под действием электрического поля двигаться ускоренно к сетке. Если на этом пути электрон ускоряется электрическим полем до энергии, превышающей значение eU_2, то он преодолевает тормозящее действие напряжения U_2 и попадает на анод. На графике этому процессу соответствует область роста анодного тока после первого спада. Когда значение U_1 становится таким, что электрон, потерявший энергию (4,9 эВ) в первом неупругом столкновении, успевает на пути к сетке вновь набрать энергию 4,9 эВ, столкновение его с атомом вновь становится неупругим, и он уже не попадает на анод, а улавливается сеткой. Это — спад кривой на рисунке 4 после второго максимума. Третий максимум указывает на то, что на пути катод — сетка электроны трижды претерпевают неупругие столкновения с атомами.

Исходя из полученных данных, Франк и Герц заключили, что энергия ионизации ртути равна 4,9 эВ — той энергии, которую набирает электрон между двумя последовательными неупругими столкновениями с атомами. Аналогичную кривую они получили в опытах с лампой, наполненной гелием, и нашли, что энергия ионизации гелия равна 19,8 эВ.

Будучи уверенными в том, что они действительно измерили энергию ионизации, Франк и Герц решили, тем не менее, поставить еще один эксперимент. Натолкнуло их на это решение следующее обстоятельство. Было известно, что пары ртути сильно поглощают излучение с длиной волны $\lambda = 2536$ Å. Этому излучению согласно теории Планка соответствует энергия

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}\ (\text{Дж}) =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{19} \frac{hc}{\lambda}\ (\text{эВ}) \approx 4{,}84\ \text{эВ}.$$

Эта величина очень хорошо совпадает с полученным Франком и Герцем значением энергии ионизации ртути — 4,9 эВ. Случайно ли это совпадение? Именно это и решено было проверить: посмотреть, не появляется ли при напряжении $U_1 = 4{,}9$ В излучение с длиной волны 2536 Å.

Эта длина волны лежит в ультрафиолетовой области. Поэтому Франк и Герц сделали трубку из кварца, прозрачного для ультрафиолетового света (применявшаяся ими ранее трубка со стеклянным баллоном не годилась — стекло не пропускает ультрафиолетовый свет). Конструкция этой трубки была намного проще предыдущей. В ней была только нить накала (катод) и сетка. Трубку они наполнили парами ртути. Ультрафиолетовый спектрограф (спектральный аппарат, чувствительный в ультрафиолетовой области спектра), направленный на трубку, должен был регистрировать излучение паров ртути, если это излучение будет возникать.

Результаты, полученные Франком и Герцем, оказались следующими. Пока напряжение U между катодом и сеткой было меньше 4,9 В, ток в сеточной цепи нарастал с ростом U и никакого излучения не было. Когда же это напряжение стало равным приблизительно 4,9 В, ток в цепи резко упал и спектрограф обнаружил излучение с длиной волны ... 2536 Å!

На основании всех имеющихся результатов Франк и Герц пришли к такому выводу: в большинстве случаев энергия электронов при неупругих столкновениях с атомами расходуется на ионизацию атомов, а иногда — на излучение.

Правильное объяснение результаты Франка и Герца получили лишь спустя четыре года, когда теория Бора стала завоевывать признание. По существу опыты Франка и Герца явились первым прямым экспериментальным подтверждением этой теории, хотя сам Нильс Бор во время постановки опытов не сознавал этого.

Согласно первому постулату Бора атом может находиться только в стационарных состояниях и его энергия в этих состояниях принимает определенные дискретные значения. Именно это подтверждал в опытах Франка и Герца тот факт, что резкое падение анодного тока происходило при значениях U_1, кратных одной и той же величине 4,9 В: в неупругих столкновениях, возникающих при этих значениях U_1, атом ртути поглощает энергию сразу, единой порцией. Энергии, меньшей 4,9 эВ, он не поглощает. Иными словами, энергия атома меняется скачками: если в нормальном состоянии (то есть в состоянии с минимальной энергией) энергия атома ртути равна E_0, то в первом возбужденном состоянии она равна $E_1 = E_0 + 4{,}9$ эВ.

В опытах Франка и Герца получил экспериментальное подтверждение и второй постулат Бора, согласно которому при переходе атома из стационарного состояния с большей энергией E_{n+1} в стационарное состояние с меньшей энергией E_n происходит излучение фотона, энергия которого $E = h\nu$ (ν — частота излучения) определяется соотношением $E = h\nu = E_{n+1} - E_n$; отсюда $\nu = \frac{E_{n+1} - E_n}{h}$ (второй постулат Бора называют еще правилом частот). Опыты Франка и Герца с кварцевой лампой, наполненной ртутными парами, подтвердили справедливость этого постулата: при неупругом столкновении атома ртути с электроном атом, поглотив энергию 4,9 эВ, переходит из нормального состояния E_0 в первое возбужденное ($E_0 + 4{,}9$ эВ). Обратный переход в нормальное состояние происходит с излучением фотона с энергией 4,9 эВ — появляется излучение с длиной волны 2536 Å.

Итак, в опытах Франка и Герца наблюдалась не ионизация атомов, а их возбуждение. То, что Франк и Герц считали энергией ионизации, на самом деле является энергией возбуждения первого возбужденного состояния. Измерить энергию более высоких возбужденных состояний на той установке, на которой начинали свои эксперименты Франк и Герц, нельзя. Из-за частых столкновений с атомами электрон после очередного неупругого столкновения с атомом не успевал набрать энергию, большую 4,9 эВ,— он сталкивался неупруго с другим атомом и отдавал ему свою энергию. Чтобы измерить энергию более высоких состояний, надо устранить это препятствие.

В последствии Герц предложил несколько видоизмененный метод эксперимента. В его установке пространство, в котором электроны ускорялись полем, и пространство, в котором они испытывали соударения с атомами, были разделены. Поэтому электрон мог, не претерпевая соударений, набрать энергию, бо̀льшую 4,9 эВ. Оказалось, что при энергии электрона 9,8 эВ соударение его с атомом ртути становится неупругим. Получив энергию 9,8 эВ, атом ртути переходит во второе возбужденное состояние. Этот метод позволил определять более высокие энергетические состояния атома.

Опыты Франка и Герца явились экспериментальной основой для развития теории строения атома. С развитием электронной и вакуумной техники экспериментальная методика опытов постоянно совершенствовалась.

В 1925 году Джеймс Франк и Густав Герц были удостоены Нобелевской премии.

С. Поздняков

«Теория вероятностей» без теории

Хотелось бы написать, что на этом занятии математического кружка будут решаться задачи по теории вероятностей. Но дело в том, что здесь как раз никакой теории не будет, не будет ни аксиом, ни формул, ни теорем — того, к чему мы привыкли в математике. Вместо этого вам придется пользоваться здравым смыслом и интуицией, то есть тем, из чего в ходе развития математики и образовались точные математические понятия и аксиомы *).

Задачи о надежности

В технике у каждого устройства есть срок службы, после которого его заменяют или отправляют в капитальный ремонт. Однако устройство может выйти из строя и раньше.

Для измерения указанного свойства вводят понятие надежности. Например, если мы говорим, что надежность данной марки транзистора 99%, то это означает, что в среднем один транзистор из ста портится раньше времени или что у каждого транзистора есть один шанс из ста в течение этого срока вдруг взять и сломаться.

То же самое математики любят выражать по-другому. Например, в указанной ситуации они говорят, что вероятность выхода транзистора из строя равна 1/100.

Задание 1. *Какая из двух электросхем, изображенных на рисунке 1, надежнее, если надежность диода 0,7 (т. е. 70%), надежность конденсатора 0,8, надежность резистора 0,9?*

Вспомним теперь детскую игру «испорченный телефон», в которой по цепочке играющих на пределе слышимости передается слово или предложение и последний должен угадать, что сказал первый. Оказывается, и в этой ситуации можно говорить о надежности (игры или участников). Для этого полезно перейти с языка игр на язык схем.

Задание 2. *Нарисуйте электрическую схему, соответствующую игре «испорченный телефон» с пятью участниками. Объясните в терминах этой игры утверждения:*

«Чем больше в схеме элементов, тем меньше ее надежность»,

«Надежность схемы меньше надежности ее самого ненадежного элемента».

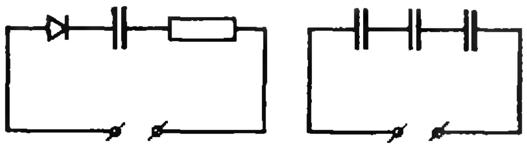


Рис. 1.

Чтобы увеличить надежность машины, состоящей из разных устройств, применяют параллельно включенные дублирующие устройства. Тогда машина выйдет из строя только в том случае, если сломаются оба дублирующих друг друга устройства. Дублируются и средства связи. Рассмотрим такой пример: многожильный провод скручен из пяти проводков, надежность которых на обрыв 90%. Какова надежность провода? Вероятность того, что проводок оборвется, равна 10%, т. е. 0,1. Провод же порвется только, если порвутся все пять проводков; если они рвутся, не влияя друг на друга, вероятность этого события равна

$$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}00001.$$

Значит, надежность провода 0,99999,

---

*) Желающим познакомиться с математическими основами теории вероятностей рекомендуем прочитать статью А. Колмогорова и статью Б. Гнеденко и И. Журбенко в журнале «Математика в школе», 1968, №№ 2—3.

или, в процентах, 99,999%. Здесь надежность «схемы» много больше, чем надежность ее элементов.

Задание 3. *Вычислить надежности самолетов с двумя и четырьмя моторами при условии, что самолет может лететь на одном моторе и надежность каждого мотора равна а) 0,5, б) 0,8, в) 0,98.*

Задачи о случайном блуждании в лабиринтах

Как известно, чтобы предотвратить расхищение сокровищ из пирамид, египтяне создавали в них лабиринты; двигаясь по ним случайно, похитители зачастую гибли в ямах-ловушках.

В последующих задачах речь пойдет о таких лабиринтах; мы будем считать, что путник идет по лабиринту случайно, то есть, встречая развилку, выбирает любой путь наугад с равной вероятностью (если два пути — то с вероятностью 1/2, три — 1/3).

Задание 4. *Чему равна вероятность того, что кладоискатель найдет клад (рис. 2), и вероятность того, что он погибнет?*

Задание 5. *Чему равны эти вероятности для лабиринта из рисунка 3 при условии, что кладоискатель может бродить случайно сколь угодно долго и делать петли?*

Для решения этих задач полезно нарисовать граф лабиринта. Каждый перекресток обозначим точкой, а коридор отрезком. Например, лабиринт, изображенный на рисунке 2, изобразится графом, показанным на рисунке 4.

Эти задания предлагались на занятиях математического кружка в ГТУ № 24 Ленинграда.

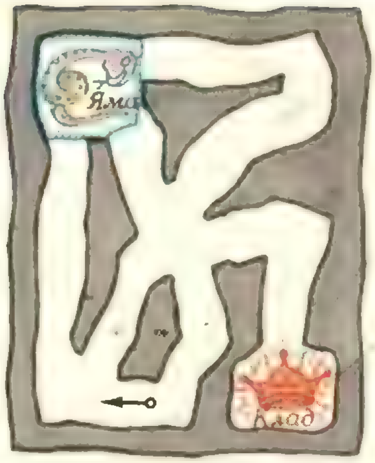


Рис. 2.

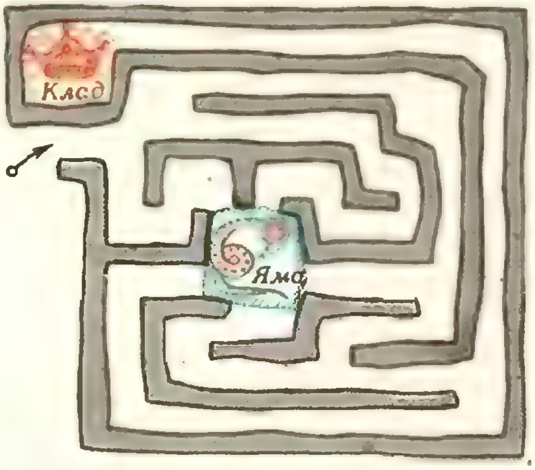


Рис. 3.

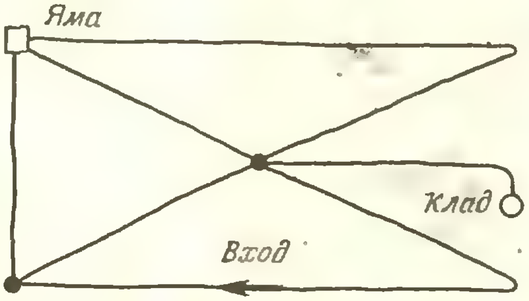


Рис. 4.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что если a и b — натуральные числа, то $ab(a^4-b^4)$ делится на 5.

О. Селевко
(г. Ярославль)

2. Докажите, что уравнение $7^x+10^y=13^z$ не имеет решений в натуральных числах.

С. Майзус
(г. Запорожье)

3. Решите уравнения

а) $\overline{abc}=abc(a+b+c)$;
б) $\overline{abc}=abc+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$;
в) $\overline{abc}=a!+b!+c!$.

Э. Туркевич
(г. Черновцы)

4. Докажите, что число

$$\sqrt[4]{1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}4\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}6\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}4\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}1}$$

— целое и найдите его.

Ю. Башлыков
(г. Белово Кемеровской обл.)

задачник кванта

Задачи

М566—М570; Ф578—Ф582

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М566, М567» или «Ф578». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В этом номере задачник по математике составлен из задач, предлагавшихся на XIII Всесоюзной олимпиаде школьников. Числа в скобках обозначают класс, в котором предлагалась задача.

М566. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат соответственно на трех сторонах другого? (8, 9)

В. Батырев

М567. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \ldots\ \frac{p-1}{p},\ \frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \ldots\ \frac{q-1}{q}. \qquad (9)$$

Н. Васильев

М568*. Диагонали выпуклого четырехугольника $АСВД$ пересекаются в точке $О$. Докажите, что

а) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники $АОВ$, $ВОС$, $СОД$ и $ДОА$, равны между собой, то $АВСД$ — ромб; (10)

б) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники $АВС$, $ВСД$, $СДА$ и $ДАВ$, равны между собой, то $АВСД$ — прямоугольник.

А. Егоров

М569. В тетради написано несколько чисел. К этим числам разрешается приписать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Докажите, что, начав с двух чисел 0 и 1, с помощью описанных операций можно получить:

а) число $^1/_5$;

б)* любое рациональное число между 0 и 1. (9, 10)

М. Серов

М570*. Задан набор квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что квадратами этого набора всегда можно покрыть квадрат площади 1. (8)

А. Вайнтроб, Г. Гальперин

Ф578. Концы A и B стержня AB скользят по сторонам прямого угла (рис. 1). Как зависит от угла α, образуемого стержнем с одной из сторон этого угла, ускорение середины стержня (точки C), если конец B стержня движется с постоянной скоростью $\vec{v}$?

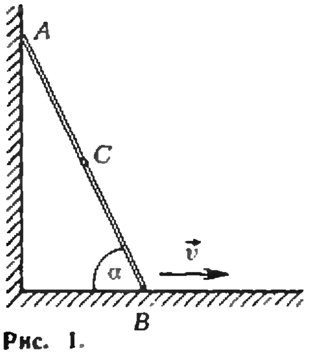


Рис. 1.

Ф579. В схеме, показанной на рисунке 2, $R_1=10$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=15$ Ом, напряжение в сети переменного тока $U=10$ В. Определить мощность, которая выделяется на резисторах с сопротивлениями R_2 и R_3.

Г. Коткин

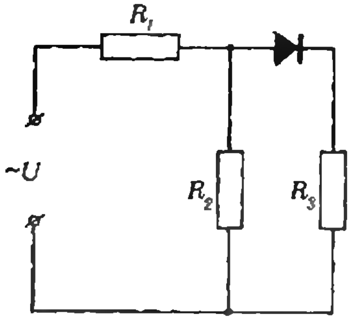


Рис. 2.

Ф580. В схеме, показанной на рисунке 3, ЭДС батареи $\mathscr{E}$, ее внутреннее сопротивление r, сопротивление резистора R. При замыкании ключа K_1 стрелка гальванометра G отклоняется на угол α. На какой угол отклонится стрелка гальванометра, если при замкнутом ключе K_1 замкнуть ключ K_2? Отклонение стрелки пропорционально заряду, прошедшему через гальванометр.

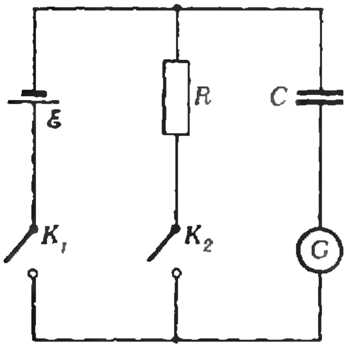


Рис. 3.

Ф581. Перед зеркалом стоит человек, закрыв один глаз. Изображение закрытого глаза в зеркале он закрывает, наклеивая на зеркало кусочек бумаги. Что увидит человек, если он откроет закрытый глаз и закроет открытый?

Ф582. Тело плавает в воде так, что $^2/_3$ его объема погружены в воду. Какая часть объема тела будет находиться под водой, если сосуд с водой перемещать с ускорением $\vec{a}$ в вертикальном направлении?

Решения задач

М515; Ф527—Ф529

М515. *Задано конечное множество K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается K_1. Аналогично из множества K_1 получается K_2, из K_2 — множество K_3 и т. д.*

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 10 000 от точки A?

В этой задаче мы изучаем такую операцию над произвольной фигурой (множеством точек) Φ:

$$W(\Phi)=\bigcup_{M\in\Phi} S_M(\Phi) \qquad (1)$$

— рассматриваются симметричные образы фигуры Φ относительно различных точек $M\in\Phi$ и берется их объединение (по всем точкам M). Очевидно, всегда $W(\Phi)\supset\Phi$ и

$$\text{если } \Phi\subset\Phi', \text{ то } W(\Phi)\subset W(\Phi'). \qquad (2)$$

Выяснение поставленных в условии конкретных вопросов для последовательностей вида

$$\Phi,\ W(\Phi),\ W^2(\Phi)=W(W(\Phi)),\ \ldots,\ W^n(\Phi)=W(W^{n-1}(\Phi)),$$

полученных многократным применением операции W к некоторым конечным множествам Φ, мы включим в небольшое исследование, в ходе которого мы, по существу, научимся отыскивать *выпуклую оболочку* фигуры $W^n(\Phi)$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее $W^n(\Phi)$, — для произвольной фигуры Φ, и отметим ряд любопытных свойств операции W.

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n ($n=1, 2, \ldots$).

В следующих трех пунктах K_0 — множество четырех вершин правильного тетраэдра объема 1.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

г) Чему равен объем этого многогранника?

д) Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n ($n=2, 3, \ldots$).

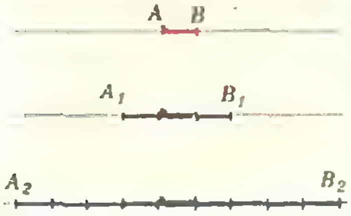


Рис. 1.

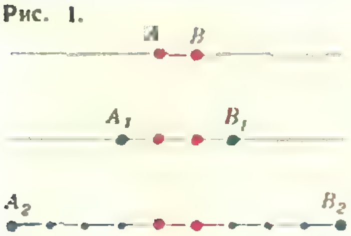


Рис. 2.

n	3^n
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2 187
8	6 561
9	19 683

Рис. 3.

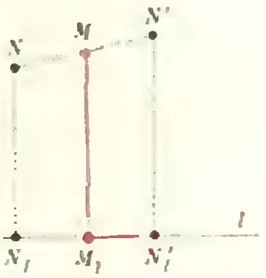


Рис. 4.

Прежде чем читать решение дальше, нарисуйте фигуры $W(\Phi)$ и $W^2(\Phi)$, если Φ — пара точек; отрезок; прямоугольник; четыре вершины прямоугольника; три вершины треугольника. А каково $W(\Phi)$, если Φ — куб? восемь вершин куба?

Начнем с «одномерного» случая, когда фигура Φ лежит на прямой. Этот случай нужен для решения задачи а), но, как мы увидим, он пригодится и в более трудных задачах.

Пусть сначала наша фигура — это отрезок $\Pi=[AB]$ длины d с серединой в точке O. Тогда $\Phi(\Pi)=[A_1B_1]$ — отрезок длины $3d$ с серединой в той же точке O. Отсюда сразу следует, что $\Phi^2(\Pi)=[A_2B_2]$, где $|A_2B_2|=9d$, и вообще $\Phi^n(\Pi)=[A_nB_n]$, где $|A_nB_n|=3^nd$, причем все отрезки $[A_nB_n]$ имеют середину в той же точке O (рис. 1).

Будем в дальнейшем образ фигуры Φ, имеющей центр симметрии O, при гомотетии с коэффициентом k и центром O обозначать через $k\Phi$. Мы выяснили, что если Π — отрезок, то $W(\Pi)=3\Pi$ и вообще

$$W^n(\Pi)=3^n\Pi. \tag{3}$$

Забегая вперед, заметим, что это верно для любой *центрально-симметричной выпуклой* фигуры Π. *Но прежде* закончим с одномерным случаем — ответим на вопрос а).

а) Пусть $K_0=\{A, B\}$, $|AB|=1$. Согласно (2), где $\Phi=\{A, B\}$, $\Pi=\Phi'=[AB]$,

$$K_n=\Phi^n(K_0)\subset\Phi^n(\Pi)=3^n\Pi. \tag{4}$$

При этом ясно, что K_n содержит все точки отрезка $[A_nB_n]=3^n\Pi$, находящиеся на целочисленном расстоянии от точки A, причем крайние точки $\{A_n, B_n\}=3^n\{A, B\}$ находятся от A на расстояниях $(3^n-1)/2$ и $(3^n+1)/2$ (рис. 2). Поскольку эти числа (рис. 3) больше 10 000 при $n\geqslant 10$, ответ на вопрос а): $n=10$.

В решении плоских и пространственных задач про операцию W очень полезно такое ее свойство: *если Φ_l — проекция фигуры Φ на прямую l, то*

$$W(\Phi_l)=(W(\Phi))_l \tag{5}$$

(проекция $W(\Phi)$ на прямую l совпадает с результатом применения W к проекции Φ_l) *). Это сразу следует из определения W и того факта, что при проекции точки, симметричные относительно точки M, попадают в точки, симметричные относительно ее проекции M_l (рис. 4).

Отсюда вытекает, что если Π — полоса, а $3^n\Pi$ — ее образ при гомотетии с коэффициентом 3^n относительно центра симметрии (какой-либо точки *на средней прямой*), то выполнено соотношение (3). Это верно и для «пространственной полосы» Π — множества точек, заключенных между двумя плоскостями.

Из (2), (3), (5) и решения *задачи а) следует также*, что если мы заключаем фигуру Φ в *опорную полосу* Π какого-либо направления — такую полосу $\Pi\supset\Phi$, края которой содержат все точки из Φ, — то *полоса* $3^n\Pi\supset W^n(\Phi)$ *будет опорной для* $W^n(\Phi)$ (рис. 5). *Это соображение*, обобщающее (4), позволяет найти выпуклую оболочку $W(\Phi)$ для любой фигуры Φ.

Разберем конкретные примеры.

б) *Пусть* $K_0=\{A, B, C\}$ — вершины правильного треугольника, $K_n=W^n(K_0)$, $n=1, 2, \ldots$ (рис. 6). Докажем, что для любого $n\geqslant 1$ выпуклая оболочка множества K_n получается так: нужно взять концы отрезков $3^n[AB]$, $3^n[BC]$ и $3^n[AC]$ и построить выпуклый шестиугольник $Ш_n$ с вершинами в этих точках.

---

*) Проекцией пространственной фигуры Φ на прямую l называется множество точек $M\in l$ таких, что плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к l, пересекается с Φ.

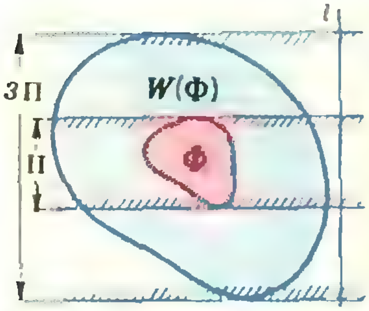


Рис. 5.

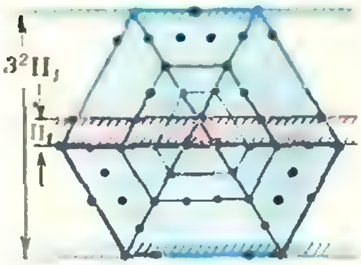


Рис. 6.

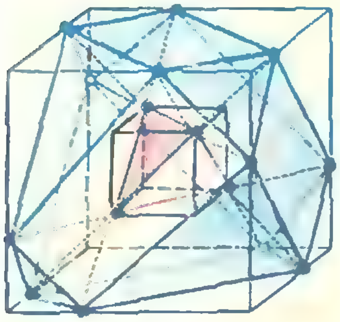


Рис. 7.

В самом деле, эти шесть точек — не что иное, как «крайние точки» множеств $W^n(\{A, B\})$, $W^n(\{B, C\})$ и $W^n(\{C, A\})$, о которых мы говорили в задаче а). Поскольку $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ и $\{C, A\}$ — подмножества множества $\{A, B, C\}$, согласно (2) вершины шестиугольника $Ш_n$ принадлежат K_n. Следовательно, весь шестиугольник $Ш_n$ содержится в выпуклой оболочке множества K_n.

С другой стороны, рассмотрев три опорные полосы $П_1$, $П_2$, $П_3$, дающие в пересечении ΔABC, получим

$$K_n \subset 3^n П_1 \cap 3^n П_2 \cap 3^n П_3 = Ш_n. \qquad (6)$$

Значит, выпуклая оболочка множества K_n совпадает с $Ш_n$.

Найдем площадь шестиугольника $Ш_n$, считая площадь ΔABC равной 1.

Шестиугольник $Ш_n$ — объединение шести треугольников, из которых три подобны треугольнику ABC с коэффициентом $(3^n-1)/2$, а другие три — с коэффициентом $(3^n+1)/2$, причем последние три треугольника пересекаются по треугольнику ABC (рис. 6). Поэтому площадь шестиугольника $Ш_n$ равна

$$3\left(\frac{3^n-1}{2}\right)^2+3\left(\frac{3^n+1}{2}\right)^2-2=\frac{3^{2n+1}-1}{2}.$$

в)—д). Пусть $K_0=\{A, B, C, D\}$, где $ABCD$ — правильный тетраэдр, $W^n(K_0)=K_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Докажем, что для любого $n \geqslant 1$ выпуклая оболочка множества K_n получается так: нужно взять концы всех шести отрезков 3^nP, где P — произвольное ребро тетраэдра $ABCD$, и построить выпуклый многогранник $Д_n$ с вершинами в этих 12 точках. Формальное доказательство этого факта в точности повторяет рассуждения пункта б). Чтобы разобраться, какую форму имеет многогранник $Д_n$, начнем со случая $n=1$.

Как это часто бывает в задачах про правильный тетраэдр, удобно построить куб L, у которого точки A, B, C и D — четыре несмежные вершины. Тогда 12 точек множества K_1 (кроме самих точек $K_0=\{A, B, C, D\}$) лежат на ребрах гомотетичного куба $3L$, причем каждая из 12 точек делит свое ребро в отношении $1:2$, считая от вершин A_1, B_1, C_1, D_1 куба $3L$, гомотетичных вершинам A, B, C, D куба L. Ясно, что многогранник $Д_1$ получается из куба $3L$ отрезанием от каждой вершины куба «уголка»-пирамиды плоскостью, проходящей через три точки, отмеченные на ребрах, выходящих из этой вершины (рис. 7). Пусть длина ребра тетраэдра $ABCD$ равна a (то есть длина ребра куба $L=a/\sqrt{2}$). Полученный многогранник $Д_1$ будет иметь такие 14 граней: 6 прямоугольников $a \times 2a$ (на гранях куба $3L$) и 8 правильных треугольников (оснований «пирамидок»): четыре — со стороной длины a и четыре — со стороной длины $2a$.

Найдем объем многогранника $Д_1$, считая объем тетраэдра $ABCD$ равным 1. Заметим, что плоскость, проходящая через три несмежные вершины куба, отрезает от него пирамиду, объем которой составляет $1/6$ объема куба. Таким образом, объем тетраэдра $ABCD$ составляет $1/3$ объема куба L, то есть объем куба L равен 3, объем куба $3L$ равен 81, объем отрезаемых пирамидок — $4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 = 18$; поэтому объем $Д_1$ равен 63.

Многогранник $Д_n$ для любого $n>1$ имеет точно такое же строение, как $Д_1$, но другие размеры граней *): его 12 вершин лежат на ребрах куба 3^nL и делят их (считая от вершин, гомотетичных A, B, C и D) в отношении $(3^n-1):(3^n+1)$. Эти вершины, очевидно, принадлежат K_n.

---

*) На 2-й странице обложки «Кванта» № 7 за 1978 г. были изображены многогранники $Д_1$ и $Д_2$.

Доказательство того, что $K_n \subset Д_n$, аналогично (6): существует семь пространственных полос $П_i$, края каждой из которых содержат четыре точки K_0 (три из этих полос дают в пересечении куб L, а остальные четыре дают в пересечении тетраэдр $ABCD$), и $\bigcap\limits_{i=1}^{7} 3^n П_i = Д_n$. Объем многогранника $Д_n$ находится так же, как объем многогранника $Д_1$ — он равен

$$3^{3n+1} - 4\cdot\left(\frac{3^n-1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\left(\frac{3^n+1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{5\cdot 3^{3n} - 3^{n+1}}{2}.$$

Таким образом, при большом n многогранник $\mathcal{W}^n(\Phi)$ по форме приближается к полуправильному многограннику *кубооктаэдру* — выпуклой оболочке двенадцати середин ребер куба (чтобы придать этим словам точный смысл, удобно ввести «нормирующий множитель» $\frac{1}{3^n}$ и говорить о *предельном поведении* многогранника, гомотетичного $\mathcal{W}^n(\Phi)$ с коэффициентом $\frac{1}{3^n}$; см. ниже пункт 4).

Заметим, что, как и в задаче б), в пространственной задаче не существенно, что тетраэдр $ABCD$ — правильный; это удобно лишь тем, что все фигуры получатся симметричными (в общем случае вместо куба мы имели бы параллелепипед и т. д.).

Перечислим в заключение еще несколько общих свойств «операции $\mathcal{W}$» (о некоторых из них нам сообщили в письмах по поводу решения задачи М515).

1. В задаче б) $Ш_n = \mathcal{W}^n(\triangle ABC)$, в следующих пунктах $Д_n = \mathcal{W}^n$ (*тетраэдр ABCD*). Вообще, если обозначить выпуклую оболочку фигуры Φ через $\mathcal{B}(\Phi)$, то $\mathcal{B}(\mathcal{W}(\Phi)) = \mathcal{W}(\mathcal{B}(\Phi))$. В частности, если фигура Φ — выпуклая, то $\mathcal{W}(\Phi)$ — тоже. Это можно доказать, используя такое определение операции Φ на языке векторов:

$$\mathcal{W}(\Phi) = \{M'' : \overrightarrow{OM''} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'};\ M,\ M' \in \Phi\}$$

(здесь O — любая фиксированная точка).

Будем далее считать Φ выпуклой фигурой.

2. Если Φ — центрально-симметричная фигура с центром O, то $\mathcal{W}(\Phi) = 3\Phi$ и вообще $\mathcal{W}^n(\Phi) = 3^n\Phi$.

3. Для любого Φ фигуру $\mathcal{W}^n(\Phi)$ можно получить как пересечение полос $3^n П$, где $П$ — всевозможные опорные полосы для Φ (различных направлений); при этом если Φ — многоугольник на плоскости, то можно ограничиться рассмотрением полос $П$, края которых содержат по крайней мере три (для многогранника Φ — четыре) его вершины.

4. При $n \to \infty$ существует предел $S^*(\Phi)$ фигуры, гомотетичной $\mathcal{W}^n(\Phi)$ с коэффициентом $1/3^n$ и некоторым центром O (надо еще определить, что значит расстояние между фигурами! См. по этому поводу книгу Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии» (М., «Наука», 1974), с. 14—17). Эту предельную фигуру можно получить как пересечение всех опорных полос фигуры Φ, сдвинутых параллельно так, чтобы точка O была их общим центром симметрии, или — как множество — $\{M^* : \overrightarrow{OM^*} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'})/2;\ M,\ M' \in \Phi\}$. Фигура $S^*(\Phi)$ центрально-симметрична и выпукла. Ее называют иногда *симметризацией Минковского* фигуры Φ. О ее свойствах см. задачу 57 в книге В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Выпуклые фигуры» (М., ГТТИ, 1951).

Н. Васильев

Ф527. *В схеме, показанной на рисунке 8, ЭДС батареи $\mathcal{E}=100$ В, ее внутреннее сопротивление $r=100$ Ом, емкость конденсатора $C=200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R=10$ Ом. Ключ K переключается между контактами a и б с частотой $f=10$ раз в секунду. При подключении его к клемме a конденсатор успевает полностью зарядиться, и при подключении к клемме б — полностью разрядиться. Чему равен коэффициент полезного действия схемы? Во сколько раз он выше, чем при непосредственном подключении нагревателя к батарее? Какая мощность выделяется на сопротивлении R?*

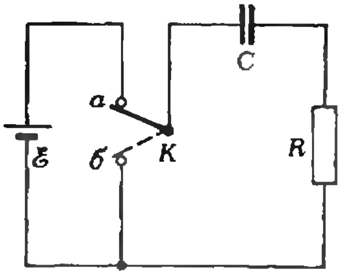


Рис. 8.

При подключении конденсатора к батарее он заряжается до напряжения $U=\mathcal{E}$, получая заряд $q=CU=C\mathcal{E}$. Энергия конденсатора становится равной при этом $W=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Батарея же совершает работу $A=\mathcal{E}q=C\mathcal{E}^2$. Следовательно, количество тепла Q, выделяющееся при этом в цепи, равно $A-W=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Батарея соединена с нагревателем последовательно, и в любой момент времени по ним течет один и тот же ток. Следовательно, тепло распределяется между ними пропорционально их сопротивлениям, то есть на нагревателе R выделяется тепло

$$Q_1=(A-W)\frac{R}{R+r}=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\frac{R}{R+r}.$$

При замыкании конденсатора на нагреватель (ключ K в положении *б*) конденсатор полностью разряжается и его энергия W переходит в тепло, выделяющееся на нагревателе:

$$Q_2=W=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Итак, за один полный цикл на нагревателе R выделяется тепло

$$Q=Q_1+Q_2=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\frac{R}{R+r}+\frac{C\mathcal{E}^2}{2}=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right).$$

КПД цепи равен

$$\eta_1=\frac{Q}{A}=\frac{\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\frac{2R+r}{R+r}}{C\mathcal{E}^2}=\frac{2R+r}{2(R+r)}=\frac{6}{11}.$$

При непосредственном подключении нагревателя к батарее КПД цепи равен

$$\eta_2=\frac{R}{R+r}=\frac{1}{11}.$$

Таким образом, $\eta_1/\eta_2=6$.

Найдем мощность P, выделяющуюся на нагревателе. За 1 секунду происходит $n=f/2$ полных циклов переключения ключа K. Следовательно,

$$P=nQ=\frac{f}{2}\,\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right)\approx 5{,}5\ \text{Вт}.$$

Примечание. В условии задачи предлагается считать, что конденсатор успевает полностью перезарядиться за время $t=1/f=0{,}1$ секунды. Проверим, насколько справедливо это предположение.

Когда конденсатор подключается к батарее, появляющийся ток равен $I=\mathcal{E}/(R+r)$. За время τ, за которое конденсатор заряжается до напряжения $U=\mathcal{E}$, через батарею проходит полный заряд $q=C\mathcal{E}$. Следовательно, при токе $I=\mathcal{E}/(R+r)$ конденсатор заряжается за время $\tau=q/I=C\mathcal{E}(R+r)/\mathcal{E}=C(R+r)=2{,}2\cdot 10^{-2}$ с. В действительности же по мере увеличения напряжения на конденсаторе ток будет уменьшаться, и конденсатор до напряжения $U=\mathcal{E}$ не зарядится никогда. Однако, поскольку $t\gg\tau$, приближенно можно считать, что конденсатор успевает полностью зарядиться.

А. Зильберман

◆

Ф528. *На рисунке 9 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источ-*

Мощность P, выделяющаяся на лампочке, равна $U_л I$, где $U_л$ — напряжение на лампочке, I — ток в цепи. Возможные соотношения между $U_л$ и I определяются вольтамперной характеристикой лампочки (рис. 9). С другой стороны, напряжение на лампочке определяется соотно-

нику постоянного напряжения $U=10$ В последовательно с резистором с сопротивлением $R=4$ Ом. Определить мощность лампочки.

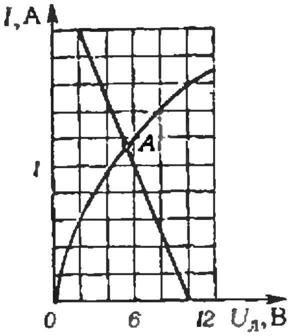


Рис. 9.

Ф529. *Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 10), определите: 1) фокусное расстояние объектива фотоаппарата; 2) на каком расстоянии от ладоней рук располагался объектив при фотографировании1; 0) размер рыбы, пойманной рыбаком; 4) диаметр объектива (предполагая, что размытие деталей изображения на фотографии не превосходит 0,2 мм). Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу.*

шением

$$U_л = U - U_R = U - IR,$$

где U_R — напряжение на резисторе. Следовательно, при данном значении сопротивления R $U_л$ и I определяются точкой пересечения прямой $U - IR = 10 - 4I$ (ее называют нагрузочной прямой) с вольтамперной характеристикой лампочки. Проведя на графике нагрузочную прямую, найдем значения $U_л$ и I, соответствующие точке A:

$$U_л \approx 5{,}5\ B,\quad I \approx 1{,}2\ A.$$

Следовательно, мощность, выделяющаяся на лампочке, равна

$$P = U_л I \approx 6{,}6\ \text{Вт}.$$

И. Слободецкий

◆

На фотографии сильно искажена перспектива. Различные детали объекта (лицо рыбака, ладони рук и т. д.) сфотографированы с различным увеличением.

Увеличением принято называть отношение размеров изображения и предмета, равное отношению расстояний от линзы до плоскости изображения (то есть до фотопленки) и от предмета до линзы. В нашем случае увеличение всех деталей меньше единицы. Заметная разница в увеличении лица и рук могла получиться лишь при фотографировании с близкого расстояния.

Примем для оценок, что размер лица рыбака $l_1 \approx 20$ см, ширина ладоней его рук $l_2 \approx 10$ см, а расстояние от лица до ладоней вытянутых вперед рук $a \approx 50$ см. Обозначим расстояние от ладоней рук до объектива через x, а расстояние от объектива до фотопленки через y. На фотографии размер лица $h_1 \approx 1{,}5$ см, ширина ладоней $h_2 \approx 1{,}5$ см. Увеличения Γ_1 и Γ_2 этих деталей выражаются отношениями

$$\Gamma_1 = \frac{h_1}{l_1} = \frac{y}{x+a},\quad \Gamma_2 = \frac{h_2}{l_2} = \frac{y}{x},$$

откуда

$$x = \frac{l_2}{h_2}\,y,\quad y = \frac{a h_1 h_2}{l_1 h_2 - l_2 h_1}.$$

Из этих выражений после подстановки числовых значений найдем

$$x \approx 50\ \text{см},\quad y \approx 7{,}5\ \text{см}.$$

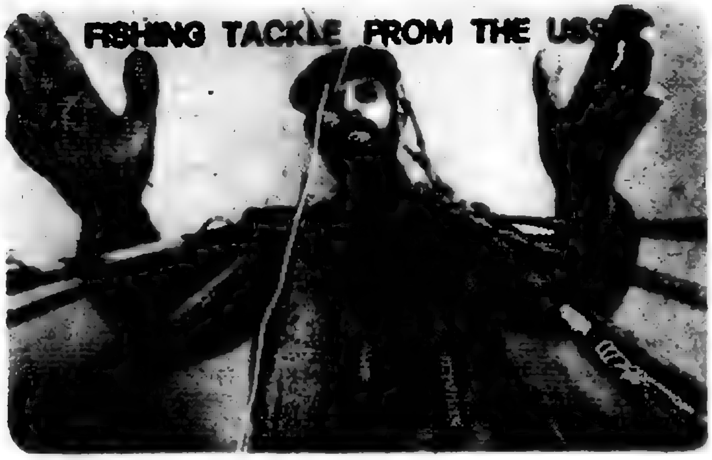

FISHING TACKLE FROM THE US

Рис. 10.

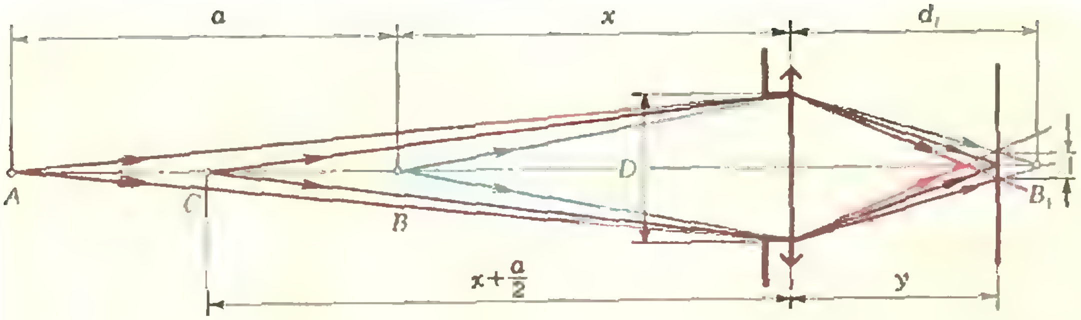


Рис. 11.

Поскольку на фотографии расстояние между ладонями $h \approx 8$ см, мы можем заключить, что размер пойманной рыбаком рыбы

$$l = \frac{h}{\Gamma_2} = \frac{hl_2}{h_2} \approx 53 \text{ см}.$$

Для определения фокусного расстояния F объектива и его диаметра D необходимо принять во внимание, что фотографируемый объект в нашем случае имеет значительный размер вдоль оптической оси (глубину). Ближняя точка (ладони) находится на расстоянии около 50 см от объектива, а дальняя точка (лицо)— на расстоянии около 100 см. Ясно, что объектив не может дать одновременно четкие изображения обеих этих точек (и всех промежуточных) на фотопленке, которая расположена на расстоянии $y \approx 7{,}5$ см за объективом. Ход лучей от дальней (A) и ближней (B) точек объекта поясняет рисунок 11. На фотопленке четко изображается лишь некоторая промежуточная точка C, лежащая где-то между ближней и дальней точками. Четкие изображения точек A и B лежат соответственно перед и за фотопленкой, а на пленке их изображения получаются в виде пятен размером Δ, не превышающим по условию задачи 0,2 мм. Приняв для оценок, что точка фокусировки C расположена на расстоянии $x+a/2 \approx 75$ см перед объективом, запишем, используя формулу линзы,

$$\frac{1}{x+a/2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда после подстановки числовых значений находим: $F \approx 6{,}8$ см. Как видно из рисунка 11, для того чтобы при значительной глубине объекта резкость изображения всех деталей была достаточно высокой, объектив фотоаппарата должен быть сильно задиафрагмирован, то есть диаметр D открытой части объектива должен быть достаточно мал. Определяя по формуле линзы положение изображения B_1 ближней точки B —

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F}$$

— и составляя очевидную пропорцию

$$\frac{D}{d_1} = \frac{\Delta}{d_1 - y},$$

найдем после подстановки числовых значений: $d_1 \approx 7{,}9$ см; $D \approx 4$ мм. (Разумеется, для оценки диаметра объектива можно было бы использовать положение изображения дальней точки A.)

Итак, проведенные нами оценки дают:
1) фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F \approx 6{,}8$ см; 2) при фотографировании объектив располагался на расстоянии $x \approx 50$ см от ладоней; 3) рыбаку удалось поймать рыбу размером около 53 см; 4) объектив фотоаппарата был задиафрагмирован до 4 мм.

С. Козел

В. Григоренко

Когда критических точек слишком много

В п. 55 пособия «Алгебра и начала анализа 9» указывается правило исследования критической точки на экстремум (теоремы 1, 2). Всегда ли это правило применимо?

О неожиданных ситуациях, в которых им нельзя пользоваться, рассказывается в этой статье.

Напомним, что внутренняя точка x_0 области определения функции f называется *критической* для этой функции, если $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Предположим (для простоты изложения), что функция f непрерывна в точке x_0. (Из этого предположения автоматически следует, что точка x_0 является внутренней точкой области определения функции f.)

Согласно достаточному условию максимума («Алгебра и начала анализа 9», п. 55, теорема 2), *если существует такая окрестность $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ точки x_0, в левой полуокрестности $]x_0-\delta;\ x_0[$ которой $f'(x)>0$ и в правой полуокрестности $]x_0;\ x_0+\delta[$ которой $f'(x)<0$, то точка x_0 является точкой максимума функции f.*

Естественно спросить: верно ли обратное? Уточним наш вопрос: пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и пусть эта точка является точкой максимума функции f; обязательно ли у точки x_0 существует такая окрестность, в которой производная «меняет знак с плюса на минус»? Грубо говоря, является ли достаточное условие максимума необходимым?

Оказывается, ответ на эти вопросы отрицательный.

Пример 1. *Функция*

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0\\ 2 & \text{, если } x=0\end{cases}$$

дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbf{R}$, *точка* 0 *является точкой максимума функции* f *и в каждой из полуокрестностей любой окрестности* $]-\delta;\ \delta[$ *точки* 0 *производная* f' *меняет знак* (рис. 1*)).

Действительно, функция f, очевидно, дифференцируема в любой точке $x_0\neq 0$; она дифференцируема также в точке 0, так как

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-h\left(2+\sin\frac{1}{h}\right)\right]=0.$$

(Последнее равенство вытекает из того, что $\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$, а функция $y=2+\sin\dfrac{1}{h}$ ограничена на $\mathbf{R}$, т. е. в силу аналога теоремы 2 из п. 28 пособия «Алгебра и начала анализа 9».) Точка 0 является точкой максимума функции f, так как при $x\neq 0$, очевидно, $f(x)<f(0)$. Наконец, в каждом из интервалов $]-\delta;\ 0[$ и $]0;\ \delta[$ производная

$$f'(x)=-4x-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$$

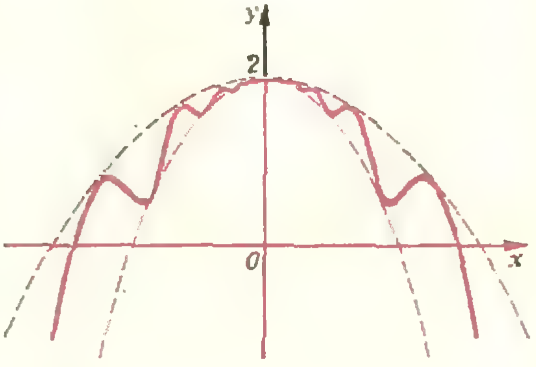


Рис. 1.

---

*) На всех рисунках масштабы по осям — разные. В окрестности нуля рисунки утрачивают необходимую степень подробности и становятся неверными.

меняет знак (объяснение «на пальцах»: при $x\to 0$ слагаемые $-4x$ и $-2x\sin\frac{1}{x}$ стремятся к 0 и, значит, делаются сколь угодно малыми, в то время как слагаемое $\cos\frac{1}{x}$ постоянно меняет знак, переходя от $+1$ к -1 и наоборот).

Причина такой непривычной ситуации в том, что *в любой окрестности точки 0 имеется бесконечно много критических точек функции f* (см. рис. 1); проходя через них, производная f' меняет знак.

Подобного «скопления» критических точек, конечно, не бывает, если у функции f конечное число критических точек или по крайней мере конечное число на любом отрезке $[a;\ b]$ (как, например, у функции $y=\sin x$). В этом случае на каждом интервале между соседними критическими точками производная f' сохраняет знак (это утверждение, вероятно, геометрически очевидно, но доказать его не очень просто).

В случае «скопления» критических точек вокруг некоторой точки x_0 исследовать функцию на экстремум в этой точке по знаку производной нельзя.

Пример 2. *Существуют такие функции f и g, дифференцируемые на* **R**, *что точка 0 является точкой максимума для одной из них и точкой минимума — для другой, но во всех точках некоторой окрестности точки 0 производные $f'(x)$ и $g'(x)$ имеют одинаковый знак.*

Мы не будем приводить для нужных функций явных формул, а ограничимся изображением их графиков (рис. 2; заметьте, что примеры функций не обязательно строить «на языке формул», их можно просто рисовать).

А как же поступить в таком случае? Никакого общего совета мы дать не можем. Если у вас из тех или иных соображений возникло предположение, что подобная точка x_0 является, скажем, точкой минимума функции f, можно попытаться «в лоб» доказать неравенство $f(x)>f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0.

В примере 1 точка 0, вокруг которой «скопились» критические точки, тоже была критической. Однако это не обязательно.

Пример 3. *В любой окрестности точки 0 имеется бесконечно много критических точек функции*

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0 & \text{, если } x=0,\end{cases}$$

но точка 0 не является критической.

Проверьте, что

$$f'(x)=\begin{cases} 1+\frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}+\\ +2x\cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 1 & \text{, если } x=0.\end{cases}$$

Так как в любой окрестности точки 0 производная f' меняет знак (почему?), она в любой окрестности обращается в 0 *); это — то же самое

---

*) Это в данном случае несложно доказать, воспользовавшись теоремой из п. 84 пособия «Алгебра и начала анализа 10».

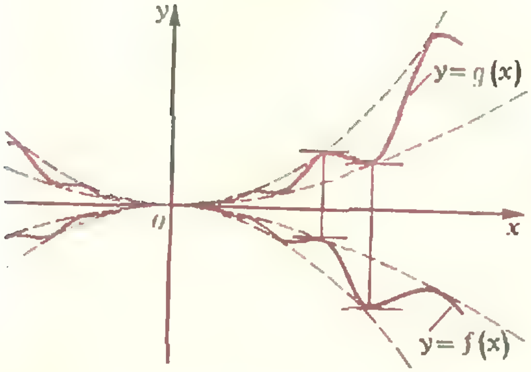


Рис. 2

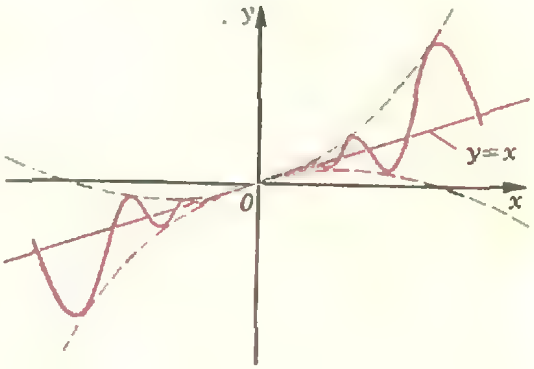


Рис. 3.

утверждение, о котором говорилось перед примером 2. Поскольку $f'(0)=1$, точка 0 не является критической (рис. 3).

Производная f' из примера 3 разрывна в точке 0 (проверьте).

Задачи

1. Докажите, что если производная f' функции f непрерывна в точке x_0 и в любой окрестности этой точки имеется бесконечно много критических точек функции f, то сама точка x_0 также является критической для f.

2. Докажите, что функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

и

$$g(x)=\begin{cases} x^2\left(-2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

удовлетворяют условию примера 2. Сделайте эскиз их графиков.

3. Исследуйте на экстремум точку 0 для функций:

а)
$$f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0 & \text{если } x=0;\end{cases}$$

б)
$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$$

в)
$$f(x)=\begin{cases} |x|\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$$

г)
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x=0,\\ \sqrt{-x}, & \text{если } x<0\end{cases}$$

Про светопровод

В 1841 году швейцарский профессор физики Колладон продемонстрировал замечательное сооружение — светящийся фонтан. Это красивое зрелище было основано на явлении полного внутреннего отражения.

Полное внутреннее отражение возможно при переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду (показатель преломления первой среды больше показателя преломления второй среды). Когда угол падения луча света на границу раздела двух сред становится больше некоторого предельного, луч не проходит через границу раздела — он отражается от нее и «возвращается» в оптически более плотную среду. Если после первого отражения луч попадает на границу раздела «более плотная оптическая среда — менее плотная» вновь под углом, больше предельного, то ситуация повторяется. Свет, претерпевая многократно полное внутреннее отражение, не будет выходить за пределы оптически более плотной среды — световой поток будет распространяться внутри среды с относительно малыми потерями на поглощение и рассеяние. Предельный угол зависит только от отношения показателей преломления сред. Для границы раздела вода — воздух, например, этот угол равен 49°.

Теперь можно понять, как «работает» светящийся фонтан. Невидимый для наблюдателя источник «посылает» лучи света внутрь струи. Изогнута струя фонтана так, что эти лучи не выходят за ее пределы — каждый раз на границу вода — воздух лучи попадают под углом 49°. Там, где струя распадается на отдельные брызги, это условие нарушается, и наблюдатель видит сноп светящихся брызг.

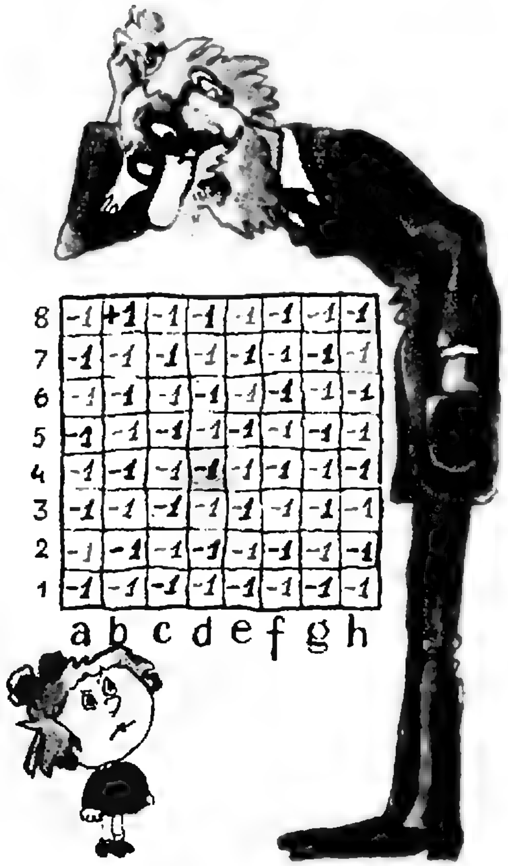
На свойстве полного внутреннего отражения построены так называемые светопроводы — изогнутые сплошные стержни, внутри которых свет проходит практически без потерь на поглощение и рассеяние. Они делаются из стекла, плексигласа, различных прозрачных пластмасс. Светопроводы делают и из собранных в пучок тонких светопроводящих нитей. Радиусы изгибов должны быть такими, чтобы выполнялось «условие предельного угла».

Светопроводы находят сейчас широкое применение. Они используются в медицине в качестве зондов; в технике при контроле работы труднодоступных для наблюдения устройств и деталей.

Очень красивы декоративные светильники из светопроводов. Один из таких светильников — на первой странице нашей обложки.

Т. П.

Квант для младших школьников



	a	b	c	d	e	f	g	h
8	-1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

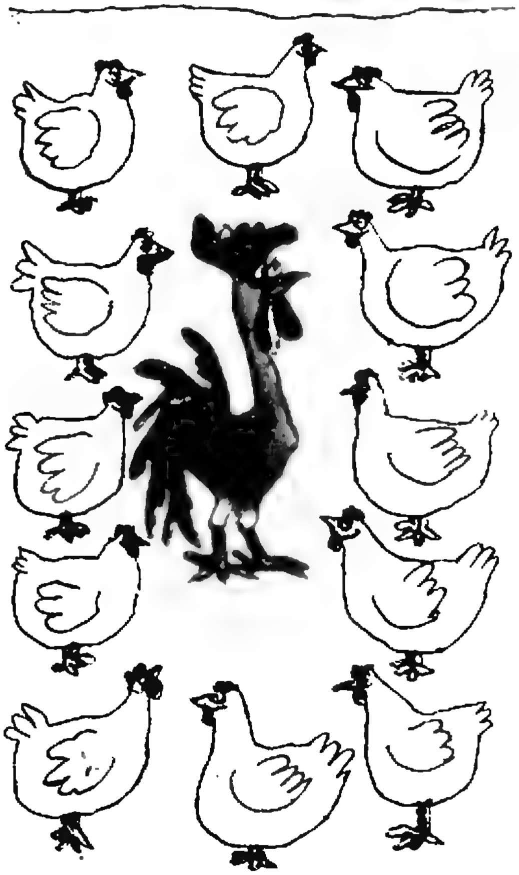
Задачи

1. В треугольнике длина одной стороны равна 6,31 м, длина другой стороны — 0,82 м. Чему равна длина третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом метров?

2. На окружности расположены точки: 1977 белых и одна красная. Рассматриваются всевозможные многоугольники с вершинами в этих точках. Каких среди них будет больше: с красной вершиной или без нее?

3. Пусть a — произвольное 1979-значное число, делящееся на 9. Сумму цифр этого числа обозначим буквой A. Сумму цифр числа A обозначим буквой B. Сумму цифр числа B — буквой C. Найдите число C.

4. На клетке b8 шахматной доски мелом написано +1, а во всех остальных клетках —1. За одну операцию разрешается сменить все знаки на противоположные либо на одной (любой) вертикали, либо на одной (любой) горизонтали. Докажите, что, сколько бы операций мы ни выполнили, мы никогда не получим +1 во всех клетках доски одновременно.



5. Задача-шутка. Три курицы за три дня снесли три яйца. Сколько яиц снесут двенадцать кур за двенадцать дней?

Животные на ... плоскости

В пятом классе на уроках математики вы начинаете изучать координатную плоскость. Учительница предлагает вам по координатам точки найти ее на плоскости, определить координаты той или иной заданной на плоскости точки, построить график какой-нибудь функции... Чтобы эти задания сделать более веселыми, «Квант» три года назад объявил «соревнование художников». На координатной плоскости задаются координаты нескольких точек. Соседние точки соединяются отрезками. Если точки найдены правильно, то в результате получится какой-нибудь рисунок: например, слон, собака, кошка, мышка, белка, песец, пингвин, утенок, лось, бегущая лошадь, лисенок, тюлень (эти рисунки прислали в редакцию ученики средней школы № 5 г. Среднеуральска Свердловской области, учитель математики — Т. Н. Сергеева). Сегодня мы предлагаем «записать» этих животных «в координатах» и, кроме того, нарисовать такие картинки:

1. (3; 3), (0; 3), (—3; 2), (—5; 2), (—7; 4), (—8; 3), (—7; 1), (—8; —1), (—7; —2), (—5; 0), (—1; —2), (0; —4), (2; —4), (3; —2), (5; —2), (7; 0), (5; 2), (3; 3), (2; 4), (—3; 4), (—4; 2); глаз (5; 0).

2. (—9; 7), (—7; 8), (—6; 10), (—3; 10), (—1; 7), (8; 1), (15; —2), (13; —4), (6; 0), (4; —1), (3; —1), (1; —7), (—1; —7), (1; —6), (2; —1), (0; —1), (—2; —7), (—4; —7), (—2; —6), (—1; —1), (—5; 2), (—6; 5), (—7; 6), (—9; 7); глаз (—5; 8).

3. (1; 7), (0; 10), (—1; 11), (—2; 10), (0; 7), (—2; 5), (—7; 3), (—8; 0), (—9; 1), (—9; 0), (—7; —2), (—2; —2), (—3; —1), (—4; —1), (—1; 3), (0; —2), (1; —2), (0; 0), (0; 3), (1; 4), (2; 4), (3; 5), (2; 6), (1; 9), (0; 10); глаз (1; 6).

4. (—5; 1), (—6; 3), (—6; 6), (—3; 8), (—1; 10), (2; 11), (3; 10), (3; 9), (6; 10), (7; 9), (7; 7), (4; 4), (4; 1), (2; —1), (2; —4), (5; —4), (6; —7), (5; —8), (1; —10), (1; —12), (—4; —12), (—7; —9), (—7; —7), (—6; —6), (—4; —7), (—4; —5), (—6; —4), (—6; —2), (—4; —2), (—3; —1), (—5; 0), (—5; 1); глаз (—3; 4), (—2; 4), (—2,5; 3), (—3; 4).

5. (—9; 4), (—5; 4), (—3; 5), (—7; 7), (—8; 7), (—10; 8), (—9; 8), (—10; 10), (—8; 9), (—10; 11), (—8; 10), (—9; 12), (—7; 10), (—5; 9), (—2; 8), (—1; 5), (0; 5), (—1; 7), (—1; 8), (1; 10), (2; 10), (2; 9,5), (3; 9), (1; 9), (0; 8), (0; 7), (1; 4), (—1; 3), (—3; 2), (—6; 2), (—6; 3), (—9; 4); глаз (1,5;9,5).

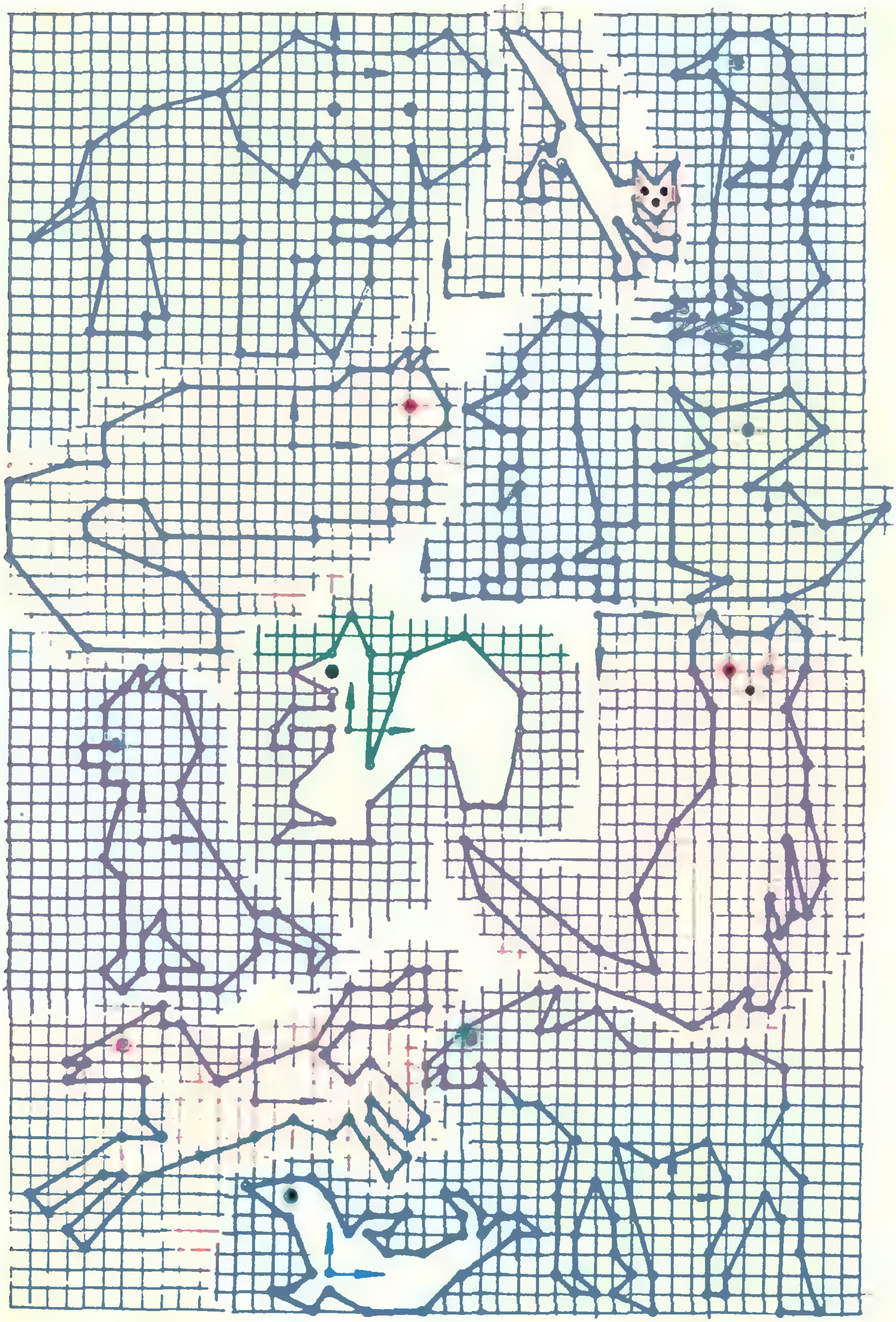
(Задачи 1—5 составлены ребятами из Среднеуральска.)

6. (7; 0), (7; —1), (6,5; —2,5), (7; —5,5), (6; —6,5), (5; —6,5), (6; —5,5), (5; —2), (3,5; —0,5), (1; —1), (—2; —1), (—2; —2), (—3; —3), (—3; —5,5), (—4; 6,5), (—5; —6,5), (—4; —5,5), (—4; —2), (—5; 0); (—5; 2), (—7; 4), (—9,5; 4,5), (—10; 5,5), (—7,5; 5,5), (—7; 6), (—6; 6), (—5; 7), (—5; 6), (—3; 4), (—1; 3), (2; —2), (5; 3), (7; 2), (8; —2), (7; —3) и (5,5; —4,5), (5,5; —5,5), (4,5; —6,5), (4,5; —5,5), (5; —2) и (—2; —2), (—1,5; —5,5), (—2,5; —6,5), (—3,5; —6,5), (—2,5; —5,5), (—3; —3); глаз (—7; 5,5).

7. (2; 12), (2; 13), (3; 13,5), (4; 13,5), (5; 13), (3; 4), (8; 4), (6; 1), (3; 1), (2; 2), (2; 4), (4; 11), (4; 12,5), (3,5; 12,5), (2; 11), (2; 12), (3; 12) и (3; 3), (4; 2), (6; 2); глаз (2,5; 12,5).

(В задачах 6 и 7, составленных нашим читателем А. Наимовым из Таджикистана, точки, разделенные союзом «и», соединять не нужно.)

Кто у вас получился?



Будьте внимательны! У каждой фигурки — своя система координат. Оси координат помечены стрелочками.

Е. Кузнецов

Глаз на вступительных экзаменах

Во многих оптических задачах, предлагаемых на приемных экзаменах, человеческий глаз выступает не только как неявно предполагаемый инструмент для рассматривания изображений, создаваемых той или иной оптической системой, но и как непосредственный элемент задачи. Например, глаз может служить ограничителем световых пучков или предметом, который рассматривают через оптическую систему.

Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. *На дне водоема глубиной h лежит камушек (рис. 1). Где находится изображение этого камушка?*

Казалось бы, это простая задача. Действительно, идущие от камушка A лучи преломляются на границе раздела вода — воздух, и в точке пересечения продолжений преломленных лучей должно находиться изображение. Однако посмотрите на рисунок 1. Луч AB, перпендикулярный границе раздела, выйдет в воздух, не преломившись. Лучи AC и AD испытают преломления в точках C и D и пойдут по путям CF и DG соответственно. Оказывается, продолжения трех выбранных преломленных лучей (BE, CF и DG) не пересекаются в одной точке! Другими словами, не получается точечного изображения точки A!

Может быть, все дело в неаккуратном построении? Проверим расчетами. Запишем уравнения преломленных лучей BE, CF и DG соответственно (см. рис. 1):

$$x = 0, \qquad (1)$$

$$y = x \operatorname{ctg} \beta_2 - h \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \beta_2, \qquad (2)$$

$$y = x \operatorname{ctg} \beta_3 - h \operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{ctg} \beta_3. \qquad (3)$$

Добавим еще равенства, связывающие углы:

$$\begin{aligned} \sin \beta_2 &= n \sin \alpha_2, \\ \sin \beta_3 &= n \sin \alpha_3. \end{aligned} \qquad (4)$$

Нетрудно убедиться в том, что система уравнений (1) — (3) не имеет решения. В самом деле, продолжения лучей BE и CF пересекаются в точке I с координатами

$$x = 0, \quad y = -h \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \beta_2,$$

лучей BE и DG — в точке H с координатами

$$x = 0, \qquad y = -h \operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{ctg} \beta_3 \neq \neq h \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \beta_2,$$

а лучей CF и DG — в точке K с координатами

$$x = h \frac{\operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{ctg} \beta_3 - \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{ctg} \beta_3 - \operatorname{ctg} \beta_2} \neq 0,$$

$$y = h \operatorname{ctg} \beta_2 \operatorname{ctg} \beta_3 \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_3}{\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \beta_3}.$$

Тогда непонятно, почему же мы можем видеть отчетливо предметы, находящиеся под поверхностью воды? Все дело в том, что зрачок нашего глаза имеет небольшие размеры (его диаметр порядка 5 мм), а смотрим

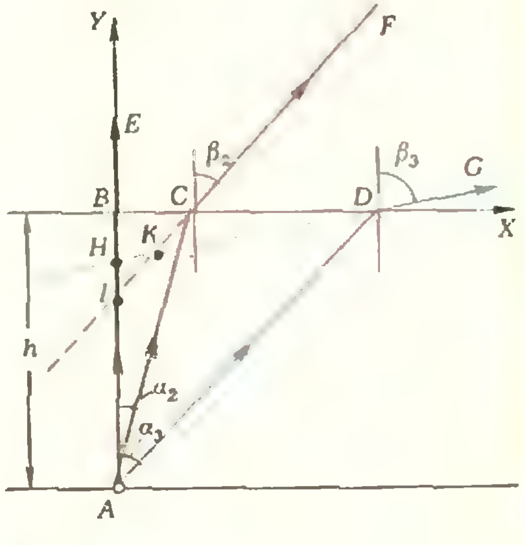


Рис. 1.

мы, как правило, с существенно бóльших расстояний (обычно с расстояния наилучшего видения, равного 25 см), поэтому в зрачок попадает очень узкий пучок лучей, имеющих примерно одинаковые углы наклона. (Проверьте самостоятельно, что для лучей, попадающих в центр зрачка и на его края, система уравнений, аналогичных уравнениям (1) — (3), будет совместной, то есть продолжения преломленных лучей пересекутся в одной точке.)

Таким образом, мы можем видеть предметы, находящиеся под водой, благодаря тому, что зрачок нашего глаза является естественным ограничителем ширины световых пучков, создающих изображения.

Задача 2. *На дне сосуда, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек, наклонившись над сосудом, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии $d = 25$ см (рис. 2). Расстояние от глаза до поверхности воды $h = 5$ см. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Определить глубину H сосуда.*

Самое главное при решении задач такого рода — аккуратно построить ход лучей. Пусть точка A — какая-то точка глаза человека. Для построения изображения точки нужно использовать, как минимум, два луча.

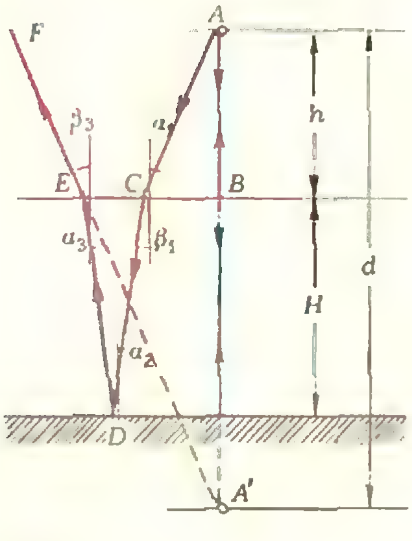


Рис. 2.

В качестве одного луча обычно берется луч, перпендикулярный границе раздела различных сред,— на рисунке 2 это луч AB. Он проходит границу раздела, не преломляясь, и отражается от зеркала без изменения угла наклона.

Вторым лучом пусть будет произвольный луч AC. На границе раздела воздух — вода (в точке C) он испытает преломление, дойдет до зеркала, в точке D отразится от него, еще раз преломится на границе раздела (в точке E) и выйдет в воздух по направлению EF.

На пересечении продолжений лучей BA и EF и будет находиться изображение A' выбранной точки A.

Теперь займемся расчетами. Поскольку размеры зрачка глаза малы (они существенно меньше расстояний d, h и H), все интересующие нас углы малы, и их тангенсы можно заменять синусами или самими углами. (Заметим, что на рисунке 2 для наглядности масштаб по горизонтали сильно растянут.) Как следует из рисунка 2,

$$|BC| = h\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = h\sin\alpha_1,$$

$$|CE| = 2H\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 = 2H\,\mathrm{tg}\,\beta_1 = 2H\sin\beta_1 = 2H\sin\alpha_1/n,$$

$$d = h + |BA'| = h + |BE|/\mathrm{tg}\,\beta_3 = h + |BE|/\mathrm{tg}\,\alpha_1 = h + |BE|/\sin\alpha_1 = h + (|BC| + |CE|)/\sin\alpha_1 = 2h + 2H/n.$$

Отсюда

$$H = n\,(d/2 - h) = 10 \text{ см}.$$

Вы видели, что в этой задаче глаз является как источником светового излучения, так и его приемником. Подобные ситуации встречаются довольно часто при рассмотрении оптических систем, содержащих плоские или сферические зеркала.

* * *

Особый и весьма обширный класс составляют задачи, связанные с коррекцией недостатков глаза с помощью очков. Как известно, глаз человека способен *аккомодировать*, то есть «приспосабливаться» к резкому видению предметов, находящихся от него на различных расстояниях. В силу тех или иных причин пределы аккомодации не для всякого глаза одни и те же.

Если человек резко видит предметы, находящиеся не дальше некоторого расстояния, такой дефект зрения называют *близорукостью*. Если же человек хорошо видит предметы, расположенные не ближе какого-то расстояния, это — *дальнозоркость*. Такие дефекты, как близорукость и дальнозоркость, можно более или менее успешно компенсировать с помощью очков (именно компенсировать, а не излечить).

К чему же сводится роль очков? Очевидно, что *их линзы должны создавать изображения рассматриваемых предметов на удобных для данного глаза расстояниях*. Это значит, что одним из требований, предъявляемых к очковым линзам, является требование того, чтобы изображения предметов находились в пределах четкого видения глаза. Второе требование — полученные изображения должны быть, конечно же, прямыми. А прямые изображения, создаваемые тонкими линзами, всегда мнимые. Таким образом, линзы очков должны создавать прямые мнимые изображения на расстояниях, находящихся в пределах аккомодации глаза.

Разберем две конкретные задачи.

Задача 3. *Близорукий человек четко видит предметы, находящиеся не дальше 0,5 м от него. Какие очки следует прописать этому человеку, чтобы он мог любоваться звездами?*

Как мы уже говорили, очковая линза должна создавать мнимое изображение, расположенное на таком расстоянии, с которого глаз это изображение видит резко, в нашем случае — на расстоянии 0,5 м от глаза.

Поскольку изображение удаленного предмета (а звезды действительно удалены от наблюдателя) находится в фокальной плоскости линзы, данному человеку следует прописать очки с линзами, имеющими фокусное расстояние 0,5 м. При этом линзы должны быть рассеивающими, чтобы изображения были мнимыми.

Итак, близорукому человеку надо прописать очки с рассеивающими линзами оптической силы $D = -2$ диоптрии.

Задача 4. *Дальнозоркий человек резко видит предметы, расположенные не ближе $d = 1$ м от него. В каких очках он нуждается, чтобы читать газету, держа ее на расстоянии $d_0 = 25$ см от глаза?*

Сформулируем четко, что требуется от очковой линзы в данном случае. Эта линза должна создать мнимое изображение предмета, находящегося от нее на расстоянии $d_0 = 25$ см (небольшим зазором между глазом и линзой можно пренебречь), на расстоянии $f = d = 1$ м. Данных вполне хватает, чтобы воспользоваться формулой линзы:

$$D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f} = 3 \text{ дптр}$$

(знак «минус» стоит в формуле потому, что изображение должно быть мнимым).

Таким образом, дальнозоркому человеку нужны очки с собирающими линзами оптической силы $D = +3$ диоптрии.

Упражнения

1 Близорукий человек четко видит предметы, удаленные от него на расстояния от $d_1 = 10$ до $d_2 = 50$ см. При выписке рецепта на очки врач, правильно указав абсолютную величину оптической силы линз, забыл указать, что линзы отрицательные. В каких пределах этот человек будет резко видеть в выписанных очках?

2. Человек рассматривает отражения предметов в посеребренном стеклянном шаре диаметром $2R = 32$ см С какого максимального расстояния он будет без очков резко видеть в шаре далекие предметы, если обычно он пользуется очками с оптической силой $D = -5$ дптр?

3. Человек рассматривает изображение своего глаза в плоском зеркале, расположенном на расстоянии $a = 20$ см. Если на пути лучей вплотную к зеркалу поставить собирающую линзу, то угловой размер изображения увеличится в 1,5 раза При этом изображение останется мнимым. Каково фокусное расстояние линзы?

4. Человек рассматривает свое лицо в вогнутом зеркале, находящемся на расстоянии $a = 15$ см от него. Если он наденет очки, то это же зеркало располагает на расстоянии $b = 10$ см от себя. Какие очки он носит? Расстояние наилучшего зрения для человека с нормальным зрением принять равным $d_0 = 30$ см.

С. Овчинников, И. Шарыгин

Нестандартные задачи по стереометрии

Каждый, кто готовится к письменному экзамену по математике и изучает в этой связи варианты МГУ прошлых лет, обратит внимание на то, что, как правило, каждый вариант довольно резко разделяется на две части: на три-четыре относительно легкие задачи и одну-две значительно более трудные. В «трудные» входит либо нестандартная алгебраическая (или тригонометрическая) задача, либо задача по стереометрии.

Чтобы рассчитывать на успешную сдачу письменного экзамена, надо уделить достаточно большое внимание решению нестандартных задач. О нестандартных задачах по стереометрии *), отобранных из вариантов МГУ, и пойдет речь в настоящей статье.

Прежде всего подчеркнем важность построения удачного чертежа. При построении надо помнить, что проекция нарушает многие соотношения между элементами пространственной фигуры. Необходимо все время «держать в уме» истинные углы и длины. Не надо загромождать чертеж трудно изображаемыми деталями. Например, как правило, нет необходимости на чертеже изображать шары или биссекторные плоскости. С другой стороны, удачное дополнительное построение может не только прояснить структуру пространственной конфигурации, но и дать хорошую идею решения задачи. Очень полезно важные плоские элементы данной стереометрической фигуры, например, грани, сечения или проекции, изображать на отдельном чертеже.

Задача 1 (ВМК, 1974). *В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны $180°$ и $|SA| = |BC|$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна 100 см^2, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания равно 3 см.*

Решение. Первое условие задачи является наиболее «неудобным» для использования. Чтобы сделать его более наглядным, рассмотрим развертку $S_1S_2S_3\,ABC$ пирамиды $SABC$ (рис. 1). Из первого условия следует, что точки S_1, B, S_3 лежат на одной прямой, как и точки S_1, C, S_2. Так как BC есть средняя линия в треугольнике $S_1S_2S_3$, $|S_2S_3| = 2\,|BC|$. С другой стороны, по условию задачи, $|AS_3| = |AS_2| = |BC|$. Таким образом, треугольник AS_2S_3 оказался вырожденным и правильной разверткой будет развертка, изображенная на рисунке 2. Отсюда немедленно следует, что все грани являются конгруэнтными треугольниками. Значит (докажите!), расстояния от центра описанного шара до всех граней равны. Если мы соединим центр описанного шара со всеми вершинами, то наша пирамида разобьется на четыре равновеликие пирамиды, объем каждой из которых равен $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 100$ см^3 = 100 см^3.

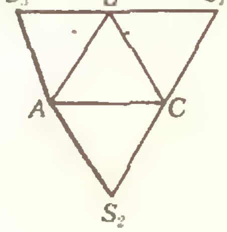


Рис. 1.

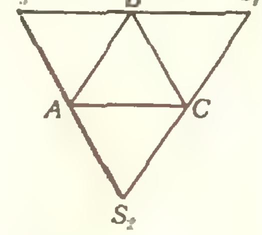


Рис. 2.

---

*) О более стандартных приемах решения стереометрических задач (в частности, об использовании векторов и координат) можно прочитать в «Кванте» — 1978, № 11, с. 42 и 1979, № 1, с. 45.

Поэтому объем исходной пирамиды равен 400 см³.

З а д а ч а 2 (Мехмат, 1975). *В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен 60°. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $|MN| = 5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.*

Р е ш е н и е (рис. 3). Заметим сразу, что исходные данные полностью определяют нашу пирамиду.

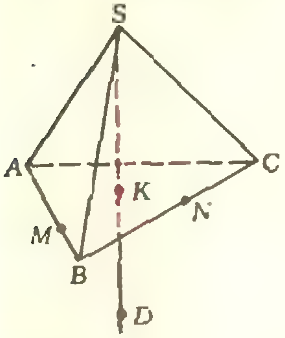
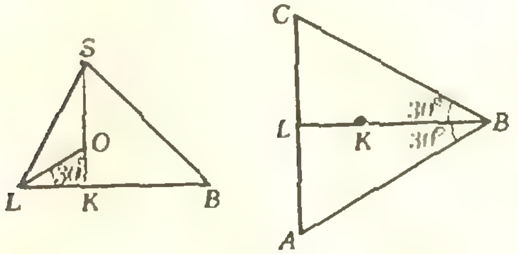
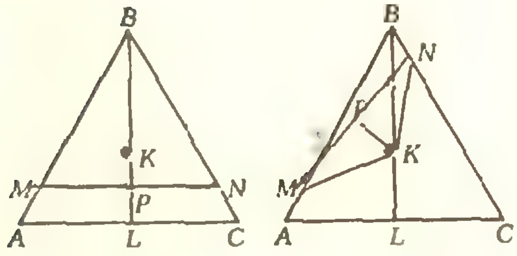


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.



а) б)

Рис. 5.

Вычислим, например, длину стороны основания. Рассмотрим для этого сечение, проходящее через высоту пирамиды SK и боковое ребро SB. (Такое сечение часто используется в решении задач на правильную пирамиду.) Это сечение пересекает грань ASC по апофеме SL (рис. 4*а*); точка O на нем — центр вписанного шара. Поскольку $|LK| = \sqrt{3}$, сторона основания равна 6 (рис. 4*б*). Аналогично вычисляем $|SK| = 3$.

Покажем теперь, что точки M и N однозначно определяются условиями задачи. Так как плоскость основания тоже касается шара, из условий задачи следует, что $|MK| = |KN|$ (докажите!). Пусть $|AM| = x$. Тогда априори либо $|CN| = x$, либо $|BN| = x$ (докажите!).

Рассмотрим п е р в ы й с л у ч а й (рис. 5*а*). Так как прямая MN параллельна основанию AC, $\frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|AC|} = \frac{5}{6}$, откуда $x = 1$. Заметим, в частности, что $|PK| = |KL| - |PL| = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Следовательно, плоскость, проходящая через (MN) и касающаяся шара, пересекает продолжение $[SK)$ за точку K.

Переходя ко в т о р о м у с л у ч а ю (рис. 5*б*), вычислим по теореме косинусов для треугольника MBN величину x. Получим $x = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{3}$. (Проделайте вычисления самостоятельно и обоснуйте, почему достаточно ограничиться этим значением для x.) Определим теперь расстояние от точки K до отрезка MN. Для этого вычислим площадь треугольника MKN:

$$S_{MKN} = S_{MBK} + S_{KBN} - S_{MBN} = \frac{1}{2}(6-x)\,2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{3} - \frac{1}{2}(6-x)\,x\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{12}.$$

Следовательно,

$$KP = \left(2\cdot\frac{25\sqrt{3}}{12}\right) : 5 = \frac{5\sqrt{3}}{6} > 1.$$

Значит, плоскость, проходящая через (MN) и касающаяся шара, пересечет (SK) «выше» точки K, что противоречит условию задачи. Таким образом, второй случай невозможен. Существование и единственность искомой плоскости доказаны.

Перейдем к вычислению длины отрезка SD. На рисунке 6 снова изображено то же сечение, что и на рисунке 4, *а*. Из подобия треугольников PKD и QOD легко находим $|KD| = 6$. Отсюда $|SD| = |KD| + |SK| = 9$.

Задача 3 (ВМК, 1975). *Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещиваются ребра AC и BD и AD и BC этой пирамиды перпендикулярны, ребра AB и CD равны, все ребра пирамиды касаются шара радиуса r. Найти площадь грани ABC.*

Решение. Проведем через ребро AD плоскость, перпендикулярную ребру BC (рис. 7). Очевидно (почему?), эта плоскость содержит высоту пирамиды, причем $(DE) \perp (BC)$.

$$|BE|^2=|AB|^2-|AE|^2=|BD|^2-|DE|^2;$$
$$|EC|^2=|AC|^2-|AE|^2=|CD|^2-|DE|^2.$$

Отсюда

$$|AB|^2+|CD|^2=|BD|^2+|AC|^2. \quad (1)$$

Аналогично

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2. \quad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что *суммы длин противоположных сторон пространственного четырехугольника, все стороны которого касаются шара, равны.* (Докажите этот аналог известного свойства описанного четырехугольника самостоятельно.) Применяя это утверждение к пространственному четырехугольнику $ABCD$ со сторонами AB, BC, CD и DA, получим

$$|AB|+|CD|=|BC|+|AD|. \quad (3)$$

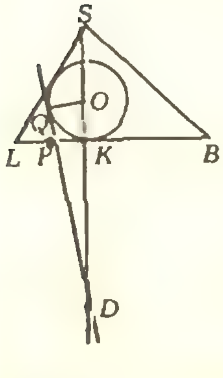


Рис. 6.

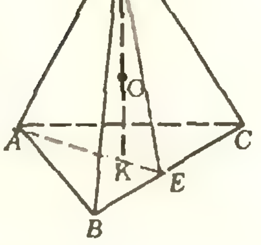


Рис. 7.

С другой стороны, можно считать, что $ABCD$ — пространственный четырехугольник со сторонами AB, BD, DC, CA. Поэтому

$$|AB|+|CD|=|BD|+|AC|. \quad (4)$$

Сопоставляя равенства (1) — (4) и полагая $|AB|=a$, получим две системы уравнений

$$\begin{cases} |BD|^2+|AC|^2=2a^2, \\ |BD|+|AC|=2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} |BC|^2+|AD|^2=2a^2, \\ |BC|+|AD|=2a. \end{cases}$$

Из этих систем легко следует, что длины всех ребер нашей пирамиды равны a. Очевидно, центр O шара, касающегося всех ребер, совпадает с центром правильного тетраэдра $ABCD$. Но $r^2=r_1^2+r_2^2$, где r_1 — радиус вписанного шара, а r_2 — радиус круга, вписанного в основание. Так как $r_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a$ и $r_2=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, $r^2=\frac{1}{8}a^2$. Отсюда $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}r^2$.

Задача 4 (Физфак, 1976 г.). *Все плоские углы трехгранного угла $SABC$ (S — вершина) прямые. На грани ASC взята точка D на расстоянии 5 см от вершины S и на расстоянии 3 см от ребра SC. Из некоторой точки M, расположенной внутри трехгранного угла $SABC$, в точку D направлен луч света. Луч образует угол $\frac{\pi}{4}$ с ребром SB и угол $\frac{\pi}{3}$ с ребром SC. Луч зеркально отражается от граней угла $SABC$ сначала в точке D, затем — в точке E, затем — в точке F. Найти длину отрезка EF.*

Решение. Геометрическая идея решения состоит в «выпрямлении» траектории луча на основе законов отражения. Заметим, что если луч отражается зеркально от плоскости, то луч, симметричный относительно этой плоскости отраженному лучу, является продолжением падающего луча. На рисунке 8 изображена «выпрямленная» траектория нашего луча. *Например, отрезок* $E'F'$ получен повторным отражением отрезка EF относительно плоскостей граней трехгранного угла. Из условия задачи следует, что точка D находится на расстоянии 4 см от ребра SA. Так как длина проекции отрезка $F'D$ на ребро SC равна 4 см, а угол между ними $\frac{\pi}{3}$, $|F'D| = 8$ см. Значит, длина проекции отрезка $F'D$ на ребро SB равна $4\sqrt{2}$ см. Так как сумма квадратов длин проекций отрезка на три взаимно перпендикулярные оси равна квадрату его длины («Геометрия 10», § 49), проекция отрезка $F'D$ на ребро SA имеет длину 4 см. Отсюда видно, что наш луч сначала попадает на грань BSC, а затем на грань ASB. *Точка* S *делит* эту проекцию в отношении $1:3$. Очевидно, точка E' делит отрезок $F'D$ в *том же отношении*. Следовательно, $|E'F'| = 2$ см.

Задача 5 (ВМК, 1977 г.). *В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра AC и BS и перпендикулярная к ним, проходит через середину ребра BS. Грань ASB равновелика грани BSC, а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма расстояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B, если $|AC| = \sqrt{6}$, $|BS| = 1$.*

Решение. Обозначим через K и N точки пересечения общего перпендикуляра к ребрам AC и SB с этими ребрами (рис. 9).

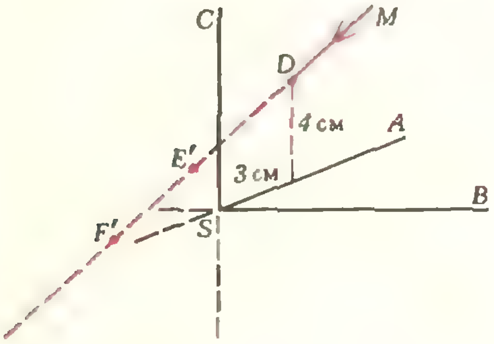


Рис. 8.

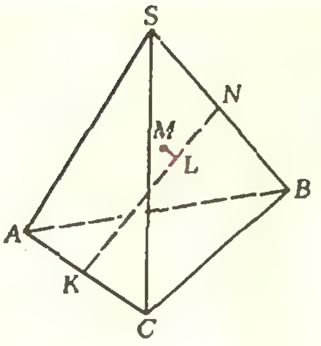


Рис. 9.

Достаточно очевидно, что решение задачи надо начинать с анализа тех ее условий, которые не касаются положения точки M. Из равновеликости граней ASB и BSC следует, что точки A и C находятся на одинаковом расстоянии от ребра SB.

Рассмотрим общую задачу о вычислении расстояния от точки A, *лежащей на прямой* (I), до прямой (II) (рис. 10). Обозначим через O_1 и O_2 основания общего перпендикуляра *к прямым* (I) и (II), $a = |AO_1|$, $d = |O_1O_2|$, φ — угол между прямыми (I) и (II), h — расстояние от точки A до прямой (II). Из рисунка 10 легко находим, что

$$h = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + d^2}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что любые две точки прямой (I), находящиеся на равных расстояниях от прямой (II), находятся на равных расстояниях от основания общего перпендикуляра к этим прямым. Таким образом, точка K является серединой отрезка AC. Далее, точки S и B в силу формулы (5) оказываются одинаково удаленными от ребра AC, откуда следует, что грани ASC и ABC равновелики. Выведенная нами формула (5) *позволяет* также выписать площади граней ASC и BSC:

$$S_{ASC} = p = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi + d^2},$$

$$S_{BSC} = q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sin^2\varphi + d^2}. \qquad (6)$$

Из условия задачи $p = 2q$ или

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi + d^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\sin^2\varphi + d^2}, \qquad (7)$$

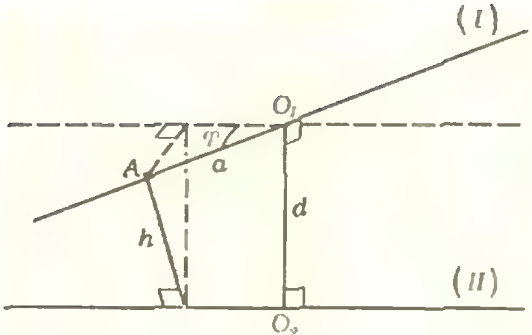


Рис. 10.

откуда

$$d=\frac{3}{2}|\sin\varphi|. \qquad (8)$$

Итак, задание угла φ между ребрами AC и SB полностью определяет пирамиду, удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме тех, в которых речь идет о точке M.

Заметим, что из наших рассмотрений следует также, что отрезок KN принадлежит биссекторным плоскостям двугранных углов пирамиды с ребрами AC и SB.

Перейдем теперь к анализу положения точки M. Особая роль отрезка KN, выявленная в предыдущем анализе, позволяет выдвинуть предположение, что точка M, удовлетворяющая условию задачи, лежит на этом отрезке. В этом мы сейчас и убедимся. Рассмотрим проекцию L точки M на отрезок KN. Точки L и M принадлежат плоскости, перпендикулярной отрезку KN, а следовательно, и биссекторным плоскостям двугранных углов пирамиды с ребрами AC и SB. Если плоскость перпендикулярна биссекторной плоскости двугранного угла, то сумма расстояний от любой ее точки внутри этого угла до граней есть величина постоянная. (Докажите это самостоятельно, пользуясь тем, что сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон есть величина постоянная.) Таким образом, суммы расстояний до всех четырех граней пирамиды от точек M и L равны. Обозначим эту сумму через l и вычислим ее. Пусть $x=|KL|$ и V — объем пирамиды. Очевидно, сумма расстояний от точки N до граней ABC и ASC равна $\frac{3V}{p}$. Значит, сумма расстояний от точки L до тех же граней равна $\frac{x}{d}\cdot\frac{3V}{p}$. Аналогично вычисляется сумма расстояний от точки L до граней BSC и ASB: она равна $\frac{d-x}{d}\cdot\frac{3V}{q}$.

Итак, $$l=\frac{x}{d}\cdot\frac{3V}{p}+\frac{d-x}{d}\cdot\frac{3V}{q}.$$

Воспользовавшись формулой $V=\frac{1}{6}\times$ $\times|AC|\cdot|BS|\cdot|KN|\cdot|\sin\varphi|$ (выведите эту полезную формулу самостоятельно) и формулами (6) и (8), получим $l_1=$ $=2\sqrt{\frac{2}{5}}(d-x/2)$.

С другой стороны, $|SM|+$ $+|BM|\geqslant|SL|+|BL|$ (докажите!) и, следовательно, $l\geqslant|SL|+|BL|$. Но $|SL|+|BL|=2\sqrt{1/4+(d-x)^2}$, откуда

$$2\sqrt{\frac{2}{5}}(d-x)\geqslant2\sqrt{1/4+(d-x)^2}$$

или

$$0{,}9x^2-1{,}6dx+0{,}6d^2+0{,}25\leqslant0. \qquad (9)$$

В силу (8) $d\leqslant3/2$, откуда дискриминант D квадратного трехчлена в (9) не превосходит нуля и, следовательно, $D=0$, $d={}^3/_2$, $x={}^4/_3$, точка M совпадает с точкой L и

$$|MB|=\sqrt{1/4+(d-x)^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}.$$

В заключение заметим, что приведенные нами решения задач нельзя рассматривать как образцы оформления письменной работы. Мы стремились лишь показать основные идеи и приемы решения, оставляя читателю подчас весьма существенные детали для самостоятельной доработки.

Упражнения

1 (ВМК, 1974). В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами SA и BC, если известно, что $BC=4$ см, $AC=5$ см, $AB=6$ см.

2 (ВМК, 1975). Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер AB и CD, AC и BD, AD и BC, равны. Угол DBC равен 50°, а угол BCD больше угла BDC. Найти отношение площадей граней ABD и ABC.

3 (Мехмат, 1976). Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, ле-

жат три шара радиусов 4, 4 и 5. Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующейся конуса. Найти радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}\frac{1}{4}$.

4 (ВМК, 1977). В пирамиде $SABC$ грани ASC, BSC и ASB равновелики. Сумма расстояний от середины ребра BC до граней ASB и ASC в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины S. Внутри пирамиды есть точка M, полусумма расстояний от которой до вершин A, B и C равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра AS равна $\sqrt{\frac{31}{11}}$.

5 (ВМК, 1978). Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $^1/_6$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Встреча с читателями «Кванта»

10 января, во время зимних каникул, «Квант» встретился со школьниками Москвы. Встреча состоялась в Центральном лектории Всесоюзного общества «Знание». На ней присутствовало около тысячи учащихся. Члены редакционной коллегии рассказали о черных дырах во Вселенной и поисках космических цивилизаций, третьей проблеме Гильберта и числах Конвея, о школьных олимпиадах и вступительных экзаменах в вузы. Академик Академии педагогических наук В. А. Фабрикант (см. фото) поделился воспоминаниями о замечательном советском физике Леониде Исааковиче Мандельштаме, столетие со дня рождения которого исполняется в этом году. Во встрече приняли также участие член-корреспондент Академии педагогических наук В. Г. Болтянский, профессор Я. А. Смородинский, заместитель главного редактора В. А. Лешковцев, кандидаты физико-математических наук Н. Б. Васильев, Л. Г. Макар - Лиманов, Н. Х. Розов, А. П. Савин. Встреча закончилась конкурсом по решению задач, победители которого получили памятные подарки.

В. Л.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский институт стали и сплавов

В «Кванте», 1979, № 5 были опубликованы варианты вступительных экзаменов по физике. Ниже мы публикуем варианты вступительных экзаменов 1978 года по математике (письменный экзамен). Кроме самих вариантов, решений и ответов здесь приводится подробный разбор одного из вариантов с указанием типичных ошибок школьников.

Математика

В 1978 г. МИСиС второй год проводил вступительные экзамены по математике по новой программе. Вместо ожидавшейся нами в этом году стабилизации знаний абитуриентов, мы вынуждены отметить отсутствие заметного улучшения их подготовленности и даже некоторое ее снижение. Это относится, в частности, к разделам школьного курса, посвященных дифференцированию и интегрированию. Особенно плохо дело обстоит с геометрией: применять векторную алгебру к решению геометрических задач почти никто не умеет.

В порядке возрастания трудности вариантов, факультеты МИСиС можно расположить примерно следующим образом: технологический факультет, факультет металлургии черных металлов и сплавов, факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов, факультет полупроводниковых материалов и приборов, физико-химический факультет.

Факультет полупроводниковых материалов

1. *Найти область определения функции*

$$y=\sqrt{\log_{0.5}(3x-8)-\log_{0.5}(x^2+4)}.$$

Эта задача сводится к решению системы неравенств. Многие из абитуриентов не смогли правильно получить эту систему неравенств, т. к. плохо знали свойства степенной и логарифмической функций. Система неравенств имеет вид

$$\begin{cases}3x-8>0\\ \dfrac{3x-8}{x^2+4}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-8>0\\ x^2-3x+12\geqslant 0.\end{cases}$$

Некоторые поступающие не смогли правильно решить эту систему, хотя из того, что второе неравенство выполнено при всех $x\in\mathbf{R}$ сразу получается ответ: $x>\frac{8}{3}$.

2. *Решить тригонометрическое уравнение*

$$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{ctg}x}{2(1+\operatorname{ctg}x)}.$$

Типичные ошибки здесь следующие: незнание основных формул тригонометрии, например

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

приобретение посторонних корней.

Решить это уравнение можно, например, следующим образом.
Находим область определения

$$\sin x\neq 0,\ 1+\operatorname{ctg}x\neq 0\Rightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,$$
$$k\in\mathbf{Z},\ x\neq m\pi,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Преобразуем уравнение

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1+\operatorname{ctg}x)(\cos x+\sin x+1)=0.$$

1) $1+\operatorname{ctg}x=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

не входит в область определения.

2) $\cos x+\sin x+1=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=[(-1)^{k+1}-1]\frac{\pi}{4}+k\pi=$$

$$=\begin{cases}(2n+1)\pi,\ k=2n+1\\ -\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\ k=2n\end{cases}$$

$x = (2n+1)\pi$ не входит в область определения. Ответ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$.

3. *Найти уравнение общей касательной к кривым*

$y = x^2 + 4x + 8$ *и* $y = x^2 + 8x + 4$. Большинство абитуриентов, не решивших эту задачу, не смогли правильно написать уравнение касательной к кривой. Решение задачи следующее: уравнения касательных к первой и второй кривым

$$\begin{cases} y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2). \end{cases}$$

Условие того, что касательная общая,

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)\cdot x_1 = g(x_2) - g'(x_2)\cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4 = 2x_2 + 8 \\ -x_1^2 + 8 = -x_2^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2^2 - x_2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем уравнение общей касательной

$$y = 8x + 4.$$

4. *Найти предел последовательности*

$$x_n = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Типичная ошибка: поступающие пользовались тем, что последнее слагаемое в сумме стремится к нулю, и на основании этого решали, что предел равен первому слагаемому, или сумме нескольких первых членов, в зависимости от личного вкуса. При этом забывали о том, что число слагаемых в сумме растет с ростом n. Правильно решить задачу можно, например, так. Разложим общий член $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ на сумму простейших дробей и сложим эти дроби так:

$$x_n = \sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1\right) + 0 = \frac{1}{72}.$$

5. *Точки* $A(1;2;3)$, $B(1;5;3)$, $C(3;3;3)$ *лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а точка* $D(2;3;7)$ *— на его верхнем основании. Найти координаты центров оснований и объем цилиндра.*

С этой задачей на применение векторной алгебры в стереометрии не справились большинство абитуриентов. Можно предположить, например, такое решение

1) Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C (очевидно, проходящей и через центр O нижнего основания)

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Для определения a, b, c и d получим систему (координаты точек A, B, и C удовлетворяют уравнению плоскости).

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = -d \\ a + 5b + 3c = -d \\ 3a + 3b + 3c = -d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + 2b + 3c = -d \\ 3a + 3b + 3c = -d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = a = 0 \\ c = -\dfrac{d}{3}; \end{cases}$$

уравнение плоскости нижнего основания цилиндра $z = 3$.

2) Пусть $O(x;y;z)$. Тогда для определения $(x;y;z)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} z = 3 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \\ = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = \\ = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y^2 - 4y + 4 = y^2 - 10y + 25 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \\ = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = 7/2 \\ 4x = -2y + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3/2, \ y = 7/2, \\ z = 3 \end{matrix}$$

3) Уравнение плоскости верхнего основания $z = d$, т. к. плоскости нижнего и верхнего основания параллельны. Точка D лежит на этой плоскости, следовательно, $d = 7$. Отсюда находим высоту цилиндра $H = 7 - 3 = 4$. Далее находим координаты центра верхнего основания $O_1\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 7\right)$. Наконец находим объем цилиндра

$$V = \pi R^2 \cdot H = 4\pi \left[\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - 2\right)^2\right] = $$
$$= 4\pi \cdot \frac{1 + 9}{4} = 10\pi.$$

Далее мы приводим варианты, предполагавшиеся на других факультетах.

Технологический факультет

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin^2 5x = \cos^2 5x.$$

На промежутке $[0, \pi]$ указать те значения переменной x, для которых $\operatorname{tg} x > 1$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = 2\sqrt{2x}$.

3. Решить уравнение

$$4^{2/x} - 5 \cdot 4^{1/x} + 4 = 0.$$

4. Все ребра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a, плоские углы при вершине A равны α. Найти величину угла между (BC_1) и (AC) и полную поверхность призмы.

5. Сумма двух сторон треугольника равна a, а угол между ними равен 30°. Каковы должны быть длины сторон, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. Решить уравнение

$$3x - \sqrt{18x + 1} + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x} - 3 \leqslant \frac{2}{\sqrt{x} - 2}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3.$$

4. Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

5. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 2; 1)$ и плоскостью, проходящей через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$, $D(3; 1; 2)$.

Факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x + 5) - \log_{\frac{1}{5}}(16 - x^2) \leqslant 1.$$

2. Решить уравнение

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1.$$

3. Найти

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2^x$, $y = 4^x$ и прямой $x = 1$.

5. В пространстве даны три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, образующие одинаковые углы между собой, равные $\frac{\pi}{3}$. Объем пирамиды $ABCD$ равен 10. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если $|AB| : |AC| : |AD| = 1:2:3$.

Физико-химический факультет

1. Решить неравенство

$$\log_{0.25} \frac{35 - x^2}{x} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right) = $$
$$= \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3(2x - 3) - 12(3x - 2) \text{ на } [-3; 6].$$

4. В треугольнике ABC, $A(-1; 2; 3)$ — вершина прямого угла. Найти координаты вершин B и C, если известно, что B и C лежат на прямой (MN), где $M(-1; 3; 2)$, $N(1; 1; 3)$ и $\widehat{ABC} = 30^\circ$.

5. Построить график функции f, где

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, \quad x > 0.$$

В. Треногин

Московский институт электронной техники

Московский институт электронной техники (МИЭТ) готовит специалистов по важнейшим направлениям в области электроники. Выпускников института ждут заводы, научно-исследовательские институты, конструкторские бюро не только электронной, но и других отраслей промышленности.

МИЭТ имеет следующие факультеты:

Физико-технический факультет готовит специалистов в области твердого тела и технологии полупроводниковых приборов и электронных схем. За время учебы в институте специалисты этого профиля приобретают глубокие знания в области общей и теоретической физики, физики полупроводниковых приборов, получают специальную подготовку в области конструирования, разработки и технологии производства интегральных схем.

Физико-химический факультет готовит специалистов по полупроводниковым и диэлектрическим материалам электронной техники и физико-химическим процессам технологии.

Факультет микроприборов и технической кибернетики готовит специалистов по трем направлениям: электронные вычислительные машины, радиоэлектронные устройства, конструирование и производство радиоаппаратуры. В процессе обучения студенты изучают техническую кибернетику, радиотехнические и приборостроительные дисциплины, вычислительную математику, конструирование электронных вычислительных машин и радиоэлектронных устройств.

Факультет электронного машиностроения готовит специалистов в области проектирования, изготовления и автоматизации технологического оборудования электронной техники. Студенты этого факультета специализируются в области проектирования, автоматизации и изготовления технологического оборудования.

На вечернем отделении обучение ведется по всем специальностям, перечисленным выше для дневных факультетов.

Программированное обучение и контроль знаний студентов проводятся в специально оборудованном классе с помощью различных контролирующих устройств и вычислительных машин.

В МИЭТе, кроме учебной, проводится большая научно-исследовательская работа. Начиная с четвертого курса студенты сочетают обучение в институте с производственной практикой, работая по три дня в неделю на базовых НИИ и заводах.

Институт располагает благоустроенными общежитиями. Все иногородние на время экзаменов обеспечиваются общежитием.

МИЭТ имеет стадион с резино-битумной дорожкой, площадками для игры в волейбол, баскетбол и ручной мяч, теннисные корты, спортивный зал, 25-метровый бассейн, тир, лыжную базу, спортивно-оздоровительные лагеря в горах Северного Кавказа и на берегу Каспийского моря.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\cos x.$$

2. Решить уравнение

$$32^{\frac{x+5}{x-7}}=0,25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=4-x^2,\quad y=x^2-2x.$$

4. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны a. Найти большее основание b, чтобы площадь трапеции была максимальной.

5. Даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если вектор $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b}+\vec{c}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cdot\cos x.$$

2. Решить уравнение

$$(0,4)^{\lg^2 x+1}=(6,25)^{2-\lg x^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{4-3x},\quad y=0.$$

4. На плоскости задана точка $M\left(\frac{1}{2};1\right)$. Проходящая через точку прямая образует вместе с положительными полуосями координат некоторый треугольник. Какое минимальное значение может принимать площадь этого треугольника?

5. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec{c}$, если $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Груз на длинной нити может совершать колебания в вертикальной плоскости, отклоняясь на угол α от вертикали. Этот же груз может вращаться по окружности, так что нить описывает конус. В каком случае натяжение нити, отклоненной на угол α от вертикали, будет больше?

2. Брусок массой m находится в плоскости, угол наклона которой α может изменяться от 0 до 90°. Построить график зависимости модуля силы трения бруска о плоскость от угла наклона плоскости к горизонту. Явлением застоя пренебречь. Коэффициент трения равен μ.

3. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты $\rho=3$ г/см^3.

Определить период обращения планеты вокруг собственной оси.

4. Сколько ходов должен сделать поршень откачивающего насоса, чтобы откачать воздух из сосуда объемом V_0 от атмосферного давления p_0 до давления $p = p_0 \cdot 10^{-4}$, если емкость насоса V?

5. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии один от другого, причем один электрон вначале покоится, а другой начинает двигаться со скоростью $|\vec{v}| = 2 \cdot 10^6$ м/с по направлению к первому. Определить наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.

6. Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ, окружают сферической проводящей оболочкой радиусом R_2. Как изменится потенциал шара после того, как он будет соединен с оболочкой проводником?

7. Какое количество электричества нужно пропустить через электролитическую ванну с подкисленной водой, чтобы получить $V = 1$ л гремучего газа при $t = 27$ °C и $p = 760$ мм рт. ст.?

8. Длина воздушной линии электропередачи $l = 300$ км. Частота напряжения $\nu = 50$ Гц. На какую долю периода отличаются фазы напряжения в начале и в конце этой линии?

9. Какова истинная глубина реки, если при определении на глаз по вертикальному направлению глубина ее кажется равной $h = 2$ м? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

10. Некто, сняв очки, читал книгу, держа ее на расстоянии $d = 16$ см от глаз. Какой оптической силы у него очки?

В. Горбунов

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Московский ордена Ленина авиационный институт им. Серго Орджоникидзе, один из наиболее крупных машиностроительных вузов страны, готовит специалистов для работы в различных отраслях авиационной промышленности, а также в других новейших областях техники.

В институте учились и работали академики Б. Н. Юрьев, М. Д. Миллионщиков, известные конструкторы Д. П. Григорович, Н. Н. Поликарпов, А. С. Яковлев, А. Н. Туполев, летчики-космонавты В. Н. Волков, В. Н. Кубасов, В. И. Севостьянов, В. В. Лебедев, А. С. Иванченков. В настоящее время в институте работают академики В. П. Мишин, И. Ф. Образцов, Б. Н. Петров.

Институт готовит инженеров-механиков по самолетостроению и вертолетостроению, летательным аппаратам и двигателям летательных аппаратов; инженеров-электромехаников по приборам, вычислительным устройствам, электрооборудованию, системам управления летательными аппаратами, автоматизированным системам управления, установкам и автоматизированным приводам летательных аппаратов; радиоинженеров по радиоустановкам летательных аппаратов, конструированию и производству электронно-вычислительной аппаратуры; инженеров-экономистов по экономике и организации машиностроительной промышленности, организации механизированной обработки экономической информации, автоматизированным системам управления производством; инженеров-математиков по применению средств вычислительной техники и математическому обеспечению АСУ; инженеров-электромехаников по конструированию антенно-фидерных устройств.

Характерной особенностью обучения в институте является совмещение учебного процесса с элементами научных исследований. В институте действует студенческое научное общество МАИ, работают 14 студенческих конструкторских бюро, в которых студенты разрабатывают различные образцы современной техники. Среди них легкий спортивный самолет «Квант», подводный аппарат «Шельф», целая серия авиационных приборов. 26 октября 1978 года на орбиту был выведен первый студенческий ИСЗ, разработанный студентами МАИ.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(экзамен по алгебре и началам анализа на общетехнических факультетах)

1. Дайте определение показательной функции. Сформулируйте и докажите свойства функции $y = a^x$, $a > 1$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7.$$

3. Какие точки называют критическими точками для данной функции? Какая существует связь между точками экстремума и критическими точками функции? Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Постройте график.

4. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x^2 - 4x + 2}{x+1} \leqslant 1.$$

5. При каких значениях a корни x_1, x_2 уравнения $(a^2+1)x^2 - 2ax - 3 = 0$ удовлетворяют неравенству $|x_2| < x_1(1 - x_2)$ и корень x_1 является положительной правильной дробью?

Вариант 2

(экзамен по геометрии и тригонометрии на общетехнических факультетах)

1. Докажите теорему о свойствах средней линии трапеции.

2. Дайте определение скалярного произведения двух ненулевых векторов. За-

пишите координатную формулу скалярного произведения. Вычислите координаты вектора $\vec{c}$, перпендикулярного векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy, если $|\vec{c}|=\sqrt{7}$.

3. Решите уравнение

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

4. Площадь равнобедренной трапеции с углом при основании 60° равна 2 кв. дм. Найдите длину высоты трапеции наименьшего периметра. Вычислите этот периметр.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом 2β, длина высоты которого равна h. Одна из диагоналей параллелепипеда образует с одной из боковых граней угол φ. Определите объем параллелепипеда.

Вариант 3

(экзамен на факультете прикладной математики)

1. Решите неравенство

$$\log_3\frac{x+4}{x-2}-\log_3\frac{4x+11}{4x+1}<1.$$

2. Функция f задана равенством $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Найдите решения $\varphi\in[0;\pi]$ уравнения $f(\sin\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+1$ и прямыми $y=0$, $x=1$, $x=2$. В какой точке данной кривой $y=x^2+1$, $x\in[1;2]$ следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Сделайте чертеж.

4. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин A (3; 0; 1), B (−1; 4; 1), C (5; 2; 3), D (0; −5; 4). Вычислите длину вектора $\overrightarrow{AO}$, если O — точка пересечения медиан грани BCD.

5. При каких значениях параметра a множество M решений неравенства $(a-2)x+3(a^2+1)>x+a$ пересекается с множеством N решений неравенства $2ax<(a+1)x-1$? Найдите $M\cap N$ для каждого $a<0$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Механическая работа. Мощность. Единицы работы и мощности. Когда сила, действующая на тело, не производит работы при перемещении тела?

2. Точка совершает гармонические колебания между положениями C и D. Зная, что максимальная скорость точки равна $v_м=10$ м/с, найти ее среднюю скорость на пути от C к D.

3. В колебательный контур с индуктивностью L, емкостью C и активным сопротивлением R включили последовательно источник синусоидальной ЭДС с амплитудой $\mathscr{E}_м$. Затем, меняя частоту ЭДС, добились того, что амплитуда тока стала максимальной. Какой?

4. Два сосуда, содержащие различные газы по одному киломолю в каждом, соединены трубкой с краном. Давления в сосудах p_1 и p_2. Какое давление устанавливается после открытия крана? (Температура не изменяется.)

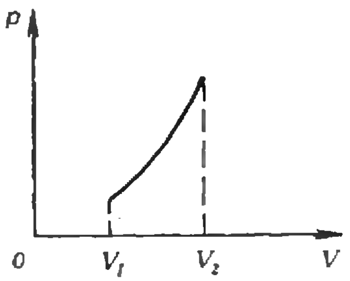
5. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением в два раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f=24$ см.

Вариант 2

1. Первый закон Ньютона. Третий закон Ньютона.

2. Тело массой m движется по закону $s(t)=\alpha t^3+\beta t+\gamma$, где α, β, γ — размерные постоянные коэффициенты, t — время, s — пройденный путь. Найти действующую на тело силу и кинетическую энергию в момент времени t_1 после начала движения.

3. Каков заряд всех электронов в куске алюминия массой $m=1$ кг? За какое время пройдет этот заряд через поперечное сечение проводника при силе тока $I=1$ А? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл; молярная масса алюминия $\mu=27$ г/моль; число Авогадро $N_0=6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль; считать, что на каждый атом алюминия приходится 3 свободных электрона.



4. При расширении газа его давление росло по закону $p=p_1+\alpha_1 V+\alpha_2 V^2$, где α_1 и α_2 — размерные постоянные коэффициенты; p_1, V_1, V_2 заданы (см. рисунок). Рассчитать работу, совершенную при расширении.

5. Предмет находится на оси на расстоянии $d=3$ см от вогнутого сферического зеркала. Радиус зеркала $R=5$ см. Графическим построением и расчетом найти положение изображения. Подсчитать отношение величины изображения к величине предмета.

В. Котельников,
Р. Молодожникова

Московский энергетический институт

О факультетах и специальностях Московского ордена Ленина энергетического института (МЭИ) рассказано в «Кванте», 1978, № 7.

В 1978 году абитуриенты, поступавшие в МЭИ, сдавали по математике два экзамена (письменный и устный — на всех факультетах), а по физике — один экзамен (на одних факультетах — письменный, на других — устный).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение

$$\left(\frac{(x^3-4)^{-2}+(x+2)^{-2}-(x-2)^{-2}}{1-8x}\right)^{-1}-$$

$$-\left(4\sqrt[3]{4}\right)^{\log_4 x^3}-16,$$

найти его предел при $x\to\frac{1}{8}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(3y^2+1)\cdot\log_3 x=1,\\ x^{2y^2+10}=27.\end{cases}$$

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=3x^3-x-76$ на отрезке $[0;\ 3]$; первый член прогрессии равен квадрату ее знаменателя. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\left(\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi$$

и лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

5. Через вершину C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая ребра $[BC]$ и $[CD]$ и образующая с гранью $ABCD$ угол α, причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Найти площадь сечения, если длина ребра куба равна a (рассмотреть возможные случаи).

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}\times$$

$$\times\left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)}+1\right)\times\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\lg\left(\sqrt{8^{-2+\lg x}}-\sqrt[3]{4^{2-\lg x}}\right).$$

3. При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$(1-\cos 2x)\sin 2x=\sqrt{3}\sin^2 x$$

и лежащие на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ равна S, длина высоты $[AB]$ равна h, величина острого угла ADC трапеции равна α. На боковой стороне $[CD]$ взята точка E, так что $|CE|=|ED|$. Найти объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABED$ вокруг прямой (AB).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Источники тока. Электродвижущая сила. Последовательное соединение источников ЭДС. Аккумуляторы. Закон Ома для замкнутой цепи.

2. Энергия фотонов, которыми облучается металл, в три раза больше работы выхода электронов из металла. Какую долю от энергии фотонов составляет максимальная кинетическая энергия фотонов, вылетающих из металла?

3. Два одинаковых точечных заряда находятся на расстоянии $r_1=1$ м друг от друга. Величина каждого заряда $q=10^{-10}$ Кл. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2=10$ см?

4. При разрыве неподвижной гранаты на два осколка, летящих вдоль одной прямой, выделилась механическая энергия $W=1000$ Дж. Известно, что масса одного осколка втрое больше массы другого. Найти скорости осколков. Масса гранаты $m=1$ кг, а масса пороховых газов мала.

5. Каковы первоначальный объем и температура гелия, находящегося под поршнем в цилиндре, если при охлаждении гелия до $t=-23$°C груз массой $M=16$ кг, лежащий на поршне, совершает работу $A=40$ Дж? Площадь поршня $S=200$ см^2, атмосферное давление нормальное, масса гелия $m=5$ г.

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m=20$ кг тянут с силой $|\vec{F}|=120$ Н по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1=60°$ к горизонту, тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2=30°$ к горизонту?

2. Цилиндрический сосуд длиной $l=1$ м делится на две части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, если в одной части сосуда находится некоторая масса кислорода, а в другой части — такая же масса водоро-

да? Относительная молекулярная масса кислорода в 16 раз больше относительной молекулярной массы водорода.

3. Маленький шарик подвешен на тонкой нити в пространстве между обкладками плоского конденсатора, пластины которого горизонтальны. Заряд шарика $q=10^{-9}$ Кл. Когда конденсатор зарядили зарядом $Q=2\cdot10^{-5}$ Кл, натяжение нити увеличилось вдвое. Определить массу шарика. Площадь пластин конденсатора $S=200$ см^2.

4. Линия электропередачи имеет сопротивление $R=250$ Ом. Какое напряжение должен иметь генератор для того, чтобы при передаче по этой линии к потребителю мощности $P=25$ кВт потери в линии не превышали 4% передаваемой потребителю мощности?

5. Катушка индуктивностью $L=3\cdot10^{-5}$ Г присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S=100$ см^2. Расстояние между пластинами конденсатора $d=0.1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками конденсатора, если контур резонирует на длину волны $\lambda=750$ м?

Б. Агафонов,
В. Прохоренко,
В. Чудов

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

В Московском авиационном технологическом институте им. К. Э. Циолковского (МАТИ) обучаются 10 тысяч студентов по 12 специальностям и 15 специализациям, связанным с авиационной промышленностью. Окончившие институт инженеры работают в цехах, лабораториях, технологических и конструкторских бюро опытных и серийных заводов, а также в отраслевых научно-исследовательских институтах. В МАТИ имеются следующие факультеты:

Авиационно-технологический факультет готовит инженеров-металлургов по металловедению, оборудованию и технологии термической обработки металлов, литейному производству черных и цветных металлов, обработке металлов давлением, металлургии и технологии сварочного производства.

Авиационно-механический факультет готовит инженеров-механиков по самолетостроению, авиационным двигателям, технологии переработки неметаллических материалов, производству изделий из специальных материалов. На этот факультет конкурсный прием осуществляется раздельно для лиц, проживающих в Москве и Подмосковье (в радиусе до 50—60 км), и для лиц, проживающих за пределами указанного района. (На авиационно-технологическом факультете конкурс — общий.)

Факультет радиоэлектронной аппаратуры готовит инженеров-механиков по авиационному приборостроению и радиоинженеров-технологов по конструированию и производству радиоаппаратуры.

Вечерний факультет готовит инженеров-механиков по технологии переработки полимерных материалов в авиаизделия, авиационному приборостроению, самолетостроению, авиационным двигателям; радиоинженеров-технологов по конструированию и производству радиоаппаратуры, а также инженеров-металлургов по металловедению, оборудованию и технологии термической обработки металлов, металлургии и технологии сварочного производства, обработке металлов давлением, литейному производству черных и цветных металлов.

На два последних факультета принимаются только лица, проживающие в Москве и Подмосковье (в радиусе до 50—60 км).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 4\alpha+\sec 4\alpha=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}.$$

2. Решить уравнение

$$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0.$$

3. В треугольнике даны сторона a и прилежащие к ней углы β и γ. Определить объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг данной стороны.

4. Решить уравнение

$$\sin 5x\cdot\cos 3x=\sin 6x\cdot\cos 2x.$$

5. Найти конус наименьшего объема, описанный около шара радиуса R.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2(x-1)^2-\log_{0.5}(x-1)=9.$$

3. Основанием пирамиды является прямоугольник, площадь которого S. Две противоположные грани наклонены к плоскости основания под углом α, а две — под углом β. Найти площадь боковой поверхности.

4. Решить уравнение

$$\cos 2x+\sin 2x=\cos x+\sin x.$$

5. Где возрастает функция

$$f(x)=-x^3-x^2-7x-\sqrt{3}\,?$$

Устный экзамен

Билет 1

1. Признак параллельности прямой и плоскости (доказать).

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1.$$

3. Выяснить, на каких участках функция $f(x)=2x+\frac{2}{x}$ убывает.

4. Решить неравенство

$$4^x-5\cdot 2^x+1>0.$$

5. Построить график функции

$$y=\frac{2|x|+5}{x-3}.$$

Билет 2

1. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

2. Вычислить

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\arcsin\frac{2}{3}\right).$$

3. Показать, что функция

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+2$$

возрастает при $x>0$.

4. Решить уравнение

$$6\cos^2 x+11\sin x-10=0.$$

5. Построить график функции

$$y=\log_x\sqrt{x}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Мяч брошен под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту со скоростью $|\vec{v}_0|=20$ м/с. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. С какой минимальной силой $\vec{F}_{\min}$, направленной горизонтально, нужно прижать плоский брусок к стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m=5$ кг; коэффициент трения между стеной и бруском $k=0{,}1$.

3. Снаряд массой $m_1=50$ кг, летящий со скоростью $|\vec{v}|=800$ м/с под углом $\alpha=30^\circ$ к вертикали, попадает в неподвижную платформу с песком и застревает в нем. Найти скорость платформы $|\vec{u}|$ после попадания снаряда, если ее масса $m_2=16$ т.

4. Каким может быть наибольший объем V_1 льдины, плавающей в воде, если известно, что алюминиевый брусок объемом $V_2=0{,}1$ м^3, примерзший к льдине, заставляет ее тонуть? Плотности льда, алюминия и воды равны соответственно $\rho_1=900$ кг/м^3, $\rho_2=2700$ кг/м^3 и $\rho_3=1000$ кг/м^3.

5. Сообщающиеся сосуды заполнены жидкостью, имеющей температуру t. При нагревании жидкости в одном из сосудов до температуры t_1 уровень жидкости установился в этом сосуде на высоте h_1, а в другом — на высоте h_2. Найти коэффициент объемного расширения жидкости.

6. В сосуд, содержащий $m_1=10$ кг воды при температуре $t_1=10$ °С, положили кусок льда, охлажденный до $t_2=-50$ °С, после чего температура образовавшейся ледяной массы оказалась равной $\theta=-4$ °С. Какое количество льда было положено в сосуд? Удельные теплоемкости воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К) и льда $c_2=2100$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда при $t_0=0$ °С $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг.

7. В однородном магнитном поле перпендикулярно направлению индукции, модуль которой $|\vec{B}|=0{,}1$ мТ, движется провод длиной $l=2$ м со скоростью $|\vec{v}|=5$ м/с, перпендикулярной проводнику. Какая ЭДС наводится в проводнике?

8. На расстоянии $d=0{,}14$ м от вершины вогнутого зеркала находится предмет, высота которого $l=0{,}06$ м. Фокусное расстояние зеркала $F=0{,}11$ м. Найти высоту L изображения предмета.

9. Предмет размером $l=8$ см надо спроектировать на экран. Какое фокусное расстояние F должен иметь объектив, находящийся от экрана на расстоянии $f=4$ м, чтобы изображение предмета на экране имело размер $L=2$ м?

10. Мнимое изображение светящейся точки в рассеивающей линзе находится в два раза ближе к линзе, чем сама точка. Найти положение светящейся точки, если известно, что она лежит на оси линзы. Оптическая сила линзы $D=-5$ дптр.

Ю. Вирченко, В. Горбацевич,
В. Круглов, В. Семкина,
М. Шиловская

Московский геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе

Московский геологоразведочный институт (МГРИ) начал свое существование как геологоразведочный факультет Московской горной академии, созданной по инициативе В. И. Ленина в сентябре 1918 года. В настоящее время Московский ордена Трудового Красного Знамени геологоразведочный институт имени Серго Орджоникидзе — специализированный вуз, готовящий горных инженеров-геологоразведчиков, геофизиков, разработчиков месторождений полезных ископаемых.

В МГРИ имеются следующие факультеты: геологоразведочный, геофизический, техники разведки и разработки, гидрогеологический. Кроме того, функционирует вечерний факультет, где обучаются без отрыва от производства почти по всем специальностям дневных факультетов.

Наконец, в институте уже много лет работает так называемый школьный факультет, в кружках которого занимаются учащиеся 7—10 классов Москвы и Подмосковья. Слушатели школьного факультета зимние каникулы проводят на подмосковном геологическом полигоне МГРИ, где сочетают практические занятия по геологии с разумным отдыхом. Немало представителей школьного факультета участвуют в летних институтских геологических экспедициях.

Глубокому изучению специдисциплин предшествует в нашем институте солидная физико-математическая подготовка. В частности, очень серьезно поставлено изучение теории вероятностей и математической статистики, вычислительных методов и программирования на ЭВМ. Для студентов читаются факультативные курсы по разделам математики, выходящим за рамки обязательной программы, существуют математические и физические кружки.

Окончившие МГРИ направляются в производственные геологические организации, на горные предприятия, в научно-исследовательские и проектные институты геологических отраслей, черной и цветной металлургии.

В МГРИ существует подготовительное отделение, функционируют платные подготовительные курсы: шестимесячные — для подготовки к поступлению на дневные факультеты (с 7 февраля) и трехмесячные — по подготовке на вечерний факультет (с 1 октября). Кроме того, для всех абитуриентов ежегодно с 1 июля по 30 июля организуются бесплатные подготовительные курсы.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. За 12 часов трактор вспахивает на 2 га больше лошади. Сколько гектаров вспашет за 12 час лошадь и сколько гектаров вспашет за это время трактор, если трактор вспахивает 1 га на 3 часа скорее лошади?

2. Дана функция $2xy=16+x^2$. Требуется

а) произвести ее исследование с помощью производной и построить график;

б) найти площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и линией $y=5$.

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с периметром p и острым углом α. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^8 x-\cos^8 x.$$

Вариант 2

1. Путь, по которому проехал мотоциклист, состоит из трех последовательных участков. Средняя скорость на всем пути равна скорости на 2-м участке. Скорость на 1-м участке на 2 км/час меньше средней скорости на всем пути, а скорость на 3-м участке на 15 км/час меньше удвоенной средней скорости на всем пути. Протяженность 1-го участка в 6 раз больше протяженности 3-го. Найти скорость мотоциклиста.

2. Дана функция $y=-1+8x^2-x^4$. Требуется

а) произвести ее исследование с помощью производной и построить график;

б) найти площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и линиями $y=15$, $x=1$ $(x\geqslant 1)$.

3. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α. Боковое ребро, выходящее из вершины угла α, образует с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро перпендикулярно противоположной стороне основания.

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{tg}2x+2.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m_1=1$ кг, двигаясь по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на неподвижное тело массой $m_2=3$ кг и прилипает к нему. Найти, сколько процентов кинетической энергии первого тела превращается в тепло, если трение о поверхность отсутствует.

2. Часы с маятником длиной $l=1$ м за сутки отстают на $\Delta t=1$ ч. Что нужно сделать с маятником, чтобы часы не отставали?

3. Катушка диаметром $d=5$ см, имеющая $n=1000$ витков, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля меняется с постоянной скоростью $|\Delta\vec{B}|/\Delta t=10^{-2}$ Т/с. К концам катушки подключен конденсатор емкостью $C=10$ мкФ. Определить заряд конденсатора.

4. Преломляющий угол стеклянной призмы $\varphi=60°$. Под каким углом лучи должны падать на призму, чтобы выходить из нее, скользя вдоль поверхности противоположной грани? Коэффициент преломления стекла $n=1,6$.

Я. Берман,
Т. Масленникова

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Мы уже подробно писали о МИИГАиКе (см. «Квант», 1977, № 6 и 1978, № 6).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{2-x}=3^x-8.$$

2. Вычислить без таблиц

$$\cos^4\frac{\pi}{8}+13\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$$

4. Решить неравенство

$$f'(x)\leqslant g'(x)$$

если $f(x)=\frac{2}{x}$; $g(x)=x-x^3$.

5. Даны четыре точки $A(-2;\ -3;\ 8)$, $B(2;\ 1;\ 7)$, $C(1;\ 4;\ 5)$ и $D(-7;\ -4;\ 7)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x=\sin 3x+\cos x\,(\cos x-1).$$

3. Решить неравенство

$$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1.$$

4. При каком значении z векторы $\vec{a}=(6;\ 0;\ 12)$ и $\vec{b}=(-8;\ 13;\ 7)$ перпендикулярны.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\frac{1}{\cos^2 x},\ y=0,\ x=0 \text{ и } x=\frac{\pi}{4}.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$7^{\lg x}=98-x^{\lg 7}.$$

2. Решить уравнение

$$2+\cos 4x=2\sin^2 x.$$

3. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|<1.$$

4. При каком значении z векторы $\vec{a}=(2;\ -3;\ 4)$ и $\vec{b}=(-3;\ 2;\ z)$ перпендикулярны.

5. Вычислить интеграл

$$\int\limits_3^{-18}\sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}\,dx.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Найти работу, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела от $|\vec{v}_1|=2$ м/с до $|\vec{v}_2|=6$ м/с на пути $l=10$ м. На всем пути действует постоянная сила трения $|\vec{F}_{\text{тр}}|=2$Н. Масса тела $m=1$ кг.

2. Стальной баллон наполнен азотом при температуре $t=12$ °С. Давление азота $p=15$ МПа. Найти плотность азота при этих условиях. При какой температуре давление возрастет до значения $p_1=18$ МПа? Расширением стенок баллона пренебречь.

3. В калориметр теплоемкостью $C=63$ Дж/К было налито $m_1=250$ г масла при температуре $t_1=12$ °С. После опускания в масло медного тела массой $m_2=500$ г при температуре $t_2=100$ °С установилась окончательная температура $\theta=33$ °С. Какова удельная теплоемкость c_1 масла по данным опыта? Удельная теплоемкость меди $c_2=0{,}38$ кДж/(кг·К).

4. Заряды q_1 и q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Во сколько раз надо изменить расстояние между ними, чтобы сила взаимодействия осталась прежней, если абсолютную величину заряда q_1 увеличить в 4 раза?

5. Четыре электрические лампочки, рассчитанные на напряжение $U=3$ В и силу тока $I=0{,}3$ А, надо включить параллельно и питать от источника напряжением $U_0=5{,}4$ В. Какое дополнительное сопротивление надо включить последовательно цепочке ламп?

6. Какую максимальную скорость имеют электроны, вырванные из натрия светом с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм? Красная граница фотоэффекта для натрия равна $\lambda_{\text{кр}}=0{,}68$ мкм. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

А. Могилин,
В. Дрёмина

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

(МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ)

Математический факультет является одним из наиболее многочисленных по составу факультетов МГПИ им. В. И. Ленина: на дневном отделении — более 900, и на вечернем — более 200 студентов.

На факультете готовят учителей математики для средней школы. В учебный план входят: математический анализ, алгебра и теория чисел, геометрия, математическая логика, теория алгоритмов, числовые системы, вычислительная математика, программирование, теория аналитических функций, уравнения математической физики, теория вероятностей, общая физика и астрономия, а также общественно-политические дисциплины и дисциплины психолого-педагогического цикла.

На факультете созданы все условия для развития навыков творческой деятельности будущего учителя математики: более 70 спецкурсов и спецсеминаров по математике и педагогическим дисциплинам ежегодно предлагаются на выбор студентам 3—5 курсов; студенты пишут курсовые и дипломные работы, рефераты на различные математические и педагогические темы. Первые навыки научно-исследовательской работы будущий учитель получает в кружках и научных семинарах в системе студенческого научного общества, начиная уже с первого года обучения.

Лучшие студенты факультета рекомендуются для прохождения аспирантуры при кафедрах, чтобы после окончания аспирантуры стать научными работниками или преподавателями педагогических вузов.

На факультете имеется 7 кафедр: математического анализа, высшей алгебры, геометрии, теории чисел, вычислительной математики и программирования, методики преподавания математики, физики.

При математическом факультете имеется вычислительный центр, где студенты знакомятся с современной вычислительной техникой, приобретают навыки работы на электронно-вычислительных машинах и проходят специальную практику в качестве программистов.

При поступлении на факультет сдаются следующие вступительные экзамены: математика (письменно и устно), физика (устно), литература и русский язык (письменно).

В 1978 году на математическом факультете абитуриенты, имевшие средний балл аттестата 5,0 или 4,5, зачислялись на факультет после первых двух экзаменов (математика письменно и устно), если они набрали на них не менее 9 баллов.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался двадцатипятипроцентный раствор соляной кислоты?

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2+1$, $y=-x^2+3$.

3. Доказать тождество

$$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}.$$

4. Доказать, что точки A (1; —1; 1), B (1; 3; 1), C (4; 3; 1), D (4; —1; 1) являются вершинами прямоугольника. Вычислить длину его диагоналей и координаты их точки пересечения.

5. Правильная четырехугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противолежащей боковой грани. Сторона основания равна a, боковые грани образуют с плоскостью основания угол в 60°. Вычислить площадь сечения.

Вариант 2

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это двузначное число.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$.

3. Доказать тождество

$$\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{4}.$$

4. Доказать, что точки A (2; 4; —4), B (1; 1; —3), C (—2; 0; 5), D (—1; 3; 4) являются вершинами параллелограмма, и вычислить величину угла между его диагоналями.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти величину угла между плоскостями (B, C, B_1) и (B, C_1, M), где M—середина ребра AD.

Г. Карасев,
Э. Кузнецов

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской был организован на базе педагогического техникума имени Профинтерна в 1931 году. В настоящее время подготовка учителей в институте ведется на 10 факультетах и 34 кафедрах, в составе которых трудятся 48 профессоров и докторов наук, свыше 250 доцентов и кандидатов наук.

Математический факультет готовит учителей математики для средней школы. На трех кафедрах факультета ведется подготовка аспирантов по специальностям: математический анализ, методика преподавания математики, геометрия и топология, алгебра и теория чисел.

Физический факультет готовит учителей физики, а индустриально-педагогический — учителей общетехнических дисциплин и труда. При кафедрах этих факультетов имеется аспирантура по специальностям: математический анализ, экспериментальная физика, теоретическая физика, методика преподавания физики и трудовое обучение

Подготовительное отделение института, которое работает на правах факультета, ведет подготовку (с отрывом от производства), в частности, по следующим специальностям: математика, физика, общетехнические дисциплины и труд.

Математика

Письменный экзамен

Математический факультет

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$.

2. На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ построены квадраты (вне ее). Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

3. Решите неравенство

$$\log_{x^2}(3-2x)>1.$$

4. Решите уравнение

$$2\cos x=\sqrt{2+\sin 2x}.$$

5. Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найдите отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды плоскостью.

Физический факультет

1. Напишите уравнение касательной к параболе $y=x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$.

2. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $|AM|:|MB|=1:1$. Вычислите $|CM|$, если $|AC|=6$, $|BC|=4$, $\widehat{ACB}=120^\circ$.

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{2x+1}>0.$$

4. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$$

5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы a; высота вдвое больше. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания и центр симметрии призмы.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Самолет для взлета должен приобрести скорость $|\vec{v}|=250$ км/ч. Сколько времени длится разгон, если эта скорость достигается в конце взлетной полосы длиной $l=1{,}0$ км? Каково ускорение самолета? Какова средняя скорость самолета на этом участке? Движение самолета считать равноускоренным.

2. Вагон массой $m_1=3\cdot10^4$ кг, движущийся по горизонтальному пути со скоростью $|\vec{v}|=1{,}5$ м/с, автоматически на ходу сцепляется с неподвижным вагоном массой $m_2=2\cdot10^4$ кг. С какой скоростью будут двигаться вагоны после сцепления?

3. Какую работу совершает электровоз за $t=10$ мин, перемещая по горизонтальному пути состав массой $m=3000$ т с постоянной скоростью $|\vec{v}|=72$ км/ч, если коэффициент трения $\mu=0{,}005$?

4. В сосуд, содержащий $m_1=400$ г воды при температуре $t_1=17\ ^\circ\mathrm{C}$, вводят $m_2=10$ г пара при $t_2=100\ ^\circ\mathrm{C}$, который превращается в воду. Определить конечную температуру воды. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $L=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг.

5. Какая температура установится в латунном калориметре массой $m_1=160$ г, содержащем $m_2=400$ г воды при температуре $t_1=25\ ^\circ\mathrm{C}$, после того как расплавится помещенный в воду кусок льда массой $m_3=50$ г, взятый при $t_2=0\ ^\circ\mathrm{C}$? Удельные теплоемкости латуни и воды равны соответственно $c_1=3{,}8\times10^2$ Дж/(кг·К) и $c_2=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

6. С какой силой взаимодействуют два заряда $q_1=0{,}66\cdot10^{-7}$ Кл и $q_2=1{,}1\cdot10^{-5}$ Кл в воде ($\varepsilon=81$) на расстоянии $r=3{,}3$ см? На каком расстоянии их следует поместить в вакууме, чтобы сила взаимодействия осталась прежней?

7. Электрон, двигаясь в вакууме по силовой линии электрического поля, полностью теряет свою скорость между точками с разностью потенциалов $U=400$ В. Определить, какой была скорость электрона, когда он попал в электрическое поле.

8. ЭДС батарейки для карманного фонаря $\mathscr{E}=4{,}5$ В. При внешнем сопротивлении $R=12$ Ом ток в цепи равен $I=0{,}3$ А. Определить внутреннее сопротивление батарейки и падение напряжения на ней.

9. Найти фокусное расстояние линзы, если известно, что действительное изображение предмета, находящегося на расстоянии $d=30$ см от линзы, располагается на таком же расстоянии от нее.

10. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из рубидия при его освещении ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=3{,}17\cdot10^{-7}$ м, равна $W=2{,}84\cdot10^{-19}$ Дж. Определить работу выхода электронов и красную границу фотоэффекта для рубидия. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Г. Луканкин, М. Петрова, В. Редкозубов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт им. А. И. Герцена является одним из крупнейших педагогических институтов Советского Союза. В него входят 15 факультетов, 71 кафедра, которые охватывают обширную область современных научных знаний от педагогики и психологии до вычислительной математики и астрономии.

Цикл физико-математических дисциплин лежит в основе подготовки студентов следующих трех факультетов:

Физический факультет готовит учителей средней школы по двум специальностям: физика и астрономия, физика с правом преподавания на иностранном языке. В составе факультета 4 кафедры: общей и экспериментальной физики, теоретической физики и астрономии, физической электроники и методики преподавания физики.

Математический факультет готовит учителей по специальностям: математика и математика с правом преподавания на иностранном языке. Обучение на факультете организовано на 5 кафедрах: алгебры, геометрии, математического анализа, вычислительной математики и методики преподавания математики. Студенты изучают не только необходимые физико-математические, педагогические, общеобразовательные и общественно-политические дисциплины, но и по собственному выбору слушают специальные курсы по самым различным вопросам современной математической науки.

На математическом факультете действует вычислительный центр, в котором студенты не только знакомятся с современной вычислительной техникой, но и приобретают навыки работы на ЭВМ.

В 1979 году в институте открывается общетехнический факультет. В течение 4-х лет обучения он будет готовить учителей технических дисциплин, черчения и труда. Наряду с циклом общественно-политических и психолого-педагогических дисциплин студенты факультета будут изучать в объеме программы технических вузов высшую математику и физику. Общетехническая подготовка включает дисциплины трех циклов: машиноведение, электрорадиотехника и обработка материалов.

Труд учителя технических дисциплин — сложная, но интересная и увлекательная работа. Она дает большое удовлетворение и возможности всем, кто имеет склонность к преподавательской деятельности, любит технику, увлекается техническим творчеством, созданием макетов и моделей или хочет научиться этому.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+y\sqrt{y}+2x^2:\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{x-2}(x^2-8x+15)}.$$

3. Решить уравнение

$$1.5\operatorname{ctg}x+4\sin x\cdot\cos x=\frac{3}{2}\operatorname{tg}(-x)-7.$$

4. Определить интервалы монотонности функции $f(x)=\frac{3-x^2}{x+2}$ и найти ее экстремумы.

5. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\log_{\frac{1}{3}}[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-$$
$$-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta]=0.$$

2. Решить уравнение
$25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34\cdot 15^{2x-x^2}$.

3. Решить неравенство

$$\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$ и $y-x=0$.

5. Длина ребра правильного тетраэдра равна c. Через середины двух ребер основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру, выходящему из их общей вершины. Вычислить площадь сечения.

Физика

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Груз массой $m=25$ кг висит на шнуре длиной $l=2,5$ м. На какую наибольшую высоту можно отвести груз в сторону, чтобы при дальнейших свободных качаниях шнур не оборвался? Прочность шнура на разрыв равна $|\vec{F}|=500$ Н.

2. В сосуде вместимостью $V=1$ л содержится $m=1,78$ г водорода при температуре $t=17$ °С. Найти давление газа в сосуде.

3. Емкости двух металлических шаров $C_1=15$ пФ и $C_2=30$ пФ, а заряды на них соответственно $q_1=2\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2=3,5\cdot10^{-8}$ Кл. Будут ли перемещаться заряды с одного шара на другой, если шары соединить проволокой?

4. Лифт массой $m=1,4$ т равномерно поднимается на высоту $h=20$ м. Опреде-

лить время подъема, если известно, что мотор лифта потребляет ток $I=40$ А при напряжении на зажимах $U=220$ В. КПД мотора $\eta=90\%$.

5. Расстояние от предмета до экрана равно $l=3$ м. Какой оптической силы нужно взять линзу и где следует ее поместить, чтобы получить изображение предмета, увеличенное в $\Gamma=5$ раз?

Физический факультет

1. В цилиндре, площадь основания которого $S=0{,}06$ м^2, находится воздух при температуре $t=10\,^\circ\mathrm{C}$ под давлением $p=5$ атм. На высоте $h=0{,}4$ м над основанием цилиндра расположен поршень. На сколько поднимется поршень и какая будет совершена работа при изобарическом нагревании воздуха на $\Delta t=35\,^\circ\mathrm{C}$?

2. Какой путь по силовой линии проходит α-частица ($m=6{,}67\cdot10^{-27}$ кг, $q=+3{,}3\cdot10^{-19}$ Кл) до полной остановки в однородном тормозящем электрическом поле с напряженностью $|\vec{E}|=2000$ В/м, если начальная скорость ее равна $|\vec{v}|=2\cdot10^{7}$ м/с?

3. В однородное магнитное поле с индукцией $|\vec{B}|=0{,}01$ Т перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с энергией $W=3\cdot10^{4}$ эВ. Каков радиус кривизны траектории движения электрона в поле? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

4. На какой угол отклоняется луч от первоначального направления, выходя из стекла (показатель преломления $n=1{,}57$) в воздух при угле падения $\alpha=30^\circ$? Может ли луч не выйти из стекла в воздух? Если — да, то при каком условии?

5. Какой скоростью обладают электроны, вырванные из цезия (работа выхода $A=1{,}9$ эВ) при облучении его светом с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкс? Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Г. Бордовский, К. Зобкова,
Е. Ярунина

Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева

Казанский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. А. Н. Туполева имеет шесть факультетов дневного обучения:

Факультет летательных аппаратов, старейший факультет института, созданный в 1932 году, готовит инженеров по специальностям: самолетостроение, летательные аппараты, динамика полета и управления летательными аппаратами.

Факультет двигателей летательных аппаратов, созданный в 1939 году, имеет наиболее квалифицированный преподавательский состав, который ведет обучение по четырем специальностям. Выпускники факультета занимают высокие руководящие посты в авиационной и других отраслях промышленности, в научных организациях и в высших учебных заведениях.

Факультет автостроения, открытый в 1970 году, готовит инженеров по четырем специальностям: автомобили и тракторы, двигатели внутреннего сгорания, технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты, машины и технология обработки металлов давлением. Выпускники факультета направляются на работу в конструкторские и технологические отделы машиностроительных и автосборочных заводов.

Факультет систем автоматического управления и оборудования летательных аппаратов был создан в 1951 году. Он готовит инженеров по специальностям: гироскопические приборы и устройства, авиационное приборостроение, электрооборудование летательных аппаратов, авиационное и автотракторное электрооборудование. Специалисты факультета находят применение своим знаниям не только в авиационной и ракетной технике, но и в технике управления любыми подвижными объектами, в проектировании, исследовании, эксплуатации приборов, информационных систем и комплексов по пилотажно-навигационным параметрам.

Радиотехнический факультет, созданный в 1951 году, готовит инженеров-электриков по специальностям: радиотехника, радиоэлектронные устройства и системы, конструирование и производство радиоаппаратуры.

Факультет вычислительных и управляющих систем выделился в отдельный факультет в 1972 году; на нем готовятся инженеры по четырем специальностям: электронные вычислительные машины, конструирование и производство электронной вычислительной аппаратуры, автоматизированные системы управления, прикладная математика.

Все факультеты института имеют студенческие конструкторские бюро (СКБ), где студенты принимают участие в научно-исследовательской работе. Например, в СКБ факультета летательных аппаратов студенты проектируют и строят планеры, дельтапланы, глиссеры и другие летательные аппараты.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой сторона основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

2. Решить уравнение

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

3. Решить уравнение
$\sin x+\sin 2x+\cos x+\cos 2x+1=0$.

4. Исследовать на экстремум функцию

$$y=\frac{(x-2)^2(x+4)}{4}.$$

5. Векторы $\vec{AB}=-3\vec{i}+4\vec{k}$ и $\vec{AC}=5\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Вариант 2

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, площадь которого равна S. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Двугранные углы при катетах ее основания равны α и β. Определить объем пирамиды.

2. Решить неравенство

$$\log_{x-2}\frac{x+6}{x+1}<1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right).$$

4. На графике функции $y=x^2-7x+3$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y=-5x+3$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=2$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $|\vec{v}_0|=16$ м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня будет равна его потенциальной энергии?

2. Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы массой $M=0{,}24$ кг каждый. На один из грузов положили гирьку массой $m=10$ г. На каком расстоянии друг от друга окажутся грузы через $t=2$ с, если в начале движения они находились на одной высоте?

3. В медном калориметре, масса которого $m_1=200$ г, содержится $m_2=150$ г воды при $t_1=18$ °С. Определить конечную температуру воды, если в калориметр опустили железный цилиндр массой $m_3=100$ г, нагретый до $t_2=50$ °С. Удельные теплоемкости меди, воды и железа равны соответственно $c_1=380$ Дж/(кг·К), $c_2=4200$ Дж/(кг·К) и $c_3=460$ Дж/(кг·К).

4. Сколько молей газа содержится в сосуде объемом $V=10$ л при температуре $t=27$ °С, если давление газа $p=760$ мм рт. ст?

5. В двух противоположных вершинах квадрата расположены положительные заряды, а в третьей вершине — отрицательный заряд. Найти напряженность электрического поля в четвертой вершине, если абсолютная величина каждого заряда равна $|q|=10^{-8}$ Кл, а сторона квадрата равна $a=50$ см.

6. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $|\vec{v}_0|=10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $|\vec{E}|=100$ В/см, длина конденсатора $l=5$ см. Найти абсолютную величину и направление скорости электрона перед вылетом его из конденсатора. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

7. Две электрические лампочки с сопротивлениями $R_1=200$ Ом и $R_2=100$ Ом включаются в сеть с напряжением $U=220$ В. Определить количество теплоты, выделяемое ежесекундно в каждой лампочке, если лампочки соединены: а) параллельно, б) последовательно.

8. В магнитном поле с индукцией $|\vec{B}|=1{,}2$ Т перпендикулярно магнитным линиям движется проводник длиной $l=6$ м со скоростью $|\vec{v}|=15$ м/с. Какая электродвижущая сила возбуждается в проводнике?

9. Мальчик старается попасть палкой в предмет, находящийся на дне ручья глубиной $h=40$ см. На каком расстоянии от предмета палка попадает в дно ручья, если мальчик, точно нацелившись, двигает палку под углом $\alpha=45°$ к поверхности воды? Показатель преломления воды $n=1{,}3$.

10. На каком расстоянии от сферического зеркала предмет, расположенный на оси, совмещается со своим изображением?

Д. Галимов, Э. Исхаков,
В. Печенкин

Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники

ТИАСУР основан в 1962 году на базе радиотехнического факультета Томского политехнического института. За годы работы институт подготовил более 10 тысяч квалифицированных специалистов. Выпускники института распределяются на крупные промышленные предприятия, в научные центры страны, конструкторские бюро, НИИ. Сейчас в институте около 4 тысяч студентов обучаются на четырех дневных факультетах: факультете систем управления (специальности: автоматизированные системы управления, автоматизация и механизация процессов и выдачи информации); радиотехническом факультете (радиотехника, радиоэлектронные устройства); факультете электронной техники (электронные приборы, физическая электроника, промышленная электроника) и конструкторско-технологическом факультете (конструирование и производство радиоаппаратуры, конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры).

Имеются вечерний и заочный факультеты (радиотехника, промышленная электроника, конструирование и производство радиоаппаратуры).

Учебные и научные лаборатории оснащены современным электронным оборудованием, широко используются в учебном процессе технические средства обучения, имеются вычислительные залы и вычислительный центр с современными ЭВМ, работает замкнутая система учебного телевидения.

Более двух третей студентов дневных факультетов занимаются научно-исследовательскими работами. При институте имеется НИИ автоматики и электромеханики, являющийся базой для подготовки научных и инженерных кадров.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти экстремумы функции

$$y=2x^3-6x^2-18x+7.$$

2. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0.$$

4. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α наклона боковой грани к плоскости основания.

Вариант 2

1. Число 36 разложить на два таких неотрицательных множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

2. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=$

$$=-\frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg x+7}{x^4}=10^{\lg x+1}$$

4. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Определить объем шара, вписанного в эту пирамиду.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Пуля вылетает из винтовки в горизонтальном направлении со скоростью $|\vec{v}|=750$ м/с. На сколько снизится пуля в вертикальном направлении за время полета, если цель находится на расстоянии $s=500$ м по горизонтали? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Самолет, летящий со скоростью $|\vec{v}|=360$ км/ч, описывает «мертвую петлю» радиусом $R=200$ м в вертикальной плоскости. Как велика сила, прижимающая летчика к сиденью, в наивысшей и наинизшей точках петли, если масса летчика $m=70$ кг?

3. Пароход, войдя в гавань, выгрузил часть груза; при этом его осадка уменьшилась на $h=0{,}6$ м. Сколько груза оставил пароход в гавани, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии $S=$ $=5400$ м^2?

4. На какую высоту необходимо подняться вверх, чтобы давление атмосферы уменьшилось на $\Delta p=1$ мм рт. ст.? Плотность воздуха по высоте считать постоянной и равной $\rho=1{,}3$ кг/м^3.

5. По цепи, состоящей из источника тока с ЭДС $\mathscr{E}=6$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом и реостата, идет ток $I=0{,}5$ А. Какой величины пойдет ток при уменьшении сопротивления реостата в два раза?

6. Амперметр имеет сопротивление $R_A=0{,}02$ Ом, его шкала рассчитана на ток $I=1{,}2$ А. Какого сопротивления шунт надо поставить к нему, чтобы можно было измерять токи до $I_1=6$ А?

7. На какую длину волны настроен радиоприемник, если его приемный контур обладает индуктивностью $L=3\cdot10^{-3}$ Г и емкостью $C=3\cdot10^{-9}$ Ф?

8. Красная граница фотоэффекта для вольфрама равна $\lambda_{кр}=2{,}75\cdot10^{-7}$ м. Найти наибольшую скорость электронов, вырываемых из вольфрама светом с длиной волны $\lambda=1{,}75\cdot10^{-7}$ м. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=$ $=9\cdot10^{-31}$ кг.

В. Замотринский

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на доступные школьникам книги по математике и физике, вышедшие во II квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Игнатьев Б. И. *В царстве смекалки.* Издание 3-е, стереотипное. Объем 10 л., тираж 300 000 экз., цена 40 к.

Подробную рецензию на эту книгу по занимательной математике см. в «Кванте», 1978, № 11, с. 54.

2. Маркушевич А. И. *Ряды.* Издание 4-е. Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 10 к.

Цель книги — в доступной и свободной форме познакомить старшеклассников с отделом математики, который Коши называл алгебраическим анализом. Речь идет о понятии ряда, об основных свойствах рядов (в частности, об их сходимости), а также об изображении элементарных функций рядами (без помощи формулы Тейлора).

В книге объясняется, как составляются таблицы тригонометрических и логарифмических функций, показывается, что значения этих функций можно получать, производя над аргументом одни лишь арифметические действия. Правда, число этих действий неограничено и, чем больше их производить, тем более точные значения функций будут получаться. В книге рассказывается также о том, как ряды позволяют находить приближенные выражения тригонометрических и логарифмических функций в виде многочленов, причем ошибка при замене функции многочленом может быть сделана сколь угодно малой.

В книге содержится много интересных и поучительных сведений из истории математики. Все изложение построено в виде связного повествования, главным героем которого является биноминальный ряд. Читателю, не боящемуся выкладок, предоставляется возможность проследовать путями, которыми шли Ньютон, Эйлер, Лагранж, Коши, много сделавшие для того, чтобы приучить математиков обращаться с рядами так же свободно и легко, как с многочленами. В то же время читателю объясняется, что ряды — это не многочлены и что осмысленное их употребление основывается на теории пределов.

3. Маркушевич А. И. *Площади и логарифмы.* Издание 2-е. Объем 3 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

В книге излагается геометрическая теория логарифмов — логарифмы появляются в ней как некоторые площади. Все свойства логарифмов, а также способы их вычисления выводятся из свойств площадей. Попутно автор знакомит читателей с простейшими понятиями и свойствами интегрального исчисления, не используя понятия производной.

От читателя требуется лишь первоначальное знакомство с простейшими функциями и их графиками, с геометрической прогрессией и понятием предела.

4. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. *Рассказы о прикладной математике.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В книге в популярной форме рассказывается о прикладной математике, о применении ЭВМ к решению прикладных задач. Основное внимание уделяется трем вопросам: построению математических моделей изучаемых объектов, разработке численных алгоритмов для их исследования и проблеме оптимизации.

Книга предназначена для читателей, которые захотят познакомиться с идеями и методами современной прикладной математики.

5. Успенский В. А. *Треугольник Паскаля.* Издание 2-е, дополненное. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

Треугольник Паскаля («Алгебра и начала анализа 9», п. 7) — это не геометрический треугольник с тремя углами и тремя сторонами. Треугольником Паскаля называют бесконечную числовую таблицу «треугольной формы», в которой по боковым сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух чисел, стоящих над ним. (В такой форме треугольник Паскаля появился в сочинении Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», изданном в 1665 году.) В книге рассказывается про треугольные и пирамидальные числа, которые вызвали интерес еще в Древней Греции, где им приписывались мистические свойства. Выводится формула Ньютона и формула для числа C_n^k. Показывается применение треугольника Паскаля при решении задач комбинаторного характера.

Изложение не предполагает каких-либо предварительных знаний, выходящих за рамки программы восьмилетней школы.

6. Пидоу Д. *Геометрия и искусство.* Перевод с англ. Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 96 к.

Даниэл Пидоу — известный американский математик, специалист по алгебраической геометрии. В оригинале его книга называется «Геометрия и свободные искусства». В средние века геометрия изучалась наряду с изобразительным искусством и архитектурой. В книге как раз и идет речь о том, какие пересечения существуют между геометрией и живописью, геометрией и архитектурой, обсуждается, что есть общего между эстетикой, зрительным восприятием и математикой, исследуется вопрос, каким образом математика может помочь изобразительному искусству.

В книге излагается теория перспективы, обсуждается вопрос, верно ли на картинах изображается сфера, и более общий вопрос — как вообще на плоскости изобразить трехмерное пространство. Последняя, восьмая, глава книги посвящена проективной геометрии.

Физика

Издательство «Наука»

1. Струков А. Б. *Сегнетоэлектричество.* Объем 15 л., тираж 30 000 экз., цена 20 к.

В книге рассматриваются основные свойства сегнетоэлектрических кристаллов и излагаются основополагающие представления феноменологической и микроскопической теории сегнетоэлектричества.

Рассматриваются также некоторые возможности применения сегнетоэлектриков в технике.

Книга доступна школьникам старших классов.

2. Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга II. Издание 20-е, исправленное. Объем 15 л., тираж 500 000 экз., цена 50 к.

Эта книга не является прямым продолжением ранее изданной первой книги (см. «Квант», 1979, № 4). Написанная известным популяризатором науки, она не столько сообщает читателю новые знания, сколько помогает ему оживить те знания и представления, которые читатель получает из курса средней школы.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

3. Горбацкий В. Г. *Космические взрывы.* Издание 3-е, переработанное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

Книга посвящена взрывным процессам в космосе. Автор подробно останавливается на том, что такое взрыв и как он возникает. Начиная рассмотрение с простых примеров — взрывов в двигателе внутреннего сгорания, он постепенно подводит читателя к взрывным процессам на Солнце, вспышкам звезд, взрывам в ядрах Галактик и квазарам.

Книга доступна школьникам старших классов.

4. Дагаев М. М. *Наблюдения звездного неба.* Издание 4-е. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

В книге рассказывается об ориентировании по звездному небу и об основных причинах изменения условий видимости созвездий на протяжении года. Описываются наиболее яркие объекты, доступные наблюдениям в малые телескопы. Приводятся методы простейших наблюдений планет, переменных звезд и метеоров, вполне доступные начинающим любителям астрономии. Специальный раздел посвящен описанию методов изготовления простейшего самодельного телескопа.

Книга рассчитана на начинающих любителей астрономии и может служить пособием в работе астрономических кружков.

5. Бронштэн В. А. *Планеты и их наблюдение.* Издание 2-е, переработанное и дополненное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

В книге в популярной форме, но на современном научном уровне рассказывается о природе планет Солнечной системы и их спутников, о методах их исследования, о задачах и способах их наблюдений любителями астрономии. Книга состоит из двух частей. В первой части сообщаются результаты исследования планет как методами наземной астрономии, так и с помощью космических аппаратов. Во второй части излагаются задачи и методика наблюдений планет средствами любителя астрономии и обработки этих наблюдений.

Книга рассчитана на любителей астрономии, членов астрономических кружков, учителей.

Издательство «Мир»

6. Лёзер Ф. *Тренировка памяти.* Перевод с немецкого. Объем 9 л., тираж 75 000 экз., цена 60 к.

Книга знакомит читателя с современными представлениями о важнейших механизмах памяти и методах ее тренировки. В книге приведены многочисленные тесты, примеры и иллюстрации.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

«Атомиздат»

7. Иойрыш А. И., Морохов И. Д. *Хиросима.* Объем 13 л., тираж 15 000 экз., цена 45 к.

Книга посвящена истории создания первой атомной бомбы. Она рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Просвещение»

8. Рыдник В. И. *О современной акустике.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 15 к.

В книге популярно и занимательно рассказывается о достижениях современной физической и архитектурной акустики, описывается использование инфразвуков и ультразвуков.

Книга доступна самому широкому кругу читателей.

9. Хазен А. М. *Поле, волны, частицы и их модели.* Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В живой, увлекательной форме автор рассказывает о фундаментальных объектах современной физической науки — полях, волнах, частицах, об использовании метода моделей при описании этих объектов. Анализируется роль математики в объяснениях явлений природы, приводится много исторических примеров и параллелей. Основное внимание обращается на выявление и описание глубокой взаимной связи между образами физической науки, на первый взгляд, противостоящими друг другу.

Книга рассчитана на школьников старших классов.

И. Клумова,
М. Смолянский

«Теория вероятностей» без теории

1. Надежность первой схемы:

$$p_1 = 0{,}7\times 0{,}8\times 0{,}9 = 0{,}504,$$

надежность второй схемы:

$$p_2 = 0{,}8\times 0{,}8\times 0{,}8 = 0{,}512,$$

надежность второй схемы больше.

2. Игре «испорченный телефон» соответствует схема из последовательно соединенных элементов, надежность которой получается перемножением надежностей составляющих элементов.

3. Если надежность мотора p, то надежности двух- и четырехмоторных самолетов равны соответственно

$$p_2 = 1-(1-p)^2,\ p_4 = 1-(1-p)^4.$$

4. Путь от входа к кладу содержит четыре развилки, три из которых имеют 2 продолжения, одна — 3. Поскольку лишь один из возможных путей ведет к кладу, а остальные к яме, то вероятность найти клад: 1/2× 1/2× 1/2× 1/3= 1/24, а вероятность погибнуть: 1—1/24=23/24.

5. Из аналогичных соображений вероятность найти клад, не петляя 1/8. Вероятность найти клад, сделав одну петлю, 1/8× 1/8 и т. д.

Итак, вероятность когда-нибудь найти клад равна

$$p = 1/8 + 1/8\times 1/8 + 1/8\times 1/8 + \ldots = 1/7$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Глаз на вступительных экзаменах

1. $d_1' = 8{,}3$ см; $d_2' = 25$ см.

2. $d_{max} = 12$ см.
3. $F = 60$ см.
4. $D = 2$ дптр.

Нестандартные задачи по стереометрии

1. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$. Рассмотреть развертку пирамиды.

2. $\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\,40^\circ$. Выразить расстояния между серединами противоположных ребер пирамиды через длины ребер.

3. 68/3. См. решение задачи 3.

4. $2\sqrt{3}$. См. решение задачи 5.

5. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Показать, что условиями задачи пирамида определяется однозначно.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский институт стали и сплавов
Математика

Технологический факультет

1. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in Z,\ x\in \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

2. $\frac{8}{3}$. 3. 1. 4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$, $S = a^2(1+3\sin^2\alpha)$.

5. Длины сторон равны $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3}$. 2. $x\in[0;1]\cup[4;16]$. 3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ x_2 = \mathrm{arcctg}\,2 + k\pi,\ k\in Z$. 4. -24. 5. $\frac{\pi}{3}$.

Факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. $x\in]-1;\ 4[$. 2. $x_1 = k\pi,\ x_2 = -\mathrm{arctg}\,2 + k\pi,\ k\in Z$. 3. $\frac{+1}{\sqrt{3}}$.

4. $1/2\ \ln 2$. 5. Длины вектора равны: $\sqrt[6]{200}$; $2\sqrt[6]{200}$; $3\sqrt[6]{200}$.

Физико-химический факультет

1. $x\in]-7;\ -\sqrt{35}[\cup]5;\ \sqrt{35}[$.

2. $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n\in Z$. 3. Наибольшее значение $y(6) = 132$, наименьшее: $y(3) = -57$. 4. $B\left(-\frac{17+2\sqrt{307}}{27};\ \frac{71+2\sqrt{307}}{27};\ \frac{59-\sqrt{307}}{27}\right)$; $C\left(\frac{1}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{8}{3}\right)$ или $B\left(\frac{-17+2\sqrt{307}}{27};\ \frac{71-2\sqrt{307}}{27};\ \frac{59+\sqrt{307}}{27}\right)$; $C(-1;\ 3;\ 2)$.

Московский институт электронной техники

Математика

Вариант 1

1. $x_1 = \pi + 2\pi k,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

2. $\{10\}$. 3. 9. 4. $2a$. 5. $\vec{0}$.

Вариант 2

1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k\ (k \in \mathbf{Z})$. 2. $\{10,\ 10^4\}$.

3. $\frac{8}{9}$. 4. 1. 5. $\vec{c}_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $\vec{c}_2 = \left(-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$.

Физика

1. Натяжение нити будет больше во втором случае.

2. См. рис. 1 (α_0 — угол, при котором груз начнет скользить по плоскости).

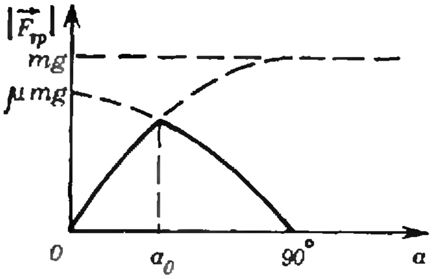


Рис. 1.

3. $T = \sqrt{6\pi/(\gamma\rho)} \approx 160$ мин.

4. $n = \frac{4}{\lg(1 + V/V_0)}$.

5. В системе единиц СГСЭ $r = \frac{4e^2}{m|\vec{v}|^2} \approx 2{,}5\cdot10^{-8}$ см.

6. $\varphi' = \varphi\frac{R_1}{R_2}$.

7. $q = \frac{pVFz\mu}{3ART} \approx 5\cdot10^3$ Кл (здесь $F = 96\,500$ Кл/моль — число Фарадея, $z = 2$ — валентность водорода, $\mu = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода, $A = 10^{-3}$ кг/моль — его атомная масса).

8. $t/T = l\nu\tau = 5\cdot10^{-2}$.

9. $H = nh = 2{,}66$ м.

10. $D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -2{,}25$ дптр (здесь $d_0 = 25$ см — расстояние наилучшего зрения для нормального глаза).

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

2. $\{5\}$. 3. Возрастает на $]-\infty;\ 1]$ и на $[2;\ +\infty[$, убывает на $[1;\ 2]$, при $x = 1$ имеет максимум, при $x = 2$ — минимум.

4. $[0;\ 2-\sqrt{2}[\cup]2+\sqrt{2};\ 6]$. 5. $]-\frac{3}{2};\ 1-\sqrt{3}[\cup]1+\sqrt{3};\ +\infty[$. Указание. Требуемые условия выполняются тогда и только тогда, когда $(x_1 + x_2) - x_1x_2 > 0$ и $f(1) > 0$.

Вариант 2

2. $\vec{c} = \left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

3. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $x_3 = 2\pi m\ (k, l, m \in \mathbf{Z})$. 4. $h = \sqrt[4]{3}$ дм, $P = \frac{8}{\sqrt[4]{3}}$ дм. 5. $\frac{h^3\sqrt{\cos(\beta+\varphi)\cdot\cos(\beta-\varphi)}}{\sin 2\beta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\beta}$.

Вариант 3

1. $]-\infty;\ -4[\cup]\frac{7}{2};\ +\infty[$. 2. $\left\{\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi\right\}$. 3. $\left(\frac{3}{2};\ \frac{13}{4}\right)$. 4. $\frac{\sqrt{51}}{3}$. Указание. См. § 22 «Геометрии 9». 5. $M \cap N \neq \varnothing$ при $a \in]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$. При $a < 0$

$$M \cap N = \left]\frac{1}{1-a};\ -\frac{3a^2}{a-3} + 1\right[.$$

Физика

Вариант 1

2. $v_{ср} = 2v_м/\pi \approx 6{,}4$ м/с.

3. $I_м = \mathscr{E}_м/R$

4. $p = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$.

5. $F = f/3 = 8$ см.

Вариант 2

2. $|\vec{F}_{t_1}| = 6m\alpha t_1$; $W_{t_2} = m\,(3\alpha t_1^2 + \beta)/2$.

3. $q = 3eN_0m/\mu \approx 10^7$ Кл $t = q/I \approx 10^7$ с.

4. $A = p_1(V_2 - V_1) + \alpha_1(V_2^2 - V_1^2)/2 + \alpha_2(V_2^3 - V_1^3)/3$.

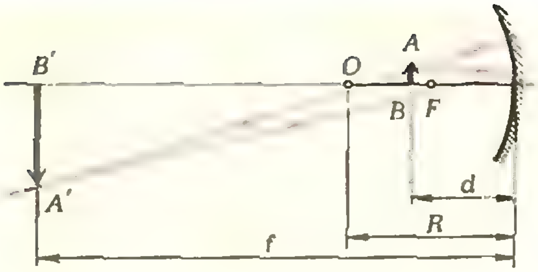


Рис. 2.

5. $f = \frac{Rd}{2d-R} = 15$ см (см. рис. 2);

$\Gamma = \frac{f}{d} = 5$.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{1}{8}$. 2. $\left\{\left(\sqrt[4]{3};\ 1\right),\ \left(\sqrt[4]{3};\ -1\right)\right\}$.

3. $\sqrt{3}-1$. 4. $\left\{-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right\}$. 5. Если основание равнобедренного треугольника, полученного в сечении, лежит на плоскости $ABCD$, то $S = \frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$; если оно лежит на плоскости CDD_1C_1 (или на плоскости BCC_1B_1), то $S = \frac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

Вариант 2

1. $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$. 2. $]100;\ +\infty[$.

3. $\frac{1}{4}$. 4. $\left\{-\pi,\ -\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right\}$. 5. $\frac{\pi}{24h}(16S^2 + h^4\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha + 6Sh^2 \times \mathrm{ctg}\,\alpha)$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $n = 2/3 \approx 0{,}67$.

3. $A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = 8{,}1\cdot 10^{-10}$ Дж.

4. $|\vec{v}_1| = \sqrt{\frac{2W}{3m}} = 25{,}8$ м/с; $|\vec{v}_2| = 3|\vec{v}_1| = 77{,}4$ м/с.

5. $T_0 = T + \frac{A\mu}{mR} \approx 254$ К; $V_0 = \frac{mRT_0}{\mu(p_0 + Mg/S)} \approx 0{,}024$ м³.

Задачи устного экзамена

1. $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \times \frac{mg - |\vec{F}|\sin\alpha_2}{mg - |\vec{F}|\sin\alpha_1}\right) \approx 0{,}78$ м/с².

2. $l_{O_2} = l/17 \approx 0{,}06$ м; $l_{H_2} = 16l/17 \approx 0{,}94$ м.

3. $m = \frac{qQ}{\varepsilon_0 Sg} \approx 0{,}0115$ кг $= 11{,}5$ г.

4. $U = \sqrt{PR/\eta} = 12\,500$ В $= 12{,}5$ кВ.

5. $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2c^2\varepsilon_0 LS} \approx 6$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $\left\{-\frac{9}{2},\ 3\right\}$. 3. $\frac{1}{3}\pi a^3\cdot\frac{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\sin^3(\beta+\gamma)}$.

4. $x_1 = \frac{\pi}{2}k,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k,\ l \in \mathbf{Z})$.

5. Радиус основания равен $R\sqrt{2}$, высота — $4R$.

Вариант 2

2. $\{9\}$. 3. $\frac{S}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right)$. Указание. См. § 50 «Геометрии 10». 4. $x_1 = 2\pi k,\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}l$ $(k,\ l \in \mathbf{Z})$. 5. Нигде (функция f убывает на $\mathbf{R}$).

Устный экзамен

Билет 1

2. $\varnothing$. 3. На $[-1;\ 0[$ и на $]0;\ 1]$.

4. $\left]-\infty;\ \log_2\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right[\cup \left]\log_2\frac{5+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right[$.

Билет 2

2. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. 4. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Физика

1. $h_{\max} = \frac{|\vec{v}_0|^2\sin^2\alpha}{2g} = 15$ м; $s_{\max} = \frac{|\vec{v}_0|^2\sin 2\alpha}{g} \approx 35$ м.

2. $\left|\vec{F}_{\min}\right| = \dfrac{mg}{k} = 500$ Н.

3. $\left|\vec{u}\right| = \dfrac{m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}\left|\vec{v}\right| \approx 1{,}25$ м/с.

4. $V_1 = \dfrac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_3 - \rho_1} V_2 = 1{,}7$ м³.

5. $\alpha = \dfrac{h_2 - h_1}{h_1 t_2 - h_2 t_1}$.

6. $m_2 = \dfrac{m_1}{c_2(\theta - t_2)}\left[c_1(t_1 - t_0) + \lambda + \right.$ $\left. + c_2(t_0 - \theta)\right] \approx 40$ кг.

7. $\mathscr{E} = \left|\vec{B}\right| l \left|\vec{v}\right| = 1$ В.

8. $L = \dfrac{Fl}{d - F} = 0.22$ м.

9. $F = \dfrac{lf}{L + l} \approx 15{,}4$ см.

10. $d = -\dfrac{1}{D} = 0{,}2$ м.

Московский геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. Лошадь — 2 га, трактор — 4 га. 2. 15—16 ln 2.

3. $\dfrac{p^3}{24} \cdot \dfrac{\sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi}{(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)^3}$. 4. $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2} l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

Вариант 2

1. Средняя скорость на всем пути равна 35 км/час. Решение. Обозначим искомую скорость через x (км/час), протяженность второго участка через y (км), протяженность третьего участка через z (км). Тогда

$$\frac{6z}{x-2} + \frac{y}{x} + \frac{z}{2x-15} = \frac{6z + y + z}{x},$$

или

$$\frac{6z}{x-2} + \frac{z}{2x-15} = \frac{7z}{x},$$

или

$$\frac{6}{x-2} + \frac{1}{2x-15} = \frac{7}{x}.$$

Отсюда $x_1 = 35$, $x_2 = 6$. Второй корень не годится, так как $2x_2 - 15 < 0$.

2. $3\dfrac{8}{15}$. 3. $\dfrac{1}{3}a^3 \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi$.

Указание. Если S — вершина данной пирамиды и O — точка пересечения высот ее основания, то $|SO|$ — ее высота.

4. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Физика

1. $\dfrac{Q}{E_{к}} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} 100\% = 75\%$.

2. $\Delta l = l\left[1 - \dfrac{l^2}{(l + \Delta l)^2}\right] \approx 0{,}08$ м.

3. $q = \dfrac{\pi d^2 nC}{4} \dfrac{\left|\Delta\vec{B}\right|}{\Delta t} = 1{,}95 \cdot 10^{-7}$ Кл.

4. $\alpha = 35°$.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $x = 2$. 2. 8. 3. $x \in]-\infty; -3[\cup]-2; -1[$. 4. $x \in [-1; 0[\cup]0; 1]$.

Вариант 2

1. $x = \dfrac{3}{2}$. 2. $x = \dfrac{2\pi n}{3}$; $x = 2\pi n - \dfrac{\pi}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

3. $x \in]-\infty; -4[\cup [-1; 1] \cup]4; \infty[$. 4. $z = 4$. 5. $S = 1$ кв. ед.

Вариант 3

1. $x = 100$. 2. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$. 3. $x \in]0; \dfrac{8}{5}[\cup]\dfrac{5}{2}; \infty[$.

4. $z = 3$. 5. $-\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$.

Физика

1. $A = m\left(\left|\vec{v}_2\right|^2 - \left|\vec{v}_1\right|^2\right)/2 + \left|\vec{F}_{тр}\right| l = 36$ Дж.

2. $\rho = \dfrac{p\mu}{RT} \approx 180$ кг/м³; $T_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho} T = 342$ К ($t_1 = 69°$ С).

3. $c_1 = \dfrac{c_2 m_2 (t_2 - \theta)}{m_1(\theta - t_1)} - \dfrac{C}{m_1} \approx 2{,}17$ кДж/(кг·К).

4. Расстояние между зарядами надо увеличить в 2 раза.

5. $R_{доп} = \dfrac{U_0 - U}{4I} = 2$ Ом.

6. $|\vec{v}_{\max}| = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}}\right)} \approx$ $\approx 4{,}8 \cdot 10^5$ м/с.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (математический факультет)

Математика

Вариант 1

1. 3 л. 2. $\frac{8}{3}$. 4. $|AC| = |BD| = 5$, $[AC] \cap [BD] = \left(\frac{5}{2}; 1; 1\right)$. 5. $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Вариант 2

1. 23. 2. $\frac{15}{4} - \ln 2$ 4. $\arccos\frac{63}{\sqrt{6441}}$. 5. $\arccos\frac{1}{3}$.

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Математика

Математический факультет

1. $12 - 5\ln 5$. 2. Указание. При гомотетии с центром $[AC] \cap [BD]$ и коэффициентом $-\frac{|CD|}{|AB|}$ квадрат, построенный на $[AB]$, перейдет в квадрат, построенный на $[CD]$. 3. $]-3; -1[$. 4. $x_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. 5. Отношение объемов «верхнего» и «нижнего» многогранников равно $\frac{3}{5}$.

Физический факультет

1. $y = -x - \frac{1}{4}$. 2. $\sqrt{7}$. 3. $]\frac{1}{3}; 2[$. 4. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. 5. $\frac{9}{4}a^2$. Указание. См. § 50 «Геометрии 10».

Физика

1. $t = 2l/|\vec{v}| \approx 29$ с; $|\vec{a}| = |\vec{v}|/t \approx$ $\approx 2{,}4$ м/с^2; $v_{\text{ср}} = |\vec{v}|/2 = 125$ км/ч ≈ 35 м/с.

2. $|\vec{v}'| = \frac{m_1|\vec{v}|}{m_1 + m_2} = 0{,}9$ м/с.

3. $A = \mu mg|\vec{v}|t \approx 1{,}8 \cdot 10^6$ Дж

4. $\theta = \frac{\lambda m_2 + c(m_1t_1 + m_2t_2)}{c(m_1 + m_2)} \approx 32$ °C.

5. $\theta = \frac{1}{c_1m_1 + c_2(m_2 + m_3)} \times$ $\times [(c_1m_1 + c_2m_2)t_1 + (c_2t_2 - \lambda)m_3] \approx 14$ °C.

6. $|\vec{F}| = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \approx 0{,}074$ Н; $r_1 =$ $= \sqrt{\varepsilon}r \approx 0{,}3$ м.

7. $|\vec{v}| = \sqrt{2eU/m} \approx 12 \cdot 10^6$ м/с.

8. $r = \mathscr{E}/I - R = 3$ Ом; $Ir = 0{,}9$ В.

9. $F = d/2 = 15$ см.

10. $A = hc/\lambda - W \approx 3{,}42 \cdot 10^{-19}$ Дж; $\lambda_{\max} = hc/A \approx 5{,}8 \cdot 10^{-7}$ м.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. $[4-\sqrt{2}; 3[\cup]4+\sqrt{2}; +\infty[$. 3. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$ $(k \in \mathbf{Z})$. 4. На промежутках $]-\infty; -3]$ и $[-1, +\infty[$ функция f убывает, на промежутках $]-3; -2[$ и $]-2; -1]$ она возрастает, точка -3 является точкой ее минимума, точка -1 — точкой максимума 5. $\arccos\frac{4}{5}$.

Вариант 2

2. $\{1-\sqrt{3}, 0, 2, 1+\sqrt{3}\}$. 3. $]\frac{3}{4}; 1[\cup]1; +\infty[$. 4. $4\frac{1}{2}$. 5. $\frac{1}{4}c^2$.

Физика

Математический факультет

1. $h_{\max} = \frac{l}{2}\left(\frac{|\vec{F}|}{mg} - 1\right) \approx 1{,}3$ м.

2. $p = \frac{mRT}{\mu V} \approx 2{,}14 \cdot 10^6$ Па

3. Поскольку потенциал первого шара больше потенциала второго, заряды будут перемещаться с первого шара на второй до тех пор, пока потенциалы шаров не уравняются.

4. $t = \frac{mgh}{\eta IU} \approx 35$ с.

5. $d = \frac{l}{1 + \Gamma} = 0{,}5$ м; $D = \frac{1 + \Gamma}{d\Gamma} =$ $= 2{,}4$ дптр.

Физический факультет

1. $\Delta h = h\dfrac{\Delta T}{T} \approx 0{,}05$ м; $A = p\Delta hS \approx$ ≈ 150 Дж.

2. $s = \dfrac{m\left|\vec{v}\right|^2}{2q\left|\vec{E}\right|} \approx 2{,}1\cdot 10^3$ м.

3. $R = \dfrac{\sqrt{2mW}}{e\left|\vec{B}\right|} \approx 5{,}8\cdot 10^{-2}$ м.

4. $\varphi = \arcsin(n\sin\alpha) - \alpha \approx 22^\circ$; луч не выйдет из стекла в воздух при углах падения $\alpha \geqslant \arcsin(1/n) \approx 40^\circ$.

5. $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right)} \approx 4{,}5\cdot 10^5$ м/с.

6. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{e\left|\vec{E}\right| l}{m\left|\vec{v}_0\right|^2} \approx 41^\circ$; $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\left|\vec{v}_0\right|}{\cos\alpha} \approx 1{,}33\cdot 10^7$ м/с.

7. а) $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1} = 242$ Вт, $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2} = 484$ Вт; б) $P_1 = \dfrac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2} \approx 107{,}6$ Вт, $P_2 = \dfrac{U^2R_2}{(R_1+R_2)^2} \approx 53{,}8$ Вт.

8. $\mathscr{E} = \left|\vec{B}\right| l \left|\vec{v}\right| = 108$ В.

9. $x = h\ (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = 14$ см (здесь $\beta = \arcsin(\sin\alpha/n)$).

10. Предмет совмещается со своим изображением в центре кривизны зеркала.

Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. 2. $]1-\sqrt{33},\ 2[$. 3. $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$. 4. $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума. 5. $\sqrt{18}$.

Вариант 2

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}S\sqrt{S}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. 2. $]2;\ 3[\,\cup\,]4;\ +\infty[$. 3. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k\ (k \in \mathbb{Z})$. 4. $(1;\ -3)$. 5. $\dfrac{1}{3} + \ln 2$.

Физика

1. $h = \dfrac{\left|\vec{v}_0\right|^2}{4g} = 6{,}5$ м.

2. $l = \dfrac{mgt^2}{2M+m} = 0{,}8$ м.

3. $\theta = \dfrac{t_1(c_1m_1 + c_2m_2) + c_3m_3t_2}{c_1m_1 + c_2m_2 + c_3m_3} \approx$ $\approx 20^\circ$C.

4. $\nu = \dfrac{pV}{RT} = 0{,}4$ моля.

5. $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{|q|(2\sqrt{2}-1)}{8\pi\varepsilon_0a^2} \approx$ $\approx 3{,}3\cdot 10^{\text{[illegible]}}$ В/м.

Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники

Математика

Вариант 1

1. $x = -1$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. 2. $x_1 = \dfrac{\pi}{5}k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$. 3. $]-\infty;\ 2\dfrac{1}{3}[\,\cup\,]3;\ +\infty[$.

4. $6\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\cdot\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Вариант 2

1. $36 = 6\cdot 6$. 2. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$. 3. $\left\{\dfrac{1}{10^4},\ 10\right\}$. 4. $\dfrac{\pi a^3}{6}\cdot\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\dfrac{\varphi}{2}$.

Физика

1. $h = \dfrac{gs^2}{2\left|\vec{v}\right|^2} \approx 2{,}2$ м.

2. $\left|\vec{F}_1\right| = m\left(\left|\vec{v}\right|^2/R - g\right) \approx 2800$ Н; $\left|\vec{F}_2\right| = m\left(\left|\vec{v}\right|^2/R + g\right) \approx 4200$ Н.

3. $m = \rho_{в}Sh = 3{,}24\cdot 10^6$ кг $= 3240$ т (здесь $\rho_{в} = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

4. $h = \dfrac{\Delta p}{\rho g} \approx 10{,}4$ м.

5. $I_1 = \dfrac{2\mathscr{E}I}{Ir + \mathscr{E}} \approx 0{,}86$ А.

6. $R_ш = \frac{R_A I}{I_1 - I} = 5$ мОм.

7. $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 5652$ м (здесь $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме).

8. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_{кр} - \lambda)}{m\lambda\lambda_{кр}}} \approx 9{,}6\cdot 10^5$ м/с.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Две нижние спички от последней елки нужно переложить к первой — см. рисунок 3.

2. Поскольку даже $5\cdot 31\cdot 12 < 1900$, день недели — шестой или седьмой. Предположив, что день недели — шестой, получим

$$6\cdot 29\cdot 11 = 1914,\quad 6\cdot 30\cdot 11 = 1980,$$
$$6\cdot 27\cdot 12 = 1944,\quad 6\cdot 28\cdot 12 = 2016,$$

что невозможно. Если же день недели — седьмой, то из равенств

$$7\cdot 27\cdot 10 = 1890,\quad 7\cdot 28\cdot 10 = 1960,$$
$$7\cdot 25\cdot 11 = 1925,\quad 7\cdot 26\cdot 11 = 2002,$$
$$7\cdot 23\cdot 12 = 1932,\quad 7\cdot 24\cdot 12 = 2016$$

находим: $7\cdot 28\cdot 10 = 1960$. Таким образом, Вадим и Коля играли в шахматы в воскресенье; Надя родилась 28 октября 1960 года.

3. Задача имеет одно решение: 144.

4. Сложив числа 3, 17 и 18, стоящие в одном ряду, получаем сумму 38. Тогда между числами 3 и 16 должно стоять 19, между 16 и 10 — число 12 и т. д., пока не получим заполнение, изображенное на рисунке 4. Найдем числа a, b и c, указанные на этом рисунке. Так как $10 + a + b + 1 + 18 = 38$, получаем $a + b = 9$, а из того, что $16 + 2 + b + c + 9 = 38$, следует, что $b + c = 11$. Но $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$, а $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 6 + 5$. Из этих пар допустимы лишь $9 = 4 + 5$ и $11 = 5 + 6$, так как в других парах хотя бы одно число уже было использовано для заполнения шестиугольника. Отсюда следует, что $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$. Теперь нетрудно заполнить оставшиеся клетки. Окончательный вид шестиугольника изображен на третьей странице обложки.

5. Поскольку разность баллов, полученная за один тест, равная $97 - 73 = 24$ очкам, вызывает изменение среднего балла на $90 - 87 = 3$ очка, в серии профессора Тестера содержится $24/3 = 8$ тестов.

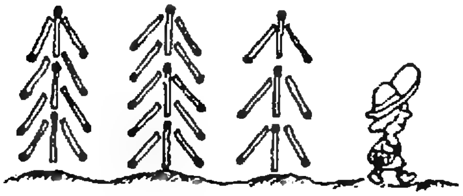


Рис. 3.

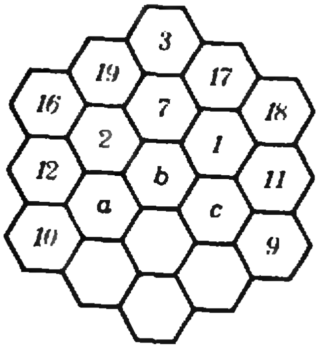


Рис. 4.

Задачи наших читателей

(см. с. 8, 15)

2. Указание а) $S_{AMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{2}|AM|\ |CM| \sin AMC$;

б) воспользуйтесь теоремой синусов.

1. Указание. Если ни a, ни b не делятся на 5, то a^4 и b^4 дают при делении на 5 в остатке 1.

2. Указание. Исследуйте делимость данных чисел на 3.

3. а) $\overline{abc} = 144$; б) $\overline{abc} = 118$; в) $\overline{abc} = 145$.

4. $10^{n+1} + 1$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Э. Назаров, И. Смирнова, В. Чернов

Зав редакцией Л. Чернова

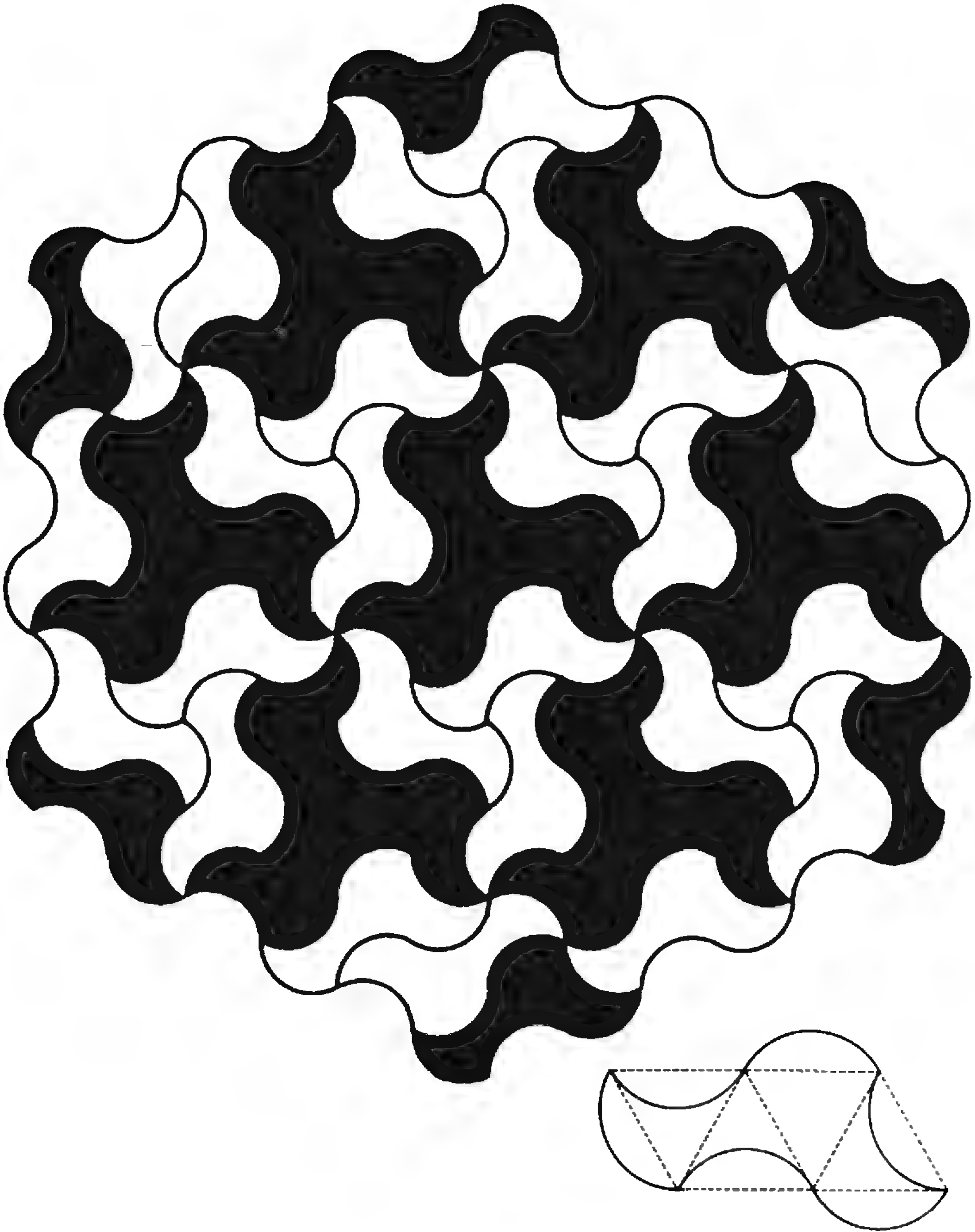
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

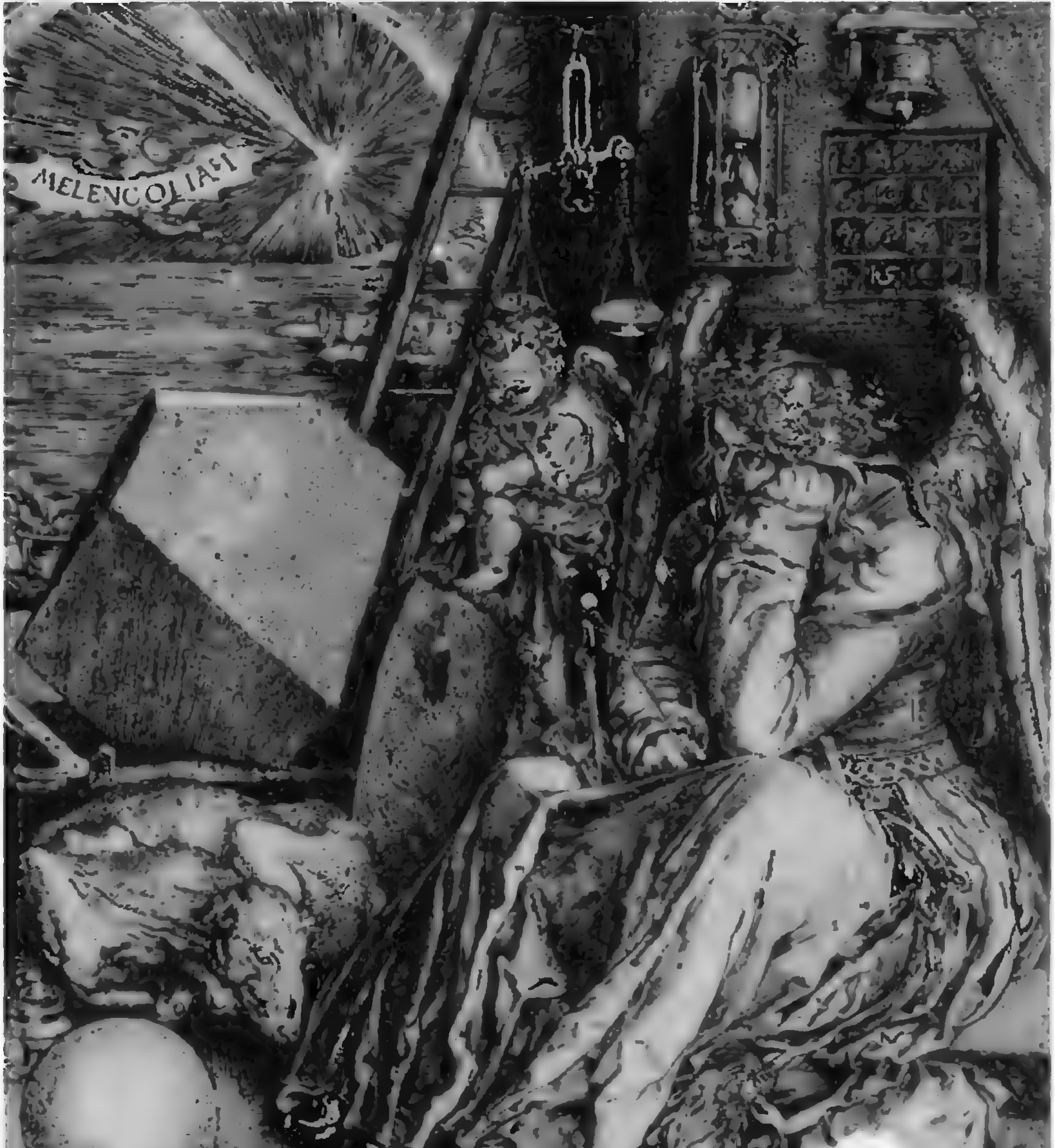
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 31/III—79
Подписано в печать 14/V—79
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,16 Т-08984
Цена 30 коп Заказ 708
Тираж 287 425 экз.

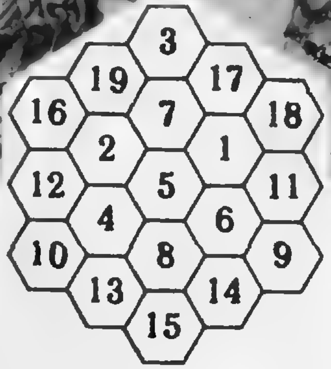
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



Этот красивый паркет из криволинейных плиток получен деформацией обычного шестиугольного паркета из правильных шестиугольников. Как легко видеть, его можно продолжить на всю плоскость. Как устроены отдельные плитки, показано на схеме вверху. Стороны треугольников заменены дугами описанных около них окружностей.





Магический шестиугольник

С давних времен были известны так называемые *магические квадраты*. Числа от 1 до n^2, записанные в клетках таких квадратов (размером $n \times n$), расположены так, что их суммы в любом горизонтальном или вертикальном ряду, а также по обеим диагоналям одинаковы. Один из магических квадратов размером 4×4 изображен в правом верхнем углу гравюры А. Дюрера «Меланхолия». Как вы думаете — сколько существует таких квадратов? Оказывается, 880. А магических квадратов размером 5×5? Их около 250 000.

Здесь же изображен «магический шестиугольник»: в его клетках записаны числа от 1 до 19 так, что и в каждом из пяти вертикальных рядов, пяти наклонных «слева сверху — вниз направо» и пяти наклонных «справа сверху — вниз налево» сумма чисел одна и та же. Сколько существует таких «магических шестиугольников»? Электронно-вычислительная машина, проверив (в течение сорока двух минут) 196 729 шестиугольников, обнаружила, что этот шестиугольник является единственным! (Конечно, с точностью до поворотов и симметрий.)

Это утверждение доказал Чарльз Тригг — см. недавно вышедшую у нас книгу «Задачи с изюминкой» (М., «Мир», 1976).

Индекс 70465
Цена 30 коп.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В каждом номере нашего журнала в разделе «Задачник «Кванта» публикуются задачи по физике и математике. Ежегодно редакция получает несколько тысяч писем от читателей с решениями этих задач. Среди авторов этих писем редакция отбирает школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант», и получают право участвовать в Республиканских олимпиадах по математике и физике.

Придумать интересную новую задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам.

Школьники — авторы лучших задач будут награждены специальными премиями «Кванта», а сами задачи будут опубликованы в журнале.

Задачи должны присылаться вместе с решениями. Каждая задача должна быть представлена на отдельном листе.

Если задача заимствована, то должен быть указан источник, откуда она взята.

По задачам, не принятым к публикации, переписка с авторами не ведется и текст задач авторам не возвращается.

Ждем ваших писем.

К НАШИМ АВТОРАМ

Если Вы решили прислать нам статью, то просим Вас:

1) Перепечатать ее на машинке в двух экземплярах через два интервала и вписать от руки формулы (рукописный текст мы рассматриваем только в том случае, если автор его — школьник).

2) Нарисовать также в двух экземплярах эскизы рисунков (каждый эскиз — на отдельном листе).

3) Статья не должна содержать более 12 машинописных страниц.

4) Не забудьте сообщить нам полностью Ваши фамилию, имя и отчество, домашний адрес и телефон.

Напоминаем Вам, что рукописи мы не возвращаем.

НОМЕР
7

Основан в 1970 году

КВАНТ

7
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *В. Фабрикант.* Леонид Исаакович Мандельштам
9 *Л. Мандельштам.* Почему физика нужна инженеру?
14 *Л. Садовский, М. Аршинов.* Двоичное кодирование

Задачник «Кванта»

22 Задачи М571—М575; Ф583—Ф587
24 Решения задач М517—М519; Ф526, Ф530—Ф532
33 *Г. Курдюмов.* Консервативность бесконечного строя

По страницам школьных учебников

37 *А. Земляков.* Проверь себя
40 **«Квант» для младших школьников**
Задачи

Практикум абитуриента

41 *Г. Меледин.* Можно ли проверить ответ?

Варианты вступительных экзаменов

44 Московский автомобильно-дорожный институт
45 Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева
46 Московский институт химического машиностроения
47 Московский институт электронного машиностроения
49 Московский экономико-статистический институт
51 Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознамённое училище железнодорожных войск и военных сообщений им. М. В. Фрунзе
52 Ленинградский гидрометеорологический институт
53 Ленинградский институт точной механики и оптики
54 Ленинградский кораблестроительный институт
55 Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина
57 Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)
57 Саратовский политехнический институт
Наша обложка (*21*, *39*)
59 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*20*, *32*, *36*, *43*, 58)

На первой
странице обложки
показаны
две поверхности
— тор и «сфера
с тремя ручками»,
построенные
из конструктора,
о котором
можно прочитать на с. 21.

© Главная редакция физико-математической литературы
издательства «Наука», «Квант», 1979

В этом году исполнилось 100 лет со дня рождения Леонида Исааковича Мандельштама (1879—1944) — выдающегося советского физика, академика, замечательного педагога, создателя одной из крупнейших советских физических научных школ.

Мы помещаем в этом номере статью одного из учеников Мандельштама — академика АПН СССР В. А. Фабриканта, в которой он делится своими воспоминаниями о Л. И. Мандельштаме и рассказывает об одном из основных открытий этого замечательного ученого. Мы публикуем также, с небольшими сокращениями, вводную лекцию, прочитанную Л. И. Мандельштамом в 1918 году студентам Одесского политехнического института. Эта лекция была посвящена вопросу, который не утратил своей актуальности и сегодня, — зачем изучать физику будущему инженеру?

В. Фабрикант

Леонид Исаакович Мандельштам

Мандельштам — педагог

О Леониде Исааковиче Мандельштаме я, студент-первокурсник, впервые услышал в 1925 г. на заседании предметной комиссии по физике Московского государственного университета. В эту комиссию, наряду с преподавателями, входили и представители студентов. Председатель сообщил, что удалось пригласить для работы в МГУ очень крупного ученого, известного физика — Л. И. Мандельштама. Мы, студенты, естественно, были заинтригованы.

Вскоре начались знаменитые мандельштамовские семинары. Студент-старшекурсник С. Шубин, ставший потом видным физиком-теоретиком и почему-то опекавший меня, посоветовал ходить на эти семинары. Он сказал: «Поначалу ты мало что будешь понимать, но зато почувствуешь дух настоящей науки». Обе части его предсказания оправдались.

На семинарах Л. И. все было для нас необычно. Прежде всего — состав семинара. В нем участвовали не только студенты и аспиранты, но и многие наши преподаватели и совсем посторонние для нас, студентов, люди. В связи с этим семинары проводились в самой большой аудитории. «Взрослые» занимали первые скамьи в аудитории, несколько подальше сидели студенты.

На семинаре царила атмосфера доброжелательного внимания к высказываниям любого участника, независимо от его научного «ранга». Никто не боялся задавать «глупые» вопросы, многие из которых, после тщательного обсуждения, оказывались далеко не такими «глупыми», как это казалось сначала. Вместе с тем любая физическая ошибка выяснялась и критиковалась в четкой, но не обидной форме. Решающую роль в создании такой атмосферы доброжелательности и корректности играли личные качества Л. И. Словами трудно передать его обаяние. Каждая встреча с ним была для нас радостью. Когда по каким-либо причинам Л. И. отсутствовал на семинаре, студенты говорили «чай без сахара».

Обычно Л. И. предварял доклад кого-либо из участников семинара несколькими краткими замечаниями, а после доклада подводил итоги. Нас поражала его способность излагать самые сложные вопросы просто и, с другой стороны, умение обнаруживать сложности в простых, на первый взгляд, вопросах. Недаром в те годы у физиков появился термин «мандельштамовская ясность».

Когда на четвертом курсе подошла моя очередь выступать в качестве докладчика на семинаре, я лично убедился в том, какую большую работу проводили Л. И. и его сотрудники, готовя нас к выступлению. Сам Л. И. был блестящим лектором и докладчиком. Ученик его С. М. Рытов пишет в своих воспоминаниях: «Я много думал над тем, в чем «секрет» совершенно особого воздействия выступлений Л. И., того эмоционального подъема, который они всегда вызывали. Его лекции и доклады захватывали аудиторию, заставляли забывать обо всем на свете и переживать услышанное. Так бывает с лучшими произведениями театра или кино, вообще искусства. Но... «оружием» Л. И. было не краснобайство или «театральщина», а замечательное уменье поразить слушателей, задеть их за живое, зажечь интерес и заставить увидеть вопросы там, где, казалось бы, все уже ясно в силу сказанного ранее».

Я невольно, как бывший студент Л. И., начал с характеристики Мандельштама-педагога, но это отнюдь не означает, что для него преподавание было главным делом. Правильнее будет сказать, что у Л. И. трудно было провести четкую границу между исследовательской деятельностью и преподаванием.

Мандельштам — ученый

В 1929 г. Л. И. Мандельштам был избран академиком. Выдающийся ученый, он создал одну из самых крупных советских научных школ в области физики. Его ученики — академики А. А. Андронов и М. А. Леонтович, член-корреспондент С. М. Рытов, профессора Г. С. Горелик, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, С. П. Стрелков. Его близкие сотрудники — академики Г. С. Ландсберг и И. Е. Тамм. Нельзя не упомянуть о близком друге Л. И. академике Николае Дмитриевиче Папалекси, с которым он работал совместно 45 лет. Все это — крупные имена в науке. Сейчас успешно работают научные «внуки» и «правнуки» Л. И.

Для того чтобы было понятно, как складывался круг научных интересов Л. И., нужно привести некоторые краткие биографические данные. Окончив в 1897 г. гимназию с золотой медалью, Л. И. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Новороссийского университета. Однако в 1899 г., в связи со студенческими беспорядками, он был исключен из университета и уехал за границу, в Страсбург, где поступил на физико-математический факультет университета. Кафедру физики в этом университете занимал выдающийся ученый Ф. Браун, получивший в 1909 г. Нобелевскую премию за работы по радиотелеграфии. Он же был директором образцового для того времени физического института в Страсбурге.

Браун очень скоро оценил исключительные способности Л. И. и привлек его к научной работе в области физики электромагнитных колебаний. Первая научная статья Л. И. была посвящена определению времени затухания колебаний в контуре.

После окончания университета Л. И. в качестве ассистента Ф. Брауна продолжал активную исследовательскую работу, совмещая ее с участием в заводских испытаниях новой радиоаппаратуры. В этот период Л. И. сделал свое первое (из 60!) изобретение, позволившее существенно повысить чувствительность приемной радиоаппаратуры. Характерно, что это изобретение, имевшее большую практическую ценность, было сделано на основе проведенного Л. И. теоретического анализа.

Всю последующую жизнь Л. И. занимался главным образом физикой и техникой колебаний и волн самой различной природы, поразительно сочетая творческую деятельность в столь разнородных областях, как проблемы теоретической физики, тонкости физического эксперимента и решение конкретных инженерных задач. А. А. Андронов в докладе, посвященном первой годовщине со дня смерти Л. И., очень правильно сказал: «...в наше время резкого деления физиков на теоретиков и экспериментаторов, на «чистых» физиков и «технических» физиков, Л. И.— одновременно теоретик и экспериментатор, «чистый» физик и «технический» физик». К этим словам хочется добавить, что Л. И. умел ценить творческое начало в любой, даже очень далекой от науки и искусства области. Помню, с каким восхищением он говорил об изобретении застежки «молния», в то время — новинки, и интересовался, кто сделал это остроумное изобретение.

К страсбургскому периоду относится также полемика Л. И. со знаменитым уже в то время физиком, родоначальником квантовой теории Максом Планком. Л. И., несмотря на прирожденную скромность и мягкость характера, твердо стоял на том, что у Планка в работе, посвященной волновой теории распространения света в прозрачных средах, есть принципиальная ошибка. После длительной полемики Планк признал правоту Мандельштама. Этот эпизод интересен еще и тем, что здесь проявилась способность Л. И. находить аналогию между явлениями в далеких друг от друга областях физики. В споре с Планком, судя по всему, Л. И. была использована аналогия между соседними атомами среды с колеблющимися в них электронами и близко расположенными работающими радиоантеннами.

В те же годы Л. И. начал цикл работ по молекулярному рассеянию света.

Каждый знает, что в мутной среде, будь то туман или молочное стекло, свет рассеивается. Причиной рассеяния является оптическая неоднородность среды. Например, капельки воды, образующие туман, имеют показатель преломления, резко отличающийся от показателя преломления воздуха. Казалось бы, в чистом воздухе не должно быть рассеяния света. Однако это не так. То, что мы видим над собой голубое небо, есть результат рассеяния солнечного света молекулами воздуха земной атмосферы. (Недаром на очень высоких горах небо даже днем кажется темным.) Молекулярное рассеяние света происходит также из-за оптической неоднородности среды; но причиной этой неоднородности является хаотическое тепловое движение атомов или молекул. Это движение приводит к случайному возрастанию концентрации атомов или молекул в одних точках среды и убыванию в других. Такие отклонения плотности от среднего значения называются флуктуациями плотности. Эти флуктуации вызывают, в свою очередь, локальные изменения показателя преломления среды, и среда становится оптически неоднородной, рассеивающей свет. Л. И. в 1913 г. опубликовал работу о молекулярном рассеянии света при отражении от поверхности жидкости, обладающей шероховатостью опять-таки за счет хаотического теплового движения молекул. Эту работу, содержавшую и теорию явления, и описание эксперимента, Эйнштейн доложил на своем семинаре и прислал Л. И. открытку, в которой назвал работу «красивой».

В 1914 г., когда начала надвигаться угроза войны; Л. И. вернулся на родину.

Эффект Мандельштама—Бриллюэна

Продолжая размышлять над проблемами молекулярного рассеяния, Л. И. в 1918 г. пришел к выводу, что процесс рассасывания флуктуаций плотности в среде должен вызывать модуляцию амплитуды рассеянных флуктуациями световых волн. Всякая модуляция волн вызывает изменение их частоты. Например, при радиопередаче диктор, говоря в микрофон, модулирует со звуковыми частотами амплитуду радиоволн, и в излучении радиостанции кроме основной, несущей, частоты появляются боковые полосы частот.

Процесс возникновения и рассасывания флуктуаций можно представить как результат наложения упругих акустических волн, распространяющихся в среде по всевозможным направлениям со скоростью звука. Эти волны модулируют рассеянную веществом световую волну. Так что в рассеянном свете помимо основной, несущей, частоты ν_0 (частота падающего света) появляются дополнительные частоты $\nu_0+\Delta\nu$ и $\nu_0-\Delta\nu$, где $\Delta\nu$ — частота модулирующих акустических колебаний *). Относительное изменение частоты ($\Delta\nu/\nu$) равно отношению скорости звука в веществе к скорости света. Скорость звука даже в твердых кристаллах типа кварца составляет около $6\cdot10^3$ м/с, а скорость света — $3\cdot10^8$ м/с, так что относительное изменение частоты составляет тысячные доли процента. Таким образом, модуляция при рассеянии света на флуктуациях плотности — очень тонкий эффект. К этому надо добавить, что интенсивность молекулярного рассеяния весьма мала (10^{-6} или 10^{-7} от интенсивности падающего света).

Долгое время Мандельштам не имел возможности поставить тонкие эксперименты по проверке своего теоретического предсказания; поэтому он опубликовал соответствующую статью только в 1926 г. В 1922 г. появилась статья французского физика Бриллюэна, содержавшая часть теоретических результатов Л. И. Описанное явление было позднее экспериментально обнаружено и получило название эффекта Мандельштама — Бриллюэна. Однако до этого было сделано очень важное открытие.

Открытие комбинационного рассеяния света

В 1925 г., после прихода Л. И. в Московский университет, он, совместно с Г. С. Ландсбергом, приступил к экспериментам по исследованию молекулярного рассеяния света в кристаллах с целью обнаружить указанный выше эффект.

Трудности были весьма велики. Надо было прежде всего надежно выделить слабое молекулярное рассеяние, забиваемое обычно сильным рассеянием света на дефектах структуры кристаллов. Здесь Г. С. Ландсбергом был применен остроумный

---

*) Для знающих тригонометрию. Амплитуда модулированной с частотой $\Delta\nu$ волны может быть записана так: $A(t)=a[1+\cos(2\pi\Delta\nu\cdot t)]$. Тогда полное выражение для модулированной волны:

$$A(t)\cdot\cos(2\pi\nu_0\cdot t)=$$

$$=a[1+\cos(2\pi\Delta\nu\cdot t)]\cos(2\pi\nu_0\cdot t)=$$

$$=a\cos(2\pi\nu_0\cdot t)+\frac{a}{2}\cos[2\pi(\nu_0+\Delta\nu)t]+$$

$$+\frac{a}{2}\cos[2\pi(\nu_0-\Delta\nu)t],$$

т. е. модулированная волна равна сумме трех волн с частотами, указанными в тексте.

прием. С повышением температуры растет скорость теплового движения атомов, молекул или ионов вещества, а это приводит к росту величины флуктуаций. С ростом же величины флуктуаций увеличивается интенсивность молекулярного рассеяния. Вместе с тем рассеяние на дефектах кристалла не зависит от температуры. Поэтому повышение температуры образца позволяет выделить молекулярное рассеяние в «чистом виде». Именно этот факт и предложил использовать Ландсберг.

Однако в МГУ не было спектральной аппаратуры, способной обнаружить малые изменения частоты, соответствующие эффекту Мандельштама — Бриллюэна. Мандельштам и Ландсберг пытались обойти это затруднение, используя сравнительно грубый спектрограф.

Как это ни удивительно, грубость аппаратуры сыграла положительную роль, приведя к открытию совершенно нового, важного явления — комбинационного рассеяния света. При комбинационном рассеянии — КР — возникают большие изменения частоты, на несколько порядков превышающие эффект Мандельштама — Бриллюэна. Чувствительная аппаратура, необходимая для наблюдения эффекта Мандельштама — Бриллюэна, оказалась бы слишком «деликатной» для обнаружения КР.

На рисунке 1 изображена схема экспериментальной установки для исследования рассеяния света в кристаллах. В качестве источника света использовалась ртутная лампа, спектр которой состоит из ряда спектральных линий (рис. 2, *а*). В спектре света, рассеянного кристаллом кварца, около каждой яркой линии ртути было обнаружено появление дополнительных линий — спутников или, как их называют, сателлитов (рис. 2, *б*). Однако частоты, соответствующие этим линиям, отличались от частоты падающего света на гораздо бо́льшую величину, чем это ожидалось по теории эффекта Мандельштама — Бриллюэна. Это новое явление и получило название комбинационного рассеяния. Первые снимки спектров КР были получены в МГУ в 1927 г. Однако первое сообщение о сделанном открытии было отправлено в печать только 6 мая 1928 г. Задержка была вызвана необычайно высокой требовательностью Л. И. к уровню своих публикаций. Время ушло на проведение контрольных опытов, подтвердивших реальность наблюдаемого явления, и на нахождение правильного его объяснения. В результате этой задержки сообщение индийского физика Рамана об открытии аналогичного явления при рассеянии света в жидкостях опередило сообщение советских физиков на пару месяцев.

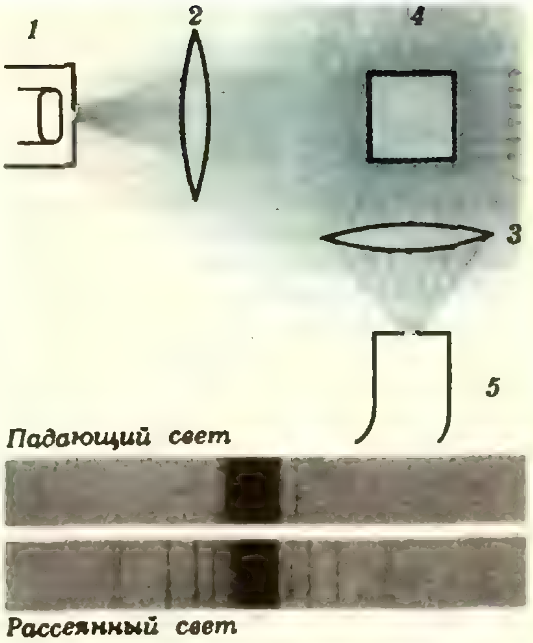


Рис. 1. Схема эксперимента, в котором было обнаружено комбинационное рассеяние света в кристаллах. *1* — ртутная лампа; *2, 3* — линзы; *4* — кристалл; *5* — спектрограф.

Большинством крупных физиков (Резерфорд, Борн и др.) было при-

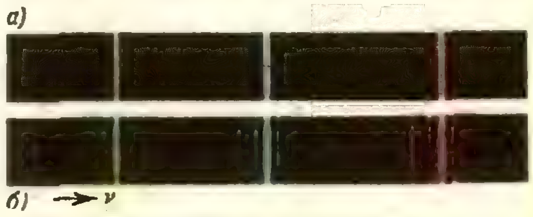


Рис. 2. *а*) Спектр ртутной лампы; *б*) спектр рассеянного света.

знано, что открытие комбинационного рассеяния сделано Ландсбергом и Мандельштамом в кристаллах и Раманом в жидкостях, независимо друг от друга и практически одновременно. Однако в 1930 г. Нобелевская премия за это открытие была присуждена одному Раману, что было явной несправедливостью.

Л. И., исходя из классических соображений, указал, что КР в кристаллах, так же как и эффект Мандельштама — Бриллюэна, возникает благодаря модуляции рассеянного света колебаниями кристаллической решетки. Однако в данном случае роль модулирующих колебаний играют не акустические, а так называемые оптические колебания решетки. Частоты этих колебаний лежат в инфракрасной области спектра. На рисунке 3 изображены два типа волн, возникающих в кристаллической решетке, построенной из атомов двух сортов. Рисунок 3, *а* соответствует звуковой волне и, соответственно, акустическим колебаниям решетки. Рисунок 3, *б* соответствует оптическим волнам и колебаниям. Именно эти оптические колебания модулируют падающую на кристалл световую волну, что и вызывает комбинационное рассеяние света.

При КР в жидкостях и газах модуляцию света вызывают колебания атомов, входящих в состав отдельных молекул. Согласно классической теории модуляции при КР в спектре рассеянного света около каждой спектральной линии падающего света должно возникать несколько симметрично расположенных линий — спутников. Частоты спутников получаются путем комбинирования частоты падающего света с частотами внутримолекулярных колебаний (отсюда и происходит название явления) и удовлетворяют простым соотношениям:

$$\nu_{\text{к}} = \nu_0 - \nu_{\text{м}},$$
$$\nu_{\text{ф}} = \nu_0 + \nu_{\text{м}}, \qquad (1)$$

где $\nu_{\text{к}}$ — частота «красного» спутника, то есть линии, смещенной относительно основной (из спектра падающего света) в сторону бóльших длин волн, $\nu_{\text{ф}}$ — частота «фиолетового» спутника, то есть линии, смещенной в сторону меньших длин волн, $\nu_{\text{м}}$ — частота внутримолекулярных колебаний (частота модуляции).

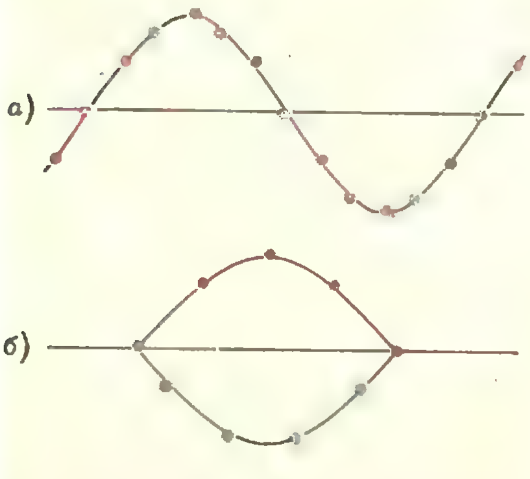


Рис. 3. Два типа волн, возникающих в кристаллической решетке, построенной из атомов двух сортов.
***а*) Акустическая волна; *б*) оптическая волна.**

Соотношения (1) прекрасно согласуются с опытом. Однако, согласно классической теории, интенсивности симметрично расположенных спутников должны быть одинаковыми. Этот вывод находится в резком противоречии с опытом. Интенсивность каждого «красного» спутника во много раз больше интенсивности симметричного ему «фиолетового» спутника (см. рис. 2, *б*). Это различие интенсивностей нельзя объяснить исходя из классической теории модуляции. Необходимо учесть квантовые свойства света и вещества.

Согласно классическим представлениям два симметрично расположенных спутника возникают при рассеянии света на одной и той же молекуле. Согласно квантовым представлениям «красный» спутник возникает при рассеянии света — фотонов — на молекуле, обладающей меньшим запасом внутренней энергии, а «фиолетовый» — при рассеянии на возбужденной молекуле с увеличенным запасом энергии (на классическом языке эти молекулы отличаются амплитудой внутримолекулярных колебаний). Согласно квантовым законам энергия внутримолекулярных колебаний может изменяться только определенными порциями, квантами, равными $h\nu_{\text{м}}$, где h —

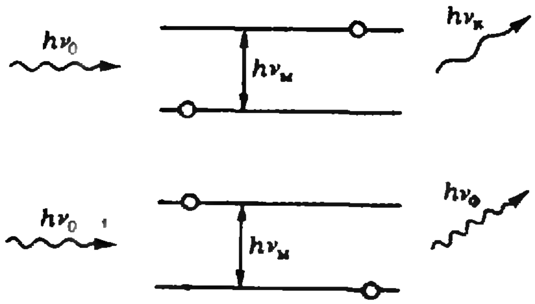


Рис. 4. Возникновение «красных» и «фиолетовых» спутников при КР.

постоянная Планка, $\nu_м$ — частота внутримолекулярных колебаний. На рисунке 4 приведены два энергетических уровня, соответствующие дозволенным значениям энергии молекулы. «Расстояние» между уровнями равно $h\nu_м$.

Квантовая теория рассматривает свет как поток фотонов. Энергия фотона падающего на молекулу света частоты ν_0 равна $h\nu_0$. При взаимодействии с молекулой, находящейся на нижнем энергетическом уровне, фотон отдает молекуле часть своей энергии, равную $h\nu_м$, переводит молекулу на более высокий энергетический уровень и превращается в фотон с меньшей энергией:

$$h\nu_к = h\nu_0 - h\nu_м, \qquad (2)$$

$h\nu_н$ — энергия фотона света «красного» спутника. При взаимодействии с возбужденной молекулой, находящейся на более высоком энергетическом уровне, фотон забирает у молекулы энергию, равную $h\nu_м$, переводит молекулу на более низкий энергетический уровень и превращается в фотон с большой энергией:

$$h\nu_ф = h\nu_0 + h\nu_м, \qquad (3)$$

$h\nu_ф$ — энергия фотона света «фиолетового» спутника. Можно сказать, что при комбинационном рассеянии происходит как бы сложение и вычитание квантов.

Если в равенствах (2) и (3) сократить левую и правую части на h, то получатся равенства (1). Таким образом, в смысле частот и классическое, и квантовое рассмотрения приводят к одинаковым результатам, согласующимся с опытом. Зато квантовое рассмотрение с легкостью объясняет различие интенсивностей «красных» и «фиолетовых» спутников. Все дело в том, что обычно число молекул на нижнем энергетическом уровне значительно превышает число молекул на более высоком уровне. Поэтому число «столкновений» фотонов с молекулами, приводящих к возникновению фотонов «красного» спутника, во много раз превыщает число «столкновений», приводящих к возникновению фотонов «фиолетового» спутника.

Комбинационное рассеяние получило очень широкое применение в исследовании структуры молекул и кристаллов. Недаром Л. И. говорил: «Так же как спектр обычного радиотелефонного передатчика несет в себе весь ваш разговор, все, что вы хотите сказать, так и спектр рассеянного света несет то, что молекула говорит о себе. Изучая его, вы изучаете ее строение».

Я смог рассказать только о небольшой части научных работ Л. И. Мандельштама. Им получен еще ряд фундаментальных результатов в теории колебаний (новые виды резонанса, теория нелинейных колебаний и т. д.). Особое внимание Л. И. уделял степени экспериментальной и логической обоснованности физических теорий.

Несколько слов об отношении Л. И. к искусству. Без этого портрет его будет неполным. Л. И. был глубоким ценителем литературы и музыки. Любимым поэтом его был Пушкин, почти всю поэзию которого он знал наизусть.

Последний раз я встретил Леонида Исааковича в 1944 г. на концерте бетховенской музыки в Московской консерватории. Он стоял в фойе, и его лицо буквально светилось радостью. Увидев меня, Л. И. сказал, что, собираясь на концерт, сильно волновался — придут ли люди слушать музыку немецкого композитора, когда идет такая тяжелая война с Германией, и был очень обрадован тем, что уже на дальних подступах к консерватории у него стали спрашивать, нет ли лишнего билета. Таким он запомнился мне на всю жизнь.

Л. Мандельштам

Почему физика нужна инженеру?

Приступая к чтению лекций по физике, я хотел бы, прежде чем перейти к систематическому изложению предмета, остановиться сегодня на одном общем вопросе и поделиться с вами некоторыми соображениями насчет того положения, которое физика занимает и, по моему убеждению, должна занимать в ряде наук, изучению которых вы собираетесь посвятить ближайшие годы.

Мне хотелось бы дать вам материал, на основании которого вы могли бы сами убедиться, что физика нужна инженеру всегда, во все время его деятельности, и что на нее нельзя смотреть, как на предмет, который нужно — да и нужно ли? — раз пройти, а потом можно и забыть, так как ведь все равно то, что необходимо знать инженеру из физики, еще раз повторяется при прохождении специальных предметов.

Говоря, что инженеру нужна физика, я имею в виду не только то, что он должен быть знаком с теми отдельными явлениями и законами, с которыми он непосредственно встречается в своей практической деятельности. Такое утверждение было бы само собой очевидным. Что инженер-строитель, рассчитывая прочность сооружения, должен быть знаком с основными законами упругости, что инженер-электротехник в проектировании, скажем, осветительной сети должен знать закон Ома, связывающий силу тока, сопротивление и электродвижущую силу батареи, и т. д. — это, конечно, не нуждается в доказательстве. Нет, когда я говорю, что инженеру нужна физика, я этим хочу сказать, что ему нужно широкое владение этим предметом в его совокупности; я утверждаю, что ему нужно знание физики самой по себе как цельной дисциплины с ее специфической методикой, а не только в зависимости от текущих применений. Я утверждаю, наконец, что для этого инженеру недостаточно знать только опытную часть ее, а что он должен быть основательно знаком и с теорией.

Но для того чтобы показать, что это действительно так, мы прежде всего должны постараться выяснить себе структуру физики как науки и посмотреть, в каком соотношении находятся теория и тот опытный материал, которым физика оперирует.

Конечно, мы не можем решать здесь вопроса о сущности физической науки во всей его полноте. Этот вопрос, относящийся к теории познания и крайне интересный как для физика, так и для философа, значительно более сложен, чем это может показаться на первый взгляд. В истории философской мысли он всегда занимал важное место. Но нам для нашей цели и нет надобности особенно сильно в него углубляться. Нам достаточно будет заняться только одной его стороной, хотя, правда, и здесь нам придется начать несколько издалека.

Не подлежит сомнению, что единственным средством, с помощью которого мы черпаем наши сведения об окружающем нас мире, являются наши органы чувств. Но единичные чувственные восприятия слишком мимолетны и неустойчивы, чтобы служить материалом для дальнейшей переработки. И вот человек выделяет и фиксирует в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Этот процесс, совершающийся совершенно непроизвольно, ведет к образованию того, что в логике называется понятиями.

В образовании понятий состоит первый шаг по пути познания природы. Они являются той базой, на которой строится дальнейшее. Но образованные таким образом первоначальные понятия обладают, как мне кажется, следующим свойством. Они не поддаются строгому определению. Мы все владеем понятием «свет». Но объяснить словами, определить один другому сущность этого понятия мы не можем. Чтобы научиться ему, нужно иметь глаза, нужно видеть, как освещается все нас окружающее при восходе солнца и как погружается опять во мрак при его заходе. Если быть прозаичнее, тому же можно научиться, включая и выключая электрическую лампочку. Но одно несомненно — слова, определения здесь бессильны. Попробуйте объяснить слепому от рождения, что такое свет.

Итак, одними словами первоначальным физическим понятиям научить нельзя. Вот почему, позвольте мне это здесь подчеркнуть, ни учебник, ни учитель недостаточны, чтобы научить физике. Учащийся должен хоть немного работать опытно сам. Он должен хоть поверхностно, но сам видеть, сам слышать, сам осязать те явления, о которых ему говорят.

Мы несколько отвлеклись в сторону. Вернемся к первым шагам по пути познания природы, к понятиям, непосредственно навязанным нам природой. По мере того, как человечество увеличивало свой запас навязанных опытом понятий (опытных знаний), все настоятельнее являлась потребность в их систематизации, без которой нет возможности разобраться в бесконечном обилии окружающих нас явлений. В этой систематизации громадную службу оказывает нам наша способность образовывать другого рода понятия, понятия более определенные, чем те, о которых шла речь выше, и менее зависящие от наших чувств. В первую очередь сюда относятся понятие о числе и те понятия, которыми оперирует математика. В области этих понятий, другими словами, в области математического мышления мы себя чувствуем несравненно более уверенно, чем при оперировании с материалом, непосредственно поставляемым нам нашими чувствами. При помощи математических понятий можно определенно формулировать посылки и так же определенно и легко делать из них выводы и заключения. И вот, зная за собой эту силу, человек старается — вначале инстинктивно, а затем с развитием науки и сознательно — приспособить математические понятия и специально понятие о числе к сырому опытному материалу, к понятиям физическим.

В этом процессе перехода от качественных соотношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано как понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин. Можно смело утверждать, что какая-нибудь область физических явлений вообще становится наукой только с того момента, когда мы научаемся вводить в нее измерения. Так, например, пока не было точного понятия температуры и не умели ее измерять, науки о теплоте почти или даже совсем не существовало.

Пользуясь в описанном смысле математикой, мы стараемся теперь найти систему в окружающих нас явлениях и облегчить себе их понимание тем, что ищем такие математические формулы в общем смысле слова, не непременно узко алгебраическом, которые охватывали бы возможно большее число единичных фактов или общую сторону различных явлений. Если такая формула найдена, то мы говорим, что нашли физический закон. Возьмем пример. Закон преломления света при переходе из одной прозрачной среды в другую гласит, как известно, так: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости, и отношение между синусом угла падения и синусом угла преломления есть величина постоянная. Например, для воды и воздуха это отношение равно 1,33. Что представляет собой этот закон? Это — формула, охватывающая бесчисленное множество единичных случаев преломления. Она избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт, она делает ненужным запоминать или заносить в таблицы для каждого отдельного случая угол падения и соответственный угол преломления луча. Зная закон преломления, вы уверены, что в любой момент, когда это вам понадобится, при помощи простейших вычислений вы сможете решить всякий представившийся в этом направлении вопрос.

По мере того как физические знания росли, по мере того как число найденных законов увеличивалось, все труднее и труднее становилось разобраться в их разнообразном обилии. Движимые опять необходимостью возможно лучше ориентироваться в этом громадном материале, люди старались найти такие картины, такие точки зрения, которые позволили бы объединить в одно целое отдельные законы. Так создавалась физическая теория или, вернее, теории.

Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы находятся к отдельным явлениям. Систематизирующая роль теории, конечно, не исчерпывает всей ее сущности, но все же, как вы видите, в систематизации наших знаний она имеет громадное значение. И тут математика является огромным подспорьем. Только что рассмотренные соотношения между различными сторонами физики и постепенное развитие их могут быть прослежены на любой физической теории. Очень просто это сделать, например, на оптике.

Оптика, между прочим, — одна из самых древних научно разработанных отраслей физики. Изучение оптических явлений уже в древности привело к установлению некоторых законов. Закон прямолинейного распространения света и закон отражения от зеркал были известны давно. Позже, в XVII в., был найден закон преломления. Смотря по тому, какая группа явлений подвергалась исследованию и с каких точек зрения к ним подходили, были устанавливаемы различные отрывочные законы. Были открыты явления дифракции света, интерференции и т. д. Но пока не было общей, объединяющей точки зрения, было чрезвычайно трудно разбираться во всей совокупности оптических явлений. Более того, отдельные законы, казалось, находились в противоречии друг с другом. Загибание света не вязалось, например, с прямолинейным распространением луча.

Так было до того, пока усилиями ряда гениальных физиков, из которых в первую очередь должны быть названы Гюйгенс и Френель, не удалось найти ту картину, которую мы теперь называем волновой теорией света и которая позволила объединить всю оптику в одно стройное целое. И все, что казалось сложно и противоречиво, сделалось простым и ясным.

А возьмите теорию всемирного тяготения Ньютона. Объединяя с гениальной смелостью столь разнородные на взгляд наших чувств явления, как падение камня и движение небесных светил, она грандиозна именно своей простотой. В одной простой формуле она содержит всю динамику всего мироздания.

Я ограничусь этими примерами. Может быть, в них осталось кое-что вам неясным. Это ничего. Понимание фактической стороны придет по мере того, как вы будете изучать физику, но я думаю, что для вас, по крайней мере в общих чертах, теперь выяснилось соотношение между ее опытной и теоретической сторонами.

Эти две стороны, как вы видели, тесно связаны между собой, они вместе представляют одно целое. В достижении нашей конечной цели — познания природы — могучим подспорьем, систематизирующим наш опыт и дающим возможность пользоваться материалом, является теория. Теория, а значит и орудие, которым, как мы видели, она пользуется —

математика, не являются балластом и чем-то искусственно пристегнутым к науке о природе. Нет, она есть то орудие, без которого мы не были бы в состоянии осилить окружающий нас мир как в практическом смысле, так и в смысле удовлетворения умственных потребностей.

Поэтому я нахожу — не считайте это парадоксом, — что нельзя требовать знания только опытной физики, но вовсе не потому, что это слишком мало, а потому, что это слишком трудно. Более или менее полное знание опытной физики без помощи теории человеку не под силу.

Изложенный взгляд на систематизирующую роль теории очень хорошо иллюстрируется одним красивым сравнением, сделанным Пуанкаре.

Пуанкаре сравнивает всю физику с огромной библиотекой. Отдельные опытные данные, отдельные явления — это те тома, из которых библиотека состоит. Теория — это каталог нашей библиотеки. Как без каталога библиотека, особенно большая, представляет собой лишь сборище книг, очень ценных книг, которыми в сущности продуктивно пользоваться нельзя, точно так же физика без теории не есть наука, а лишь довольно малоценный конгломерат отдельных фактов, разобраться в которых нет возможности.

А теперь нам будет уже нетрудно ответить на тот вопрос, который мы поставили себе вначале. Нужна ли инженеру физика в ее целом? Не достаточно ли ему знания отдельных, непосредственно для его практической работы нужных фактов? Ответ, мне кажется, ясен.

Чтобы продуктивно работать — позвольте мне говорить на языке сравнения Пуанкаре, — инженеру не достаточно прочесть и знать несколько книг из громадной библиотеки знания. Он должен быть знаком или, по крайней мере, уметь разбираться в каталоге всей библиотеки.

История техники знает немало примеров загадочных неуспехов, неуспехов повторных и имевших иногда весьма неприятные последствия. И очень часто оказывалось, что загадочность обусловливалась не присутствием действительно новых, до сих пор вообще неизвестных факторов, а отсутствием у тех, кто данными вопросами занимался, широкого физического горизонта. И когда за решение брались люди, обладавшие действительно широкими физическими знаниями, то загадка не только разъяснялась и находился способ предотвратить неуспех, но часто открывались и новые пути для дальнейшего прогресса.

Позвольте мне в заключение остановиться на одном примере, как мне кажется, иллюстрирующем значение широкого физического горизонта при разрешении технических вопросов.

Я имею в виду вопрос об оптических инструментах и, в частности, вопрос о микроскопе. Вы знаете, что микроскоп играет чрезвычайно важную роль в очень многих областях прикладного знания. Я не буду напоминать вам его значение в медицине, в гигиене, в санитарии. Я укажу только на то, что и в изучении металлов микроскоп в настоящее время незаменим. Микроскопом особенно заинтересовались уже в середине прошлого столетия, после того как применение его в биологии открыло совершенно новые пути в изучении явлений жизни. Но после первых успехов обнаружилось, что существовавшие тогда микроскопы не были хороши и не были сильны. Исследователи ясно чувствовали, что если бы удалось построить микроскоп с большим увеличением, то вместе с тем явилась бы возможность проникнуть еще дальше в сущность жизни. А такая перспектива всегда с особенной силой манила людей. И фантазия не останавливалась перед постройкой микроскопов, увеличивающих в десятки, сотни тысяч и миллионов раз, и ждали от их применения чудес. Исследователи ждали, что с их помощью можно будет проникнуть в самые сокровенные детали строения живой материи.

Понятно, что при такой конъюнктуре и специалисты-конструкторы оптических приборов взялись с усиленной энергией за усовершенствование микроскопа. И они считали принципиально возможным достигнуть любых увеличений. Весь вопрос, казалось, сводился к преодолению технических трудностей.

Дело в том, что в то время все расчеты, касавшиеся оптических приборов, велись исключительно при помощи так называемой геометрической оптики. В основании расчетов лежала та теория микроскопа, которая оперирует со световыми лучами как с прямыми линиями (и которая, впрочем, до сегодняшнего дня только и преподается в средней школе). А с точки зрения геометрической оптики действительно не существует принципиальной границы для возможного увеличения микроскопа.

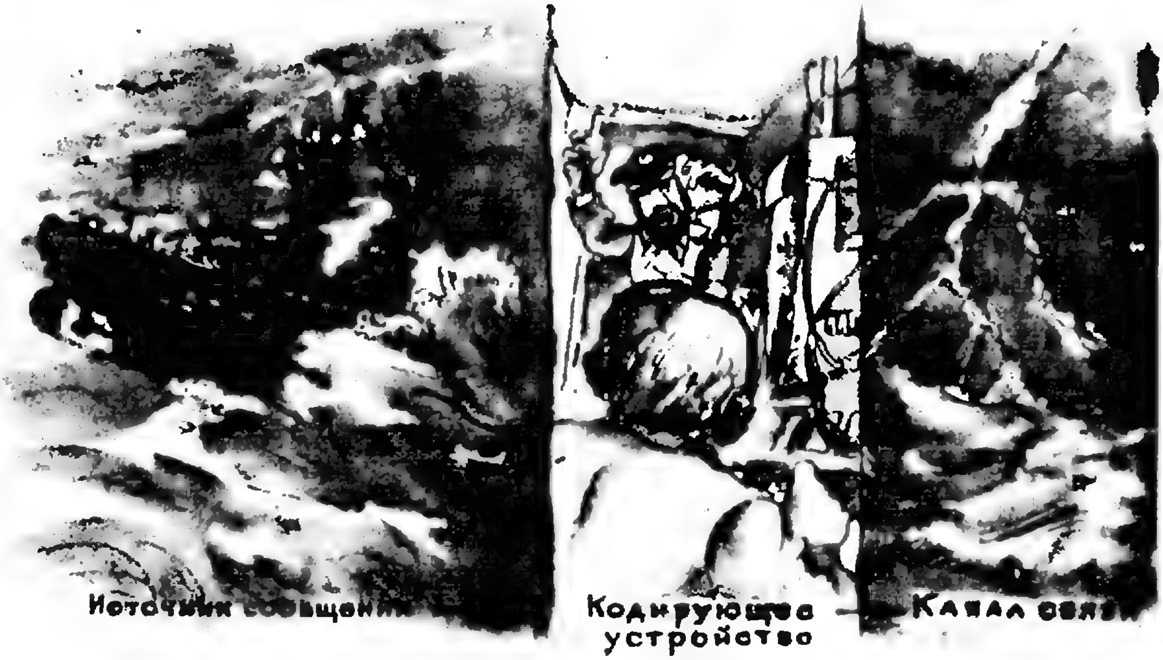
Однако же весьма скоро обнаружилось, что работа, направленная к усовершенствованию микроскопа, далеко не дает тех результатов, которых, казалось, можно было ожидать. Между тем, что казалось достижимым, и тем, что достигалось, было противоречие, которому объяснения не находилось.

Так обстояло дело, когда иенский механик Цейсс, имевший небольшую механическую и оптическую мастерскую и изготовлявший сам недурные по тому времени микроскопы, пригласил в качестве консультанта тогда еще молодого физика Аббе. Аббе обладал хорошей теоретической подготовкой, хорошо владел теоретической оптикой. Он знал, что геометрическая оптика есть лишь удобная схема для обработки классического явления преломления. Он знал ей цену, потому что сам очень много внес нового в эту область. Но он знал также, что с точки зрения волновой теории света, служащей базой для геометрической оптики, последняя есть не более как приближение. И он сразу подошел к вопросу о микроскопе с широким, не связанным узкими рамками геометрической теории взглядом.

Результаты такого подхода к делу не заставили себя долго ждать Одним из главных результатов, к которым пришел Аббе, был следующий. Он показал, что волнообразная природа света ставит принципиальный предел тому полезному увеличению, которое может быть достигнуто при помощи микроскопа или, вообще, любого оптического инструмента. Если детали объекта мельче определенной величины или нормы, то эти детали не могут быть видимы, выявить их ни один микроскоп не может. Все мечты об увеличении в 100 000 и больше раз и все связанные с ними надежды должны быть принципиально оставлены, и работа тех, кто хотел такие микроскопы построить, совершенно бесцельна. Блестящими опытами Аббе подтвердил правильность своих теоретических выводов.

Позвольте мне на этом остановиться. Я надеюсь, что вы теперь согласитесь со мной, что знание, широкое, полное знание физики для инженера — не роскошь, а необходимость, что широкий физический горизонт должен быть достоянием не только тех отдельных избранных людей — инженеров, которым суждено прокладывать новые пути в технике, но и достоянием всякого инженера, сознательно относящегося к своему делу. Если то, что я сказал, может способствовать укреплению в вас этого взгляда, то моя цель была бы достигнута.

Но я не хотел бы закончить нашу сегодняшнюю беседу, не указав хоть двумя словами на еще одну сторону вопроса. Я хотел бы еще сказать вам, что занятия физикой, углубление в ее основы и в те широкие идеи, на которых она строится, и в особенности самостоятельная научная работа приносят огромное умственное удовлетворение. Убеждать в этом я не хочу. Да и вряд ли здесь возможно убеждение. Тут каждый должен убедиться сам. Но я хотел бы, чтобы вы знали, что если кто-нибудь из вас почувствует в себе такое стремление, то для меня всегда будет большим удовольствием способствовать всем, чем я могу, его осуществлению. В посильном удовлетворении таких чисто научных запросов учащихся я, помимо моих личных симпатий, вижу одну, и не последнюю, задачу высшей школы.



Л. Садовский, М. Аршинов

Двоичное кодирование

Как передают сообщения по линиям связи? Схема такой передачи представлена на рисунке.

Кодирующее устройство сопоставляет каждому передаваемому сообщению определенную комбинацию сигналов (приемлемую для передачи по данному каналу связи), называемую *кодом*. Операция перевода сообщения в последовательность различных сигналов называется *кодированием*, обратное преобразование, восстанавливающее по принятым сигналам переданное сообщение,— *декодированием*. Коды, использующие два различных элементарных сигнала, называются *двоичными*. В телеграфии, например, популярны двоичные коды Морзе и Бодо. В азбуке Морзе каждой букве сопоставляется определенная последовательность кратковременных (называемых *точками*) и длительных (*тире*) импульсов тока. В коде Бодо каждой букве сопоставляется определенная последовательность из пяти элементарных сигналов — импульса и паузы.

Процесс кодирования, коды различных типов, требования, предъявляемые к ним, и многие смежные проблемы изучает теория информации и кодирования. В ней сочетаются вероятностные, алгебраические и комбинаторные методы.

Здесь мы останавливаемся лишь на некоторых частных вопросах кодирования, а заинтересовавшихся читателей отсылаем к специальным книгам — например, А. М. Яглом и И. М. Яглом «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973), У. Питерсон «Коды, исправляющие ошибки (М., «Мир», 1964), У. Питерсон, Э. Уэлдон «Коды, исправляющие ошибки (М., «Мир», 1976).

Спрашиваем — отвечаем

В основе двоичного кодирования лежит очень простой принцип. Разъясним его на такой задаче.

Некто задумал число, заключенное между 0 и 7. Угадывающему разрешено задавать вопросы, ответы на которые даются лишь в форме «да» или «нет». Каким наименьшим числом вопросов можно обойтись, чтобы наверняка узнать задуманное число?

Самый бесхитростный путь (так, наверное, поступил бы ребенок) — перебирать числа наугад, надеясь на

и помехи
Декодирующее устройство
Адресат

удачу. При очень сильном везении может хватить и одного вопроса, но если не повезет, то может понадобиться целых семь. Поэтому оставим надежду на мгновенную удачу и постараемся построить такую систему вопросов, чтобы любой из ответов на них — «да» или «нет» — давал нам одинаковую (пусть хотя и неполную) информацию о задуманном числе, а число вопросов было минимальным.

Например, первый вопрос может быть таким: «Заключено ли задуманное число в пределах от 0 до 3?». Оба ответа — и «да» и «нет» — одинаково приближают нас к цели: в обоих случаях остаются четыре возможности для неизвестного числа (первоначально их было восемь).

Если на первый вопрос получен утвердительный ответ, то во второй раз можно спросить: «Не является ли задуманное число нулем или единицей?»; если же ответ был отрицательным, спросим: «Не является ли задуманное число четверкой или пятеркой?»

В любом случае после ответа на второй вопрос останется выбор из двух возможностей. Для того чтобы осуществить этот последний выбор, достаточно одного вопроса. Итак, для угадывания задуманного числа, каким бы оно ни было, достаточно трех вопросов.

Если каждый из двух возможных ответов «да» или «нет» обозначить условно символами «0» и «1», то ответ запишется в виде последовательности, состоящей из 0 и 1. Так, например, если в разобранном выше примере задуманное число было нулем, то на каждый из трех вопросов ответом будет «да». Трем «да» соответствует последовательность 000.

Если было задумано число «3», то ответами будут: да, нет, нет. То есть «тройке» соответствует последовательность: 011. По результатам ответов можно составить таблицу 1, приведенную ниже. Тот из вас, кто знаком с двоичной системой счисления, узнает в нижней строке двоичную запись соответствующих чисел верхней строки.

Заметим, что вместо множества чисел от 0 до 7 можно рассматривать любое множество из восьми сообщений, и каждое из них мы можем за-

Таблица 1

Задуманное число	0	1	2	3	4	5	6	7
Ответы	000	001	010	011	100	101	110	111

кодировать последовательностями из 0 и 1 длины 3. Последовательностями из нулей и единиц можно закодировать любое конечное множество сообщений.

Действительно, двоичных последовательностей длины 3 ровно $2^3 = 8$ (все они приведены в таблице), двоичных последовательностей длины 4 вдвое больше — их $2^4 = 16$. Вообще, число двоичных последовательностей длины n равно 2^n. Поэтому, если требуется закодировать нулями и единицами, к примеру, 125 сообщений, то для этого с лихвой хватит двоичных последовательностей длины 7 (их в нашем распоряжении $2^7 = 128$). Наконец, для закодирования любого числа M сообщений можно использовать двоичные последовательности длины n такой, что $2^n \geqslant M$.

Код Фано

Всегда ли выгодно кодировать сообщения словами одинаковой длины так, как мы это делали выше?

Представим себе, что одни сообщения приходится передавать довольно часто, другие — сравнительно редко, третьи — совсем в исключительных случаях. Довольно понятно, что первые лучше закодировать короткими словами, оставив более длинные слова для кодирования сообщений, появляющихся реже.

В математике мерой частоты появления того или иного события является его вероятность. Тот, кто не знаком с этим понятием, может представлять себе вероятность некоторого события (сообщения) как долю тех случаев, в которых оно появляется, от общего числа рассматриваемых событий (сообщений) *). Вероятность события A обозначают $P(A)$.

Пусть четыре сообщения A_1, A_2, A_3, A_4 имеют вероятности

$$P(A_1) = \frac{1}{2},\quad P(A_2) = \frac{1}{4},\quad P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{8}.$$

Это означает, что среди, например, 1000 переданных сообщений около 500 раз появляется сообщение A_1, около 250 — сообщение A_2 и примерно 125 раз — каждое из сообщений A_3 и A_4.

Эти сообщения нетрудно закодировать двоичными словами длины 2, как показано в таблице:

Таблица 2

A_1	A_2	A_3	A_4
00	01	10	11

При этом вероятность их появления никак не учитывается. Поступим теперь иначе. Разобьем сообщения на две равновероятностные группы: в первую попадает сообщение A_1, во вторую — A_2, A_3, A_4. Сопоставим первой группе символ «0», второй группе — символ «1». Это вполне в духе принципа, применявшегося в задаче с угадыванием. Действительно, символ «0» соответствует ответу «да» на вопрос «Принадлежит ли сообщение первой группе?», а «1» — ответу «нет». Разница лишь в том, что раньше все множество разбивалось на две группы, состоящие из одинакового числа элементов, теперь — из разного. Но, как и раньше, разбиение это таково, что оба ответа «да» и «нет» равновозможны. Продолжая в таком же духе, разобьем множество сообщений A_2, A_3, A_4 снова на две равновероятностные группы. Первой, состоящей из одного сообщения A_2, сопоставляем символ 0, второй, в которую входят сообщения A_3 и A_4,— символ 1. Наконец, оставшуюся группу из двух сообщений разобьем на сообщения A_3 и A_4, сопоставив первому символ 0, второму — 1 (они равновероятны). Процесс закончен. Сообщение A_1 на первом шаге образовало «самостоятельную» группу, и ему был сопоставлен символ 0, он и кодирует это сообщение. Сообщение A_2 образовало самостоятельную группу за два шага, на первом шаге ему соответствовал символ 1, на втором — 0; значит, сообщение A_2 кодируется словом 10. Аналогично, для

---

*) См., например, указанную выше книгу А. Яглома и И. Яглома.

сообщений A_3 и A_4 имеем, соответственно, последовательности 110 и и 111. Итак, мы получаем следующую кодовую таблицу:

Таблица 3

A_1	A_2	A_3	A_4
0	10	110	111

Именно такой способ кодирования предложил Фано. Возникает вопрос, что же мы выиграли по сравнению с равномерным кодом, применив код Фано? Чтобы ответить на него, представим, что непрерывным потоком передаются сообщения A_1, A_2, A_3, A_4 — всего 1000 сообщений. Посчитаем, сколько потребуется потратить двоичных символов для их передачи при первом и втором способе кодирования.

При использовании равномерного кода это посчитать нетрудно: на каждое сообщение — два символа, значит, в общей сложности 2000 символов.

Пусть теперь используется код Фано. Вспомним, что из 1000 сообщений примерно 500 раз появляется первое, которое кодируется всего одним символом (500 символов), 250 раз — сообщение A_1, оно кодируется двумя символами (еще 500), на сообщении A_3 и A_4, появляющиеся примерно 125 раз, придется потратить еще $3 \times 250 = 750$ символов. Итого нужно передать примерно 1750 символов. Выигрыш? Конечно. Ведь во втором случае передача займет меньшее время. Можно представить себе ситуации, когда выигрыш от применения кода Фано окажется еще значительнее, чем в приведенном примере.

Доверяй, но проверяй

Мы установили, что любое конечное множество сообщений можно закодировать кодовыми словами из 0 и 1 (*двоичными* кодовыми словами). Беда в том, что при передаче закодированных сообщений возможны ошибки. Как правило, не в нашей власти полностью устранить источник ошибок. Как же тогда уберечься от их влияния и возможно ли это вообще? А если возможно, то какой ценой?

Оказывается, такие возможности — обнаруживать ошибки и даже их исправлять — имеются. Но неизбежной платой за это является удлинение кодовых слов, то есть добавление некоторого числа символов. Эти символы уже не несут информации о передаваемых сообщениях, но могут дать информацию о происшедших при передаче ошибках. Иными словами, их назначение — контролировать правильность передачи кодового слова. Вводимые дополнительные символы так и называют *контрольными* (или *проверочными*).

Всего одна проверка

Минимальная дань — добавить к каждому кодовому слову лишь один проверочный символ. Разберемся, на что мы можем рассчитывать в этом случае. Пусть $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ — двоичное кодовое слово (α_i — 0 или 1). По всей видимости, контрольный символ α_{n+1} выгодно выбрать так, чтобы на его значение влиял каждый символ кодового слова. Самое простое — положить $\alpha_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \pmod 2$ *). Эта запись означает, что проверочный символ α_{n+1} равен нулю, если в кодовом слове $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ содержалось четное число единиц, и единице — в противном случае. Например, присоединяя такой проверочный символ к слову 1010, получаем слово 10100; соответственно, из слова 1110 получим 11101.

Заметьте, что все удлиненные кодовые слова $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}$ содержат четное число единиц, то есть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 0 \pmod 2. \quad (1)$$

Представим себе, что в процессе передачи в удлиненное кодовое слово $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}$ вкралась одна ошибка (или даже любое нечетное число ошибок

---

*) О сложении «по модулю» можно прочитать в статье Н. Виленкина «Сравнения и классы вычетов» («Квант», 1978, № 10).

бок). Тогда в искаженном слове $\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_n'\alpha_{n+1}'$ число единиц станет нечетным. Это и служит индикатором того, что в принятом слове содержится ошибка. Разумеется, нам не надо скрупулезно подсчитывать число единиц, достаточно лишь проверить, выполняется ли для символов принятого слова равенство (1),— это легко сделает простейшее вычислительное устройство. Если равенство (1) выполняется, считаем, что сообщение передано правильно, в противном случае констатируем, что произошла ошибка, и, если это возможно, требуем повторения передачи кодового слова. Но самостоятельно исправить ошибку мы не сможем. Например, если принято «неправильное слово» 11100, то возможно, что было послано любое из кодовых слов:

01100; 10100; 11000; 11110; 11101.

Каждый из перечисленных случаев соответствует одиночной ошибке. Ошибки могли произойти также в трех или даже в пяти символах. Гораздо хуже, если произошла двойная ошибка или вообще четное число ошибок. Ведь тогда соотношение (1) не нарушится, и мы воспримем искаженное слово как верное, в результате будет принято ложное сообщение.

Описанный код (его называют *кодом с общей проверкой на четность*) позволяет, следовательно, обнаружить любое нечетное число ошибок, но приводит к неверному декодированию, если ошибок четное число. Его выгодно применять поэтому, когда достаточно велика вероятность одиночной ошибки и очень мало вероятны ошибки в большем числе символов.

Гораздо чаще применяют коды с несколькими проверочными символами — это позволяет не только обнаруживать, но и исправлять ошибки, и не только одиночные, но и кратные.

Самый медленный код

Простейший прием, позволяющий исправлять ошибки, состоит в том, что каждый информационный символ повторяется несколько раз так, что символы 0 и 1 кодируются блоками, состоящими из n нулей (соответственно, n единиц). При декодировании n-буквенного блока, содержащего, быть может, ошибочные символы, принимается решение «большинством голосов». Если в принятом блоке нулей больше, чем единиц, то он декодируется как 00 ... 0, в противном случае — как 11 ... 1. Такое правило декодирования позволяет верно восстановить посланные символы, если помехи в канале искажают меньше половины символов в каждом передаваемом блоке. Если длину блока n выбрать достаточно большой, то мы практически обезопасим себя от возможных ошибок, однако передача сообщений будет идти черепашьими темпами.

Код с общей проверкой на четность и код с повторением — два антипода. Первый очень быстр, но зачастую «легкомыслен». Возможности второго исправлять ошибки теоретически безграничны, но делает он это чересчур медленно.

Из соображений, высказанных ранее, можно усмотреть, что для исправления ошибок нужно, чтобы используемые для кодирования слова достаточно сильно отличались друг от друга. В этом случае после возможных при передаче ошибок они скорее всего останутся различными, и искажения не помешают нам «угадать» посланное слово.

Необычное обычное расстояние

Мы подошли к понятию расстояния между кодовыми словами. *Расстоянием* (точнее, *расстоянием Хемминга*) $\rho(x, y)$ между двумя кодовыми словами x, y называют число символов, в которых они отличаются. Например, расстояние между словами 1010111 и 0110010 равно 4 — они отличаются символами на 1-м, 2-м, 5-м и 7-м местах.

Термин «расстояние» для величины $\rho(x, y)$ оправдан тем, что она обладает основными свойствами обычного расстояния между точками на плоскости или в пространстве (п. 4 в «Геометрии 6» или п. 132 в «Геометрии 8»).

Важной характеристикой корректирующих способностей кода является его *кодовое расстояние* d, которое определяется как минимальное расстояние между различными кодовыми словами $\min\limits_{x \neq y} \rho(x, y)$.

Ясно, что м чебольше кодовое расстояние, тем большими исправляющими способностями обладает данный код. Мы можем сформулировать этот факт более точно:

Чтобы код исправлял любые комбинации из t (*и меньшего числа*) *ошибок, необходимо и достаточно, чтобы его кодовое расстояние было больше* $2t$.

Действительно, если это так, то $\rho(x, y) \geqslant 2t + 1$ для любых кодовых слов x и y. Если в результате искажений оба слова перешли в одно слово z (т. е. стали неразличимыми), то (в силу одного из свойств расстояния — аксиомы треугольника)

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) \geqslant \rho(x, y) \geqslant 2t+1,$$

и следовательно, либо $\rho(x, z) > t$, либо $\rho(z, y) > t$. Значит, любые ошибки в t или меньше символах любых кодовых слов x и y оставляют их еще различимыми, и поэтому можно восстановить оригинал. Еще проще доказывается обратное утверждение.

Задачи

1. Имеется 8 двоичных кодовых слов длины 3 Их можно изобразить в пространственной системе координат как вершины куба со стороной 1. Каков в этом случае «геометрический смысл» расстояния между кодовыми словами?

2. Доказать, что максимальный двоичный код длины 5 (то есть код, у которого все кодовые слова имеют длину 5) с кодовым расстоянием, равным 3, содержит 4 кодовых слова. Указать такой код.

3. Существует ли код длины 20, содержащий 1000 кодовых слов и исправляющий любые комбинации из трех или менее ошибок?

4. Доказать, что для обнаружения s (или меньшего числа) ошибок необходимо и остаточно, чтобы кодовое расстояние d удовлетворяло неравенству $d \geqslant s+1$.

5. Доказать, что для исправления t (и меньшего числа) ошибок и вместе с этим обнаружения s (и меньшего числа) ошибок ($s \geqslant t$) необходимо и достаточно, чтобы кодовое расстояние удовлетворяло неравенству $d \geqslant t+s+1$.

Код Хемминга

Пусть количество сообщений, которые требуется передавать абоненту, равно 16. Для их кодирования можно использовать слова длины 4, но тогда код не будет корректировать ошибки. Мы уже знаем, что при использовании слов длины 5 можно обнаружить любую одиночную ошибку в кодовом слове, но, увы, нельзя ее исправить. Двух добавочных символов тоже оказывается недостаточно для исправления одиночных ошибок (убедитесь в этом самостоятельно).

А вот тремя добавочными символами можно распорядиться так, чтобы выявить и исправить любую одиночную ошибку.

Предположим, что нам удалось указать 16 кодовых слов длины семь — $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7$, для которых по модулю два выполнены следующие равенства:

$$\begin{cases} S_1 = \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0, \\ S_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_7 = 0, \\ S_3 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда разряд, в котором допущена одиночная ошибка, указывается числом с двоичной записью $S_1S_2S_3$ (напомним, что каждое S_i — это 0 или 1). В частности, для кодовых слов это число равно 0 (= 000), что указывает на отсутствие разряда с ошибкой.

Сделанное утверждение вытекает из того, что при нашем кодировании (т. е. при нашем наборе кодовых чисел) для двоичного слова длины 7 с одиночной ошибкой $S_1 = 1$ тогда и только тогда, когда эта ошибка допущена в четвертом, пятом, шестом или седьмом разрядах (см. (2)), $S_2 = 1$ тогда и только тогда, когда ошибка — во втором, третьем, шестом или седьмом разрядах, и $S_3 = 1$ — когда в первом, третьем, пятом или седьмом.

Пусть, например, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$. Тогда ошибка — в одном из четырех последних разрядов ($S_1 = 1$), но в двух последних разрядах ошибки нет ($S_2 = 0$); значит, ошибка — в четвертом или пятом разрядах; поскольку $S_3 = 1$, она — в пятом разряде, но $S_1S_2S_3 =$

$=101$ как раз и есть двоичная запись числа 5. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Осталось отыскать 16 кодовых слов, удовлетворяющих соотношениям (2). Для этого достаточно заметить, что, если α_1, α_2, α_3 и α_4 выбраны произвольно и по mod 2 выполняются равенства

$$\begin{cases}\alpha_5=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_6=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4,\\ \alpha_7=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4,\end{cases}$$

то соотношения (2) верны.

Изученный здесь код — это *код Хемминга* длины 7 с четырьмя информационными символами.

В общем случае кодовые слова двоичного кода Хемминга, позволяющего исправить одиночную ошибку, имеют длину 2^m-1. Для определения положения ошибки тогда уже нужно m проверок, т. е. m проверочных символов. Оставшиеся 2^m-1-m символов являются информационными. Значения m проверок, как и выше, образуют двоичный номер положения ошибок.

Задачи

6. Определить положение одиночной ошибки в слове (1100011) кода Хемминга длины 7.

7. Построить систему проверок для кода Хемминга длины 15. Сколько кодовых слов содержит этот код?

8. К проверкам кода Хемминга длины 7 добавим еще одну проверку

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=0. \quad (3)$$

Сколько слов удовлетворяет указанной проверке и проверкам (2)?

9. Доказать, что код, удовлетворяющий проверкам (2) и (3), позволяет не только исправлять одиночные, но и одновременно обнаруживать двойные ошибки.

10. К кодовым словам кода Хемминга длины 7 добавим еще один символ α_0 и к проверкам (2) — еще одну проверку

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=0. \quad (4)$$

Доказать, что полученный код имеет 16 кодовых слов и позволяет исправить любую одиночную ошибку и обнаружить любую двойную ошибку в кодовом слове.

11. Верно ли аналогичное утверждение для кода Хемминга длины 2^m-1?

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М516 — М530, Ф523 — Ф532 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

К. Абдухаликов (Алма-Ата) **16—18, 19а), 20, 21, 26—28**; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **16а)**; *И. Аветисян* (с. Мулки АрмССР) **18**; *О. Авраамова* (Москва) **21**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **16б), 21, 22, 24, 26**; *С. Азнабаев* (Новотроицк Оренбургской обл.) **26**; *В. Айриян* (Раздан) **16а), б) 18, 20, 22, 24, 26, 27**; *З. Алавердян* (Иджеван) **26**; *В. Алиев* (Тбилиси) **26**; *В. Андрусевич* (Кобрин) **28**; *Р. Ардан* (Львов) **28**; *К. Аротамян* (Кафан) **26**; *Н. Арутюнов* (Киев) **28**; *А. Ахметхозин* (Андижан) **27**; *А. Ашкинази* (Москва) **16—19**; *Д. Бабарыкин* (Магнитогорск) **16а)**; *А. Бадалян* (пос. Берд АрмССР) **16, 21—23, 26—28, 30а)**; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **16б), 18, 19, 21, 24, 26—29**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **16, 18, 19, 21—24, 26—28, 30**; *И. Баранец* (пос. Дзержинский Московской обл.) **26—28**; *А. Барвинок* (Ленинград) **28, 29**; *А. Барг* (Николаев) **16а; б)**; *Б. Бегун* (Москва) **16, 21**; *А. Белоусов* (Калининград Московской обл.) **26**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **19а), 24, 27, 28**; *В. Бобов* (Ленинград) **26**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **21**; *Т. Болотников* (Харьков) **16, 18, 19а), 21, 26, 28, 29, 30а)**; *А. Боричев* (Ленинград) **19, 26—28**; *В. Боровко* (Новополоцк) **26**; *И. Бородин* (Соликамск) **22, 23**; *О. Бохонов* (Москва) **21, 22, 23б), 24, 26, 27, 30а)**; *А. Брагинский* (Воронеж) **24**; *А. Бурин* (Москва) **28**; *А. Васильев* (Саратов) **16а), 21, 26, 28, 30а)**; *С. Великович* (Минск) **28**; *В. Виноградов* (Москва) **16, 18, 19а), 21, 22, 23а), 24, 26—28, 30а)**; *А. Воронов* (Москва) **16**; *А. Габович* (Харьков) **26**; *Э. Гаджиларов* (Тбилиси) **26—28**; *А. Галенко* (Москва) **16а), б), 26**; *Э. Галстян* (с. Айгезард АрмССР) **18**; *Н. Гасилов* (Баку) **26**; *К. Гедалин* (Тбилиси) **26**; *А. Гильман* (Москва) **16, 18, 19, 21, 22, 24, 26—28**; *Л. Гитлин* (Витебск) **16а), б), 21, 23**; *М. Гладина* (В. Волочек) **21**; *Ю. Глухов* (Щелково) **16б), 18, 21, 28**; *А. Головин* (Москва) **21**; *О. Гордиенко* (Павлодар) **16а), 21, 22, 27**; *М. Горелов* (Белорецк) **16, 18, 19, 26, 28, 30а)**; *Г. Грабарник* (Ташкент) **26, 27, 29, 30а**; *Г. Грабужик* (Ташкент) **16, 18—24**; *П. Григорук* (Гайворон) **21, 24**; *Н. Гринберг* (Киев) **26, 28**; *Л. Гройсман* (Харьков) **28**; *В. Губа* (Вологда) **16, 18—21, 24—29**;

(Продолжение см. с. 32)

Не только игрушка

Наверное, как и большинство читателей «Кванта», вы уже перестали играть в детские игрушки. Все же мы вам предлагаем повозиться... с конструктором *). Игрушка, о которой идет речь, состоит из одинаковых гибких прямоугольных панелек; в двух противоположных углах каждой из них имеются отверстия, а в двух других — штырьки (рис. 1), что позволяет соединять панельки друг с другом. В руках любителя математики этот конструктор становится прекрасным средством для сборки моделей поверхностей.

Зададим произвольные p и q ($\geqslant 3$) и начнем соединять детали, заботясь лишь о том, чтобы их короткие стороны ограничивали q-угольники (эти q-угольники, хотя это несколько непривычно, мы будем называть *вершинами*), а длинные стороны образовывали p-угольники (p-угольники мы будем называть *гранями*, а сами детали — *ребрами*). Полученные таким образом конструкции назовем *мозаиками*.

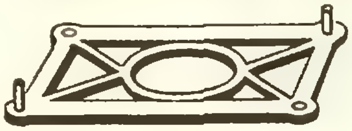


Рис. 1.

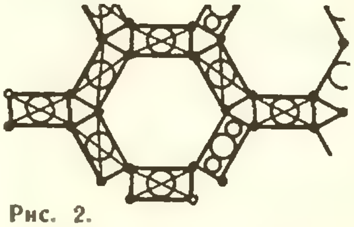


Рис. 2.

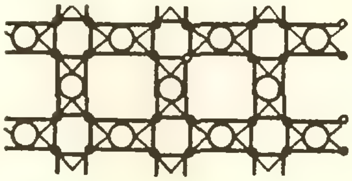


Рис. 3.

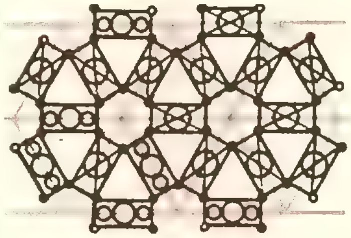


Рис. 4.

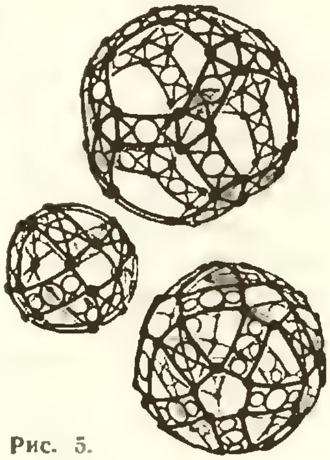


Рис. 5.

Пример такого соединения с $p=6$, $q=3$ изображен на рисунке 2. При значениях $\langle p, q\rangle$, равных $\langle 6, 3\rangle$, $\langle 3, 6\rangle$, $\langle 4, 4\rangle$ (рис. 2—4), мы получим заполнения плоскости правильными p-угольниками, при которых в каждой вершине сходится по q граней. Пока мы получили только плоские мозаики **). При других p и q мозаики выходят в пространство. Если собрать мозаики типов $\langle 5, 3\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$, $\langle 4, 3\rangle$ и $\langle 3, 3\rangle$, то получатся «раздутые» каркасные модели правильных многогранников: додекаэдра октаэдра, икосаэдра (рис. 5), куба и (правильного) тетраэдра, (§ 54 «Геометрии 10»). Эти мозаики называются *сферическими*.

Возьмем теперь $\langle p, q\rangle = \langle 3, 7\rangle$ (рисунок на четвертой странице обложки). При сборке мы увидим, что конструкция «не желает быть плоской», но и не округляется как сферическая мозаика: получающаяся поверхность искривляется так, что каждый ее участок принимает седлообразную форму. При этом в принципе мы можем продолжать построение неограниченно (в отличие от сферического, но подобно плоскому случаю); правда, рано или поздно конструкция изгибается настолько, что натыкается сама на себя, и дальнейшая сборка возможна только, если допустить самопересечение.

Поверхность $П$, часть которой мы смоделировали, называется *псевдосферой*. Оказывается, если расстоянием между двумя точками $A, B \in П$ назвать расстояние между ними, измеренное вдоль этой поверхности, то на $П$ будут выполняться аксиомы геометрии Лобачевского. Таким образом, можно сказать, что псевдосфера есть модель плоскости Лобачевского. Мозаика $\langle 3, 7\rangle$ — один из простейших паркетов на ней.

Еще одно замечательное свойство этой модели: ее можно заставить скользить саму по себе, практически не деформируя ребер, при этом любую вершину можно перевести в любую другую вершину! Иначе говоря, наша мозаика допускает самосовмещения. Аналогичным свойством, очевидно, обладают плоские и сферические мозаики: их самосовмещения — это просто перемещения плоскости и, соответственно, повороты сферы. Напротив, тор на первой странице обложки этим свойством не обладает.

В заключение предлагаем следующую задачу: докажите, что плоские мозаики характеризуются условием $(p-2)(q-2)=4$, а сферические — $(p-2)(q-2)<4$, и перечислите все мозаики этих типов.

В. Дубровский

---

*) Этот конструктор выпускается в Белоруссии и Эстонии и поступает в магазины детских игрушек в крупных городах.

**) Эти мозаики являются правильными паркетами («Квант», 1979, № 2, с. 9).

задачник кванта

Задачи

М571—М575; Ф583—Ф587

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М571, М572» или «Ф583». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи этого номера предлагались на заключительном туре последней Всесоюзной олимпиады.

Числа в скобках обозначают класс, в котором предлагались задачи.

М571. Убывающая последовательность (x_n) положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}<3. \qquad (10)$$

З. Чантурия

М572. Кенгуру прыгает по углу $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x;\ y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1;\ y-1)$ или в точку $(x-5;\ y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x;\ y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x;\ y)$ и найдите его площадь. (8)

А. Кушниренко, А. Сосинский

М573. Через точку O а) на плоскости; б) в пространстве проведено 1979 прямых, никакие две из которых не перпендикулярны друг другу. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать на каждой из остальных прямых по точке $A_i\in l_i$ $(i=2,\ 3,\ \ldots,\ 1979)$ так, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярны:

$$(A_1A_3)\perp l_2,\ (A_2A_4)\perp l_3,\ \ldots,\ (A_{i-1}A_{i+1})\perp l_i,\ \ldots,$$
$$(A_{1977}A_{1979})\perp l_{1978},\ (A_{1978}A_1)\perp l_{1979},$$
$$(A_{1979}A_1\perp l_1. \qquad (9)$$

Б. Агафонов

М574*. Конечная последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 0 до $n-1$ сумма

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n>1000$. (9)

С. Конягин

М575*. На прямой по порядку расположены точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что длины отрезков $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более, чем на 1. Докажите, это всегда можно сделать:

а) для $k=3$,

б) для каждого натурального $k<n$. (10)

В. Гринберг, В. Гальперин

Ф583. Наблюдатель движется с постоянной скоростью вдоль некоторой наклонной прямой. Брошенное под углом к горизонту тело пересекает траекторию наблюдателя дважды с интервалом времени τ. Оба раза тело находится впереди наблюдателя на одном и том же расстоянии от него. Как выглядит с точки зрения наблюдателя траектория тела?

После второго пересечения наблюдатель измеряет пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени длительностью τ. Найдите отношение этих путей. (8)

М. Кицай

Ф854. В небольшую тонкостенную металлическую кастрюлю налили 0,5 л воды, поставили кастрюлю на плиту и, измеряя температуру воды в различные моменты времени, построили график зависимости температуры от времени. Затем воду вылили, в кастрюлю налили 0,7 кг спирта и, поставив кастрюлю на ту же самую плиту, построили график зависимости температуры спирта от времени. Оба графика приведены на рисунке 1. Пользуясь этими графиками, определите удельную теплоемкость спирта и удельную теплоту парообразования, если за 30 минут кипения количество спирта в кастрюле уменьшилось вдвое. Теплоемкость кастрюли 200 Дж/К. Испарением с поверхности жидкости пренебречь. (9, 10)

И. Слободецкий

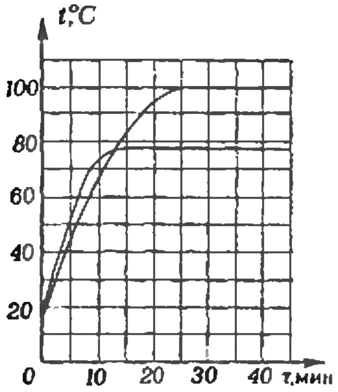


Рис. 1.

Ф585. Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке 2. Амперметр A_1 показывает 2А, амперметр A_2 показывает 3А. Какие токи протекают через амперметры A_3, A_4 и резистор? Найдите отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению резистора. (8, 9)

В. Скороваров

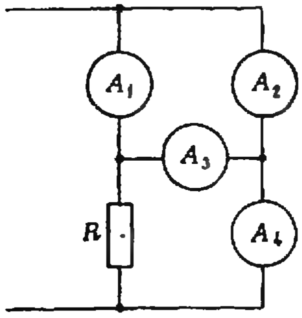


Рис. 2.

Ф586. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0. В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде сразу после его заполнения? (9)

Е. Бутиков

Ф587. Проводник массы M и длины l подвешен к диэлектрику за концы с помощью двух одинаковых проводящих невесомых пружин с общим коэффициентом жесткости k. К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкости C. Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости конструкции.

Проводник смещают в вертикальной плоскости из положения равновесия и отпускают. Определить дальнейшее движение проводника в вертикальной плоскости. Сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников пренебречь. (10)

Д. Футорский

Решения задач

М517—М519; Ф526, Ф530—Ф532.

М517. *В окружность радиуса R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.*

Нам понадобится следующая простая лемма: *пусть треугольники ABC_1 и ABC_2 имеют общее основание $[AB]$ длины R; тогда*

1) *если вершины C_1 и C_2 лежат по разные стороны от $[AB]$, то*

$$S_{ABC_1}+S_{ABC_2}\leqslant\frac{1}{2}R\cdot|C_1C_2| \quad \text{(рис. 1, } a\text{);}$$

2) *если вершины C_1 и C_2 лежат по одну сторону от $[AB]$, то*

$$|S_{ABC_1}-S_{ABC_2}|\leqslant\frac{1}{2}R\cdot|C_1C_2| \quad \text{(рис. 1, } б\text{).}$$

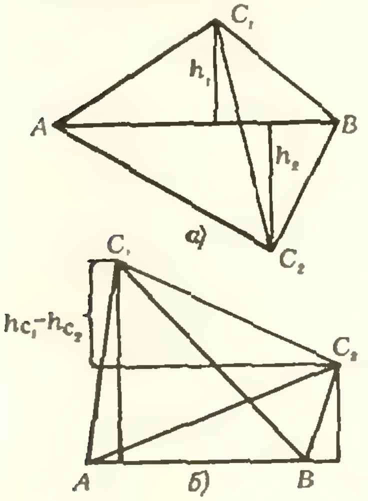


Рис. 1.

Докажите эту лемму самостоятельно.

Приступим теперь к решению задачи. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — n-угольник, вписанный в окружность с центром O; $B_1B_2\ldots B_n$ — второй n-угольник (с вершинами в отмеченных точках), причем $B_1\in[A_1A_2]$, $B_2\in[A_2A_3]$ и т. д.; пусть P — его периметр. Рассмотрим треугольники OA_1B_1, OB_1A_2, OA_2B_2, …, OB_nA_1. Если центр окружности O принадлежит многоугольнику $A_1A_2\ldots A_n$, то эти треугольники попарно не перекрываются и их объединение дает весь многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ (рис. 2), так что площадь S многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна сумме площадей этих треугольников. Согласно лемме сумма площадей двух таких треугольников с общим основанием $[OA_k]$ не превосходит $\frac{1}{2}|OA_k|\cdot|B_{k-1}B_k|=\frac{1}{2}R\cdot|B_{k-1}B_k|$ (мы считаем, разумеется, $B_0=B_n$), так что

$$S=(S_{OB_1A_2}+S_{OA_2B_2})+\ldots+(S_{OB_nA_1}+S_{OA_1B_1})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}R\,(|B_1B_2|+\ldots+|B_nB_1|)=\frac{1}{2}RP, \quad (1)$$

откуда $P\geqslant 2S/R$.

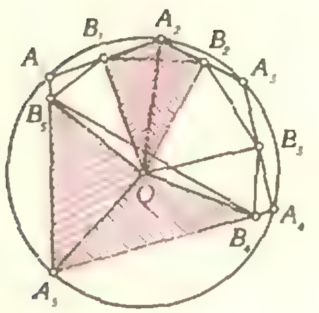


Рис. 2.

Если же центр O лежит вне многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, скажем, по разные с ним стороны от хорды A_nA_1 (рис. 3), то тогда площади треугольников OA_nB_n и OB_nA_1 входят в сумму, образующую площадь S, со знаком минус:

$$S=(S_{OB_1A_2}+S_{OA_2B_2})+\ldots+(S_{OB_{n-1}A_n}-S_{OA_nB_n})+$$

$$+(S_{OA_1B_1}-S_{OB_nA_1}).$$

Снова применив лемму, получим требуемое неравенство.

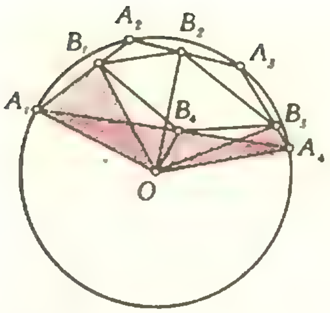


Рис. 3.

В заключение отметим, что если стороны $B_{k-1}B_k$ многоугольника $B_1B_2 \ldots B_n$ перпендикулярны соответствующим радиусам OA_k, то неравенство (1) превращается в равенство, так что в этом случае многоугольник $B_1B_2 \ldots B_n$ имеет наименьший возможный периметр $2S/R$. Предлагаем читателю, пользуясь этим, доказать, что *треугольник $B_1B_2B_3$, вписанный в данный остроугольный треугольник $A_1A_2A_3$, имеет минимальный периметр тогда и только тогда, когда B_i ($i=1, 2, 3$) — основания высот треугольника $A_1A_2A_3$.*

В. Дубровский

◆

M518. *Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0<a<b$. Докажите неравенство*

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\times\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}\,n^2.$$

Наметим сначала геометрическую идею одного из самых коротких доказательств.

Рассмотрим на плоскости Oxy n точек $\left(x_i; \frac{1}{x_i}\right)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Эти точки лежат на гиперболе $y=\frac{1}{x}$, причем по условию $a\leqslant x_i\leqslant b$. Точка $M^*(x^*; y^*)$ с координатами

$$x^*=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \quad y^*=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n} \qquad (1)$$

— центр тяжести n одинаковых материальных точек $\left(x_i; \frac{1}{x_i}\right)$. Поэтому она принадлежит выпуклой фигуре, ограниченной дугой гиперболы и отрезком прямой с концами в точках $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$ (рис. 4).

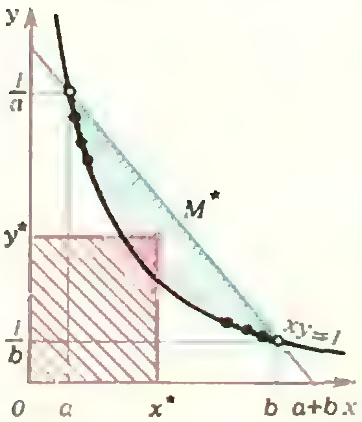


Рис. 4.

Произведение x^*y^* — площадь заштрихованного на рисунке 4 прямоугольника — достигает максимума, когда точка M^* попадает в середину отрезка AB. В самом деле, ясно, что если $(x^*; y^*)$ не лежит на $[AB]$, то площадь можно увеличить, сдвинув точку M^* на отрезок AB. А для точек $(x; y)$ этого отрезка y — линейная функция от x, следовательно, площадь $s(x)=xy$ — квадратный трехчлен от x. Поскольку $s(x)$ принимает при $x=a$ и $x=b$ одинаковые значения $s(a)=s(b)=1$, а $s(0)=0$ (рис. 5), максимум $s(x)$ достигается посередине между $x=a$ и $x=b$ — при $x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

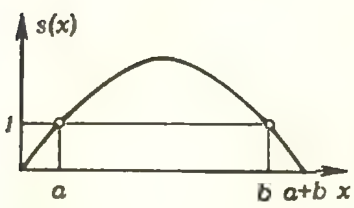


Рис. 5.

Отсюда

$$x^*y^*\leqslant\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{(a+b)^2}{4ab},$$

что и требуется доказать.

В более математическом обосновании нуждается лишь тот факт, что «центр тяжести» — точка с координатами (1) — лежит ниже отрезка AB. Заметим, что уравнение прямой AB имеет вид $aby+x=a+b$ (проверьте, что точки A и B лежат на этой прямой), так что основной этап нашего доказательства — неравенство

$$aby^*+x^*\leqslant a+b. \qquad (2)$$

Теперь все готово для короткого формального доказательства (которым мы могли бы ограничиться): для каждого i

$$\frac{ab}{x_i}+x_i\leqslant a+b, \qquad (3)$$

поскольку $(x-a)(x-b)\leqslant 0$ для $x\in[a; b]$. Сложив неравенства (3) по $i=1, 2, \ldots, n$, разделив обе части на n и введя обозначения (1), получим (2), откуда

$$x^*y^*\leqslant x^*\cdot\frac{(a+b-x^*)}{ab}\leqslant\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{ab}=\frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

Н. Васильев

◆

М519. *Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m>n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.*

а) Докажите, что если $m>2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m>\alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

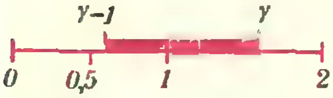


Рис. 6.

Текущую ситуацию в игре будем описывать парой натуральных чисел (i, j), где i — число спичек в первой кучке, а j — во второй.

а) В случае, когда $m\geqslant 2n$, *несложно доказать* существование выигрышной стратегии для начинающего, не указывая ее конкретно. Из ситуации (m, n) мы можем сделать $\left[\frac{m}{n}\right]$ различных ходов:

$$(m, n)\to(m-n, n), (m-2n, n), \ldots, (m-(q-1)n, n), (m-qn, n),$$

где $q=[m/n]$, то есть $0\leqslant m-qn<n$. Если ситуация $(m-qn, n)$ — проигрышная, то выигрышный ход: $(m,n)\to(m-qn, n)$. *Если же ситуация $(m-qn, n)$* — выигрышная, то предыдущая $(m-(q-1)n, n)$ — проигрышная, поскольку из нее можно пойти только в $(m-qn, n)$. (Заметим, что при $m\geqslant 2n$ обязательно $q\geqslant 2$, так что $q-1\geqslant 1$.) В этом случае выигрышный ход: $(m, n)\to(m-(q-1)n, n)$.

б) Заметим, что «выигрышность» ситуации зависит только от отношения $\frac{m}{n}$, где m и n — первоначальные количества спичек в обеих кучках (поскольку при переходе от одной позиции к другой наибольший общий делитель чисел m и n сохраняется).

Отбросим теперь условие $m>n$. Тогда наша задача сводится к такой: *рассортировать все рациональные числа на два класса: выигрышные числа $\alpha=\frac{m}{n}$ и проигрышные числа.*

Очевидно, что ситуации (m, n) и (n, m) — одновременно выигрышные или одновременно проигрышные. Поэтому, если отношение $\frac{m}{n}$ отмечать на числовой оси, то точки α и $\frac{1}{\alpha}$ будут равноправными: из того, что точка α — выигрышная, следует, что и $\frac{1}{\alpha}$ — выигрышная, и наоборот. Заметим, что ход $(m, n)\to(m-kn, n)$ соответствует вычитанию из $\alpha=m/n$ целого числа k.

Ясно, что все целые числа α (а, следовательно, и обратные целым) будут выигрышными: в ситуации, когда m/n — целое число, начинающий выигрывает за один ход, забирая все спички из большей кучки. Нетрудно сообразить, что в любой арифметической прогрессии с меньшим единицы (*положительным*) *начальным* членом и разностью 1 имеется ровно одна проигрышная точка. Из пункта а) следует, что все проигрышные числа меньше двух; поэтому проигрышные точки могут находиться только внутри *интервала* $\left]\frac{1}{2}; 2\right[$.

Докажем теперь, что все отличные от единицы рациональные точки некоторого отрезка $I\subset\left]\frac{1}{2}; 2\right[$ единичной длины являются проигрышными, и попробуем, найдя этот отрезок, указать выигрышную стратегию для начинающего. Легко понять, что отрезок I должен быть *замкнут относительно операции обращения:* именно, ес-

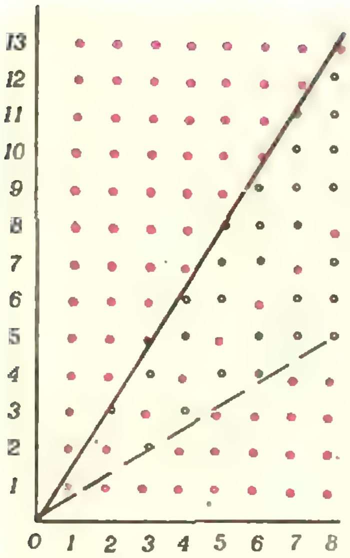


Рис. 7.

ли $\alpha \in I$, то и $\frac{1}{\alpha} \in I$. Пусть $\gamma > 1$ — правый конец этого единичного отрезка. Тогда $\gamma - 1$ — его левый конец и должно быть $\gamma - 1 = \frac{1}{\gamma}$. Отсюда находим, что $\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (это число известно под названием *«золотого сечения»*). Рассмотрим ситуацию (i, j) такую, что $\frac{i}{j} = \alpha \in \left]\gamma - 1;\ \gamma\right[$ (рис. 6), причем $\frac{i}{j} \neq 1$. Допустим, что $i > j$; тогда $\alpha \in \left]\gamma - 1;\ \gamma\right[$. В этой ситуации у играющего имеется единственный ход $(i, j) \to (i - j, j)$, для которого

$$\alpha' = \frac{i-j}{j} = \frac{i}{j} - 1 = \alpha - 1 < \gamma - 1,$$

то есть этот единственный ход приводит к ситуации с отношением α' вне интервала $]\gamma - 1;\ \gamma[$. Кроме того, на этом ходе игра не кончается.

Пусть теперь $\frac{m}{n} = \alpha \notin \left]\gamma - 1;\ \gamma\right[$ и $\frac{m}{n} \notin \mathbf{Z}$ (случай, когда отношение $\frac{m}{n}$ — целое, описан выше); положим, для определенности, $m > n$. Найдется такое $k \in \mathbf{Z}$, что $\frac{m}{n} - k \in \left]\gamma - 1;\ \gamma\right[$, так что после хода $(m, n) \to (m - kn, n)$ мы получим ситуацию с отношением, находящимся в интервале $]\gamma - 1;\ \gamma[$ и не равным единице (поскольку $m/n \notin \mathbf{Z}$).

Отсюда получаем выигрышную стратегию для начинающего игрока. Если $\frac{m}{n} \in \mathbf{Z}$, то он выигрывает первым ходом. Если $\frac{m}{n} \notin \mathbf{Z}$ и $\frac{m}{n} \notin \left]\gamma - 1;\ \gamma\right[$, то каждым своим очередным ходом он добивается того, чтобы отношение $\frac{m_k}{n_k}$ попадало в интервал $]\gamma - 1;\ \gamma[$, после чего его противник может сделать единственный — ход, приводящий снова к ситуации с отношением вне указанного интервала. Понятно, что в конце концов начинающий выиграет. На рисунке 7 красные точки соответствуют выигрышным ситуациям (m, n), черные — проигрышным.

Таким образом, утверждение пункта б) задачи верно при всех $\alpha > \gamma$ $\left(\gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

А. Слинько

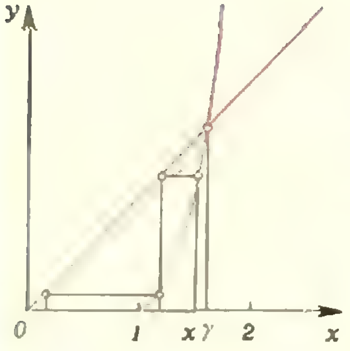


Рис. 8.

Примечание редакции

При решении этой задачи, как это часто бывает не только в элементарной математике, но и в серьезных математических исследованиях, нам очень помог «угаданный» ответ: в некоторый момент мы предположили, что все рациональные не целые точки некоторого интервала единичной длины — проигрышные, и после этого быстро довели исследование до конца. Но в этой задаче можно обойтись и без такого дополнительного шага: число γ возникает в ней естественным образом из следующих рассуждений. Как уже было замечено, все проигрышные точки принадлежат интервалу $]1/2;\ 2[$. Легко сообразить также, что если точка $x \in]1;\ 2[$ — проигрышная (выигрышная), то точка $x - 1$ — выигрышная (проигрышная). Поэтому все точки интервала $]1;\ 3/2[$ — проигрышные, и нам остается исследовать точки интервала $]3/2;\ 2[$. Предположим, что точка $x \in]3/2;\ 2[$ — проигрышная. Тогда точки $x - 1$ и $1/(x-1)$ — выигрышные, причем $1/(x-1)$ меньше 2 (но больше 1).

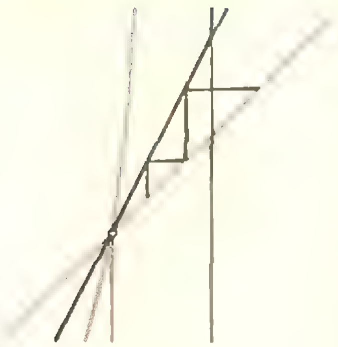


Рис. 9

Поэтому $1/(x-1)-1=(2-x)/(x-1)$ — проигрышная точка. Итак, если точка $x\in]3/2;\ 2[$ — *проигрышная, то и точка* $(2-x)/(x-1)$ — тоже проигрышная. Нарисуем график функции $(x-1)/(2-x)$ (рис. 8). На рисунке 8 показано, как по точке x найти точку $(x-1)/(2-x)$. При преобразовании $x\to(x-1)/(2-x)$ есть неподвижная точка — корень уравнения $x^2-x-1=0$, принадлежащий интервалу $]3/2;\ 2[$ (это и есть число γ). Легко доказать, что если точка находится правее точки γ, то итерации (повторения) нашего преобразования рано или поздно выведут ее за точку 2. (Одна из возможных схем доказательства приведена на рисунке 9: тангенс угла наклона черной прямой, проходящей через неподвижную точку $(\gamma;\ \gamma^2-\gamma-1)$, равен 2, а касательная к кривой $(x-1)/(2-x)$ идет круче — убедитесь в этом.)

Поэтому все точки из интервала $]\gamma;\ 2[$ — выигрышные и, следовательно, все точки из интервалов $]\gamma;\ \infty[$ и $]0;\ \gamma^{-1}]$ — выигрышные. Аналогично, если предположить, что некоторая точка из интервала $]3/2;\ \gamma[$ — выигрышная, то ее итерациями мы получим точку из интервала $]1;\ 3/2[$, откуда следует, что все *точки из интервала* $]1;\ \gamma[$ — проигрышные. Конечно, такое решение более громоздко. Однако зато оно и более поучительно!

◆

Ф526. *Полость теплоизолирующих стенок колбы термоса откачана до давления $p=10^{-5}$ атм (при комнатной температуре). Вместимость колбы 1 литр, площадь поверхности колбы $S=600$ см². Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет с 90°C до 70°C. Теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К); универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К·моль). Утечку тепла через пробку не учитывать.*

Отвод тепла от внутренней стенки колбы (от чая) осуществляется молекулами газа, оставшегося в полости между внутренней и внешней стенками колбы. Для того и откачивают полость стенок, чтобы оставшийся там газ не образовывал сплошной теплопроводной среды, то есть чтобы молекулы двигались между стенками без столкновения друг с другом.

Будем считать, что после столкновения со стенкой молекула имеет в среднем энергию, пропорциональную температуре стенки. После удара о внешнюю стенку кинетическая энергия поступательного движения молекулы $\varepsilon_1\sim{}^3/_2\,kT_\text{к}$, где $T_\text{к}$ — комнатная температура; после удара о внутреннюю стенку $\varepsilon_2\sim{}^3/_2\,kT'$, где T' — температура чая. Эта температура все время меняется. Однако интервал изменения T' невелик ($\Delta T=363\,\text{К}-343\,\text{К}=20\,\text{К}$). Поэтому для оценки можно считать, что $\varepsilon_1\sim{}^3/_2\,kT_\text{с}$, где $T_\text{с}=353$ К — среднее значение температуры горячей стенки.

Следовательно, каждая молекула при ударе о горячую стенку «забирает» от чая энергию

$$\Delta\varepsilon\sim{}^3/_2\,k\,(T_\text{с}-T_\text{к}).$$

Число молекул, соударяющихся с горячей стенкой за единицу времени, пропорционально ${}^1/_2\,n\,\overline{|v_x|}\,S$, где n — плотность молекул газа, $\overline{|v_x|}$ — среднее значение модуля проекции скорости молекулы на ось OX, перпендикулярную стенке. Число молекул, ударившихся о стенку за время Δt,

$$N\sim{}^1/_2\,n\,\overline{|v_x|}\,S\,\Delta t.$$

Эти молекулы заберут от чая энергию

$$\Delta E=N\,\Delta\varepsilon\sim{}^3/_4\,n\,\overline{|v_x|}\,Sk(T_\text{с}-T_\text{к})\,\Delta t.$$

Очевидно, что эта энергия равна изменению ΔU внутренней энергии чая за время Δt: $\Delta E=\Delta U$. Так как

$$\Delta U=Mc\Delta T,$$

где ΔT — изменение температуры чая,

$${}^3/_4\,n\,\overline{|v_x|}\,Sk\,(T_\text{с}-T_\text{к})\,\Delta t\sim Mc\Delta T.$$

Отсюда

$$\Delta t\sim\frac{4Mc\Delta T}{3n\,\overline{|v_x|}\,Sk\,(T_\text{с}-T_\text{к})}\ .$$

Считая что, $\overline{|v_x|} \sim \sqrt{RT_к/\mu}$ *), и учитывая, что $n = p/kT_к$ (это следует из уравнения Менделеева — Клапейрона), окончательно находим

$$\Delta t \sim \frac{4Mc\Delta T\sqrt{\mu T_к}}{3p(T_с - T_к)S\sqrt{R}}.$$

Подставляя числовые значения ($M = 1$ кг, $\Delta T = 20$ К, $T_к = 293$ К, $p = 1$ Па, $\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль и т. д.), получим

$$\Delta t \sim 3\cdot10^4\ с \sim 10\ ч.$$

А. Стасенко

◆

Ф530. *В схеме, приведенной на рисунке 10, $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_1$. Определить заряд, который протечет через батарею с ЭДС $\mathcal{E}_0$ при замыкании ключа K, полагая, что внутренние сопротивления батарей и сопротивление катушки равны нулю. Диод считать идеальным (его прямое сопротивление равно нулю, обратное — бесконечности); конденсатор до замыкания ключа был не заряжен.*

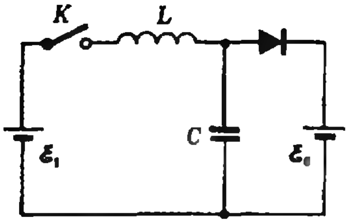


Рис. 10.

Будем считать, что диод начинает проводить ток, когда потенциал на аноде будет больше, чем на катоде. При этом сопротивление диода будет равно нулю и падение напряжения на нем будет также равно нулю.

Рассмотрим процесс, происходящий в цепи после замыкания ключа K, по этапам.

1. Ток, текущий через индуктивность L, заряжает конденсатор. При некотором значении тока I_1 конденсатор заряжается до напряжения $\mathcal{E}_1$. Заряд конденсатора $q_1 = C\mathcal{E}_1$, энергия конденсатора $W_1 = C\mathcal{E}_1^2/2$, энергия магнитного поля индуктивности $LI_1^2/2$. Работа, совершенная к этому времени батареей, равна $A = q_1\mathcal{E}_1$.

2. Хотя напряжения на батарее $\mathcal{E}_1$ и на конденсаторе одинаковы, конденсатор продолжает заряжаться — за счет энергии магнитного поля индуктивности. При некотором значении тока I_0 конденсатор заряжается до напряжения $\mathcal{E}_0$. Заряд конденсатора $q_0 = C\mathcal{E}_0$, энергия конденсатора $W_0 = C\mathcal{E}_0^2/2$, энергия магнитного поля индуктивности $LI_0^2/2$.

Работа, совершенная батареей $\mathcal{E}_1$ за время этапов 1 и 2, равна $A_1 = q_0\mathcal{E}_1 = C\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1$.

3. С того момента, когда напряжение на конденсаторе становится равным $\mathcal{E}_0$, ток начинает течь через диод в батарею $\mathcal{E}_0$. Напряжение на конденсаторе с этого момента не меняется, энергия его остается равной $W_0 = C\mathcal{E}_0^2/2$. Следовательно, энергия $LI_0^2/2$, имеющаяся в магнитном поле индуктивности, начинает уменьшаться — она идет на совершение работы по перемещению заряда через батарею $\mathcal{E}_0$.

4. Энергия магнитного поля индуктивности становится равной нулю. Энергия конденсатора по-прежнему равна $W_0 = C\mathcal{E}_0^2/2$. Через батарею $\mathcal{E}_0$ прошел некоторый заряд Q. Энергия батареи $\mathcal{E}_0$ увеличилась на $\Delta W = Q\mathcal{E}_0$.

За время этапов 3 и 4 батарея $\mathcal{E}_1$ совершила работу $A_2 = Q\mathcal{E}_1$.

Итак, за время всего процесса батарея $\mathcal{E}_1$ совершила работу

$$A_{\mathcal{E}_1} = A_1 + A_2 = C\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1 + Q\mathcal{E}_1.$$

Эта работа пошла на сообщение энергии $W_0 = C\mathcal{E}_0^2/2$ конденсатору C и на увеличение энергии батареи $\mathcal{E}_0$ на $\Delta W = Q\mathcal{E}_0$. Согласно закону сохранения энергии

$$A_{\mathcal{E}_1} = W_0 + \Delta W.$$

---

*) Так как $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} = \frac{1}{3}\frac{3RT_к}{\mu}$, то $\sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{RT_к}{\mu}}$. Хотя $\sqrt{\overline{v_x^2}} \neq \overline{|v_x|}$, однако $\overline{|v_x|} \sim \sqrt{\overline{v_x^2}}$. Поэтому мы будем считать, что $\overline{|v_x|} \sim \sqrt{\frac{RT_к}{\mu}}$.

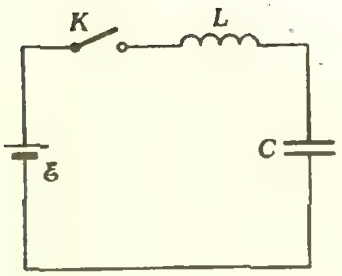


Рис. 11.

Ф531. *Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и подогреваемые земным теплом (рис. 12). Выход из них на поверхность Земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h=90$ м; теплота испарения воды $\lambda=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг; теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры приведена на рисунке 13.*

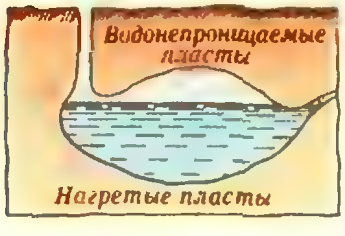


Рис. 12.

то есть

$$C\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1+Q\mathscr{E}_1=\frac{C\mathscr{E}_0^2}{2}+Q\mathscr{E}_0.$$

Отсюда находим заряд Q, протекший через батарею $\mathscr{E}_0$:

$$Q=\frac{C\mathscr{E}_0(2\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_0)}{2(\mathscr{E}_0-\mathscr{E}_1)}.$$

Примечание. Из полученного результата видно, что через батарею $\mathscr{E}_0$ заряд потечет только в том случае, если $\mathscr{E}_1<\mathscr{E}_0<2\mathscr{E}_1$. Если $\mathscr{E}_0>2\mathscr{E}_1$, то конденсатор никогда не зарядится до напряжения $\mathscr{E}_0$. *Иными словами*, максимальное напряжение, до которого можно зарядить конденсатор в схеме, приведенной на рисунке 11, равно $2\mathscr{E}$. Покажем это.

Пусть при некотором токе I напряжение на конденсаторе равно U, его заряд $q=CU$. Из закона сохранения энергии $q\mathscr{E}=CU\mathscr{E}=\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}$ находим

$$\frac{LI^2}{2}=\frac{CU}{2}(2\mathscr{E}-U).$$

Процесс зарядки конденсатора прекратится, когда ток в цепи станет равным нулю. При этом, как видно, $U=U_{\max}=2\mathscr{E}$.

В. Скороваров

◆

К концу «спокойного» периода, когда весь канал заполняется водой, давление в подземном резервуаре становится равным

$$p=p_0+\rho gh=10\ \text{атм}$$

($p_0=1$ атм — атмосферное давление). Из графика зависимости давления насыщенного пара от температуры находим, что при таком давлении вода в подземном резервуаре закипит при температуре $t=180$°C. Кипение прекратится при $t_0=100$°C (когда канал заполнен только паром и давление в резервуаре равно $p_0=1$ атм).

Тепло, выделившееся при остывании воды от $t=180$°C до $t_0=100$°C в течение «активного» периода, идет на испарение некоторой части воды, которая выбрасывается гейзером в виде пара во время извержения.

Из уравнения теплового баланса

$$cM(t-t_0)\approx\Delta M\lambda$$

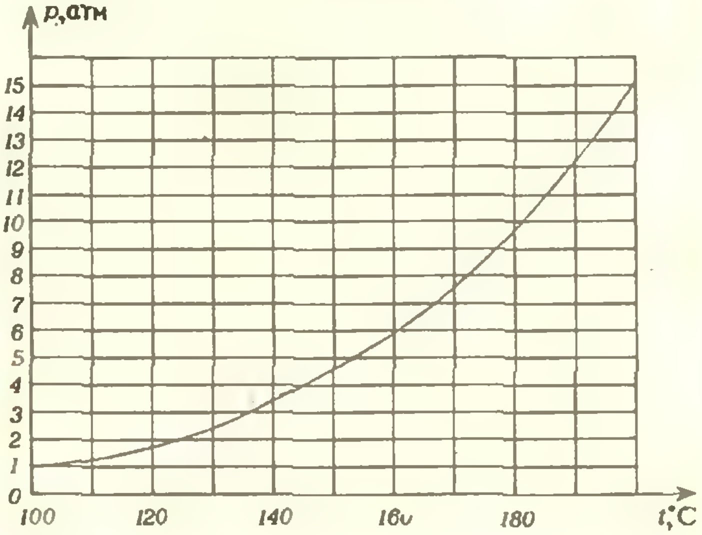


Рис. 13.

(M — масса остывшей воды, ΔM—масса образовавшегося пара) находим

$$\frac{\Delta M}{M} \approx \frac{c(t-t_0)}{\lambda} \approx 0{,}15.$$

Приведенное решение является оценочным, так как оно не учитывает ряда факторов, которые практически могут несколько изменить полученный результат. Например, при решении не учитывался подвод тепла к воде от нагретых пластов во время «активного» периода, а также поступления в резервуар новых порций воды по подземным каналам в ходе извержения.

С. Козел

◆

Ф532. *Маятник представляет собой легкий стержень длины l с грузом массой M на конце. К другому концу стержня прикреплена легкая цилиндрическая втулка a с внутренним радиусом r, надетая на вращающуюся горизонтальную ось b (рис. 14). Коэффициент трения между втулкой и осью равен μ. Определить угол отклонения стержня от вертикали в положении равновесия.*

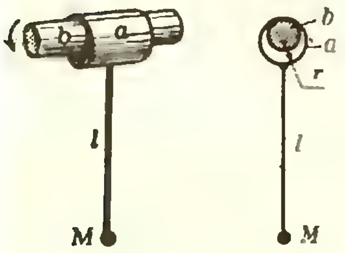


Рис. 14.

Очевидно, что груз M при вращении оси b против часовой стрелки смещен вправо от вертикали $O'O$, проходящей через центр оси. При этом точка A (рис. 15), в которой втулка маятника соприкасается с осью, смещена от верхней точки оси в сторону, противоположную направлению вращения оси. Покажем это.

При равновесии маятника сумма моментов всех действующих на него сил равна нулю. На маятник действуют сила тяжести $\vec{P}=M\vec{g}$, приложенная к грузу M, сила нормальной реакции оси $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$, приложенные к втулке в точке A. Моменты сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ относительно точки A равны нулю. Следовательно, и момент силы $\vec{P}$ относительно этой точки должен быть равен нулю. Это означает, что точка A должна лежать на линии действия силы $\vec{P}$, то есть должна быть смещена вправо от верхней точки оси.

Отметим, что даже при сколь угодно большом коэффициенте трения μ груз M при равновесии маятника не может быть отклонен от вертикали $O'O$ на расстояние, большее радиуса r втулки a. Это видно из рисунка 15.

Найдем угол α, определяющий положение точки A. Так как при равновесии маятника векторная сумма сил $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{N}$ направлена вертикально вверх (сумма сил $\vec{F}_{\text{тр}}$, $\vec{N}$ и $\vec{P}$ должна быть равна нулю), то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

($F_{\text{тр}}$, N — модули сил $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{N}$).

Найдем теперь угол φ, который составляет стержень маятника с вертикалью $O'O$ в положении равновесия. Как видно из рисунка 15,

$$\sin\varphi = \frac{|OB|}{r+l} = \frac{r\sin\alpha}{r+l}. \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

находим (см. (1))

$$\sin\varphi = \frac{r}{r+l}\,\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}. \qquad (2)$$

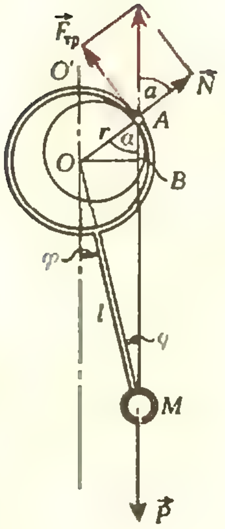


Рис. 15.

Обратите внимание, что величина угла отклонения маятника определяется только значением коэффициента трения и размерами стержня и втулки и не зависит от массы груза M и скорости вращения оси.

В предельном случае $\mu=0$ формула (2) дает $\varphi=0$, то есть при отсутствии трения маятник в равновесии занимает вертикальное положение. С ростом силы трения, то есть

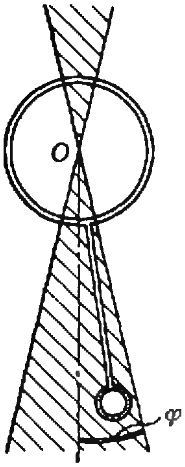


Рис. 16.

при $\mu \to \infty$, множитель $\mu/\sqrt{1+\mu^2}$ стремится к единице и $\sin\varphi \to r/(r+l)$. Это значит, что величина отклонения груза M вправо от вертикали $O'O$ (то есть длина отрезка OB на рисунке 15) стремится к r (см. (1)).

Замечательно, что такой маятник, если его вывести из равновесия, будет совершать незатухающие колебания. При достаточно быстром вращении оси действующая на втулку сила трения скольжения при любом направлении движения маятника направлена в сторону вращения оси и приводит лишь к смещению среднего положения на угол φ от вертикали.

Отметим, что существует еще одно положение равновесия маятника на вращающейся оси — положение, в котором груз M расположен выше оси, а стержень отклонен от вертикали вправо на такой же угол φ. Но это положение равновесия, как легко убедиться, является неустойчивым.

Если ось, на которую надета втулка маятника, закреплена неподвижно (не вращается), то, благодаря силе трения покоя, величина которой может принимать любые значения от нуля до μN, маятник может находиться в равновесии в любом отклоненном от вертикали положении в пределах сектора с углом φ, определяемым той же формулой (2). Это так называемая область застоя (рис. 16). Если отклонить маятник на угол больше предельного (больше φ) и отпустить, то, совершив несколько колебаний с убывающей амплитудой, маятник остановится где-то внутри области застоя. Остановка маятника может произойти в любой точке области застоя в зависимости от начальных условий. Интересно отметить, что такой же сектор положений равновесия существует и для «перевернутого» маятника на закрепленной оси.

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев.

(Начало см. с. 20)

С. Гузов (Львов) 26; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) 16, 19а), 21, 24; *О. Дмитриев* (Саратов) 16а), 21, 23а), 26, 28, 30а); *Б. Добров* (Ангарск) 28, 30а); *С. Довбыш* (Москва) 16, 18, 19, 21; *Е. Дюжикова* (Архангельск) 16а); *И. Елишевич* (Чернигов) 21; *А. Ермодин* (Петрозаводск) 21, 22, 26, 28, 29; *И. Зверович* (Минск) 16а); *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 21, 22, 25; *Т. Зограбян* (пос. Деларис АрмССР) 26; *М. Ибрагимов* (Шуша) 16а), 27; *П. Иванов* (Вилюйск) 26; *О. Ижболдин* (Ленинград) 16а), б), 21—24, 26—30; *Р. Измайлов* (Баку) 16, 18, 19, 21—29; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 18, 19а), 21, 26, 28; *С. Каган* (Ленинград) 16, 21; *А. Кагарман* (Белорецк) 26; *С. Калашников* (Рязань) 16а), б); *А. Канель* (Москва) 21, 23, 24, 26, 28, 30а); *В. Кантерман* (Вильнюс) 16а); *А. Каплан* (Сумгант) 16, 18, 19а), 21, 22, 24, 26—28, 30а); *Г. Карагулян* (Ереван) 16, 18, 19а), 21, 22, 24—28, 29а); *А. Келарев* (Свердловск) 16, 19, 21, 23, 26—29, 30а); *И. Кечов* (Сухуми) 16а); *С. Коган* (Ленинград) 28; *Г. Кокоев* (Тбилиси) 26; *А. Колдашов* (Тбилиси) 26, 28; *С. Колева* (НРБ) 18; *А. Коломыцев* (Ангарск) 30а); *Ю. Кордюков* (Москва) 26, 27, 30а); *А. Король* (Ташкент) 16б), 22, 23; *С. Кочетов* (п/о Дружба Краснодарского края) 21, 24; *О. Кравец* (Воронеж) 16а), 26—28, 30а); *В. Крикухин* (Махачкала) 26; *С. Крылов* (Великий Устюг) 28; *И. Крюков* (Ивантеевка Московской обл.) 16, 18, 19; *С. Кузина* (п. Джалиль ТатАССР) 26; *С. Кузнецов* (Ангарск) 16, 18—24, 26—28, 30; *Е. Кузьмин* (Череповец) 16, 18, 21—24, 26, 28, 29; *А. Кулеско* (Донецк) 16, 19—21, 24, 25, 27, 28; *А. Курилин* (Москва) 26; *В. Кухарчук* (с. Малый Шпаков Ровенской обл.) 27; *А. Кушнеров* (Москва) 21, 26; *А. Кущ* (Днепропетровск) 26; *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТатАССР) 21; *Б. Лейтес* (Москва) 26—28, 30а); *О. Лусикян* (Ереван) 18, 20; *Б. Маламед* (Запорожье) 16а), б), 19а); *М. Маламед* (Запорожье) 30а); *Р. Мамедов* (Баку) 26; *С. Мамедов* (Баку) 16а), 26; *Д. Мартынов* (п/о Черкизово Московской обл.) 21; *М. Марьянович* (СФРЮ) 21, 26; *В. Матчишин* (Целиноград) 26; *В. Машевский* (Одесса) 16, 28; *А. Медик* (Москва) 26—28, 30; *С. Мельников* (Буденовск Ставропольского края 26, 28; *Р. Мешойрер* (Москва) 16а), б), 21, 24; *А. Миндлин* (Саратов) 16а), б), 19а), 21; *Д. Миндлин* (Ташкент) 16, 18, 19а), 20—24, 27—29, 30а); *Е. Мордвинов* (Шатура) 26, 27; *С. Морейно* (Москва) 16, 21, 24, 26—28, 30а); *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 16, 18, 19а), 20—24, 26—28; *О. Намазов* (с. Фахрало ГССР) 27; *С. Наумов* (Тольятти) 26; *И. Нестеров* (Пскент) 26; *С. Новиков* (Херсон) 18, 21—24, 26,

(Продолжение см. с. 43)

Г. Курдюмов

Консервативность бесконечного строя

В этой заметке решается задача М500г) из Задачника «Кванта» («Квант», 1978, № 4; см. также 1979, № 2). В конце заметки приводятся три новые задачи, решения двух из которых (задачи 1 и 3) не известны.

Имеется бесконечная в обе стороны шеренга первоклассников. По команде нале-ВО все первоклассники, кроме конечного их множества, повернулись налево; остальные повернулись направо. В каждую последующую секунду каждый первоклассник поворачивается на 180°, если первый и третий из стоящих перед ним повернуты к нему лицом. Все остальные первоклассники остаются неподвижны. Докажите, что движение в этом бесконечном строю через конечное время прекратится.

Пусть вначале все первоклассники стоят к нам лицом (рис. 1, *а*). После первого же поворота все они будут смотреть налево или направо. Назовем первоклассников, смотрящих (в данный момент) направо, *правыми*, смотрящих налево — *левыми* (рис. 1, *б*). Очевидно, в первый момент правыми окажутся те, кто правильно выполнил команду «нале-ВО», а «нарушители» окажутся левыми.

По условию в первый момент левых первоклассников конечное число.

Назовем первоклассников, которые в следующую секунду повернутся, *вертунами* (легко сообразить, что в каждый момент вертунов конечное число). Левых *невертунов* мы будем называть *злостными*. Очевидно, левый первоклассник является злостным, если перед ним на первом или на третьем месте стоит левый первоклассник (рис. 1, *в*). Вертунов мы будем рисовать зеленым цветом, злостных первоклассников — красным, а правых *невертунов* — синим (рис. 1, *в*).

Прежде чем приводить доказательство в общем виде, рассмотрим для иллюстрации частный случай. Пусть левых первоклассников ровно семь, и все они стоят подряд. Развитие во времени такого строя показано на рисунке 2. Мы видим, что через 12 секунд левых первоклассников не остается. Аналогичным образом бу-

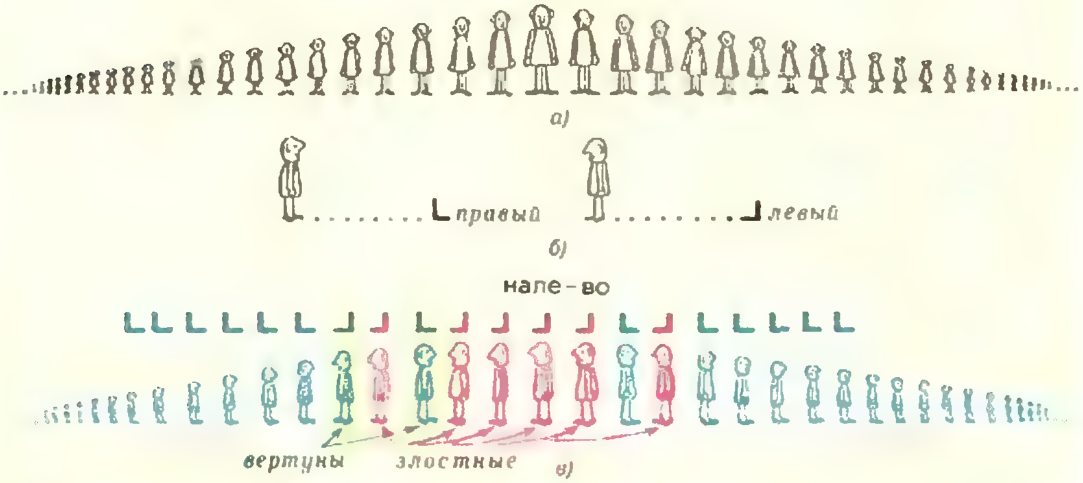


Рис. 1.

дет происходить *эволюция строя* при наличии любого сплошного куска из n левых первоклассников: через $2n—2$ секунд все первоклассники станут правыми, и движение прекратится.

Приведем теперь доказательство для общего случая — когда левые первоклассники стоят произвольным образом. Нам потребуется несколько дополнительных определений. Назовем *островом* отрезок, соединяющий самого правого из левых и самого левого из злостных левых. *Болотом* мы будем называть кратчайший отрезок, примыкающий к острову слева и включающий в себя всех вертунов (болота, конечно, может и не быть). Первоклассников, не вошедших ни в остров, ни в болото, назовем *морем* (рис. 3).

Лемма 1 (очевидная). *Если правее правого первоклассника A стоят только правые первоклассники, то A всегда так и будет правым (рис. 4).*

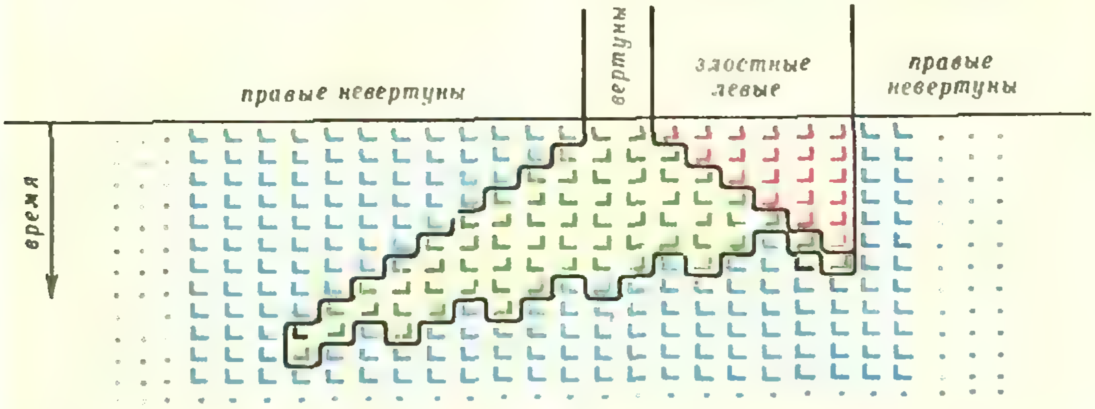


Рис. 2.

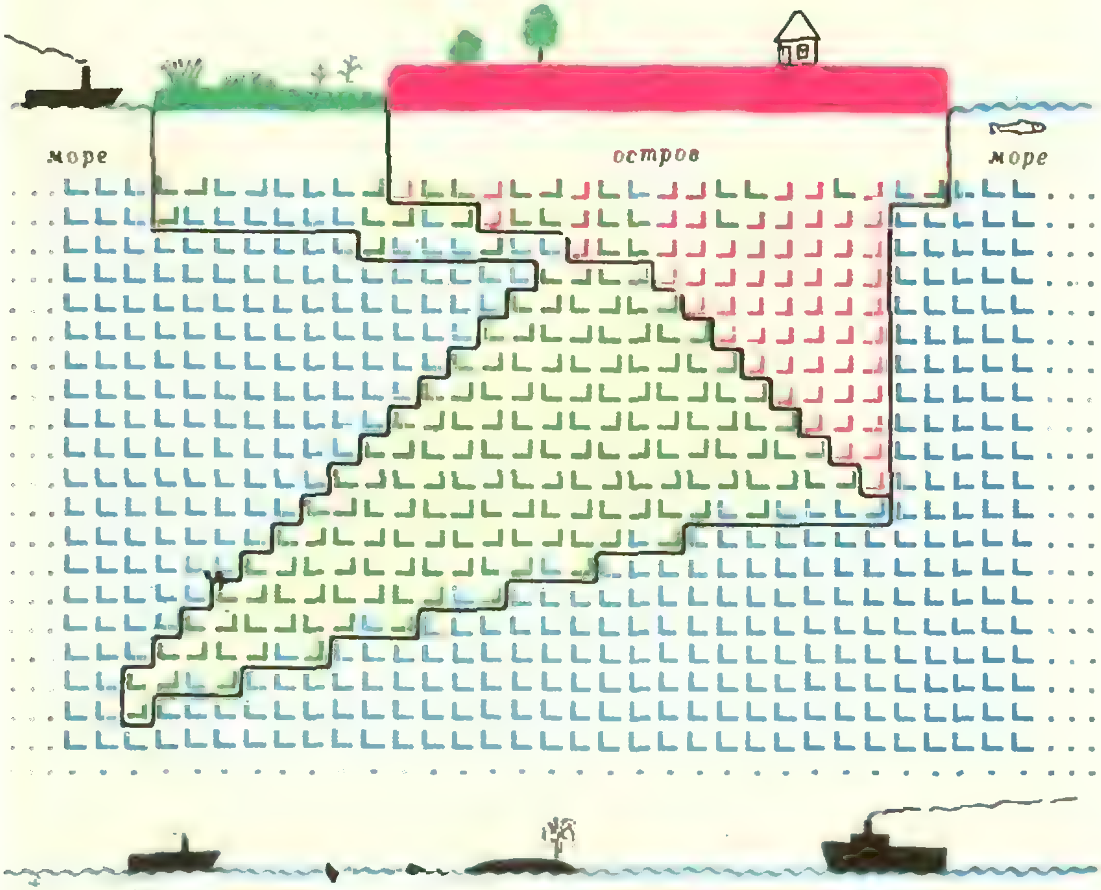


Рис. 3.

Лемма 2. *Если первоклассник A не является злостным и левее его нет злостных, то и в следующую секунду A не будет злостным.*

Доказательство. Если A — левый вертун или правый невертун, то через секунду A будет правым и, значит, не будет злостным. Пусть теперь A — правый вертун (рис. 5). Если его сосед слева $(A-1)$ в исходный момент — правый, то он (сосед) останется правым также и в следующую секунду. Если же первоклассник $(A-1)$ — левый, то, не будучи злостным, он все равно повернется направо. Рассуждения, проведенные для первоклассника $(A-1)$, проходят и для первоклассника $(A-3)$, стоящего от A третьим слева. Таким образом, через секунду первоклассники $(A-1)$ и $(A-3)$ окажутся правыми. Отсюда следует, что в этот момент A будет левым вертуном.

Из леммы 2 следует, что *если в некоторый момент первоклассник A не является злостным и левее его нет злостных, то A не будет злостным также и во все последующие моменты.*

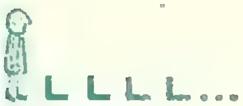


Рис. 4.

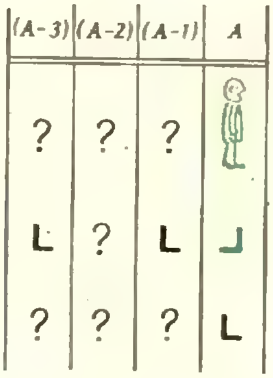


Рис. 5.

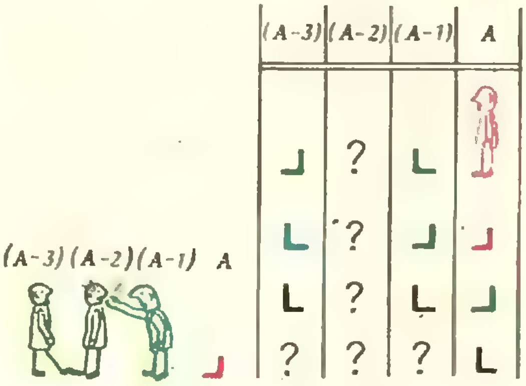


Рис. 6. а) б)

Лемма 3. *Если левее злостного первоклассника A нет злостных, то не позднее чем через две секунды A перестанет быть злостным.*

Доказательство. Поскольку в исходный момент первоклассник A является злостным и левее него злостных нет, хотя бы один из первоклассников $(A-1)$ и $(A-3)$ является левым вертуном. Если среди первоклассников $(A-1)$, $(A-3)$ вертун один, то в следующий момент оба первоклассника $(A-1)$ и $(A-3)$ уже будут правыми (подумайте, почему) и первоклассник A перестанет быть злостным. То же произойдет и в случае, когда оба первоклассника $(A-1)$ и $(A-3)$ оказываются левыми вертунами. Пусть теперь оба они вертуны, но один из них левый, а другой — правый. Случай, когда первоклассник $(A-1)$ — левый вертун, а первоклассник $(A-3)$ — правый, исключается, поскольку тогда первоклассник $(A-2)$ не может быть ни левым, ни правым (рис. 6, *а*). Поэтому правый вертун — это первоклассник $(A-1)$, а левый вертун — первоклассник $(A-3)$ (рис. 6, *б*). В этом случае в следующий момент первоклассник $(A-1)$ становится левым, а первоклассник $(A-3)$ — правым, причем, как и выше, оба они вертунами стать не могут. Кроме того, поскольку $(A-1)$ не был злостным с самого начала и левее него злостных не было, он по лемме 2 не будет злостным. Значит, первоклассник $(A-1)$ — левый вертун, а $(A-3)$ — правый невертун. Поэтому в следующую секунду первоклассники $(A-1)$ и $(A-3)$ оба становятся правыми и первоклассник A перестает быть злостным.

Лемма 3 доказана.

Из этих лемм следует, что если *n — длина острова* (число входящих в него первоклассников), то не более чем через $2n$ секунд остров исчезнет.

Лемма 4. *Если среди трех первоклассников, стоящих подряд, нет злостных левых, а правее их стоят только правые, то через секунду все трое будут правыми невертунами.*

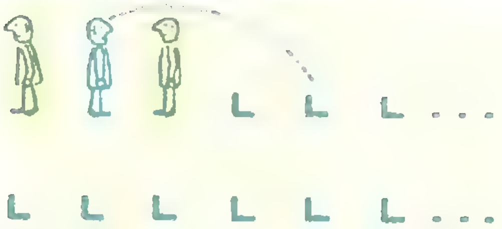


Рис. 7.

Утверждение леммы следует из того факта, что ни один из вышеуказанной тройки первоклассников не может быть правым вертуном (рис. 7).

Итак, после исчезновения острова правая граница болота будет двигаться влево со скоростью не меньше 3. Очевидно, левая его граница не может двигаться влево со скоростью больше 1. Отсюда следует, что длина болота будет уменьшаться (со скоростью не менее 2) и через некоторое время после того, как исчез остров, исчезнет и болото. Все первоклассники станут правыми.

Задача решена. Немного более тонкими рассуждениями можно показать, что движение может продолжаться не более чем $2l + 2$ секунд, где l — наибольшее расстояние между двумя левыми первоклассниками после первого поворота (по команде нале-ВО).

Задача 1. *Пусть n — количество левых первоклассников после первого поворота. Укажите функцию $f(n)$ такую, что время t движения в строю не может быть больше $f(n)$, однако возможно $t = f(n)$.*

Итак, мы нашли такое *состояние строя* A_1 (все первоклассники смотрят вправо), любое конечное изменение которого (т. е. поворот на 180° конечного числа первоклассников) исчезнет за конечное время (при эволюции по нашим правилам).

Ясно, что этим свойством обладает и состояние строя A_2 «все смотрят влево»: точно так же, как исчезает «остров» в «океане», будет исчезать «озеро» на «материке».

Указанные два состояния строя обладают свойством *консервативности*: они не меняются со временем, и, какому бы конечному изменению мы их ни подвергли, строй вернется к исходному состоянию.

Задача 2. *Докажите, что других консервативных состояний не существует.*

Рассмотрим теперь более общую задачу. Пусть A — некоторое состояние нашего строя (т. е. некоторая бесконечная в обе стороны цепочка символов ┘ и └). Обозначим через $A(t)$ состояние, в которое строй (при эволюции по нашим правилам) перейдет через t секунд. Состояния A и B назовем *эквивалентными*, если со временем они переходят в одно и то же состояние, то есть если существуют такие t_1 и t_2, что $A(t_1) = B(t_2)$. Будем говорить, что состояние A *иммунно* (так сказать, невосприимчиво), если ему эквивалентно любое состояние A', отличающееся от A состояниями лишь конечного числа первоклассников.

Легко видеть, что все состояния, эквивалентные консервативным (в том числе — консервативные), иммунны.

Задача 3. *Существуют ли у описанного выше строя иммунные состояния, не эквивалентные консервативным?*

Советуем купить

Математика

1. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. *Новые встречи с геометрией.* «Наука», ц. 50 к.

2. Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Ч. 2-я. «Наука», ц. 1 р. 20 к.

Физика, механика, астрономия

3. Дубошин Г. Н. *Небесная механика.* «Наука», ц. 1 р. 30 к.

4. Зубов В. Г. *Механика. (Начала физики.)* «Наука», ц. 90 к.

5. Иродов И. Е. *Задачи по общей физике».* «Наука», ц. 85 к.

6. Майер В. В. *Простые опыты с ультразвуком.* «Наука», ц. 20 к.

7. *Сборник задач по общему курсу физики. Оптика.* «Наука», ц. 55 к.

8. *Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм.* «Наука», ц. 45 к.

9. *Сборник задач по общему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика.* «Наука», ц. 32 к.

10. *Сборник задач по общему курсу физики. Механика.* «Наука», ц. 67 к.

11. *Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями.* «Мир», ц. 2 р. 30 к.

12. Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике.* Т. 8. «Мир», ц. 2 р. 40 к.

13. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов.* «Наука», ц. 2 р. 68 к.

А. Земляков

Проверь себя

Ниже мы публикуем вопросы, предлагавшиеся на республиканском туре Всесоюзной математической олимпиады школьников в 1979 году. На каждый вопрос нужно выбрать единственный правильный ответ.

VIII класс

Алгебра

1. Какое из указанных неравенств задает множество, показанное на рисунке 1 штриховкой?

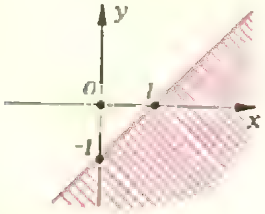


Рис. 1.

А) $y \leqslant x-1$; Б) $y \geqslant x-1$; В) $y \leqslant 1-x$; Г) $y \geqslant 1-x$; Д) $y \leqslant x+1$.

2. Используя практические приемы приближенных вычислений, найдите разность $x-y$ чисел $x \approx 13{,}6517$ и $y \approx 10{,}4$.

А) 3,2517; Б) 3,25; В) 3,2; Г) 3,3; Д) нужное значение не указано.

3. Какой формулой задается функция, обратная к функции $y=\dfrac{2}{x}$?

А) $y=\dfrac{x}{2}$; Б) $y=\dfrac{2}{x}$; В) $y=2x$; Г) $y=-\dfrac{2}{x}$; Д) $y=-\dfrac{x}{2}$.

4. При каких значениях a верно равенство $\sqrt{a^2}=-a$?

А) при всех a; Б) при $a \geqslant 0$; В) при $a \leqslant 0$; Г) при $a=0$; Д) ни при каких a.

5. При каких значениях x верно равенство

$$x^{-\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x}?$$

А) при всех x; Б) при $x \neq 0$; В) при $x>0$; Г) при $x=1$; Д) ни при каких x.

6. На рисунке 2 изображены эскизы графиков трех показательных функций $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$. Каковы соотношения между основаниями a, b и c?

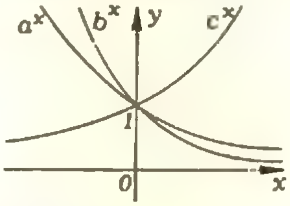


Рис. 2.

А) $c<a<b$; Б) $b<a<c$; В) $a<b<c$; Г) $c<b<a$; Д) $a<c<b$.

Геометрия

7. Определите знаки значений функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ для угла $\alpha=-1979°$.

А) $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$;
Б) $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha<0$;
В) $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha>0$;
Г) $\cos\alpha<0$, $\sin\alpha<0$;
Д) определить нельзя.

8. Каким соотношением связаны длины сторон a и c прямоугольного треугольника ABC с острым углом $A=\alpha$ (рис. 3)?

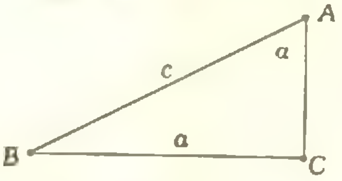


Рис. 3.

А) $c=a\cos\alpha$; Б) $c=\dfrac{a}{\cos\alpha}$; В) $c=a\sin\alpha$; Г) $c=\dfrac{a}{\sin\alpha}$; Д) $c=a\operatorname{tg}\alpha$.

9. Длины трех сторон треугольника равны 1, 3 и 5. Каков вид такого треугольника?

А) остроугольный; Б) прямоугольный; В) тупоугольный; Г) по длинам сторон определить нельзя; Д) такого треугольника не существует.

10. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 4). Какому из указанных векторов равна разность векторов $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OD}$?

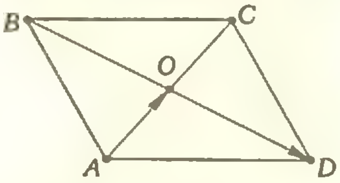


Рис. 4.

А) $\overrightarrow{AB}$; Б) $\overrightarrow{BA}$; В) $\overrightarrow{AD}$; Г) $\overrightarrow{DA}$; Д) нужный вектор не указан.

IX класс

Алгебра и начала анализа

1. Чему равен предел последовательности $x_n=\dfrac{n^2-1}{n^4-1}$?

А) 0; Б) 1; В) 0,5; Г) 2; Д) этот предел не существует.

2. Чему равен предел функции $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4-1}$ при $x \to 1$?

А) 0; Б) 1; В) 0,5; Г) 2; Д) этот предел не существует.

3. Какое из указанных множеств является областью определения функции $f(x)=\lg(x-1)+\sqrt{2-x}$?

А) $]-\infty;\ 2] \cup [1;\ \infty[$;
Б) $]-\infty;\ 2] \cap [1;\ \infty[$;
В) $]-\infty;\ 2] \cup]1;\ \infty[$;
Г) $]-\infty;\ 2] \cap]1;\ \infty[$;
Д) $]-\infty;\ 2[\cap]1;\ \infty[$.

4. При каких значениях x функция, график которой изображен на рисунке 5, не является непрерывной?

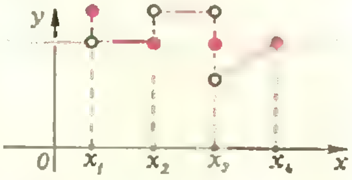


Рис. 5.

А) при $x \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; Б) при $x \in \{x_1, x_2, x_3\}$; В) при $x \in \{x_1, x_3, x_4\}$; Г) при $x \in \{x_1, x_3\}$; Д) при $x \in \{x_2, x_3\}$.

5. Какую производиую имеет функция $f(x)=(x^5+1)^6$?

А) $6(x^5+1)^5$; Б) $5x^4 \times (x^5+1)^5$; В) $30x^4(x^5+1)^5$; Г) $(5x^4)^6$; Д) $6(5x^4)^5$.

6. На рисунке 6 изображеи график иекоторой квадратичной функции. Какой из расположеиных под ним графиков А), Б), В), Г)

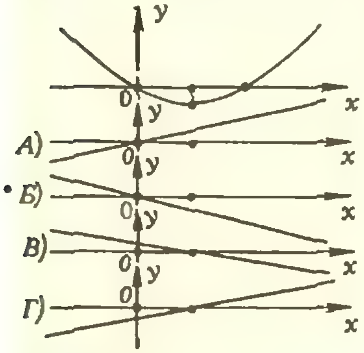


Рис. 6.

может являться графиком производиой этой функции?

Д) ни один из графиков не подходит.

Геометрия

7. Прямая a скрещивается с прямой b, прямая b скрещивается с прямой c. Каково может быть взаимное расположеиие прямых a и c?

А) обязательно скрещиваются; Б) обязательно параллельны; В) обязательно пересекаются; Г) либо скрещиваются, либо параллельны; Д) могут скрещиваться, пересекаться, быть параллельными.

8. На поверхиости параллелепипеда взяты точки A, B, C, D, как показано иа рисунке 7 (A, B, C — вершины, D — середииа ребра). Каково взаимное расположение в пространстве прямых AB и CD?

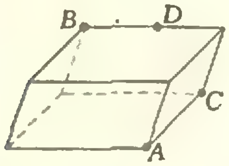


Рис. 7.

А) пересекаются; Б) скрещиваются; В) параллельны; Г) либо пересекаются, либо скрещиваются; Д) могут пересекаться, скрещиваться, быть параллельными.

9. Точка M — середина ребра CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 8). Каково разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$?

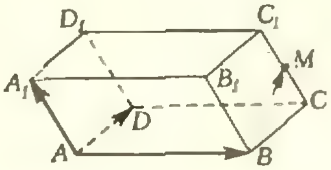


Рис. 8.

А) $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; Б) $\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$; В) $\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; Г) $\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$; Д) $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

10. Каково множество всех возможных значений скалярного произведения $c=\vec{a}\cdot\vec{b}$, если известно, что длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 2 и 3?

А) $2 \leqslant c \leqslant 3$; Б) $2 \leqslant c \leqslant 6$; В) $0 \leqslant c \leqslant 6$; Г) $-6 \leqslant c \leqslant 6$; Д) c может быть любым действительным числом.

X класс

Алгебра и начала анализа

1. Какая из указанных функций является решением дифференциального уравнения $y''=-4y$?

А) $y=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$;

Б) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$;

В) $y=\cos\left(16x+\frac{\pi}{2}\right)$;

Г) $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$;

Д) нужная функция не указана.

2. Упростите выражение $\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

А) $\sin x$; Б) $\cos x$; В) $-\sin x$; Г) $-\cos x$; Д) упростить иельзя.

3. Чему равно значение $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$?

А) $-\frac{\pi}{3}$; Б) $-\frac{2\pi}{3}$; В) $\frac{2\pi}{3}$;

Г) $\pm\frac{2\pi}{3}$;

Д) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

4. Сколько существует первообразиых $F(x)$ для функции $f(x)=\cos 2x$ таких, что $F(0)=2$?

А) ни одной; Б) одна; В) две; Г) четыре; Д) бесконечно много.

5. Какую производную имеет функция $f(x)=2^{3x}$?

А) $\ln 2\cdot 2^{3x}$; Б) $\ln(3x)\times 2^{3x}$; В) $\ln 3\cdot 2^{3x}$; Г) $3\ln 2\cdot 2^{3x}$; Д) $2\ln 3\cdot 2^{3x}$.

6. Какова область определения функции $f(x)=\log^5{}_5(\log_{0,5}x)$?

А) $]0; \infty[$; Б) $]1; \infty[$; В) $]0; 1[$; Г) $]0,5; \infty[$; Д) $]0; 0,5[$.

Геометрия

7. Плоскость α перпендикулярна плоскости β, плоскость β перпендикулярна плоскости γ. Каково может быть взаимное расположение плоскостей α и γ?

А) обязательно перпендикулярны; Б) обязательно параллельны; В) пересекаются, но не перпендикулярны; Г) либо параллельны, либо перпендикулярны; Д) могут быть параллельными или пересекаться под любым углом.

8. Какой из указанных векторов $\vec{a}$ перпендикулярен плоскости, заданной уравнением $-x+y-z=-2$?

А) $\vec{a}=(1; 1; 1)$; Б) $\vec{a}=(1; -1; 1)$; В) $\vec{a}=(1; 1; 0)$; Г) $\vec{a}=(1; 0; 1)$; Д) нужный вектор не указан.

9. Площадь основания правильной пирамиды равна S, двугранный угол при основании равен 60°. Чему равна площадь боковой поверхности пирамиды?

А) $2S$; Б) $\frac{S}{2}$;

В) $\frac{S\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{2S}{\sqrt{3}}$;

Д) определить нельзя.

10. Точка P — середина ребра DD_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, имеющего объем V. Чему равен объем пирамиды $PABCD$ (рис. 9)?

А) $\frac{1}{2}V$; Б) $\frac{1}{3}V$;

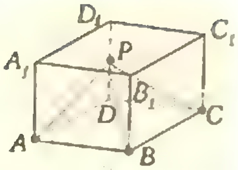


Рис. 9.

В) $\frac{1}{6}V$; Г) $\frac{1}{12}V$;

Д) определить нельзя.

Модель многогранника Конелли

В статье В. Залгаллера («Квант», 1978, № 9) дается краткое описание сделанной у нас в Харькове модели многогранника Р. Конелли — замкнутого, непрерывно изгибаемого многогранника. Здесь мы более подробно расскажем вам, как можно построить модель такого многогранника (рис. 1).

На обложке (с. 2) изображена уменьшенная в четыре раза развертка нашей модели, т. е. совокупность граней многогранника Конелли с указанием правила склеивания их сторон. Склеиванию с помощью наклеек — узких полосок у края развертки — подлежат все пары одинаково обозначенных сторон. В результате склеивания получается невыпуклый многогранник, имеющий центр симметрии, причем симметричными являются вершины, обозначенные одинаковыми буквами (со штрихами и без них). Многогранник имеет 32 грани, 24 вершины и 54 ребра, т. е. его эйлерова характеристика, как и у сферы, равна 2(=32+24—54).

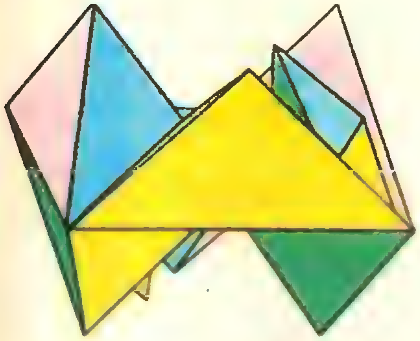


Рис. 1.

Развертку многогранника (без наклеек) следует вырезать из достаточно плотной бумаги, поточнее выполняя все построения. Приводим поэтому длины ребер модели *(в сантиметрах)*: длину 1 имеет ребро CQ, длину 3 — MS, $2\sqrt{7}$ — AS, BQ, $4\sqrt{2}$ — PA, PB, PQ, PS, RA, RB, RQ, RS, 8 — ребра AB, CK', DN и отрезок OS, $4\sqrt{5}$ — ребра MC', MD, MK, ML, MN, $8\sqrt{2}$ — CD, CL, CN, DL', DK', 12 — DM', $12\sqrt{2}$ — CD'.

Вдоль ребер CM', $M'D'$, $D'M$, MS, SP, SR, QC и им симметричных, двугранные углы многогранника Конелли при которых больше 180°, делаются разрезы, ширина которых в 1,5—2 раза больше толщины бумаги. Вдоль остальных ребер производятся неглубокие надрезы, чтобы развертка по ним легко перегибалась. С изнанки на развертку наклеивается тонкая прочная бумага (например, калька) в 1—2 слоя. Размеры последней должны быть такими, чтобы из нее получились и наклейки (шириной 7—8 мм). Затем удаляются квадраты $PQRS$ и $P'Q'R'S'$. Главные части зарубок Конелли склеиваются в положении, показанном на рисунке 2 (ΔABP и ΔABR обращены при этом друг к другу лицевыми сторонами) *).

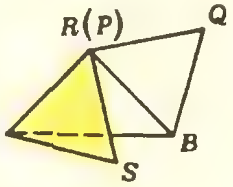


Рис. 2.

После этого зарубки собираются на ребрах CM и $C'M'$, для чего прилегающие к этим ребрам грани надо предварительно сложить лицевыми сторонами внутрь. Дальнейший порядок склеивания указан на наклейках числами 1—8.

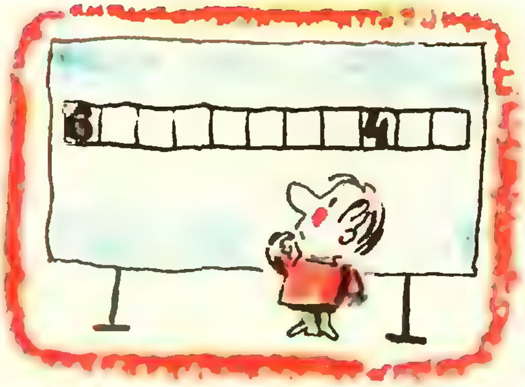
Перед последним склеиванием небезынтересно проследить через оставшееся «окошко» за процессом изгибания многогранника Конелли. Размах изгибаний значительно возрастет, если зарубки сделать на четырех ребрах CM, CM', $C'M$, $C'M'$.

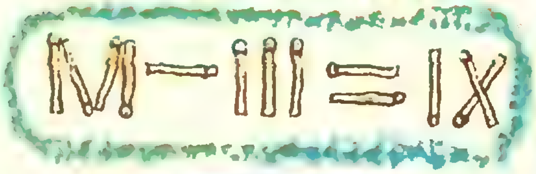
А. Медяник

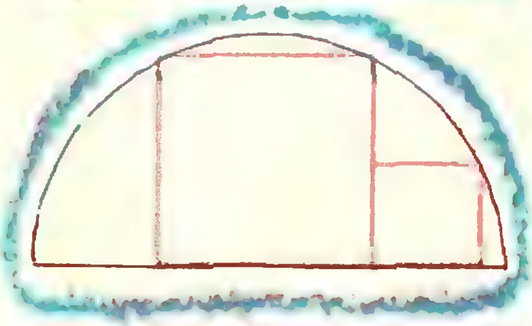
---

*) Существенным моментом в построении модели был расчет зарубки Конелли, в том числе и расположения последней относительно «лишней» точки соприкосновения. Из свойств четырехзвенного механизма вытекает, например, что такая точка не может быть серединой участка ребра, удаляемого при построении зарубки (см. пп. 4, 5, 7 статьи В. Залгаллера).

квант для младших школьников







Задачи

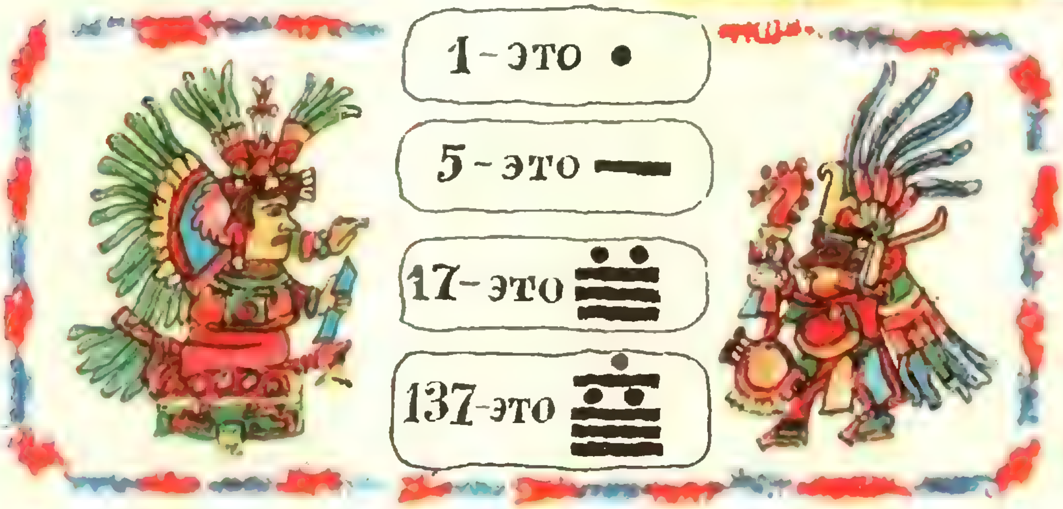
1. Заполните пустые клетки на рисунке 1 так, чтобы сумма чисел, стоящих в любых трех подряд идущих клетках, равнялась пятнадцати.

2. На рисунке 2 из спичек римскими цифрами составлено неверное равенство. Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным.

3. Два квадрата расположены внутри полукруга так, как показано на рисунке 3. Докажите, что площадь большего квадрата в четыре раза превосходит площадь меньшего квадрата.

4. Девять одинаковых книг стоят меньше десяти рублей, а десять таких же книг стоят больше одиннадцати рублей. Сколько стоит одна книга?

5. У народности майя существовал очень интересный способ записи чисел. На рисунке 4 показано, как этим способом записывались числа 1, 5, 17, 137. Установите, почему эту систему счисления считают двадцатеричной, и запишите в ней число 1979.



Г. Меледин

Можно ли проверить ответ?

После решения задачи, особенно сложной, всегда хочется убедиться в правильности полученных результатов или хотя бы в отсутствии ошибок. Существует много способов, позволяющих быстро обнаружить ошибку. Например, можно сравнить свой ответ с ответами других или с ответами, полученными при решении этой же задачи другими методами. Однако такие возможности бывают далеко не всегда.

Рассмотрим несколько приемов, которыми широко пользуются физики. Это — проверка ответа на размерность, проверка на симметрию, исследование частных (или предельных) случаев и, наконец, контроль за областью допустимых значений.

Чтобы можно было проверить ответ одним из этих способов, надо получить его в алгебраической (буквенной) форме.

1. Проверка на размерность не нуждается в особых комментариях — при подстановке размерностей величин, входящих в формулу, в итоге должна получиться размерность искомой величины. (Разумеется, все параметры надо выражать в одной и той же системе единиц.) С точки зрения такой проверки ответ удобно записать так, чтобы сразу была видна его размерность. Для этого обычно выделяют или безразмерные отношения, или устойчивые размерностные сочетания параметров типа $|\vec{v}|^2/g$ (размерность длины), $\rho g h$ (размерность давления), $\sqrt{l/g}$ (размерность времени) и т. п.

В качестве примера рассмотрим такую известную задачу:

Задача 1. *Через неподвижный блок перекинута незакрепленная нить, на концах которой подвешены грузы массой m_1 и m_2 (рис. 1). Найти натяжение $|\vec{T}|$ нити при движении грузов.*

Ответ: $|\vec{T}| = \dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$.

Проверим размерность. Произведение масс, деленное на их сумму, имеет размерность массы, а умноженное на ускорение — дает размерность силы. Следовательно, размерности левой и правой частей формулы для натяжения нити совпадают.

2. Проверка на симметрию менее известна. Она заключается в следующем. Если в условие задачи какие-то одинаковые по размерности параметры входят таким симметричным образом, что при перестановке индексов, нумерующих параметры, задача не меняется, то такая же симметрия должна быть и в ответе.

Так, в задаче 1 натяжение нити не зависит от того, слева или справа от блока находится более тяжелый груз и каким из двух индексов — 1 или 2 — обозначена его масса. Значит, ответ не должен измениться при замене m_1 на m_2 и m_2 на m_1. Другими словами, выражение для натяжения нити должно быть симметричным относительно m_1 и m_2. Приведенный ответ этому действи-

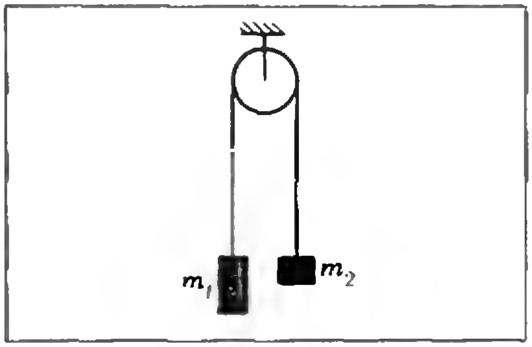


Рис. 1.

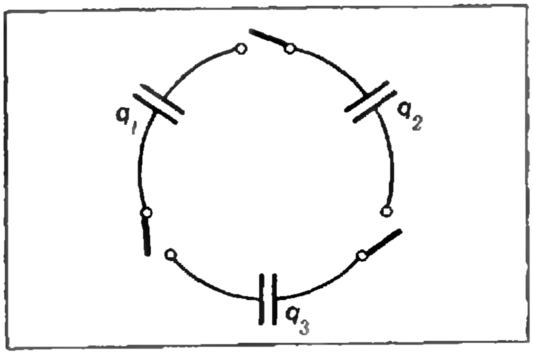


Рис. 2.

тельно удовлетворяет — и произведение, и сумма масс являются симметричными комбинациями параметров m_1 и m_2.

Приведем еще один пример, где есть подобная симметрия.

Задача 2. *Три конденсатора одинаковой емкости имеют заряды q_1, q_2 и q_3 соответственно. Потом их соединяют, как изображено на рисунке 2. Найти установившиеся заряды на конденсаторах.*

Ответ:
$$q_1' = \frac{2q_1 - q_2 - q_3}{3};$$
$$q_2' = \frac{2q_2 - q_1 - q_3}{3};$$
$$q_3' = \frac{2q_3 - q_1 - q_2}{3}.$$

Ясно, что ничего не изменится, если мы последовательно сменим нумерацию зарядов ($q_1 \to q_2$, $q_2 \to q_3$, $q_3 \to q_1$) — это всего лишь поворот картинки. Ответ должен демонстрировать такую же симметрию по отношению к циклическим перестановкам. Несложно убедиться, что наш ответ обладает этим свойством.

Для удобства контроля симметрию по параметрам в ответе надо сохранять.

3. Проверку на частных случаях проводят так. Выбирают простейшие значения параметров задачи, для которых ответ очевиден, и смотрят, дает ли полученная общая формула для этих частных значений параметров такой же результат.

Обратимся еще раз к задаче о блоке. Если любая из масс — m_1 или m_2 — равна нулю, то другая масса свободно падает, и нить не натянута. Такой же нулевой результат получается и из ответа.

(Заметим, что обращение полученного результата в нуль при нулевом значении одного из параметров обычно связано с тем, что этот параметр входит в ответ в виде множителя, может быть — в какой-то степени. В более сложных задачах так бывает лишь в предельных случаях: при очень больших или очень малых значениях выбранного параметра.)

Рассмотрим еще случай равных масс: $m_1 = m_2 = m$. При этом грузы или покоятся, или движутся равномерно. Следовательно, натяжение нити должно быть равно весу одного из грузов. Нетрудно видеть, что формула дает тот же результат.

4. Иногда при проверке на частных случаях обнаруживается несовпадение результата в частном случае и результата, полученного из общей формулы. Обычно это объясняется тем, что взятое наугад частное значение параметра не попало в область допустимых значений. Такая неприятная возможность говорит о необходимости сопровождать ответ указанием области допустимых значений параметров.

Вот характерный пример:

Задача 3. *К телу массой m, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила $\vec{F}$, направленная вниз под углом α к горизонту (рис. 3). Коэффициент трения между телом и поверхностью равен k. Найти ускорение тела.*

Типичный ответ:

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|\cos\alpha - k\left(mg + |\vec{F}|\sin\alpha\right)}{m \qquad x}.$$

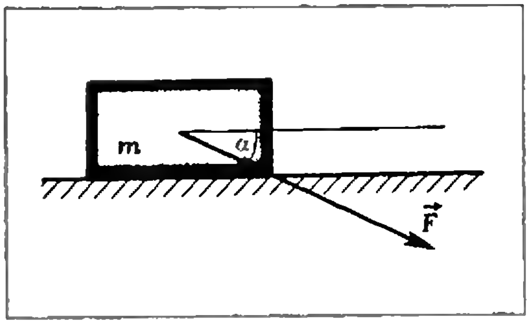


Рис. 3.

Очевидно, что, если тело не тянуть, оно ускоряться не будет. Проверим это: при $|\vec{F}| = 0$ $|\vec{a}| = -kg \neq \neq 0$! В чем же дело?

Оказывается, правильный ответ должен быть таким:

$$\begin{cases} |\vec{a}| = \dfrac{|\vec{F}|\cos\alpha - k\left(mg + |\vec{F}|\sin\alpha\right)}{m} \\ \text{при } |\vec{F}| > \dfrac{kmg}{\cos\alpha - k\sin\alpha}, \\ |\vec{a}| = 0 \text{ при } 0 \leqslant |\vec{F}| \leqslant \dfrac{kmg}{\cos\alpha - k\sin\alpha}. \end{cases}$$

Таким образом, для $|\vec{F}| = 0$ нужно пользоваться не первой, а второй формулой, и тогда никакого противоречия не наблюдается.

В заключение отметим, что всегда, когда в ответе появляется разность под знаком радикала или логарифм, обязательно надо находить область допустимых значений. Особого внимания требует разность в знаменателе; в этом случае надо немедленно проверить, при каких значениях параметров знаменатель может обратиться в нуль. Нередко это приводит к обнаружению ошибки. В нашем случае при $\cos\alpha \leqslant k\sin\alpha$ тело нельзя сдвинуть с места никакой сколь угодно большой силой — произойдет «заклинивание».

Упражнения

1. Лодка длиной L и массой M стоит, приткнувшись носом к берегу. Человек массой m, желая сойти на берег, начинает идти из дальнего конца лодки. На какое расстояние x лодка отойдет от берега, когда человек дойдет до носа лодки? Не решая задачи, выясните, какой из двух ответов правильный:

$$x = \frac{m}{M}L \quad \text{или} \quad x = \frac{m}{M+m}L.$$

(Рассмотрите предельные случаи.)

2. Нарисуйте приблизительно график зависимости проекции f на оптическую ось силы давления света на линзу от расстояния x до точечного источника света, находящегося на главной оптической оси линзы. Размеры линзы считать неограниченно большими, отражение и поглощение света линзой не учитывать. (В качестве частных случаев рассмотрите, например, такие: $x=0$, $x=F$ (F—фокусное расстояние линзы), $x=2F$, $x\to\infty$.)

(Начало см. с. 20, 32)

27, 29а); *А. Нурсеитов* (Алма-Ата) 16а), б), 21; *И. Ныжник* (Новосибирск) 21; *А. Окропидзе* (Тбилиси) 26; *А. Опарик* (Москва) 16, 18, 19а), 21, 22, 23б), 24, 26—29, 30а); *А. Павлычев* (Рига) 26; *А. Паландгиян* (Ереван) 26; *Е. Палош* (Ворошиловград) 16а), 21, 26; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) 26; *В. Питенко* (Пуховичский р-н Минской обл.) 27, 28; *А. Пичуговский* (Воронеж) 26; *Т. Подстригач* (Львов) 19а), 21, 26—28, 30а); *Л. Полтерович* (Москва) 16, 24; *А. Попелюхин* (Киев) 16, 21, 22, 23а), 24, 26—28; *С. Пошехонов* (Энгельс) 26; *В. Процишин* (с. Песчаное Павлодарской обл.) 16а); *Ч. Пуричамиашвили* (Тбилиси) 16а), 26; *А. Пурэв* (МНР) 26; *С. Путинцев* (Невинномысск) 16—25; *Б. Рабинович* (Тула) 16, 22, 26, 30а); *Д. Рамзаев* (Тбилиси) 26; *В. Рогозин* (Щелково) 16а), б); *И. Ройзмон* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 27, 28, 30а); *И. Савенков* (р. п. Лысые Горы Саратовской обл.) 16, 27, 28, 30а); *Ю. Саенко* (Жданов) 26, 30а); *Н. Санарцев* (Уфа) 21; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) 26—28, 30; *С. Севастюк* (Невинномысск) 16а), б); *М. Севрюк* (Москва) 16—24, 26—30; *П. Селиванов* (Семипалатинск) 21, 22, 23а); *А. Сивацкий* (Ленинград) 16, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 30а); *С. Сидоренко* (Брянск) 18; *М. Случ* (Москва) 21; *А. Сромин* (Ленинград) 21, 26, 28; *С. Стадниченко* (Пенза) 16а), б), 21, 22, 24, 26, 28; *М. Стрешинский* (Донецк) 21; *Ф. Сукочев* (Ташкент) 16—29; *О. Тавгень* (Минск) 16а), 27; *Р. Тагиев* (Масаллинский р-н АзССР) 26; *К. Таталян* (Ереван) 16, 19а), 21, 27—29, 30а); *Д. Тимофеев* (Горький) 16а); *М. Торосян* (Ереван) 16а), б), 18, 20—22, 24, 26, 27; *Н. Трифонов* (Канск) 16а), б), 19а), 20—22, 25, 26, 28; *В. Трофимов* (Москва) 27; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 26; *Д. Тураев* (Горький) 18, 19а), 20, 26, 27, 30а); *В. Уманский* (Баку) 16а), б), 21, 27, 28; *А. Унанян* (Севан) 21, 22, 24; *А. Фатуллаев* (Баку) 26; *С. Хосид* (Алма-Ата) 16, 18, 19, 21, 24, 26, 28; *К. Христов* (НРБ) 16, 18, 19а); *Л. Цаленко* (Москва) 16, 19а), 21, 22, 24, 26, 28; *З. Цихиставн* (Телави) 16а), 21; *А. Чаплыгин* (Николаев) 16а), б), 18, 19а); *О. Чечель* (Москва) 26—28; *В. Шарафян* (Ереван) 18, 26; *Н. Шаромет* (Москва) 21, 28; *Г. Шахбазян* (Ленинград) 19а); *Е. Шкляр* (Гомель) 21; *В. Шматенко* (Ангарск) 26; *М. Эргашев* (Фергана) 16а), б); *А. Ялышев* (Тула) 16, 19а), 26, 30а); *В. Ясинский* (Винница) 21.

Физика

В. Абаджаев (Львов) 28, 31; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) 23, 24; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) 24; *Е. Александрова* (Глазов) 24, 26, 28, 29, 31; *А. Ашкинази* (Москва)

(Окончание см. с. 58)

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский автомобильно-дорожный институт

Институт основан в 1930 г. и является одним из крупнейших высших учебных заведений страны.

В институте обучаются по 14 специальностям более 10 тысяч студентов. В его составе факультеты: *дорожно-строительный, строительства аэропортов, эксплуатации автомобильного транспорта, организации перевозок и движения, дорожных машин, гидравлики и систем управления на транспорте и в строительстве, конструкторско-механический, инженерно-экономический*.

Выпускники института направляются на работу в отраслевые научно-исследовательские институты, конструкторские бюро, заводы автомобильной промышленности, проектные организации, авторемонтные заводы, автотресты, крупные автомобильные хозяйства, органы ГАИ, дорожно-строительные организации.

Срок обучения в институте: дневного — 5 лет, вечернего — 5 лет и 9 месяцев.

Студенты института ведут большую научно-исследовательскую работу в области теоретических и практических проблем автомобильного транспорта и дорожно-строительного машиностроения, дорожно-мостового и аэродромного строительства.

Поступающие в МАДИ сдают вступительные экзамены по следующим дисциплинам: русскому языку и литературе (сочинение); математике (письменно и устно); физике (письменно).

Приемные экзамены проходят с 1 по 20 августа — для дневного обучения, с 11 августа по 1 сентября — для вечернего обучения.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}+1$, $x=1$ и касательной, проведенной в точке $\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$ к кривой $y=\frac{1}{x}+1$.

3. Решить уравнение $\cos x-\cos 5x=4\cos x\cdot\sin^2 x$.

4. Решить неравенство

$$\frac{3x+7}{6x-x^2-9}<\frac{1}{x+1}.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{x+y-1}+2^{x-y+1}=3,\\ \frac{1}{7}\cdot 3^{x\cdot\log_3 2+y\cdot\log_3 2-2}+\\ \quad+3^{x\cdot\log_3 2-y\cdot\log_3 2-2}=\frac{1}{7}\end{cases}$$

Вариант 2

1. Найти экстремумы функции $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ и указать интервалы возрастания и убывания.

2. Вычислить объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=1$, $x=3$.

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{16}{11}.$$

4. Решить неравенство

$$\log_2\frac{x-4}{2x+5}<1.$$

5. Решить уравнение

$$5^{1+\log_4 x}+5^{\log_{0.25}x-1}=\frac{26}{5}.$$

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Давление. Единицы давления. Закон Паскаля для жидкостей и газов. Принцип устройства гидравлического пресса. Давление жидкости на дно и стенки сосуда при действии на нее силы тяжести. Сообщающиеся сосуды.

2. Тела массой $m_1=3$ кг и $m_2=1$ кг связаны невесомой и нерастяжимой нитью (рис. 1). С каким ускорением $|\vec{a}|$ движется тело массой m_1, если коэффициент трения его о поверхность стола $\mu=0{,}2$? Каково натяжение нити $|\vec{T}|$, связывающей оба тела? Массой блока можно пренебречь. Трение в блоке отсутствует. Плоскость стола горизонтальна.

3. До какой температуры T_2 нужно нагреть воздух, первоначально находящийся при температуре $T_1 = 293$ К, чтобы его объем удвоился, если давление при этом не меняется?

4. Определите ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r аккумулятора, если при токе $I_1 = 4$ А он отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 7{,}2$ Вт, а при токе $I_2 = 6$А — $P_2 = 9{,}6$ Вт.

5. На рисунке 2 дан ход луча ABC через тонкую рассеивающую линзу. Определите построением положение главных фокусов линзы. Дайте пояснение. Указание. Используйте метод побочной оси.

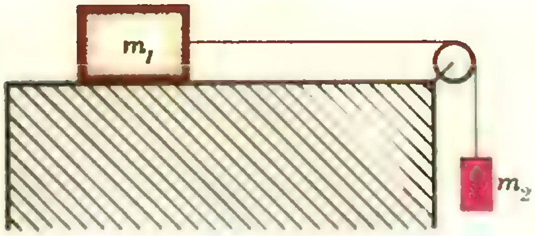


Рис. 1.

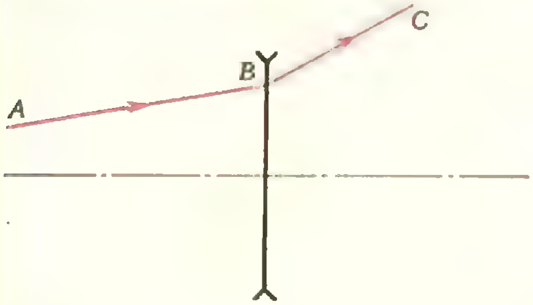


Рис. 2.

Вариант 2

1. Магнитное поле. Магнитная индукция. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Сила Лоренца.

2. Шарик массой m, летящий горизонтально со скоростью $\vec{v}$, ударяет в равнобедренную призму массой M и после удара движется вертикально вверх (рис. 3). Считая удар абсолютно упругим, найдите скорости шарика $\vec{v}_1$ и призмы $\vec{v}_2$ после удара. Сопротивлением воздуха и трением призмы о горизонтальную подставку можно пренебречь. Призма до удара покоилась.

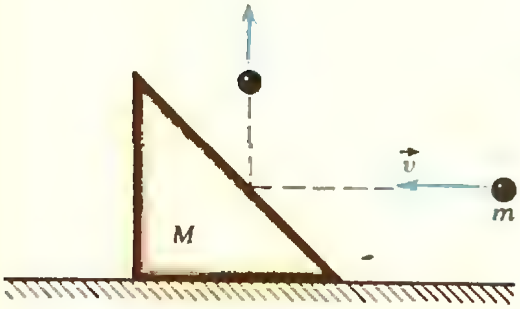


Рис. 3.

3. Состояние газа менялось в соответствии с диаграммой, приведенной на рисунке 4. Известны следующие параметры газа: $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па; $p_4 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па; $V_1 = 1$ м^3; $V_{2,3} = 2$ м^3; $V_4 = 1{,}5$ м^3. Вычислите работу, совершенную газом при переходе из состояния *1* в состояние *4*.

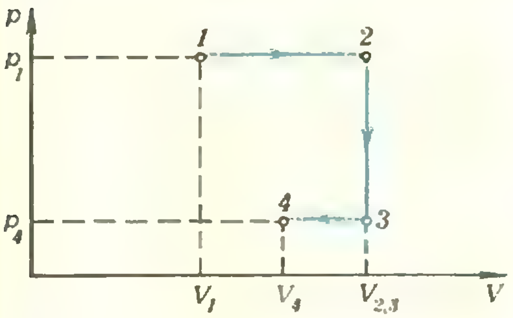


Рис. 4.

4. Два заряда, по $q = 10^{-8}$ Кл каждый, находятся на расстоянии $R_1 = 90$ см друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния $R_2 = 30$ см?

5. Взаимно перпендикулярные лучи *1* и *2* (рис. 5) идут из воздуха в жидкость. У первого луча угол преломления $\beta_1 = 30°$, у второго — $\beta_2 = 45°$. Найдите показатель преломления n жидкости.

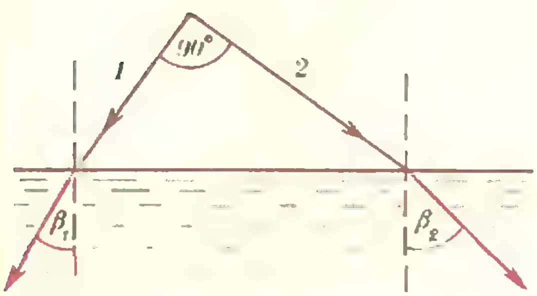


Рис. 5.

М. Воробьева, Е. Давыдов,
Ю. Рахштадт, Е. Фигуровская,
А. Хохлов, В. Черненький

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Двое рабочих за смену изготовили вместе 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй на 25%, они стали изготовлять за смену 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

2. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность образовавшейся пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg x}{\lg(3-4x)}=2.$$

4. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\cos x+1=0.$$

5. Даны функции $f(x)=4-15x^2-2x^3$ и $\varphi(x)=2x^3+18x+1$. При каких значениях x будет выполняться неравенство

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}>0\ ?$$

Вариант 2

1. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму в 2 р. 80 коп. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

2. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

3. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\lg(3x^2-2x)}.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin 2x+3\operatorname{tg} x-5=0.$$

5. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2+4x-17$, проведенная в точке $M(2,5;-0,75)$? Записать уравнение этой касательной.

Устный экзамен

Билет 1

1. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.

5. Теорема косинусов.

3. Найдите восьмой член геометрической прогрессии (b_n), если $b_1=729$ и $q=\frac{2}{3}$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_5 0,7}{\log_3(-2x-1)-\sqrt{2}}>0.$$

Билет 2

1. Достаточное условие экстремума функции.

2. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

3. Решите неравенство

$$\left|\frac{2}{x-4}\right|>1$$

4. Решите уравнение

$$3^{x-6}=7.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два автомобиля движутся навстречу друг другу, один — с начальной скоростью $|\vec{v}_1|=36$ км/ч и ускорением $|\vec{a}_1|=0,3$ м/с², а второй — с начальной скоростью $|\vec{v}_2|=54$ км/ч и ускорением $|\vec{a}_2|=0,5$ м/с². Через сколько времени встретятся автомобили и какое расстояние до встречи пройдет каждый из них, если начальное расстояние между автомобилями $s=250$ м?

2. Деталь отлита из сплава железа и никеля. Определить, какой процент по объему составляют железо и никель, а также объем всей детали, если деталь в воздухе весит $|\vec{P}_1|=33,52$ Н, а в воде — $|\vec{P}_2|=29,60$ Н. Плотность железа $\rho_1=7,8$ г/см³, никеля $\rho_2=8,8$ г/см³.

3. Тело массой $m=1$ кг соскальзывает с наклонной плоскости длиной $l=22$ м, которая образует с горизонтом угол $\alpha=30^\circ$. Скорость тела у основания горы равна $|\vec{v}|=4$ м/с. Какое количество теплоты Q выделилось при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю?

4. Медный шар диаметром $d=1$ см помещен в масло. Плотность масла $\rho=8\cdot 10^2$ кг/м³, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=5$. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Электрическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность $|\vec{E}|=4\cdot 10^6$ В/м.

5. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из-под воды светящийся предмет, находящийся над его головой на высоте $h=75$ см над поверхностью воды. Какова будет видимая высота H предмета над поверхностью воды? Показатель преломления воды $n=4/3$.

Т. Есина,
В. Пугачева

Московский институт химического машиностроения

Подробно об этом институте можно прочитать в «Кванте», 1978, № 7.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos x=\operatorname{tg} x\cdot(1+\cos 2x).$$

2. Решить неравенство

$$\log_{100} x^2+\log_{10}^2 x\leqslant 2.$$

3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости ее основания, а третья грань образует с плоскостью основания угол α. Высота наибольшей грани пирамиды равна h. Найти ее боковую поверхность.

4. Исследовать функцию $y=2x^3+3x^2-12x+5$ на максимум и минимум.

5. Векторы $\overrightarrow{AB}=(3;\ -2;\ 2)$ и $\overrightarrow{BC}=(-1;\ 0;\ -2)$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определить величину угла между его диагоналями $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\frac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2(\cos\alpha+\cos 3\alpha)}=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha.$$

2. Решить уравнение

$$3^{1+x}-2\cdot 3^{1-x}=7.$$

3. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем параллелепипеда.

4. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x-2y+2=0$, $x=2$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. В стеклянный цилиндр диаметром $D=3$ см налито $V=5$ литров масла при температуре $t=20°C$. Какова будет высота столба масла при $t_1=30°C$? Коэффициент линейного расширения стекла $\beta=9\cdot 10^{-6}K^{-1}$, коэффициент объемного расширения масла $\alpha=10{,}18\cdot 10^{-4}$ K^{-1}.

2. В сообщающихся сосудах находится ртуть; диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра другого. В узкий сосуд наливают воду; высота столба воды $h=80$ см. На сколько опустится уровень ртути в узком сосуде и на сколько он поднимется в широком? Плотность воды $\rho_в=1$ г/см^3, плотность ртути $\rho_{рт}=13{,}6$ г/см^3.

3. Из баллона выпустили половину массы газа, при этом температура газа понизилась от $t_1=27°C$ до $t_2=-73°C$. Во сколько раз уменьшилось давление в баллоне?

4. В комнате, объем которой $V=100$ м^3, температура воздуха понизилась от $t_1=25°C$ до $t_2=15°C$. Сколько водяных паров при этом сконденсировалось, если абсолютная влажность насыщающих паров при 25°C равна $\rho_1=23$ г/м^3, а при 15°C — $\rho_2=12{,}8$ г/м^3. Относительная влажность воздуха вначале была равна $r_1=90\%$.

Л. Милованова

Московский институт электронного машиностроения

Подробно об этом институте можно прочитать в «Кванте», 1978, № 6.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$6\sin^2 x+5\cos x-7=0.$$

2. На координатной плоскости заданы точки A (1; 0), B (0; 1) и C (5; 5). Вычислить площадь треугольника ABC и указать все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

3. Выписать три первых члена последовательности с общим членом

$$x_n=A^3_{n+2}+6C^3_{n+3}.$$

Какие из следующих чисел являются членами этой последовательности: 546, 548, 1978^{1978}?

4. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции, заданной равенством

$$f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1.$$

Построить график этой функции.

5. Решить уравнение

$$f(x)=-f(-|x|),$$

где $f(x)=\ln\left(\sqrt{9\operatorname{tg}^2 x+1}-3\operatorname{tg}x\right)$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}+\cos x\right)+\log_2\left(\frac{\sqrt{14}}{4}-\cos x\right)=-3.$$

2. Найти образ точки A (2; 7) при повороте координатной плоскости вокруг точки M (2; 3) на угол $-\frac{\pi}{2}$. Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти образ точки C (−4; 8) при этом повороте.

3. Проверить, какое из чисел больше: C^6_{11} или $C^3_{11}+C^4_{11}$, и найти все значения n, для которых $C^6_n<C^3_n+C^4_n$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=e^{2x-1}+2e^{1-2x}+7x-3$$

на отрезке [0,14; 1].

5. Назовем число a хорошим, если для всякого x выполняется неравенство

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}\leqslant a.$$

а) Доказать, что число 4 является хорошим числом.

б) Найти все хорошие числа.

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2|x-6|\cos x = x-6.$$

2. Даны две вершины равностороннего треугольника A (2; 0) и B (0; 2). Найти его площадь и координаты третьей вершины C. Указать все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

3. Перечислить все возможные способы распределения обязанностей между пятью туристами, если один из них должен собирать дрова, двое — готовить ужин, а остальные — ставить палатки.

Сколькими способами можно распределить обязанности среди 24 туристов, если требуется составить из них четыре группы, три из которых состоят из четырех человек?

4. Найти все первообразные для функции

$$f(x) = (2x-3)\cdot|x-2|$$

в промежутке $]-3;\ 1[$ и в промежутке $]1;\ 3[$.

5. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 3x + 2\,\mathrm{ctg}\,x \left(x \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

Выяснить, имеет ли решение неравенство $f(x) < 4{,}5$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из точек, расположенных на поверхности Земли на расстоянии $s = 35{,}4$ м друг от друга, одновременно бросают два тела под углами $\alpha_1 = 60°$ и $\alpha_2 = 30°$ к горизонту таким образом, что горизонтальные составляющие скоростей тел направлены навстречу друг другу. Через сколько времени после начала движения тела столкнутся в воздухе? Скорость первого тела $\vec{v}_1$ такова, что если бы не произошло столкновения, оно приземлилось бы в той точке, из которой было брошено второе тело.

2. Три тела одинаковой массой $m = 1$ кг лежат друг на друге, как показано на рисунке 1. Коэффициент трения между телами 1 и 2 равен $k_1 = 0{,}1$, а между телами 2 и 3 — $k_2 = 0{,}2$. Коэффициент трения между телом 3 и полом — $k_3 = 0{,}1$. Тело 2 тянут с некоторой горизонтальной силой $\vec{F}$. При какой абсолютной величине силы $\vec{F}$ возможно такое движение этих трех тел, при котором тела 1 и 3 остаются в покое друг относительно друга? Определить ускорения $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ всех трех тел при этом движении.

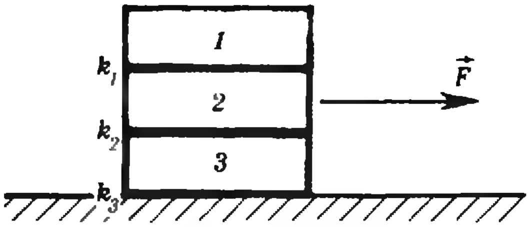


Рис. 1.

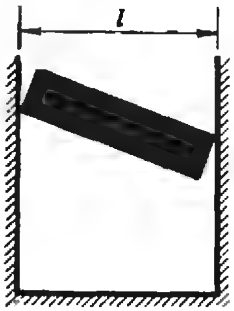


Рис. 2.

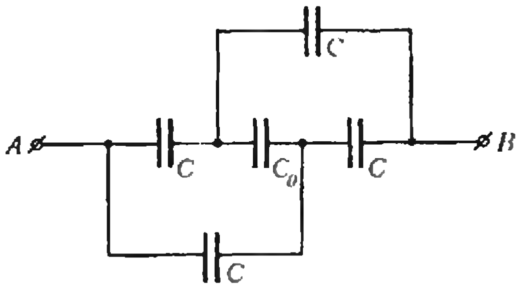


Рис. 3.

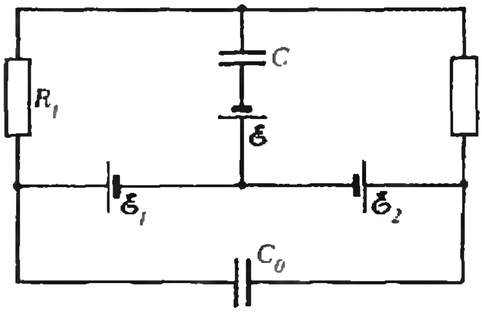


Рис. 4.

3. Доска какой наибольшей длины L_{max} может быть забита между двумя вертикальными стенками, расположенными на расстоянии $l = 2$ м друг от друга (рис. 2), если коэффициент трения между доской и стенками $k = 0{,}2$? Доску рассматривать как недеформирующуюся и весом ее пренебречь.

4. При ударе о горизонтальную плиту тело потеряло $f = 0{,}11$ своей энергии. Непосредственно перед ударом тело имело скорость $\vec{v}_0$ $\left(|\vec{v}_0| = 4{,}9 \text{ м/с}\right)$, направленную под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. На каком расстоянии s от места удара тело вторично столкнется с плитой? Трение при ударе между плитой и телом отсутствует.

5. Тело совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц. Написать

уравнение колебаний этого тела, если полная энергия тела $E=600$ эрг, максимальная возвращающая сила $F_м=3\cdot10^{-3}$ Н, а начальная фаза $\varphi_0=30°$.

6. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $M=1$ кг воды при температуре $t_0=0°$С. В цилиндре включают нагреватель мощностью $P=500$ Вт. На сколько поднимется поршень за $t=15$ мин работы нагревателя, если атмосферное давление $p=760$ мм рт. ст., а удельная теплота парообразования воды $\lambda=539$ кал/г? Считать, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

7. Определить заряд батареи конденсаторов, изображенной на рисунке 3, если к клеммам AB приложено напряжение $U=100$ В, а емкости конденсаторов равны $C=2$ мкФ и $C_0=1$ мкФ.

8. Определить заряды конденсаторов емкостью $C=4$ мкф и $C_0=2$ мкф (рис. 4), если $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $\mathscr{E}_1=10$ В, $\mathscr{E}_2=15$ В и $\mathscr{E}=5$ В. Внутренние сопротивления источников тока равны нулю.

9. В широкий сосуд с плоским дном, наполненный водой, помещена линза, фокусное расстояние которой в воде равно $F=22$ см. Линза расположена горизонтально и окружена непрозрачным плоским экраном. Дно сосуда находится в фокальной плоскости линзы. Найти диаметр D светлого пятна на дне сосуда, если поверхность воды освещается рассеянным светом. Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

10. Телескоп имеет объектив с фокусным расстоянием $F_{об}=150$ см и окуляр с фокусным расстоянием $F_{ок}=10$ см. Изображение объекта, сформированное объективом, рассматривается в окуляр как в лупу. Каков угловой размер γ полной Луны, рассматриваемой в этот телескоп, если при наблюдении невооруженным глазом ее угловой размер $\gamma'=31'$?

Г. Ефашкин,
В. Тонян

Московский экономико-статистический институт

В настоящее время МЭСИ занимает ведущее положение в стране по подготовке экономистов-статистиков и инженеров-экономистов по механизированной обработке экономической информации. Ведется также подготовка кадров по специальностям «экономическая кибернетика», «прикладная математика» и «автоматизированные системы управления».

В институте имеются следующие факультеты:

1. *Факультет статистики* готовит экономистов по специальности «статистика». Факультет имеет дневное и вечернее отделения.

2. *Факультет механизированной обработки экономической информации* готовит специалистов по двум специальностям: «организация механизированной обработки экономической информации» и «автоматизированные системы управления».

3. *Факультет экономической кибернетики* готовит специалистов по двум специальностям: «экономическая кибернетика» и «прикладная математика».

4. *Заочный факультет* готовит специалистов по двум специальностям: «организация механизированной обработки экономической информации» и «статистика».

Абитуриенты, избравшие специальности «организация механизированной обработки экономической информации», «прикладная математика» и «автоматизированные системы управления», сдают экзамены: математика (два экзамена письменно), физика (письменно), русский язык и литература (сочинение). Абитуриенты, желающие получить специальности «статистика» и «экономическая кибернетика», сдают экзамены: математика (два экзамена письменно), история СССР (устно), русский язык и литература (сочинение).

Институт имеет подготовительное отделение с дневной формой обучения. Прием документов с 1 октября по 10 ноября.

На письменных вступительных экзаменах по математике и физике в МЭСИ каждый абитуриент получает свой «вариант». (Варианты комплектуются вычислительной машиной.) Поэтому мы печатаем не варианты, а типовые задачи.

Математика

1. В каждом из двух сосудов содержится некоторое количество воды. Если из первого сосуда перелить во второй 25% имеющегося в нем количества воды, то во втором сосуде окажется воды вдвое больше, чем в первом. Если же, наоборот, из второго сосуда перелить в первый 11 литров воды, то в первом сосуде окажется втрое больше воды, чем во втором сосуде. Сколько литров воды было первоначально во втором сосуде?

2. Из двух городов выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Первый автомобиль за три часа прошел 0,08 всего расстояния между городами, а второй — за 2,5 часа 7/120 этого расстояния. Найти (в км/ч) скорость второго автомобиля, если до места встречи первый автомобиль прошел 800 км.

3. Упростить выражение

$$\left[\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right]:\left[\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right]:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}.$$

4. Вычислить выражение $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$, если известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$.

5. Вычислить без таблиц

$$-2\sqrt{2}\sin 10°\cdot(2\sin 35°-0{,}5\sec 5°-$$
$$-\cos 40°\cdot\operatorname{cosec} 5°).$$

6. Найти действительный корень уравнения

$$\frac{x+8}{x^3-2x+16}+\frac{x^3-2x+16}{x+8}=-2.$$

7. Найти (в градусах) наибольшее решение уравнения

$$3\sin^2 x-3+\sin^2 x\cdot(\operatorname{tg} x+1)=\frac{3}{2}\sin 2x,$$

удовлетворяющее условиям $-90° \leqslant x \leqslant 90°$.

8. Найти коэффициент b в уравнении $5x^2+bx-28=0$, если известно, что корни уравнения находятся в зависимости $5x_1+2x_2=1$ и b — целое число.

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2}+y=5, \\ y^2-x=7, \end{cases}$$

считая $x<-3$, и вычислить $3x-6y$.

10. При каком k система уравнений

$$\begin{cases} (k-2)x+27y=4{,}5, \\ 2x+(k+1)y=-1 \end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений?

11. Найти наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству

$$6^{x+1}+3^{x+1}<3^{x+2}-6^x+3^x.$$

12. Из круга радиуса $3\sqrt[6]{\frac{675}{4\pi^2}}$ вырезан сектор, который свернут в коническую поверхность. Подобрать центральный угол сектора так, чтобы полученный конус имел наибольший объем. В ответе записать величину этого объема.

13. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса $R=\sqrt{3}$ так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.

14. Дан треугольник ABC, у которого $|AB|=15$, $|BC|=12$, $|AC|=18$. Центр вписанной окружности O делит биссектрису угла C на две части: CO и OD. Во сколько раз $|CO|$ больше $|OD|$?

15. В прямоугольном треугольнике медианы острых углов равны $\sqrt{156}$ и $\sqrt{89}$. Найти его гипотенузу.

16. Даны три утверждения:

а) трехчлен x^2+x+a неотрицателен при всех x;

б) функция $y=\log_{2a} x$ убывает;

в) система

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ y+\cos x=2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

При каком наименьшем значении параметра a два из этих утверждений верны, а одно неверно?

Физика

1. В последнюю секунду свободно падающее тело прошло половину своего пути. С какой высоты падало тело? Принять $g=10$ м/с², $\sqrt{2}=1{,}4$.

2. Человек массой $m_{\text{ч}}=80$ кг переходит с носа на корму лодки длиной $l_{\text{л}}=5$ м. Какова масса лодки, если она за время этого перехода переместилась в стоячей воде в обратном направлении на $l=2$ м? Сопротивление воды мало.

3. Уклон участка шоссе равен $\alpha=0{,}05$. Спускаясь под уклон при выключенном моторе, автомобиль массой $m=1{,}5$ т движется равномерно со скоростью $|\vec{v}|=60$ км/ч. Какова должна быть мощность мотора автомобиля, чтобы он мог подниматься по этому склону с той же скоростью? Принять $g=10$ м/с².

4. В баллоне емкостью $V=10^{-3}$ м³ находится газ под давлением $p=0{,}5\cdot 10^6$ Па. Сколькими ходами поршневого насоса, емкостью $V_0=200$ см³, можно откачать воздух из баллона до давления $p_n=6{,}65$ Па? Ответ округлить до целого числа.

5. С какой скоростью свинцовая пуля должна удариться о преграду, чтобы расплавиться, если до удара температура пули была $t=127$°C? При ударе в тепло превращается $\eta=80\%$ энергии пули. Удельная теплоемкость свинца $c=1{,}2\times10^2$ Дж/(кг·К); температура плавления свинца $T_{\text{пл}}=600$ К; удельная теплота плавления $\lambda=2{,}5\cdot10^4$ Дж/кг.

6. Два невесомых одинаково заряженных шарика подвешены в воздухе на тонких шелковых нитях длиной $l=1$ м, причем одна из нитей закреплена в вертикальном положении, а другая, массой $m=5\cdot10^{-3}$ кг, — свободная. Определить, при какой величине зарядов нить отклонится на угол $\alpha=6°$ ($g=10$ м/с²; $\sin\alpha=0{,}1$).

7. Вольтметр со шкалой, рассчитанной на $U_V=5$ В, имеет внутреннее сопротивление $R_V=200$ Ом. Определить величину добавочного сопротивления, которое необходимо подключить к вольтметру, чтобы измерять напряжения до $U=100$ В.

8. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник вскипает через $t_1=10$ мин, при включении другой — через $t_2=15$ мин. Через сколько времени вскипит чайник, если эти обмотки включить параллельно?

9. Определить ЭДС индукции $\mathscr{E}$, возникающую на концах крыльев турбореактивного самолета, летящего горизонтально со скоростью $|\vec{v}|=900$ км/ч, если размах крыльев самолета $l=36$ м, а вертикальная проекция индукции магнитного поля Земли $B_y=5\cdot10^{-5}$ Т.

10. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением $\Gamma=2$. Определить фокусное расстояние линзы F, если расстояние между линзой и изображением $f=24$ см.

Ю. Коровин,
М. Мирошникова

Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознамённое училище железнодорожных войск и военных сообщений им. М. В. Фрунзе

В одном из красивейших мест Ленинграда, на Мойке 96, расположено Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознаменное училище железнодорожных войск и военных сообщений имени М. В. Фрунзе — одно из старейших военно-учебных заведений Советских Вооруженных Сил. Созданное в марте 1918 года, оно по праву является ровесником Октября. Училище в 1969 году переведено в разряд высших военных учебных заведений Вооруженных Сил СССР.

Училище готовит высококвалифицированных офицеров — командиров и инженеров — для железнодорожных войск и органов военных сообщений.

На *командных факультетах* (срок обучения 4 года) готовятся офицеры с высшим военно-специальным образованием; они получают квалификацию инженера по строительству железных дорог, искусственных сооружений (мостов, тоннелей и т. д.), по ремонту и эксплуатации железнодорожного транспорта и устройств автоматики, телемеханики и связи.

На *инженерном факультете* (срок обучения 5 лет) курсанты готовятся по тем же специальностям, что и на командных факультетах, за исключением специальностей «эксплуатация железнодорожного транспорта» и «эксплуатация устройств автоматики, телемеханики и связи», но получают более глубокую инженерную подготовку.

Для органов военных сообщений училище готовит офицеров на командном факультете, где они получают квалификацию инженера по эксплуатации железнодорожного (водного, воздушного) транспорта.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt[3]{a}-b\quad)^2+4\sqrt[6]{a^2b^3}}{\left(a^{\frac{2}{3}}-b\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\sqrt{b}+b\right)}-\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{6}}}{a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$$

2. В разложении $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}$ найти член, содержащий x в восьмой степени.

3. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cos x\cdot\cos 3x.$$

4. Доказать тождество

$$16\sin 10^\circ\times\sin 30^\circ\times\sin 50^\circ\times\sin 70^\circ\times\times\sin 90^\circ=1.$$

5. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{x[(x+3)^2-12x]}}{\sqrt[4]{x}-\frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}}.$$

2. Решить уравнение

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin 2x+\cos 2x+\sin x+\cos x+1=0.$$

4. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного в шар куба.

5. Найти площадь, ограниченную линиями $xy=7$, $y=0$, $x=4$, $x=12$.

Устный экзамен

Билет 1

1. Теорема о непрерывности дробно-линейной функции.

2. Свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.

3. Формула синуса суммы и разности двух аргументов.

4. Вычислить

$$49^{1-\log_7 2}-5^{-\log_5 4}.$$

Билет 2

1. Предел числовой последовательности.

2. Центр симметрии параллелограмма.

3. Первообразная. Теорема об общем виде всех первообразных.

4. Доказать тождество

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Лифт, поднимаясь равноускоренно в течение первого промежутка времени $t_1=2$ с, достигает скорости $|\vec{v}_1|=4$ м/с, с которой продолжает подъем в течение второго промежутка времени $t_2=4$ с. Затем лифт движется равнозамедленно, и к концу третьего промежутка $t_3=3$ с он останавливается. Определить высоту подъе-

ма лифта. Задачу решить графическим методом.

2. Определить высоту телевизионной башни в Останкино, если шарик, падая с башни без начальной скорости, последние $h=185$ м пути пролетел за $t=2$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. С какой силой будет давить человек ($m=70$ кг) на пол лифта, если лифт будет подниматься вертикально вверх с ускорением $|\vec{a}|=1$ м/с²?

4. Барометрическая трубка, заполненная ртутью, погружена в сосуд со ртутью открытым концом вниз. Диаметр внутреннего сечения трубки равен $d=2$ мм. Разность уровней ртути в трубке и сосуде равна $h=760$ мм. Чему равно атмосферное давление? Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см³, коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma=4{,}7\cdot10^{-1}$ Н/м.

5. Объектив фотоаппарата «Зенит-С» имеет фокусное расстояние $F=5$ см. С какого расстояния сделан снимок дома высотой $H=6$ м, если высота его изображения на негативе равна $h=24$ мм?

6. Определить энергию связи ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Масса ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ равна $m_я=234{,}99331$ а. е. м., масса протона равна $m_p=1{,}00728$ а. е. м., масса нейтрона равна $m_n=1{,}00866$ а. е. м., 1 а. е. м.$=1{,}6605\cdot10^{-27}$ кг.

О. Недзвецкий,
И. Торопов

Ленинградский гидрометеорологический институт

Ленинградский гидрометеорологический институт, организованный в 1930 г. на базе географического факультета Московского университета, является первым в мире специализированным вузом по подготовке метеорологов, гидрологов и океанологов высшей квалификации.

Метеорологический факультет готовит инженеров-метеорологов по четырем специализациям: «метеорологические прогнозы», «численные методы прогноза погоды», «долгосрочные прогнозы погоды» и «гидрометеорологические измерения и приборы». Окончившие метеорологический факультет работают в качестве инженеров или научных сотрудников гидрометеорологических обсерваторий и бюро, на авиаметеорологических станциях, в аэропортах, научно-исследовательских институтах, учреждениях Гидрометслужбы СССР.

Гидрологический факультет готовит инженеров-гидрологов — специалистов по изучению водных объектов суши. Окончившие гидрологический факультет работают в оперативных и научно-исследовательских учреждениях Гидрометслужбы СССР, в проектных учреждениях различных ведомств по проектированию и эксплуатации технических объектов коммунального водоснабжения, гидроэлектростанций, водохранилищ, каналов, участвуют в осуществлении таких важных народнохозяйственных мероприятий, как орошение пустынь, осушение болот, создание искусственных русел, изменение направления рек и т. д.

Океанологический факультет готовит инженеров-океанологов по двум специализациям: «физическая океанология» и «химия океана». После окончания института инженеры-океанологи работают в учреждениях Гидрометслужбы СССР, научно-исследовательских институтах АН СССР, министерства рыбного хозяйства и других ведомств.

Поступающие сдают экзамены по русскому языку и литературе (сочинение), математике (устно и письменно), физике (устно).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Доказать, что при $x<0$ справедливо равенство

$$\sqrt{2\left(\sqrt{1+\left(\frac{3^{2x}-3^{-2x}}{2}\right)^2}-1\right)}=3^{-x}-3^{x}.$$

2. Найти x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{C_4^x}=\frac{1}{C_5^x}+\frac{1}{C_6^x},$$

где C_n^x — число сочетаний.

3. Решить уравнение

$$\sin^2(2\pi-x)-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\times$$
$$\times\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1=0.$$

4. Решить систему

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=a^2,\\ x+\sqrt{xy}+y=b,\end{cases}$$

если $x>0$, $y>0$.

Вариант 2

1. Доказать, что при $a>0$ справедливо равенство

$$\frac{a^3-a-2b-\dfrac{b^2}{a}}{(a+\sqrt{a+b})\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)}:$$
$$:\left(\frac{a^3+a^2+a^2b+ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)=a-b.$$

2. Решить систему

$$\begin{cases}x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y}),\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=b(\sqrt{x}+\sqrt{y}).\end{cases}$$

3. Решить уравнение

$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$

4. В разложении бинома $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ биномиальный коэффициент второго члена на 44 больше, чем коэффициент первого члена. Найти член, не содержащий x.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Санки скатываются с горы высотой $h=8$ м по склону длиной $l=100$ м. Масса санок с седоком $m=90$ кг. Какова в среднем сила сопротивления движению санок, если в конце спуска они имели скорость $|\vec{v}|=11$ м/с?

2. Стальной осколок снаряда, падая с высоты $h=500$ м, имел у поверхности Земли скорость $|\vec{v}|=50$ м/с. На сколько градусов увеличится температура осколка при падении? Считать, что все тепло идет на нагревание осколка. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж(кг·К).

3. На каком расстоянии от центра ядра находится электрон в атоме водорода, если скорость его движения по орбите $v=2{,}2\cdot 10^6$ м/с? Какова напряженность поля, создаваемого ядром в точках орбиты? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

4. Из центра плота в воду на глубину $h=10$ м опущена электрическая лампочка. Какие минимальные размеры (длину и ширину) должен иметь плот, чтобы ни один луч от лампочки не мог перейти через поверхность воды? Абсолютный показатель преломления воды $n=1{,}33$.

А. Балуева, В. Сирота, В. Шабут

Ленинградский институт точной механики и оптики

Современные приборы, предназначенные для целей исследования, измерения или управления, являются сложными, комплексными устройствами. В них органически сочетаются новейшие достижения физики, электроники, оптики, вычислительной техники, воплощены опыт и принципы конструирования, а также технологические разработки последних лет.

В связи с этим возникает необходимость подготовки инженеров-приборостроителей нового типа, которые должны обладать глубокими знаниями в области фундаментальных наук, твердыми теоретическими знаниями и практическими навыками, необходимыми для проектирования, исследования, организации и эксплуатации измерительно-информационных комплексов. Созданный в 1930 году Ленинградский институт точной механики и оптики (ЛИТМО) является ведущим политехническим приборостроительным вузом, который выпускает инженеров-исследователей, конструкторов и технологов по восьми специальностям и восемнадцати специализациям.

Инженерно-физический факультет готовит инженеров-исследователей по приборам квантовой электроники, спектральным и оптико-физическим приборам (в том числе голографическим), теплофизике, оптико-электронным приборам систем управления.

Факультет точной механики и вычислительной техники готовит инженеров по приборам для измерения времени, ускорений, скоростей, линейных размеров и других физических величин, а также по проектированию и расчету бортовых приборов управления и бортовых контрольно-информационных систем. Факультет имеет крупный вычислительный центр, оснащенный машинами серии ЕС, а также малогабаритными ЭВМ, в котором проходят подготовку все студенты института.

Крупнейший в стране *оптический факультет* готовит инженеров по оптическому приборостроению: расчету и исследованию оптических систем, конструированию и технологии оптических приборов (астрогеодезических, навигационных, фотографических приборов, высокоскоростной киноаппаратуры, телевизионной оптической, гидросъемочной аппаратуры и др.).

Выпускники института получают квалификацию инженеров соответствующей специальности и работают на приборостроительных заводах и в научно-исследовательских институтах разного профиля.

В институте имеются два вечерних факультета и подготовительное отделение. Для всех абитуриентов ежегодно с 1 октября по 1 августа организуются подготовительные курсы.

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

1. Упростить выражение

$$h\left[\left(\frac{a\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right):\right.$$
$$\left.:\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)-\sqrt[4]{a}\right]^{-4}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\lg(1-x)}+5\lg(1-x)=6.$$

3. Решить уравнение

$$\sin\frac{10x+9\pi}{2}+\sin 3(x+\pi)+$$
$$+\sin\frac{3\pi-2x}{2}=\cos\frac{15}{2}\pi.$$

4. Написать уравнения касательных к кривой $y=x(x-1)$ в точках пересечения ее с осью Ox.

5. Найти член разложения $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^9$, содержащий x^6.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\left(1-\frac{1+ab}{1+\sqrt[3]{ab}}\right):\Bigl[\sqrt{ab}\left(1-\sqrt[3]{ab}\right)-$$

$$-\frac{(1-ab)\left(\sqrt[3]{ab}-1\right)}{1+\sqrt{ab}}\Bigr]\Bigr\}^{3}-ab.$$

2. Решить уравнение

$$\cos\frac{\pi-2x}{2}+\sin\frac{5\pi+2x}{2}=\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$2\sqrt{x^3}\geqslant(x-1)^2+2.$$

4. Доказать равенство

$$C_{n+2}^{m+1}+2C_{n+2}^{m+2}+C_{n+2}^{m+3}=C_{n+4}^{m+3}.$$

5. Число 12 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма кубов этих слагаемых была наименьшей.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Какую часть периода груз маятника, совершающего гармонические колебания, находится в пределах 1 см от положения равновесия, если амплитуда колебаний равна 2 см?

2. В сосуде объемом $V=10$ л при температуре $t_1=20°C$ влажность воздуха $r=80\%$. Температура упала до $t_2=5°C$. Вся сконденсированная влага собралась в шаровую каплю. Какой заряд надо сообщить капле, чтобы ее потенциал стал равным $\varphi=1$ В? Плотности насыщенного пара при температурах t_1 и t_2 равны, соответственно, $\rho_1=17{,}3$ г/м^3 и $\rho_2=6{,}8$ г/м^3. Плотность воды $\rho_в=1$ г/см^3.

3. К двум одинаковым плоским воздушным конденсаторам, соединенным последовательно, подключен источник ЭДС. Как изменится напряженность электрического поля между пластинами одного из них, если в другой внести диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=9$, заполняющий весь конденсатор полностью?

4. Найти отношение потенциальной энергии $W_п$ электрона к его кинетической энергии $W_к$ в боровском атоме водорода.

5. К двукратно ионизированному атому урана ^{238}U приближается издалека протон вдоль линии центров. Какова была начальная скорость протона, если он приблизился к иону урана на минимальное расстояние $R=0{,}5$ Å? Заряд и масса протона равны, соответственно, $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл и $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

6. В электролитической ванне происходит покрытие детали никелем. Зная напряжение U между электродами, удельное сопротивление электролита ρ, расстояние l между электродами, найти скорость покрытия (то есть скорость увеличения толщины h слоя никеля). Электрохимический эквивалент никеля равен k, плотность никеля — $\rho_н$.

7. На высоте h над поверхностью воды расположен точечный источник света S. Где будет находиться изображение S' этого источника, даваемое плоским зеркальным дном сосуда, если смотреть по вертикали вниз? Глубина сосуда с водой d, показатель преломления воды $n=4/3$.

8. На оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=25$ см от линзы помещен точечный источник света. По другую сторону линзы — один раз на расстоянии $a=27$ см, другой раз на расстоянии $b=48$ см — ставится экран. Освещенность центра светового пятна на экране в обоих случаях оказывается одинаковой. Определить фокусное расстояние F линзы.

9. Карманный дозиметр радиоактивного облучения представляет собой воздушный конденсатор, заряженный до определенной разности потенциалов. Под влиянием облучения газ ионизируется, и ионы, перемещаясь к пластинам конденсатора, понижают разность потенциалов. При облучении в 1 рентген в каждом кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях образуется $n_0=2\cdot10^9$ пар ионов. Сколько рентген покажет дозиметр, если при емкости конденсатора $C=3\cdot10^{-12}$ Ф разность потенциалов снизилась от $\varphi_1=180$ В до $\varphi_2=160$ В? Объем камеры $V=1{,}8$ см^3.

10. Какое количество фотонов с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм будет иметь в параллельном пучке суммарный импульс, равный среднему импульсу теплового движения атома гелия при температуре $T=300$ К? Масса атома гелия $m=6{,}65\times10^{-27}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\times10^{-34}$ Дж·с, постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

А. Бегункова, Т. Виноградова, В. Кобушкин, И. Никитина, Н. Стреляева, Т. Федорова

Ленинградский кораблестроительный институт

Ленинградский ордена Ленина кораблестроительный институт — крупнейший и ведущий вуз страны, выпускающий инженеров-кораблестроителей, одно из наиболее значительных высших учебных заведений Ленинграда.

Кораблестроительный факультет готовит инженеров-кораблестроителей по проектированию и постройке морских судов, танкеров, контейнерных судов, ледоколов, судов с динамическими принципами поддержания — на подводных крыльях и воздушной подушке, а также новых для техники средств освоения океана. Факультет выпускает также инженеров-исследователей в области гидроаэродинамики, динамики и прочности судовых конструкций, гидроакустики, автоматического управления движением судов, прикладной и вычислительной математики; готовятся также инженеры-технологи для промышленности и проектных организаций. Выпускники факультета работают на судостроительных заводах, в конструкторских бюро и научно-исследовательских институтах.

Специальности *факультета корабельной энергетики* — судовые силовые установки, парогенераторы, паровые и газовые турбины, двигатели внутреннего сгорания, автоматизация теплотехнических процессов.

Приборостроительный факультет готовит инженеров-механиков и инженеров-электромехаников по проектированию и производству морских устройств для освоения мирового океана, а также по использованию и разработке приборов и автоматических систем управления для различных типов судов и морских устройств.

Выпускники *инженерно-экономического факультета* призваны руководить экономикой и хозяйственной деятельностью предприятий судостроительной промышленности, они участвуют также в исследованиях в области экономики, автоматизации управления и организации производства.

При институте имеются вечерний факультет, заочный факультет и подготовительное отделение.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Установите область определения выражения и упростите его:

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}+3\operatorname{tg} x-\frac{5}{\sin x}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\lg\left(64\left(2^{x^2-40x}\right)^{\frac{1}{24}}\right)=0.$$

4. Покажите, что при любых действительных значениях x функция $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$ не может иметь значений, бо́льших 3/2 и меньших 1/2.

5. Найдите координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек A (1; 2; 3) и B (−3; 3; 2).

Вариант 2

1. Установите область определения выражения и упростите его:

$$\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

3. Решите уравнение

$$3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x=1.$$

4. Установите область допустимых значений функции

$$y=(2x+8-x^2)^{-\frac{1}{2}}+\log_{0,3}(x-1).$$

5. Составьте уравнения касательных к кривой $y=x^2+2x-3$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

Г. Дмитриев, Н. Коптева, Л. Рябов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Ленинградский политехнический институт, основанный в 1899 г., — один из крупнейших вузов страны.

Широк диапазон специальностей, по которым ведется обучение. Те, кто желает работать над проблемами, связанными с передовыми направлениями современной физики, учатся на *физико-механическом*, *радиофизическом* и *электромеханическом факультетах*. По специальности «вычислительная математика» ведется подготовка инженеров-математиков. Для индустриальных отраслей, составляющих основу народного хозяйства страны, готовят специалистов *энергомашиностроительный*, *механико-машиностроительный*, *гидротехнический* и *физико-металлургический факультеты*. Для работы в планирующих органах, в вычислительных центрах, в планово-производственных отделах предприятий готовят специалистов на *инженерно-экономическом факультете*. Недавно в политехническом институте был образован *факультет автоматизации управления* для подготовки специалистов по автоматизированным системам управления, технической кибернетике, электронно-вычислительным машинам и приборам автоматики. Новая специализация *«роботы и манипуляторы»* образована на механико-машиностроительном факультете.

Всего в институте по 60 специальностям обучаются 18,5 тыс. студентов и около 500 аспирантов.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(Гидротехнический, электромеханический, энергомашиностроительный, механико-машиностроительный и физико-металлургический факультеты.)

1. Упростить выражение

$$\frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{b}}+\frac{a-\sqrt{ab}}{(b-a)\sqrt[4]{b^{-3}}}\right)-\sqrt[4]{b}\,.$$

2. Решить уравнение

$$4\log_2^2\frac{x}{\sqrt[8]{2}}-3\log_2 2x=8^{-\frac{4}{3}}.$$

3. Решить уравнение

$$\mathrm{tg}^4\, x=\cos^3 2x+1.$$

4. В конус вписана треугольная пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник. Каким должен быть угол между боковыми сторонами этого треугольника, чтобы объем пирамиды был наибольшим, при условии, что объем конуса задан?

Вариант 2

(Физико-механический, инженерно-экономический, радиофизический факультеты и факультет автоматизации управления.)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{7}}(x^2-5x+4)>-1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3},\\ xy-2x-2y=2.\end{cases}$$

3. Высота конуса является одновременно диаметром шара. Радиус шара равен R, угол при вершине осевого сечения конуса равен α. В шар помещен куб так, что четыре его вершины лежат на поверхности шара вне конуса, а остальные четыре — на боковой поверхности конуса; плоскости, проходящие через эти четверки вершин, параллельны плоскости основания конуса. Найти ребро куба.

4. Доказать, что для углов равнобедренного треугольника A, B, C справедливо неравенство

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{27}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела могут двигаться по двум параллельным прямым. Первое тело движется с ускорением $|\vec{a}_1|=0{,}1$ м/с². В тот момент, когда первое тело, имея скорость $|\vec{v}_1|=1$ м/с, поравнялось со вторым, стартует второе тело и, двигаясь равноускоренно, догоняет первое тело через $t=20$ с. Найти величину максимального отставания второго тела от первого.

2. Цилиндрическая труба радиусом $R=1$ м катится по горизонтальной поверхности так, что ее центр перемещается с ускорением $|\vec{a}|=4{,}9$ м/с². Внутри трубы находится маленькое тело, коэффициент трения скольжения которого о внутреннюю поверхность трубы равен $\mu=0{,}5$. На какой высоте от горизонтальной поверхности при этом движении находится тело? Толщиной стенок трубы пренебречь.

3. От поезда массой $M=600$ т, идущего с постоянной скоростью по прямолинейной горизонтальной дороге, отрывается последний вагон массой $m=60$ т. Какой путь до остановки пройдет этот вагон, если в момент его остановки поезд движется с постоянной скоростью $|\vec{v}|=40$ км/ч? Мощность тепловоза, ведущего состав вагонов, постоянна и равна $N=10$ МВт.

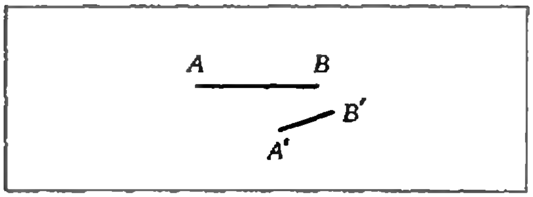
4. К вертикальной упругой невесомой нити подвесили груз массой $m_1=1$ кг и без толчка отпустили. После возникших затухающих колебаний груз остановился, и оказалось, что против силы сопротивления была совершена работа $A_1=2$ Дж. Какая работа будет совершена против силы сопротивления в таком же опыте, если подвесить груз массой $m_2=2$ кг?

5. Два маленьких одноименно заряженных шарика закреплены в вакууме на расстоянии, значительно превышающем их линейные размеры. Если отпустить первый шарик, то при достижении расстояния r между шариками его скорость будет равна $|\vec{v}_1|=3$ м/с; если отпустить второй, то при тех же условиях его скорость будет $|\vec{v}_2|=4$ м/с. Найти скорости шариков в тот момент, когда они разойдутся на расстояние r, если оба шарика отпустить одновременно.

6. Маленький заряженный шарик подвешен на нерастяжимой невесомой нити; сила натяжения нити равна $|\vec{F}|$. На место первого шарика помещают одноименно заряженный второй такой же шарик, и первый отклоняется от первоначального положения на угол, меньший 180°. Найти новое натяжение нити.

7. Уединенный металлический шар радиусом $R_1=10$ см окружен диэлектриком ($\varepsilon=2$). Диэлектрик образует сферический слой с радиусами $R_1=10$ см и $R_2=20$ см. Найти потенциал шара, если его заряд $q=10^{-8}$ Кл.

8. В однородном магнитном поле, меняющемся по гармоническому закону с частотой $\nu=1$ МГц, находится отрезок цилиндрической трубы. Ось трубы совпадает с направлением поля. Радиус трубы



$r=10$ см, толщина стенки $h=0{,}5$ мм. Найти амплитуду индукции магнитного поля, при которой начнется пластическая деформация трубы. Максимальное давление, при котором начинается пластическая деформация трубы, равно $p_м=10^7$ Па. Удельное сопротивление материала трубы $\rho=3\cdot10^{-8}$ Ом·м.

9. Дан предмет AB и его изображение $A'B'$ в линзе (см. рисунок). Найти расположение линзы, считая ее тонкой. Указать расположение главных фокусов линзы.

10. Часовщик в обычной жизни носит очки оптической силой $D=-6$ дптр. Для работы с часовыми механизмами он снимает очки и приставляет к глазу лупу, на которой обозначено, что она дает пятикратное увеличение. Какое в действительности он получает увеличение лупы?

Ю. Максимов, Ю. Молодкин, П. Соболев

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

1. Отец хочет разделить 180 яблок между пятью своими детьми. Половину яблок он отдает своим сыновьям, которые делят их между собой поровну, а другую половину отдает дочерям, которые тоже делят их поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 15 яблок больше, чем каждый сын. Сколько у отца было сыновей и дочерей?

2. Решить уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 x=1.$$

3. Решить уравнение

$$3^{\frac{x}{5}}+3^{\frac{x-10}{10}}=84.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=3x^3-9x^2+2$ в промежутке $[-1;\ 1]$.

5. Дано p арифметических прогрессий, каждая из которых содержит n членов. Их первые члены соответственно равны $1,2,3,\ldots,p$, а разности $1,3,5,\ldots,2p-1$. Найти сумму членов всех прогрессий.

Вариант 2

1. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/час, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

2. Решить уравнение

$$2\cos^2 x+5\sin x-4=0.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 8}=-1.$$

4. Найти максимумы и минимумы функции

$$f(x)=x\cdot e^{x-x^2}.$$

5. Решить уравнение

$$2^{1-\log_2 x+\log_2^2 x-\log_2^3 x+\ldots}=x.$$

С. Мальчиков

Саратовский политехнический институт

Саратовский политехнический институт является в настоящее время крупнейшим вузом Поволжья. История его ведет свой счет с 1930 года, когда в Саратове был открыт автомобильно-дорожный институт. В мае 1960 года Саратовский автомобильно-дорожный институт был преобразован в политехнический. Ныне ежегодный выпуск составляет свыше 2500 человек.

Подготовку 17 тысяч студентов института — будущих инженеров по 28 специальностям — ведут свыше 1000 преподавателей, в том числе 25 профессоров и почти 500 доцентов и кандидатов наук.

В институте имеются шесть факультетов дневного обучения: *автомеханический, дорожно-строительный, строительный, машиностроительный, энергетический* и *факультет электронной техники и приборостроения*. Кроме того, имеются филиалы в городах Саратовской области — Балакове, Балашове, Вольске и Энгельсе. При институте имеется подготовительный факультет, работают подготовительные курсы с различным объемом учебных программ.

Все обучающиеся в СПИ в обязательном порядке осваивают новейшую вычислительную технику, пользуются прекрасной научно-технической библиотекой, выполняют различные задания в хорошо оснащенных лабораториях.

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

1. Плоская фигура состоит из прямоугольника и равностороннего треуголь-

ника, имеющего с прямоугольником общую сторону. Каковы должны быть размеры фигуры, чтобы при данном периметре p площадь фигуры была наибольшей? (Общая сторона прямоугольника и треугольника не входит в периметр p.)

2. Предварительно упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x}.$$

3. В геометрической прогрессии дано: $a_1+a_5=51$, $a_2+a_6=102$. При каком n сумма $S_n=3069$?

4. Решить уравнение

$$\sin 6x+\sin 2x=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x.$$

Вариант 2

1. Предварительно упростив выражение

$$\left(\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}-4}-\frac{2\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(x-2\sqrt[3]{x^2}\right),$$

найти предел при $x\to8$.

2. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. В этой пирамиде проведена плоскость через ее высоту и вершину угла, заключенного между равными боковыми сторонами треугольника, лежащего в основании. Определить площадь полученного сечения.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{1}{5}x^5+4x^2$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

4. Решить уравнение

$$\cos x-\cos 2x-\sin 3x=0.$$

Ю. Сунгурцев

(Начало см. с. 20, 32, 43)

28, 31, 32; *Р. Бабаев* (Баку) 23, 24; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 23—26, 28, 31, 32; *В. Беркут* (Днепропетровск) 24, 26; *Г. Борисов* (Новосибирск) 26—28; *М. Валейко* (Киев) 23, 31; *А. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) 23, 24, 28; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 23—28, 30—32; *А. Геращенко* (Новосибирск) 30; *Л. Гитлин* (Витебск) 28; *М. Гольцман* (Днепропетровск) 24, 27, 28, 31; *И. Гопич* (Новосибирск) 23, 26, 28, 31, 32; *О. Гордиенко* (Павлодар) 24; *И. Грузберг* (Пермь) 23; *А. Гуляев* (Москва) 23; *И. Даниловский* (Горький) 23, 25, 28, 31, 32; *В. Дидух* (Львов) 31; *С. Довбыш* (Москва) 28, 31; *С. Долженко* (Донецк) 23, 24, 26—28, 31, 32; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 23, 24; *А. Елишевич* (Чернигов) 28; *А. Ермолин* (Петрозаводск) 23, 28; *В. Жордочкин* (Орск) 23, 24, 30, 31; *К. Жуков* (Москва) 23—27; *Г. Заславский* (Тбилиси) 28; *Е. Зудин* (Александров) 23, 25—32; *А. Иовайта* (Каунас) 28, 32; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 24—26; *А. Капрелов* (Тбилиси) 28; *В. Карапетян* (Ленинакан) 26; *А. Клинк* (Ковров) 31; *В. Ковтуненко* (Киев) 28, 32; *Е. Коган* (Днепропетровск) 23, 32; *Г. Кожаридзе* (Телави) 23, 32; *Д. Коломийцев* (Сумгаит) 23, 24, 28; *И. Коротков* (Волгоград) 26, 31, 32; *А. Костерев* (Семилуки) 23—25, 27, 28, 31, 32; *А. Крупцев* (Курск) 24, 31; *Е. Кузьмин* (Череповец) 25, 28, 29; *А. Куприн* (Москва) 23—29; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) 23—28; *В. Лашкин* (Киев) 23—28, 30—32; *А. Леонович* (Лида) 23, 24, 28; *Д. Людмирский* (Киев) 24—28, 31, 32; *С. Маламанов* (Ленинград) 31; *Р. Мешойрер* (Москва) 23; *А. Минаев* (Саратов) 28, 29, 31; *А. Могильнер* (Свердловск) 27, 28, 32; *А. Молотовщиков* (Тейково) 23, 24, 27, 28, 31; *И. Молчанов* (Киев) 25, 27; *С. Молчанов* (Сумы) 28, 31; *В. Никифоров* (Великие Луки) 28; *Д. Нишнианидзе* (Кутаиси) 28; *А. Оглоблин* (Иркутск) 23, 27, 28, 30, 31; *С. Омельченко* (Жданов) 31; *И. Омелян* (Львов) 23, 26—29, 31; *О. Оразмамедов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) 27, 28; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) 24—28, 31, 32; *Т. Павелкина* (Киев) 23, 24, 26—28, 31; *И. Педак* (Запорожье) 24; *А. Перов* (Москва) 24—26, 28, 31, 32; *А. Прашмо* (Гоголин, ПНР) 28, 31; *С. Прядкин* (Киев) 23, 24, 26—28, 31, 32; *С. Пузанов* (Одинцово) 32; *С. Пушкарев* (Курск) 24, 29, 30; *Л. Райков* (Невель Псковской обл.) 23, 24; *В. Редикульцев* (Москва) 23—27; *И. Романовский* (Лида) 23, 24, 26, 27, 31; *И. Рузин* (Ленинград) 23, 24, 26, 27; *И. Савенков* (р. п. Лысые Горы Саратовской обл.) 23—28, 31, 32; *О. Самохин* (Железногорск) 28, 31; *С. Сафронюк* (Ровно) 23, 24, 26, 28, 31; *В. Сачков* (Чебоксары) 23—26, 28, 31; *В. Середа* (Львов) 23, 28, 30, 31; *И. Сильвестров* (Новосибирск) 23—32; *В. Симонов* (Оренбург) 23, 24, 26; *А. Степанович* (Никольский Карагандинской обл.) 23, 28; *С. Трохов* (Оренбург) 23, 24, 26—28, 31, 32; *К. Трутнев* (Казань) 23—26, 28—32; *О. Трушин* (Кострома) 27; *Н. Федин* (Омск) 23, 25—32; *С. Хосид* (Алма-Ата) 28, 31, 32; *А. Чекмезов* (Москва) 23, 24, 28; *В. Шаблинский* (Киев) 28, 32; *В. Шарафян* (Ереван) 24; *А. Ширяев* (с. Рождествено МордАССР) 28; *С. Шичаник* (Невинномысск) 23—28, 30, 32; *С. Шишков* (Москва) 23—32; *Е. Шкляр* (Гомель) 28; *М. Эфроимский* (Ленинград) 23—32; *М. Яковлев* (Кемерово) 26; *В. Яровой* (Ленинград) 24—28, 31, 32.

Проверь себя

VIII класс. *Алгебра.* 1 — А, 2 — Г, 3 — Б, 4 — В, 5 — В, 6 — Б. *Геометрия.* 7 — Г, 8 — Г, 9 — Д, 10 — А.

IX класс. *Алгебра и начала анализа.* 1 — А, 2 — В, 3 — Г, 4 — Б, 5 — В, 6 — Г. *Геометрия.* 7 — Д, 8 — Б, 9 — В, 10 — Г.

X класс. *Алгебра и начала анализа.* 1 — Б, 2 — В, 3 — В, 4 — Б, 5 — Г, 6 — В. *Геометрия.* 7 — Д, 8 — Б, 9 — А, 10 — В.

Можно ли проверить ответ?

1. Правильный ответ:

$$x=\frac{m}{M+m}L.$$

2. См. рис. 1.

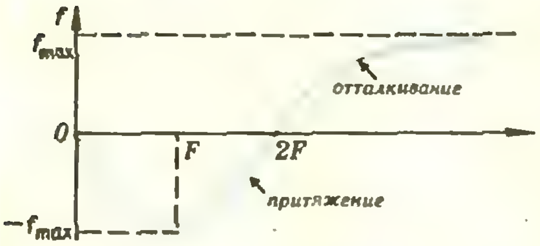


Рис. 1.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский автомобильно-дорожный институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. 2. $\ln 2-\frac{5}{8}$. 3. $x=\frac{\pi}{4}k\ (k\in\mathbb{Z})$. 4. $]-1;\ 3[\cup]3;+\infty[$. 5. $\left\{\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Вариант 2

1. Точка 0 — точка минимума, промежутки убывания — $]-\infty;\ 0]$ и $]1;\ +\infty[$, промежуток возрастания — $[0;\ 1[$. 2. $310\frac{2}{7}\cdot\pi$. 3. $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbb{Z})$. 4. $]-\infty;\ -\frac{14}{3}[\cup]4;\ +\infty[$. 5. $\left\{\frac{1}{16},\ 1\right\}$.

Физика

Вариант 1

2. $|\vec{a}|=\frac{m_2-\mu m_1}{m_1+m_2}g=0{,}98$ м/с^2;

$$|\vec{T}|=\frac{m_1m_2(1+\mu)}{m_1+m_2}g=8{,}8\text{ Н}.$$

3. $T_2=\frac{V_2}{V_1}T_1=586$ К.

4. $r=\frac{P_1I_2-P_2I_1}{I_1I_2(I_2-I_1)}=0{,}1$ Ом;

$$\mathscr{E}=I_1r+P_1/I_1=2{,}2\text{ В}.$$

5. См. рис. 2.

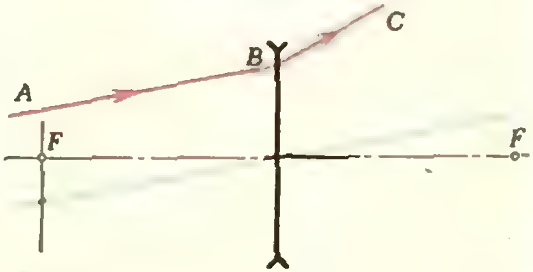


Рис. 2.

Вариант 2

2. $|\vec{v}_1|=|\vec{v}|\sqrt{1-m/M}$;

$|\vec{v}_2|=|\vec{v}|m/M$.

3. $A=p_1(V_2-V_1)+p_4(V_4-V_3)=$ $=1{,}25\cdot10^5$ Дж.

4. $A=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=2\cdot10^{-2}$ Дж.

5. $n=\frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta_1+\sin^2\beta_2}}=1{,}15$.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Вариант 1

1. Первый — 46, второй — 40. 2. $(\sqrt{5}+1)a^2$. 3. $\left\{\frac{9}{16}\right\}$. 4. $x=\pi+2\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. 5. $]-5;\ 0[$.

Вариант 2

1. 40 коп., 60 коп., 80 коп., 1 руб. 2. $2:\frac{3}{4}\sqrt{3}:\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 3. $]-\infty;\ -\frac{1}{3}[\cup]1;+\infty[$. 4. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. 5. arctg 9; $y=9x-23{,}25$.

Билет 1

3. $42\frac{2}{3}$. 4. $\left]-\frac{3^{\sqrt{2}}+1}{2};\ -\frac{1}{2}\right[$.

Билет 2

3. $]2;\ 4[\ \cup\ ]4;\ 6[$. 4. $\{5+\log_3 7\}$.

Физика

1. $t\approx 8,75$ с; $s_1\approx 99$ м; $s_2\approx 151$ м.

2. $$\frac{V_1}{V}=\frac{\rho_2-\dfrac{\rho|\vec{P}_1|}{|\vec{P}_1|-|\vec{P}_2|}}{\rho_2-\rho_1}=0.25=25\%;$$

$\frac{V_2}{V}=0,75=75\%$; $V=\frac{|\vec{P}_1|-|\vec{P}_2|}{\rho g}=400$ см^3; здесь $\rho=1$ г/см^3 — плотность воды.

3. $Q=m(gl\sin\alpha-|\vec{v}|^2/2)\approx 100$ Дж.

4. $q=\frac{(\rho_м-\rho)\,\pi\varepsilon\, d^3 g}{6|\vec{E}|}\approx 5,3\cdot 10^{-8}$ Кл, где $\rho_м=8,9\cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность меди.

5. $H=nh=1$ м.

Московский институт химического машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. 2. $\left[\frac{1}{100};\ 10\right]$.

3. $\frac{\sqrt{3}}{3}h^3\cos\alpha\,(2\sin\alpha+1)$. 4. В точке -2 — максимум, в точке 1 — минимум. 5. $\frac{3}{4}\pi$.

Вариант 2

2. (1). 3. $\frac{1}{4}l^3\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin 2\beta$. 4. $\frac{2}{3}$.

5. $3\left(1-\frac{1}{4\ln 2}\right)$.

Физика

1. $$h_1=\frac{4V}{\pi D^2}\,\frac{(1+\alpha t_1)(1+2\beta t)}{(1+\alpha t)(1+2\beta t_1)}\approx$$

$$\approx\frac{4V}{\pi D^2}\,\frac{1+(\alpha-2\beta)t_1}{1+(\alpha-2\beta)t}\approx 714 \text{ см}.$$

2. $\Delta h_1=\frac{\rho_в h}{\rho_{рт}\,(1+d_1^2/d_2^2)}\approx 5,6$ см; $\Delta h_2=\Delta h_1(d_1/d_2)^2\approx 0,3$ см.

3. $p_1/p_2=2T_1/T_2=3$.

4. $\Delta m=(\rho_1 r_1/100\%-\rho_2)V\approx 0,79$ кг.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi l$ $(k, l\in\mathbb{Z})$.

2. $S=\frac{9}{2}$. Докажем, что $\triangle ABC$ переходит в себя только при тождественном отображении и при осевой симметрии S_l, где $C\in l$ и $l\perp(AB)$. Пусть A', B', C' — образы соответствующих вершин при перемещении φ, переводящем $\triangle ABC$ в себя. Из того, что в $\triangle ABC$ расстояние $|AC|=|BC|$ достигается только между A и C и между B и C, и того, что $|A'C'|=|AC|$ и $|B'C'|=|BC|$, вытекает, что либо $[A'C']=[AC]$ и $[B'C']=[BC]$, либо $[A'C']=[BC]$ и $[B'C']=[AC]$. В первом случае $C'\in[AC]\cap[BC]$; значит, $C'=C$; тогда $A'=A$ и $B'=B$; поскольку перемещение φ имеет три *неподвижные точки*, φ — тождественное отображение. Во втором случае $C'=C$, $A'=B$ и $B'=A$; значит, $\varphi=S_l$.

3. $x_1=30$, $x_2=84$, $x_3=180$; 546 является членом данной последовательности, 548 и 1978^{1978} — нет. Указание. x_n делится на 6 при любом n. 4. На $]2;3[$ f возрастает, на $]3;+\infty[$ f убывает, $x=3$ — точка максимума. 5. $x\geqslant 0$, кроме $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$, и $x=\pi l\ (l=-1, -2, -3,\ldots)$.

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k\ (k\in\mathbb{Z})$. 2. $A'=(6;\ 3)$, $M'=M$, $C'=(7;\ 9)$. 3. $C_{11}^6<C_{11}^3+C_{11}^4$; неравенство $C_n^6<C_n^3+C_n^4$ справедливо при $6\leqslant n\leqslant 11$. Указание. Функция

$$f(n)=\frac{120}{(n-3)(n-4)(n-5)}+\frac{30}{(n-4)(n-5)}$$

— убывающая.

4. $\max\limits_{[0,14;\ 1]} f(x)=f(1)=e+\frac{2}{e}+4$, $\min\limits_{[0,14;\ 1]} f(x)=f\left(\frac{1-\ln 2}{2}\right)=\frac{10-7\ln 2}{2}$.

Решение. $f'(x)=0$ при $e^{2x_0-1}=\frac{1}{2}$ или $x_0=\frac{1-\ln 2}{2}$. При $x<x_0$ функция f убывает, при $x>x_0$ — возрастает; при $x=x_0$ она имеет минимум. Очевидно, $x_0<1$. Поскольку $x_0>0,14\Leftrightarrow\ln 2<0,72\Rightarrow e^{18}>2^{25}$ и $e^{18}>(2,7)^{18}=[(2,7)^3]^6=19,683^6>19^6=$

$=(19^2)^3 = 361^3 > 360^3 = 2^9\cdot 45^3 > 2^9\cdot 45\cdot 40^2 = 2^{15}\cdot 45\cdot 25 = 2^{15}\cdot 1125 > 2^{15}\cdot 1024 = 2^{25}$, получаем $x_0 > 0{,}14$. Значит, $\min\limits_{[0,14;\,1]} f(x) = f(x_0)$. Из $f(1) = e + \frac{2}{e} + 4 > 6$ и $f(0{,}14) = e^{-0,72} + 2e^{0,72} + 0{,}98 - 3 < 1 + 2e + 1 - 3 = 2e - 1 < 5$ следует $\max\limits_{[0,14;\,1]} f(x) = f(1)$.

5. б) $\left[\frac{10}{3};\ +\infty\right[$. Указание. a — хорошее $\Leftrightarrow a \geqslant \max\limits_{\mathbf{R}} \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$.

Вариант 3

1. $x_1 = 6$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k\ (k = 1, 2, 3, \ldots)$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (l = 2, 3, 4, \ldots)$, $x_4 = \frac{2}{3}\pi + 2\pi m\ (m = 0, -1, -2, -3, \ldots)$, $x_5 = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi n\ (n = 1, 0, -1, -2, -3, \ldots)$.

2. $S = 2\sqrt{3}$. $C = (1 + \sqrt{3};\ 1 + \sqrt{3})$ или $C = (1 - \sqrt{3};\ 1 - \sqrt{3})$. Тождественное отображение, три осевые симметрии с осями — высотами треугольника, два поворота вокруг центра треугольника — на 60° и на -60°. Указание. При перемещениях плоскости, при которых $\triangle ABC$ отображается на себя, его вершины переходят в вершины.

3. $C_{24}^4\cdot C_{20}^4\cdot C_{16}^4 = \frac{24!}{(4!)^3\cdot 12!}$. **4.** Первообразные для функции f на $]-3;\ 1[$ имеют вид $-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + C$, на $]1;\ 3[$ — вид

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x - \frac{10}{3} + A, & \text{если } 1 < x < 2,\\ A, & \text{если } x = 2,\\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x - \frac{10}{3} + A, & \text{если } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Указание. F непрерывна при $x = 2$.

5. $\min\limits_{\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 3\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}$. Имеет (например, $x = \frac{\pi}{3}$).

Физика

1. $t = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}\sqrt{\frac{2s}{g}\operatorname{tg}\alpha_1} \approx 0{,}88$ с.

2. Возможны три случая. а) Все тела покоятся: $|\vec{F}| \leqslant 3k_3 mg = 2{,}94$ Н; $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = 0$. б) Вся система тел движется как единое целое: $3k_3 mg < |\vec{F}| \leqslant 2(k_1 + k_2)mg = 5{,}88$ Н; $0 < |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = \frac{|\vec{F}|}{3m} - k_3 g \leqslant 0{,}98$ м/с².

в) Все тела движутся относительно поверхности Земли, причем тела *1* и *3* относительно друг друга покоятся, а тело *2* движется относительно этих тел: $|\vec{F}| > 2(k_1 + k_2)mg = 5{,}88$ Н; $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_3| = k_1 g = 0{,}98$ м/с²; $|\vec{a}_2| = \frac{|\vec{F}|}{m} - (k_1 + 2k_2)g > 0{,}98$ м/с².

3. $L_{\max} = l\sqrt{1 + k^2} \approx 2{,}04$ м.

4. $s = \frac{2|\vec{v}_0|^2\cos\alpha}{g}\sqrt{\sin^2\alpha - f} = 1{,}96$ м.

5. $x = x_м\cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{2E}{F_м}\cos(2\pi\nu t + \varphi_0) = 4\cos(2\pi t + \pi/6)$ см.

6. $h = \frac{Pt - Mc(t_п - t_0)}{\mu\lambda}\,\frac{RT_п}{pS} \approx 2{,}5$ м.

7. $q = CU = 2\cdot 10^{-4}$ Кл.

8. $q = C\frac{R_1(\mathscr{E} + \mathscr{E}_2) + R_2(\mathscr{E} + \mathscr{E}_1)}{R_1 + R_2} = 6{,}5\cdot 10^{-5}$ Кл; $q_0 = C_0(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1) = 10^{-5}$ Кл.

9. $D = \frac{2F}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 50$ см.

10. $\gamma = \frac{F_{об}}{F_{ок}}\gamma' = 7'45''$.

Московский экономико-статистический институт

Математика

1. 20. **2.** 35. **3.** -1. **4.** 18. **5.** 4. **6.** -3. **7.** 60. **8.** -13. **9.** -12. **10.** -7. **11.** -1. **12.** 45. **13.** 3. **14.** 2. Указание. См. задачу № 13 к п. 81 «Геометрии 7». **15.** 14. **16.** $^1/_4$.

Физика

1. $h = 57{,}8$ м.

2. $m_л = m_ч\frac{l_л - l}{l} = 120$ кг.

3. $N = 2mg\alpha|\vec{v}| = 25$ кВт.

4. $n = \frac{\lg(p_n/p)}{\lg(V/(V + V_0))} = 49$.

5. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2}{\eta}(c(T_{пл} - T) + \lambda)} = 3{,}5\cdot 10^2$ м/с.

6. $q = 2l\sin\alpha/2 \times \sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\sin\alpha/2} \approx 5{,}2\cdot 10^{-8}$ Кл.

7. $R_д = R_V(U/U_V - 1) = 3{,}8$ кОм.

8. $t=\dfrac{t_1t_2}{t_1+t_2}=6$ мин.

9. $\mathscr{E}=B_yl|\vec{v}|=0{,}45$ В.

10. $F=\dfrac{f}{\Gamma+1}=8$ см.

Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознамённое училище железнодорожных войск и военных сообщений им. М. В. Фрунзе

Математика

Вариант 1

1. 0. 2. x^6. 3. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

5. $\dfrac{7}{25}$.

4. При $b>0$ и либо $b^2=3a^2$, либо $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{a}{b}<1$, либо $-1<\dfrac{a}{b}<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4b}, \\ y_1=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4b}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{a^2+b^2-\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4b}, \\ y_2=\dfrac{a^2+b^2+\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4b}. \end{cases}$$

Вариант 2

1. $x\sqrt[4]{x}$, если $x>3$; $-x\sqrt[4]{x}$, если $0<x<3$. 2. $\{4\}$. 3. $x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$ 4. $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

5. 7 ln 3.

2. При $b\leqslant 0$ одно решение: (0; 0). При $b>0$ и $a=b$ четыре решения: (0; 0), (0; b), (b; 0), (b; b). При $b>0$ и либо $a<b$, либо $a\geqslant 3b$ два решения: (0; 0), (b; b). При $b>0$ и $b<a<3b$ четыре решения: (0; 0), (b; b) и

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a+b+\sqrt{(3b-a)(3a-b)}}{4}, \\ y_1=\dfrac{a+b-\sqrt{(3b-a)(3a-b)}}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\dfrac{a+b-\sqrt{(3b-a)(3a-b)}}{4}, \\ y_2=\dfrac{a+b+\sqrt{(3b-a)(3a-b)}}{4}. \end{cases}$$

3. $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l$, $x_3=2\pi m\ (k, l, m\in\mathbf{Z})$. 4. $C_{11}^3=165$.

Билет 1.

4. 12.

Физика

1. Высота H подъема лифта численно равна площади трапеции $OABC$ (рис. 3): $H=|\vec{v}|(t_1+2t_2+t_3)/2=26$ м.

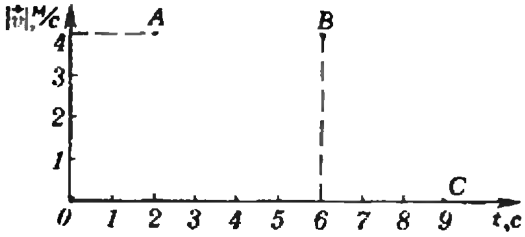


Рис. 3.

2. $H=\dfrac{(h+gt^2/2)^2}{2gt^2}\approx 534$ м.

3. $|\vec{F}_д|=m(g+|\vec{a}|)=756$ Н.

4. $p=\rho gh+4\sigma/d=1{,}02\cdot 10^5$ Н/м².

5. $d=F(1+H/h)=12{,}55$ м.

6. $E_{св}=c^2(92\ m_p+(235-92)m_n-m_я)\approx 18{,}5\cdot 10^2$ МэВ.

Физика

1. $|\vec{F}_c|=\dfrac{m}{l}\left(gh-\dfrac{|\vec{v}|^2}{2}\right)=17{,}6$ Н.

2. $\Delta t=\dfrac{gh-|\vec{v}|^2/2}{c}\approx 8$ К.

3. $R=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0mv^2}\approx 5{,}2\cdot 10^{-11}$ м; $|\vec{E}|=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0R^2}\approx 5{,}3\cdot 10^{11}$ В/м.

4. $l_{\min}=\dfrac{2h}{\sqrt{n^2-1}}\approx 23$ м.

Ленинградский гидрометеорологический институт

Математика

Вариант 1

2. (2). 3. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $x_2=2\pi l\ (k, l\in\mathbf{Z})$.

Ленинградский институт точной механики и оптики

Математика

Вариант 1

1. 1. 2. -9. 3. $x_1=\dfrac{\pi}{3}k$,

$x_2 = (-1)^{l+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} l$ $(k,\ l \in \mathbf{Z})$. 4. $y = -x$ и $y = x - 1$. 5. $\frac{21}{2} x^6 y^3$.

Вариант 2

1. 0. 2. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ $(k,\ l \in \mathbf{Z})$. 3. $[1;\ 3]$. 5. $6 + 6$.

Физика

1. $t = T/3$.

2. $q = 4\pi\varepsilon_0\varphi \sqrt[3]{\frac{3V(r\rho_1 - \rho_2)}{4\pi\rho_{в}}} \approx 2{,}8 \times 10^{-13}$ Кл.

3. $|\vec{E}_2| / |\vec{E}_1| = 1{,}8$.

4. $W_{п}/W_{к} = -2$.

5. $|\vec{v}| = \frac{q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 R m}} \approx 10^5$ м/с.

6. $\frac{h}{t} = \frac{kU}{\rho\rho_{н} l}$.

7. $|SS'| = 2(h + d/n) = 2(h + {}^3/_4 d)$.

8. $F = \frac{d(a+b)}{a+b+2d} = 15$ см.

9. $x = \frac{C\Delta\varphi}{e n_0 V} \approx 0{,}1$ рентген.

10. $n = \frac{\lambda}{h}\sqrt{3kmT} \approx 8{,}2 \cdot 10^3$ фотонов.

Ленинградский кораблестроительный институт

Математика

Вариант 1

1. Область определения: $|a| > |b|$, $b \neq 0$; при $a > 0$ выражение равно -25, при $a < 0$ равно 25. 2. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. $\{4.36\}$. 5. $M(-1;\ 0;\ 0)$.

Вариант 2

1. Область определения: $a \neq 3x$, $a \neq -3x$, $a \neq -x$; выражение равно 1. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. $\{3{,}81\}$. 4. $]1;\ 4[$. 5. $y = -4x - 12$, $y = 4x - 4$.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\sqrt[4]{a}$. 2. $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad 2\sqrt{2}\right\}$. 3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ $(k \in \mathbf{Z})$. 4. $\frac{\pi}{3}$.

Вариант 2

1. $\left]\frac{5 - \sqrt{37}}{2};\ 1\right[\cup \left]4;\ \frac{5 + \sqrt{37}}{2}\right[$.

2. $\left\{(5;\ 4),\ \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{2}{5}\right)\right\}$.

3. $\frac{2\sqrt{2}\,R\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{2}\right)}{1 + \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{2}\right)^2}$. 4. Указание. Если A — угол при основании и $x = \frac{A}{2}$, то $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg}^2 x)$.

Физика

1. $\Delta s = s_1 - s_2 = |\vec{v}_1| t/4 = 5$ м.

2. $h = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu g + |\vec{a}|}{g - \mu|\vec{a}|}\right)^2}}\right) = 0{,}4$ м.

3. $s = \frac{(M - m)^3 |\vec{v}|^3}{2NM^2} = 30$ м.

4. $A_2 = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 A_1 = 8$ Дж.

5. $|\vec{v}_1| = \frac{|\vec{v}_1|^2}{\sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2}} = 1{,}8$ м/с; $|\vec{v}_2| = \frac{|\vec{v}_2|^2}{\sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}^2|^2}} = 3{,}2$ м/с.

6. $|\vec{F}'| = |\vec{F}|$ (рекомендуем сделать чертеж).

7. $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\varepsilon - 1}{R_2}\right) = 675$ В.

8. $B_{м} = \sqrt{\frac{2\rho p_{м}}{\pi r h \nu}} \approx 6{,}2 \cdot 10^{-2}$ Т.

9. См. рис. 4.

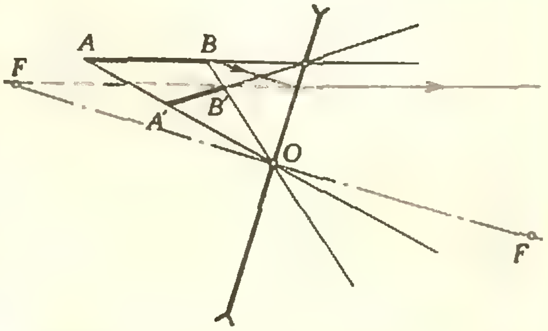


Рис. 4.

10. $\Gamma' = \dfrac{\Gamma - 1}{1 - Dd_0} + 1 = 2{,}6.$

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. 3 сына, 2 дочери. 2. $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3}k\ (k \in \mathbf{Z})$. 3. $\{20\}$. 4. $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(0) = 2$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(-1) = -10$. 5. $\dfrac{np}{2}(1 + np)$.

Вариант 2

1. 40 км/час. 2. $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k\ (k \in \mathbf{Z})$. 3. $\{9\}$. 4. $x = -\dfrac{1}{2}$ — точка минимума, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$; $x = 1$ — точка максимума, $f(1) = 1$. 5. $\sqrt{2^{\sqrt{5}-1}}$.

Саратовский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. Длины сторон прямоугольника равны $\dfrac{p}{6 - \sqrt{3}}$ и $\dfrac{p(3 - \sqrt{3})}{2(6 - \sqrt{3})}$; треугольник построен на большей стороне. 2. $\dfrac{3}{4}$. 3. 10. 4. $x_1 = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. 4. 2. $\dfrac{a^2}{4}\operatorname{tg}\beta$. 3. $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(1) = 4\dfrac{1}{5}$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x) = f(0) = 0$. 4. $x_1 = \dfrac{2\pi}{3}k$, $x_2 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l$, $x_3 = \dfrac{\pi}{4} + \pi m\ (k, l, m \in \mathbf{Z})$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Обозначим длину третьей стороны через x. Тогда по неравенству треугольника $6{,}31 + 0{,}82 = 7{,}13 > x$ и $0{,}82 + x > 6{,}31$, т. е. $x > 6{,}31 - 0{,}82 = 5{,}49$. Значит, $x = 6$ или $x = 7$.

2. Каждому многоугольнику с вершинами только в белых точках поставим в соответствие многоугольник с вершинами в тех же белых точках и в красной точке.

Поэтому «белых» многоугольников не больше «красных». Лишними остаются «красные» треугольники.

3. Известно, что сумма цифр делящегося на 9 числа сама делится на 9. Следовательно, A, B и C делятся на 9. Поскольку сумма цифр 1979-значного числа не превосходит $9 \times 1979 = 17811$, число A записывается не более чем пятью цифрами. Следовательно, сумма цифр числа A не более $9 \times 5 = 45$ и B не превосходит 45, а сумма цифр числа B не более $3 + 9 = 12$. Поскольку C делится на 9 и не превосходит 12, $C = 0$ или $C = 9$. Если $C = 0$, то $B = A = a = 0$, что противоречит условию. Ответ. $C = 9$.

4. Рассмотрим произведение всех чисел на шахматной доске. Оно не меняется при операции, поскольку умножается при этом на $(-1)^8 = 1$. Значит, оно равно своему начальному значению $(-1)^{63} = -1$. Поэтому невозможно получить $+1$ во всех клетках, так как в этом случае произведение есть 1.

5. Хочется ответить — 12 яиц. Однако такой ответ неверен, поскольку 1 курица снесет за 3 дня 1 яйцо, за 12 дней — 4, а 12 куриц за 12 дней — $4 \times 12 = 48$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
Н. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

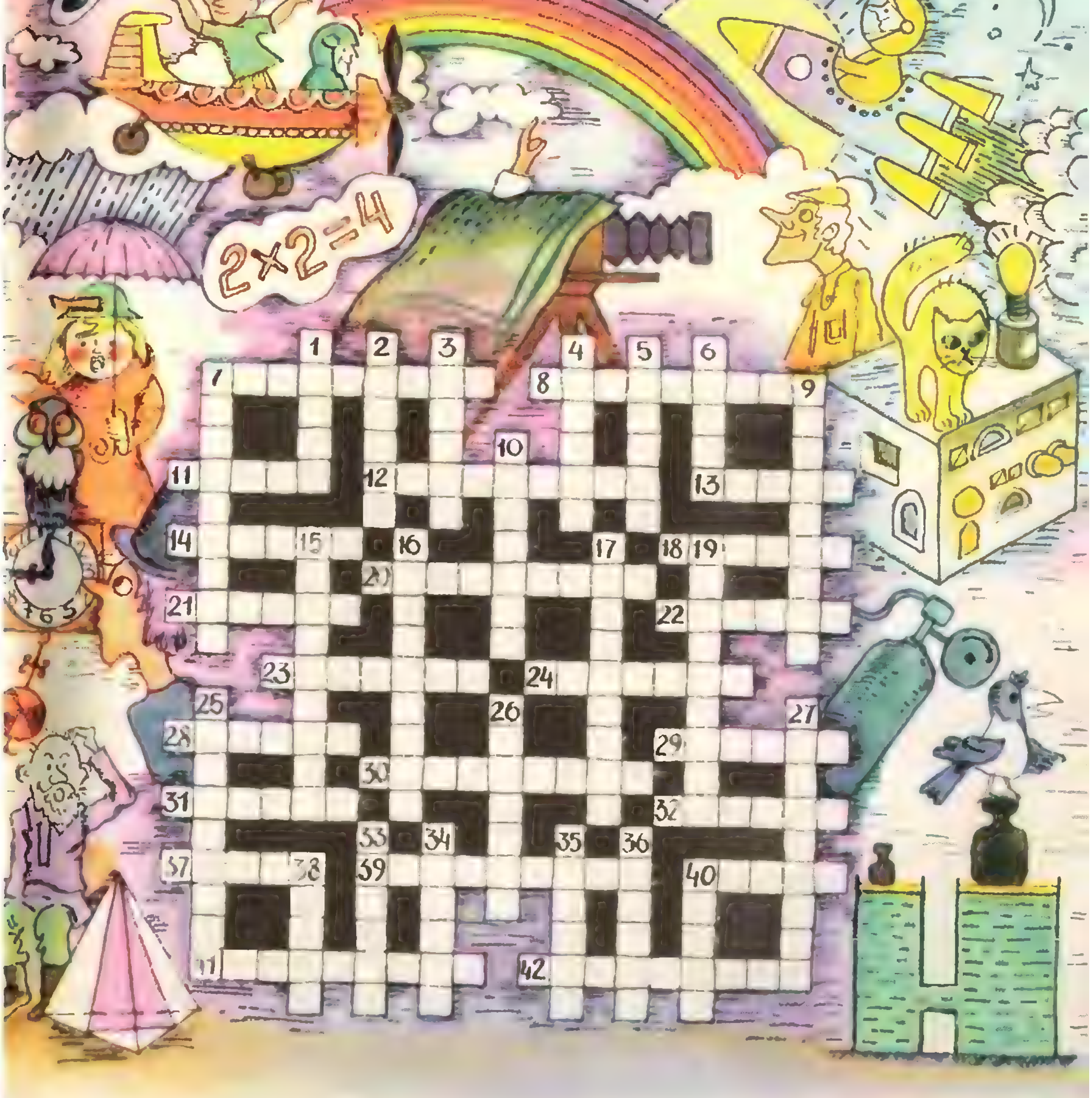
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Т. Панькова, Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 3/V-79
Подписано в печать 18/VI-79
Бумага $70 \times 108\,{}^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,11 Т-09893
Цена 30 коп. Заказ 965. Тираж 277 656 экз

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

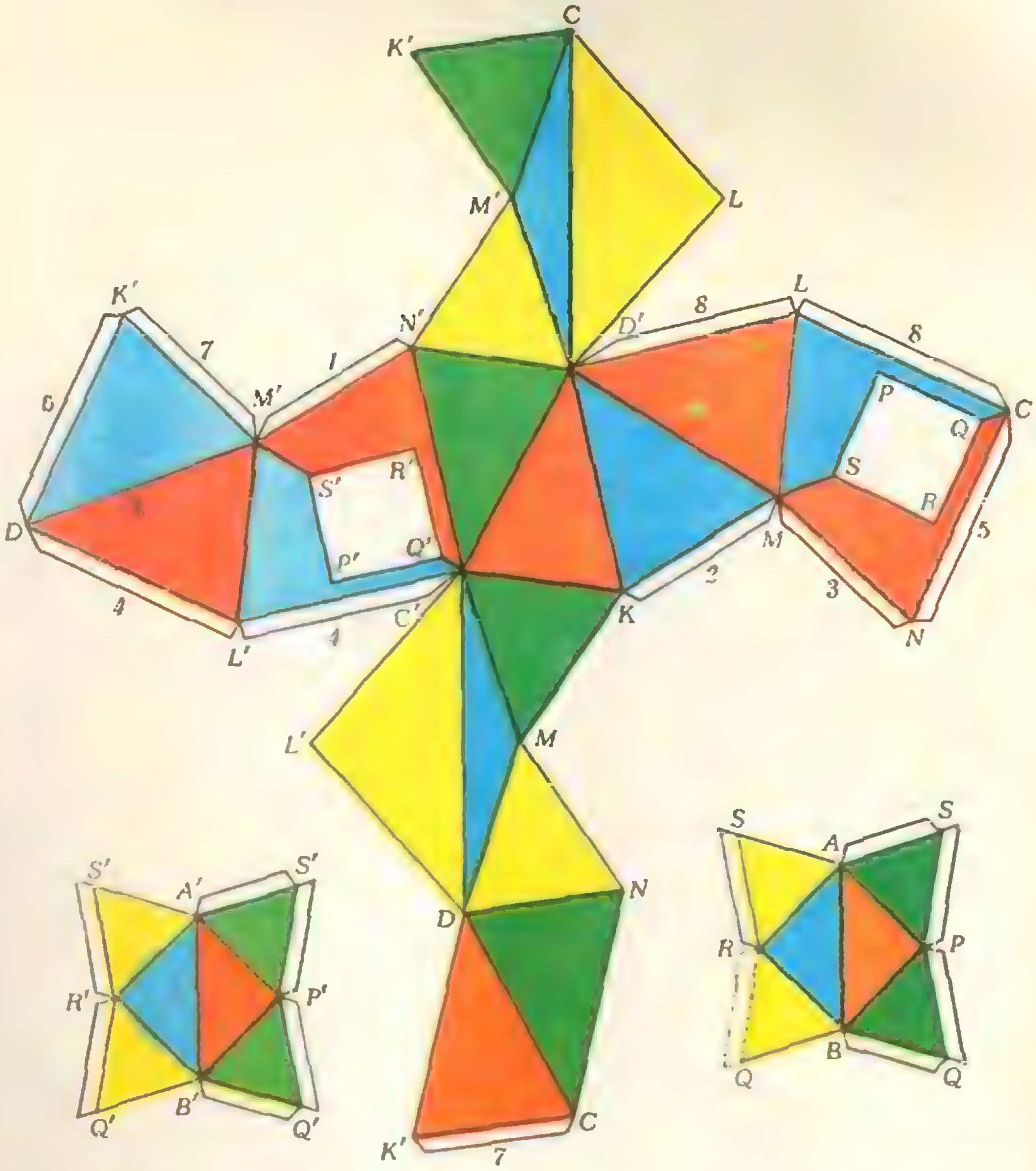


КРОССВОРД

По горизонтали: 7. Равенство, при определенных условиях превращающееся в тождество. 8. Единица давления. 11. Движение в воздухе. 12. Английский физик — лауреат Нобелевской премии. 13. Виднейший норвежский математик. 14. Выпукло-вогнутая линза. 18. Цветная полоса, образующаяся при разложении белого цвета. 20. Отрезок, соединяющий вершины многоугольника. 21. Метод научного исследования. 22. Единица электрической емкости. 23. Место соединения нескольких проводников. 24. Обнаружение объекта при помощи отраженных радиоволн. 28. Тяжелый изотоп водорода. 29. Искусственный радиоактивный элемент. 30. Прибор для определения влажности воздуха. 31. Русский физик, соратник Ломоносова. 32. Многогранник. 37. Характерная точка оптической системы. 39. Гипотетическая элементарная частица. 40. Часть целого. 41. Компонент дроби. 42. Способ теплообмена.

По вертикали: 1. Порция энергии. 2. Французский математик и философ. 3. Полудрагоценный камень. 4. Неподвижная часть генератора. 5. Метеорологические условия. 6. Поверхность шара. 7. Математическая операция. 9. Размах колебаний маятника. 10. Предмет изучения физики. 15. Характеристика линзы. 16. Огибание волнами препятствий. 17. Двумерное множество точек. 19. Прибор для измерения площадей по картам и чертежам. 25. Советский ученый, специалист по ядерной физике. 26. Универсальный электроизмерительный прибор. 27. Геометрическое преобразование. 33. Научно-фантастический роман А. Н. Толстого. 34. Фигурная линейка. 35. Мера длины. 36. Часть кометы. 38. Элемент реактивного двигателя. 40. Одно из основных понятий геометрии.

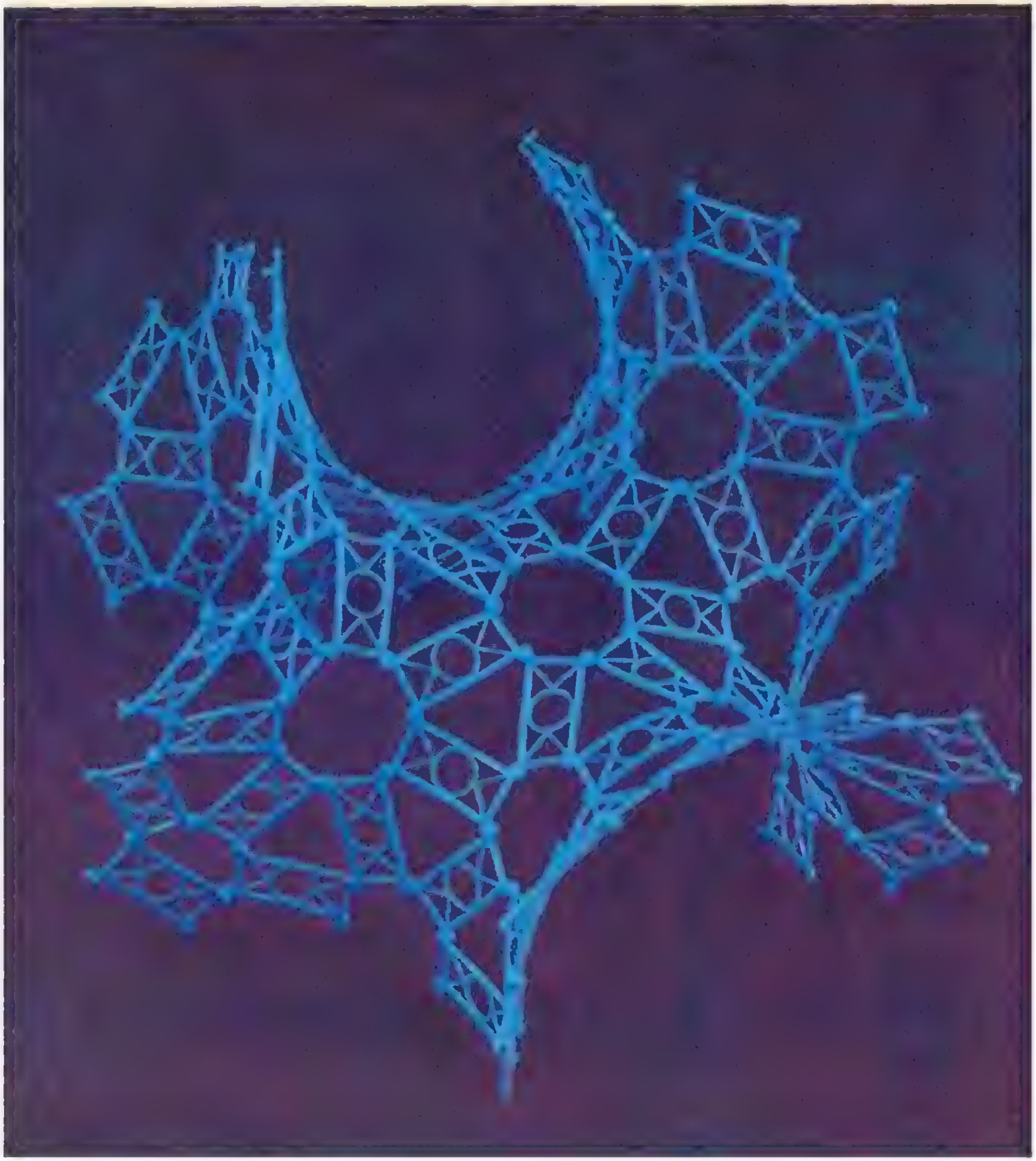
В. Закревский


C
K′
M′
L
L
8
D′
K′
7
N′
1
8
6
M′
P
C
Q
R′
S′
S
R
D
5
P′
Q′
M
2
3
4
C′
K
4
N
L′
L′
M
S
S
A
S′
S′
A′
P
R
R′
P′
B
Q
Q
D
N
Q′
B′
Q′
K′
C
7

На этом рисунке показана развертка модели «непрерывно изгибаемого многогранника Конелли», построенной харьковскими геометрами. Как изготовить такую действующую модель — это совсем не сложно — вы можете прочитать на с. 39. О том, как получается многогранник Конелли, мы уже писали (см. «Квант», 1978, № 9, с. 17).

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На фотографии изображена модель плоскости Лобачевского в виде поверхности, лежащей в нашем обычном евклидовом пространстве. Так же, как две поверхности, на первой странице обложки, она построена из детского конструктора. О математических принципах этих построений читайте заметку «Не только игрушка» на с. 21.



НОМЕР
8

Основан в 1970 году
Квант
8
1979

*Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

3 *Е. Кузьмин, А. Ширшов.* О числе e
9 *А. Мигдал.* Вычисления без вычислений
18 *Р. Винокур.* Домовой, колдун и ... резонатор Гельмгольца
21 *А. Вирский, А. Звонкин.* Овал, восьмерка, два овала...
26 *С. Берколайко.* Интеграл помогает доказать неравенство Коши

Лаборатория «Кванта»

27 *В. Майер.* Опыты с ложкой бульона

Математический кружок

30 *А. Лопшиц.* Векторное решение аффинных задач

Задачник «Кванта»

38 Задачи М576—М580; Ф588—Ф592
40 Решения задач М521—М527; Ф533—Ф536

«Квант» для младших школьников

49 Задачи
50 *А. Савин.* Веселая викторина
52 Новые картинки к калейдоскопу

Рецензии, библиография

53 *Н. Розов.* С учетом специальности
54 *В. Болтянский, М. Смолянский.* По страницам новой книги
58 *Е. Левитин.* Путеводитель по звездным лабиринтам

Информация

59 *В. Большаков.* Старейший технический вуз страны
62 *Э. Марченко.* Заочная школа при НГУ
62 *А. Васильев.* Вечерняя физическая школа
63 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка (*с. 36, 37*)
Смесь (*с. 8, 17, 25, 35, 37*)

ЭВМ не только научились рисовать сами, но и научили людей рисовать в своей манере. С этим, видимо, согласится каждый, увидевший на первой странице обложки этого номера рисунок художника Френсиса Селентано, который он назвал «кинетическим»

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». «Квант». 1979

Алексей Иванович Маркушевич

4 июня 1979 года на 72-м году жизни скончался член редакционной коллегии журнала «Квант», известный советский ученый-математик и педагог, видный организатор народного образования в нашей стране, член КПСС, академик Академии педагогических наук СССР, профессор Московского университета Алексей Иванович Маркушевич.

А. И. Маркушевичу принадлежит большое число статей, монографий и учебников по теории функций комплексного переменного, по истории и методике математики. Много внимания А. И. Маркушевич уделял популяризации науки. Он является автором ряда книг, адресованных школьникам: «Площади и логарифмы», «Комплексные числа и конформные отображения», «Возвратные последовательности», «Ряды» и др. При его активном участии были подготовлены и вышли в свет такие хорошо знакомые многим издания, как «Детская энциклопедия», «Энциклопедия элементарной математики», «История отечественной математики». Алексей Иванович сыграл большую роль в организации научно-популярного физико-математического журнала «Квант» и, как член редколлегии с момента основания журнала, постоянно оказывал существенную помощь в его издании. Заметный вклад А. И. Маркушевич внес в развитие советской школы и педагогической науки, работая на протяжении многих лет первым заместителем министра просвещения РСФСР, вице-президентом АПН РСФСР и АПН СССР.

Е. Кузьмин, А. Ширшов

О числе e

1. Что такое *e*?

В школе вы еще в пятом классе знакомитесь с числом π, имеющим очень длинную историю, начало которой теряется в глубине веков, в античном мире *). Затем вы встречаетесь с ним в восьмом, девятом, десятом классах. С числом e вы сталкиваетесь только в конце десятого класса. Однако это замечательное число, вошедшее в обиход в XVIII веке вместе с развитием математического анализа, играет в современной математике едва ли не более важную роль.

В школьном учебнике для числа e даются два определения. Во втором (первое нам не понадобится) числом e называется предел последовательности $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что этот предел существует.

Лемма 1. *Для любых m, n*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}. \qquad (1)$$

неравенство (1) очень легко доказывается при помощи знаменитого *неравенства Коши*:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}<\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \qquad (2)$$

где $a_1, a_2,\ldots, a_n$ — положительные числа, среди которых есть различные**). Из (2)

$$\sqrt[m+n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}<\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+(m+1)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)}{m+n+1}=1,$$

откуда $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}<1$ и $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$.

Лемма 2. *Последовательность (x_n) — возрастающая.*

Доказательство. Обозначим $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ через y_n. Согласно лемме 1, $x_{n(n+2)}<y_{n+1}$, то есть

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)}<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

---

*) Много интересных подробностей о числе π можно найти в книге Ф. Кымпан «История числа π» (М., «Наука», 1971). См. также статью А. Звонкина «Что такое π?» («Квант», 1978, № 11).

**) Постарайтесь доказать его самостоятельно. Можете также прочитать его доказательство на с. 26.

Значит,

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n<1+\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n=\frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n}<\frac{n+2}{n+1}$. Поэтому $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<$ $<\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$ или $x_n<x_{n+1}$.

Из лемм 1, 2 и теоремы Вейерштрасса вытекает, что последовательность (x_n) имеет предел. Обозначение e для этого предела было введено Л. Эйлером (1707—1783).

Упражнение. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=e$ и что для любых m, n

$$x_n<e<y_m.$$

Число e можно определить еще и как предел последовательности $s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$. Докажем это. По формуле Ньютона

$$x_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n^n}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times \qquad (3)$$
$$\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

(Из (3) тоже видно, что последовательность (x_n) — возрастающая.) Отбрасывая множители в круглых скобках, мы увеличим каждое слагаемое в правой части равенства (4). Следовательно, $x_n<s_n$ (при $n>1$).

Фиксируем теперь произвольное $k>1$. Считая, что $n>k$, отбросим в правой части равенства (3) все слагаемые, начиная с $(k+2)$-го. Получим

$$x_n>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right). \qquad (4)$$

При $n\to\infty$ (и фиксированном k) правая часть неравенства (4) стремится к s_k. Переходя в неравенстве (4) к пределу, получим $e\geqslant s_k$. Итак, $x_n<s_n\leqslant e$. Из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=e$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=e$. Таким образом,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots \qquad (5)$$

Последовательностью (s_n) гораздо удобнее пользоваться для вычисления приближенных значений числа e, чем последовательностью (x_n). Оценим разность $e-s_n$. Из (5)

$$e-s_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right]<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{(n+1)^2\cdot n!}<\frac{1}{n\cdot n!}.$$

Полученный результат можно записать в виде равенства

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} \quad (0 < \theta_n < 1). \tag{6}$$

Из (6) легко получить иррациональность числа e. Действительно, предположим, что $e = \frac{p}{q}$. Тогда $q!e$ — целое число. Из (6) при $n=q$

$$q!e = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}.$$

Получается, что и $\frac{\theta_q}{q}$ — целое число, что, очевидно, неверно. Вот первые десятичные знаки числа e.

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

2. Задача о разбиениях

Число e, баловень математического анализа и теории функций, довольно несжиданно возникает в некоторых комбинаторных задачах. Рассмотрим одну такую задачу.

Начнем с примера. Двухэлементное множество $\{a_1, a_2\}$ можно разбить на непересекающиеся подмножества (говоря о разбиениях, их называют *классами*) двумя способами: это — «поэлементное» разбиение $\{a_1\}$, $\{a_2\}$ и вырожденное «целое» разбиение $\{a_1, a_2\}$. Аналогичные разбиения имеются (при $n>2$) у любого n-элементного множества. При $n=3$ к ним добавляются еще три разбиения (рис. 1).

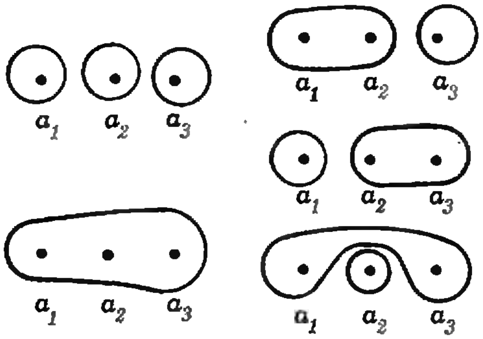


Рис. 1.

Обозначим число разбиений n-элементного множества через $\tau(n)$ *). Очевидно, $\tau(0)=\tau(1)=1$. Как мы только что отметили, $\tau(2)=2$, $\tau(3)=5$. А чему равно $\tau(n)$ для произвольного n? Нельзя ли для $\tau(n)$ указать какую-нибудь простую формулу?

Как это часто бывает в комбинаторных задачах, легко найти рекуррентное соотношение, связывающее $\tau(n)$ со значениями $\tau(k)$ для $k<n$.

Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Рассортируем все разбиения множества M в зависимости от того, чему равно число k элементов класса, в который попадает при данном разбиении элемент a_1. Число k может быть равно $1, 2, \ldots, n$. При фиксированном k число таких разбиений равно, очевидно, $C_{n-1}^{k-1}\tau(n-k)$. Таким образом, $\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\tau(n-k)$. Легко проверить, что $\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\tau(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\tau(k)$. Окончательно,

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\tau(k). \tag{7}$$

При помощи формулы (7) нетрудно подсчитать, что $\tau(4)=15$, $\tau(5)=52$, $\tau(6)=203$, $\tau(7)=877$, $\tau(8)=4140$ — с ростом n числа $\tau(n)$ быстро возрастают.

---

*) Числа $\tau(n)$ называются *числами Белла* («Квант», 1978, № 7).

Полученный результат можно записать в виде равенства

$$e = s_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} \quad (0 < \theta_n < 1). \tag{6}$$

Из (6) легко получить иррациональность числа e. Действительно, предположим, что $e = \frac{p}{q}$. Тогда $q!e$ — целое число. Из (6) при $n=q$

$$q!e = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \frac{\theta_q}{q}.$$

Получается, что и $\frac{\theta_q}{q}$ — целое число, что, очевидно, неверно. Вот первые десятичные знаки числа e.

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

2. Задача о разбиениях

Число e, баловень математического анализа и теории функций, довольно несжиданно возникает в некоторых комбинаторных задачах. Рассмотрим одну такую задачу.

Начнем с примера. Двухэлементное множество $\{a_1, a_2\}$ можно разбить на непересекающиеся подмножества (говоря о разбиениях, их называют *классами*) двумя способами: это — «поэлементное» разбиение $\{a_1\}$, $\{a_2\}$ и вырожденное «целое» разбиение $\{a_1, a_2\}$. Аналогичные разбиения имеются (при $n > 2$) у любого n-элементного множества. При $n=3$ к ним добавляются еще три разбиения (рис. 1).

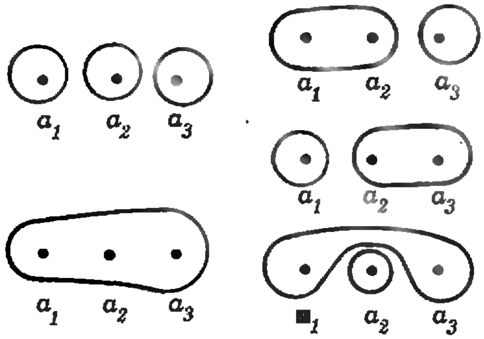


Рис. 1.

Обозначим число разбиений n-элементного множества через $\tau(n)$ *). Очевидно, $\tau(0) = \tau(1) = 1$. Как мы только что отметили, $\tau(2) = 2$, $\tau(3) = 5$. А чему равно $\tau(n)$ для произвольного n? Нельзя ли для $\tau(n)$ указать какую-нибудь простую формулу?

Как это часто бывает в комбинаторных задачах, легко найти рекуррентное соотношение, связывающее $\tau(n)$ со значениями $\tau(k)$ для $k < n$.

Пусть $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Рассортируем все разбиения множества M в зависимости от того, чему равно число k элементов класса, в который попадает при данном разбиении элемент a_1. Число k может быть равно $1, 2, \ldots, n$. При фиксированном k число таких разбиений равно, очевидно, $C_{n-1}^{k-1}\tau(n-k)$. Таким образом, $\tau(n) = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\tau(n-k)$. Легко проверить, что $\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}\tau(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\tau(k)$. Окончательно,

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\tau(k). \tag{7}$$

При помощи формулы (7) нетрудно подсчитать, что $\tau(4)=15$, $\tau(5)=52$, $\tau(6)=203$, $\tau(7)=877$, $\tau(8)=4140$ — с ростом n числа $\tau(n)$ быстро возрастают.

---

*) Числа $\tau(n)$ называются *числами Белла* («Квант», 1978, № 7).

ства M ранга k на две группы — на разбиения, содержащие одноэлементное множество $\{a_1\}$ в качестве класса разбиения, и не содержащие. Разбиений первого вида, очевидно, существует столько же, сколько разбиений множества M' ранга $k-1$, то есть $c_{n-1,k-1}$; разбиений второго вида — в k раз больше, чем разбиений множества M' ранга k (элемент a_1 можно поместить в любой из k классов разбиения множества M'), то есть $k\cdot c_{n-1,k}$. Итак, при $n>1$, $k>1$

$$c_{n,k}=c_{n-1,k-1}+k\cdot c_{n-1,k}. \tag{10}$$

Докажем, что при $n\geqslant 1$, $k\geqslant 1$

$$c_{n,k}=\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s(k-s)^{n-1}}{s!\,(k-s-1)!}. \tag{11}$$

Обозначим правую часть равенства (11) через $b_{n,k}$. Если $k=1$, то $b_{n,1}=1=c_{n,1}$. Если $k>1$ и $n=1$, то

$$b_{1,k}=\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s}{s!\,(k-s-1)!}=\frac{1}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{k-1}(-1)^sC_{k-1}^s=$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}(1-1)^{k-1}=0=c_{1,k}.$$

Если, наконец, $k>1$ и $n>1$, то

$$b_{n,k}=\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s(k-s)^{n-1}}{s!\,(k-s-1)!}=\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s(k-s)^{n-2}\cdot(k-s)}{s!\,(k-s-1)!}=$$

$$=k\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s(k-s)^{n-2}}{s!\,(k-s-1)!}+\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^{s+1}(k-s)^{n-2}\cdot s}{s!\,(k-s-1)!}=$$

$$=k\cdot b_{n-1,k}+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{(-1)^{s+1}(k-s)^{n-2}\cdot s}{s!\,(k-s-1)!}=$$

$$=k\cdot b_{n-1,k}+\sum_{s=1}^{k-1}\frac{(-1)^{s+1}(k-s)^{n-2}}{(s-1)!(k-s-1)!}=k\cdot b_{n-1,k}+\sum_{s=0}^{k-2}\frac{(-1)^{s+2}(k-s-1)^{n-2}}{s!\,(k-s-2)!}=$$

$$=k\cdot b_{n-1,k}+\sum_{s=0}^{k-2}\frac{(-1)^s(k-s-1)^{n-2}}{s!\,(k-s-2)!}=k\cdot b_{n-1,k}+b_{n-1,k-1}.$$

Таким образом, числа $c_{n,k}$ и $b_{n,k}$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению вида (10); кроме того, их «начальные значения»: при $k=1$ (и любом $n\geqslant 1$) и при $n=1$ (и любом $k\geqslant 1$) совпадают. Следовательно (рис. 2), $c_{n,k}=b_{n,k}$ для любых $n\geqslant 1$ и $k\geqslant 1$.

Из (9) и (11)

$$\tau(n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{(-1)^s(k-s)^{n-1}}{s!\,(k-s-1)!}. \tag{12}$$

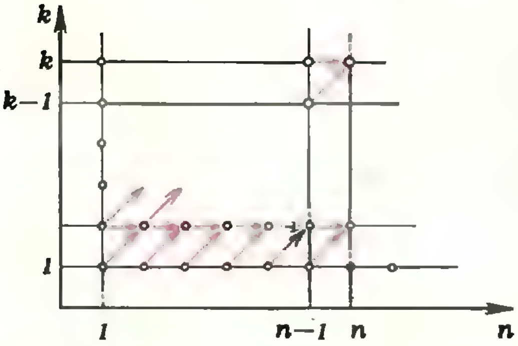


Рис. 2.

Обозначим $k-s$ через t; тогда $1\leqslant t\leqslant n$. При фиксированном t в двойной сумме (12) s может изменяться от 0 до $n-t$. Собирая коэффициенты при t^{n-1}, можно формулу (12) преобразовать к виду

$$\tau(n)=\sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{s=0}^{n-t}\frac{(-1)^s}{s!}\right)\frac{t^{n-1}}{(t-1)!}.$$

Числа $c_{n,k}$, имеющие ясный комбинаторный смысл, неожиданно возникают в одной алгебраической задаче, связанной с многочленами.

Положим $x^{(1)}=x$, $x^{(2)}=x(x-1)$, $x^{(3)}=x(x-1)(x-2)$ и т. д. Многочлены 1, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, …, $x^{(n)}$ имеют, соответственно, степени 0, 1, 2, …, n. Поэтому любой многочлен от x степени не выше n единственным образом представляется в виде суммы этих многочленов (с некоторыми коэффициентами). В частности,

$$x^n = a_{n,1}x^{(1)} + a_{n,2}x^{(2)} + \ldots + a_{n,n}x^{(n)} \qquad (13)$$

для некоторых чисел $a_{n,k}$, $(n\geqslant 1,\ 1\leqslant k\leqslant n)$. Для $k>n$ положим $a_{n,k}=0$. Оказывается, $a_{n,k}=c_{n,k}$. Докажем это.

Полагая в (13) $x=1$, получаем $a_{n,1}=1=c_{n,1}$. Если $k>1$ и $n=1$, то $a_{1,k}=0=c_{1,k}$. Пусть теперь $k>1$ и $n>1$.

$$x^n=\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}x^{(k)} = x\cdot x^{n-1} = x\cdot\sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}x^{(i)}[(x-i)+i] =$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}\,[x^{(i)}(x-i)+ix^{(i)}] = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}[x^{(i+1)}+ix^{(i)}] = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}\,x^{(i+1)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1,i}\,ix^{(i)}.$$

Сравнивая коэффициенты при $x^{(k)}$, получаем $a_{n,k}=a_{n-1,k-1}+k\cdot a_{n-1,k}$. Как и выше, из этого вытекает, что $a_{n,k}=c_{n,k}$ при всех n, k.

Упражнение. Докажите равенство:

$$\tau(n-1)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^{i}\,\tau(n-i).$$

Вычислим число e

На с. 4 было доказано, что число $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ равно сумме ряда $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots$. Однако можно указать ряд, частичные суммы которого сходятся к e намного быстрее частичных сумм ряда $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots$. Ниже предлагается несколько задач, решив которые, вы с помощью несложных выкладок научитесь точно вычислять много знаков числа e.

1. *Докажите, что при $n\geqslant 2$ справедливо равенство:*

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot n!}=3-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 3!}-\ldots-\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}.$$

Указание. Примените метод математической индукции.

2. *Докажите, что*

$$e=3-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+2)!}.$$

3. *Докажите, что*

$$e=\frac{87}{32}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\cdot(n+5)\cdot(n+5)!}. \qquad (1)$$

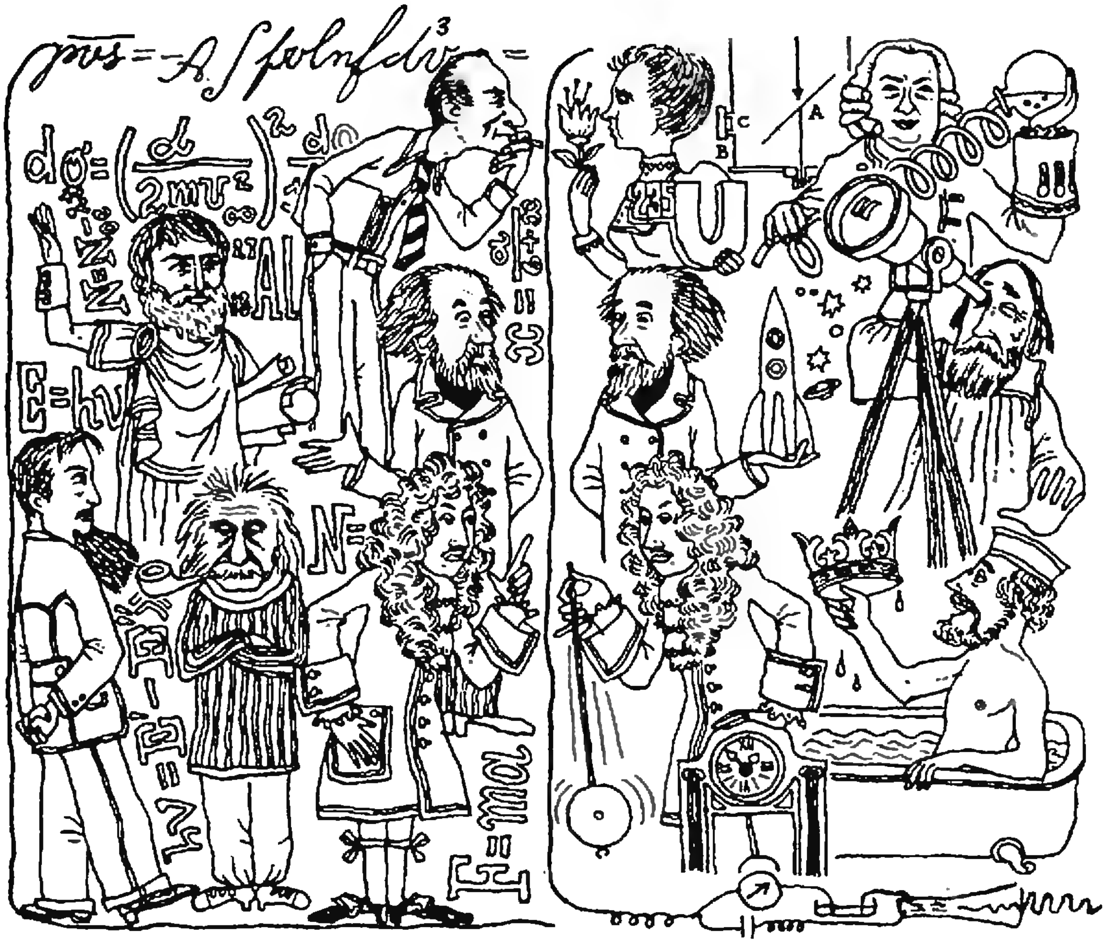
4. $$e=\frac{87}{32}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{(n+4)\cdot(n+5)\cdot(n+5)!}-R_k.$$ *Оцените остаток R_k.*

5. *Вычислите приближенное значение e, взяв три члена ряда (1), и оцените погрешность приближения.*

6. *Докажите, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\cdot(n+5)\cdot(n+5)!}<0{,}00047.$$

Г. Сорокин



А. Мигдал

Вычисления без вычислений

> *Если математика — это искусство избегать вычислений, то теоретическая физика — это искусство вычислять без математики.*

Высказывание, приведенное в качестве эпиграфа, возникло в результате споров физиков и математиков и нуждается в разъяснении. Даже самые простые вычисления в физике не обходятся без математики. Однако, на первой, самой важной стадии работы физика-теоретика, когда устанавливается физическая картина явления, математика отступает на задний план и играет только подсобную роль. Но прежде чем говорить о связи физики и математики, следует пояснить, что такое теоретическая физика.

I. КАК РАБОТАЮТ ФИЗИКИ?

Экспериментаторы и теоретики

Существует два типа физиков — экспериментаторы и теоретики, причем эти две профессии почти никогда не совмещаются в одном лице. Физики-экспериментаторы исследуют соотношения между физическими величинами или, говоря более торжественно, открывают законы природы, пользуясь экспериментальными установками, то есть производя измерения физических величин с помощью приборов. Для этого надо глубоко понять изучаемые явления, чтобы знать, что и как измерять. Физики-теоретики изучают природу, пользуясь только бумагой и карандашом, то есть выводя новые соотношения между наблюдаемыми величинами, опираясь на найденные ранее экспериментально и теоретически законы природы. Причина разделения этих двух профессий не только в том, что каждая из них требует своих специальных знаний: знания методов измерения — в одном случае и владения математическим аппаратом — в другом. Главная причина в том, что эти профессии соответствуют различным характерам мышления и различным формам интуиции. Интуиция, то есть способность подсознательно находить правильный путь, играет важнейшую роль, особенно на первых стадиях работы. К сожалению, дар интуиции возникает не сразу, а в результате упорной работы, как награда за решение многих научных задач.

Поскольку теоретическая физика имеет дело с более отвлеченными понятиями, чем физика экспериментальная, физику-теоретику требуется более абстрактная форма интуиции, близкая иногда к интуиции математика. В прошлом веке, когда физика еще не была так специализирована, многие физики совмещали обе профессии. Так, Максвелл, который получил теоретически уравнения, описывающие все электромагнитные явления, занимался и экспериментами. Герц, который обнаружил экспериментально электромагнитные волны, был одновременно и хорошим теоретиком. И все-таки в каждом случае можно указать, какая из профессий главная: для Максвелла это — теоретическая физика, а для Герца — физика экспериментальная.

В XX веке одним из самых замечательных примеров «универсального» физика — и теоретика, и экспериментатора — был Энрико Ферми. Наряду со многими другими работами Ферми создал теорию радиоактивного распада и вместе с физиками своей группы открыл экспериментально искусственную радиоактивность элементов, возникающую при бомбардировке нейтронами.

Еще одним примером выдающегося теоретика, тесно связанного с экспериментом, был академик Г. И. Будкер, у которого теоретическая физика совмещалась с замечательными инженерными идеями. Он руководил теоретической разработкой и практическим осуществлением ускорителя на встречных пучках заряженных частиц в Новосибирском Академгородке.

Однако это — редкие исключения, и молодой человек, интересующийся физикой, должен решить для себя, какую из двух профессий он выбирает.

В дальнейшем речь пойдет о работе физиков-теоретиков.

Физика и математика

Итак, задача физика-теоретика — получать соотношения между наблюдаемыми величинами с помощью математических выкладок. Не означает ли это, что теоретическая физика представляет собой нечто вроде прикладной математики? Такая точка зрения совершенно неверна. И по характеру задач, и по методам подхода к задачам математика и теоретическая физика категорически отличаются.

В математике важнейшую роль играют математическая строгость, то есть логическая безупречность всех выводов, вытекающих из принятых аксиом, и исследование всех логически возможных соотношений. Задача физики — воссоздать по возможности точную картину мира без строгих «правил игры», используя все известные экспериментальные и теоретические факты, используя основанные на интуиции догадки, которые в дальнейшем будут проверены на опыте. Так, математик исследует все логически возможные типы геометрий, физик же выясняет, какие геометрические соотношения осуществляются в нашем мире.

Математик, даже если он занимается прикладными задачами, то есть задачами, пришедшими не из математики, берется за решение только тех задач, которые не требуют дополнительных недоказанных предположений. Физик же, как правило, имеет дело с задачами, в которых имеющихся исходных данных недостаточно для решения, и искусство состоит в том, чтобы угадать, какие недостающие соотношения реализуются в природе. Именно для этих догадок требуется не математическая, а физическая интуиция.

Убедительность в физике достигается получением одного и того же результата из разных исходных предпосылок. При этом приходится вводить лишние, логически не необходимые аксиомы, каждая из которых сама по себе не абсолютно достоверна. Единственное условие состоит в том, чтобы уметь оценивать степень убедительности того или иного предположения и ясно понимать, какие предположения требуют дальнейшей проверки.

Если какая-либо область физики достигнет такого развития, что все ее результаты можно будет вывести из нескольких строго установленных экспериментально аксиом, то эта область перестанет быть частью развивающейся физической науки и перейдет в раздел прикладной математики или техники. Так произошло с классической механикой.

Разумеется, очень полезно анализировать структуру физической теории, то есть выяснять, из каких исходных предпосылок получаются те или иные результаты. Однако, центр тяжести в таком аксиоматическом подходе — не в общности и математической строгости выводов, а в правильном выборе исходных предположений и в оценке того, какие из них наиболее достоверно подтверждены опытом. А для этого требуется интуиция физика. В тех случаях, когда эту работу проделывает математик, он обязательно, хотя бы на время, делается физиком-теоретиком. Иначе он рискует оказаться, по выражению польского сатирика Леца, в положении эскимоса, который вырабатывает для жителей Конго правила поведения во время жары.

Итак, математика и физика — науки с разными задачами и с разными методами подхода к задачам.

В математике достоверность результатов достигается логической строгостью и анализом всех логически возможных решений. В физике рассматриваются только те решения, которые могут осуществляться в природе, и достоверность достигается многократной проверкой сделанных предположений. Математическая строгость в физике представляет собой невозможную и ненужную роскошь. Добиваться в физике математической строгости так же не нужно, как требовать от бригадиров лесоповала, чтобы они на работе разговаривали стихами. Но вместе с тем физик-теоретик должен свободно владеть математическим аппаратом, то есть знать и уметь использовать все те математические методы, которые могут оказаться полезными при решении физических задач.

II. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Попробуем показать на простых примерах, как работают физики-теоретики на первой, самой важной стадии работы, когда делается качественный анализ поставленной задачи. Как мы увидим, на этой стадии работы почти без всяких вычислений получаются грубые соотношения между входящими в задачу величинами. Следующая стадия работы — получение точных количественных соотношений с помощью математического аппарата теории — целиком опирается на первую стадию, во время которой проясняется физическая картина явления и возникает проект ожидаемого решения. Не имея такого предположительного проекта, нельзя приступать к поискам точного решения. Действительно, доказать удается только те утверждения, которые были заранее угаданы. Из этого правила почти не бывает исключений.

Одним из главных элементов качественного анализа является решение задачи на упрощенных моделях, в которых отброшено все несущественное. Усложнять решенную задачу несравненно проще, чем заново решать сложную.

В некоторых простых случаях многое проясняет простой размерный анализ входящих в задачу величин и возможных соотношений между ними.

Размерные оценки

Для иллюстрации докажем теорему Пифагора, пользуясь соображениями размерности. Из размерности следует, что площадь S прямоугольного треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы на некоторую функцию одного из острых углов: $S=c^2f(\alpha)$. Аналогичным образом можно представить площади двух подобных прямоугольных треугольников, которые получатся, если опустить высоту из прямого угла. Для этих треугольников роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Поэтому

$$c^2f(\alpha)=a^2f(\alpha)+b^2f(\alpha).$$

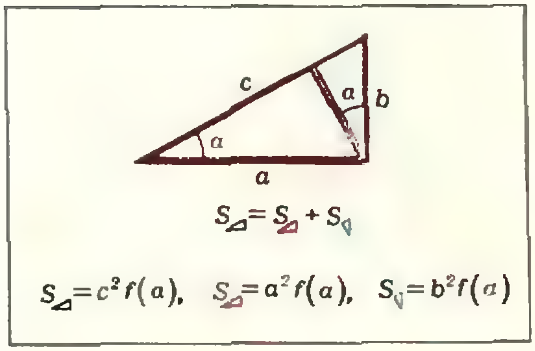
Сократив на $f(\alpha)$, получим теорему Пифагора.

В качестве другого примера рассмотрим задачу о нахождении периода колебаний грузика на пружине. Прежде всего выясним, какие величины могут входить в выражение для периода. Поскольку силы, действующие на грузик, — это сила тяжести и сила упругости, естественно предположить, что период колебаний зависит от ускорения свободного падения g и массы m грузика и от жесткости пружины k. Разумеется, такие величины, как температура и вязкость воздуха, не войдут в задачу, если мы пренебрегаем затуханием колебаний. (Чтобы упростить задачу, надо знать, чем можно пренебречь!) Из величин g, m и k можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность времени, — $\sqrt{m/k}$. Следовательно, период T равен

$$T=C\sqrt{m/k}.$$

Ускорение g не вошло в ответ. Безразмерная константа C не может быть найдена из размерных соображений; можно только сказать, что она не очень велика и не очень мала, — она порядка единицы. Действительно, значение C должно быть найдено из решения ненаписанного нами уравнения движения грузика. А безразмерные коэффициенты, возникающие из решений уравнений, встречающихся в физике, как правило, оказываются порядка единицы *). Точное вычисление дает для C значение 2π.

Таким образом, мы без вычислений, пользуясь только размерным анализом, нашли примерную величину периода колебаний грузика на пружине.



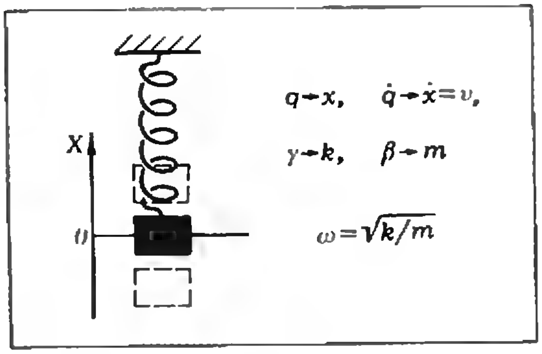
Пример обобщения — осциллятор

Во всех областях физики встречаются задачи, связанные с колебаниями систем около положения равновесия. Для понимания многих явлений, а следовательно, для качественного анализа этих явлений нужно знать общие свойства таких систем. Системы, совершающие колебания около положения равновесия, независимо от их устройства называют осцилляторами. Простейшие примеры осцилляторов — грузик на пружине, математический маятник. Более сложный пример — натянутая струна; у нее может быть много типов колебаний: колебания с пучностью посередине (основной тон), с одним узлом, двумя узлами и т. д. (обертоны). Таким образом, струна — это набор осцилляторов разных частот. Аналогичный пример — столб воздуха в органной трубе; его можно заставить колебаться с наинизшей частотой (основной тон) или с более высокой частотой, когда в некоторых точках воздушного столба частицы воздуха будут неподвижны (аналог узлов в колебаниях струны).

Общее свойство всех осцилляторов состоит в следующем: независимо от конкретного устройства осциллирую-

---

*) Это утверждение нельзя доказать в общем виде, но оно практически всегда справедливо, и этим фактом широко пользуются при всех оценках.


X
0
$q\to x,\quad \dot q\to\dot x=v,$
$\gamma\to k,\quad \beta\to m$
$\omega=\sqrt{k/m}$

щей (то есть колеблющейся около положения равновесия) системы, энергия системы в любой момент времени может быть записана в виде

$$E=\gamma q^2/2+\beta\dot q^2/2, \qquad (*)$$

где q — величина, характеризующая отклонение от положения равновесия, а $\dot q$ — скорость изменения величины q во времени (то есть $\dot q = \Delta q/\Delta t$, где Δt — малый промежуток времени). Слагаемое $П=\gamma q^2/2$ — это потенциальная энергия осциллятора; коэффициент γ называют жесткостью осциллятора. Слагаемое $K=\beta\dot q^2/2$ — это кинетическая энергия осциллятора; коэффициент β называют массой осциллятора. (Вспомните, как записывается энергия простейшего осциллятора — грузика на пружине, — и вам станет понятно, почему γ называют жесткостью, а β — массой осциллятора.)

Как бы ни был конкретно устроен осциллятор, его угловая частота колебаний $\omega=2\pi/T$ выражается следующим образом через жесткость γ и массу β:

$$\omega=\sqrt{\gamma/\beta}.$$

Введение «обобщенного» осциллятора, координата которого — не обязательно расстояние от положения равновесия, а может иметь любой смысл, лишь бы энергия имела такую же структуру, как E в выражении $(*)$, позволяет делать выводы о поведении колеблющейся системы без рассмотрения физической природы происходящих в ней процессов.

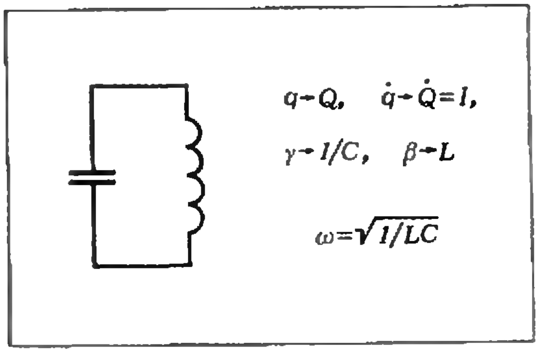
Для пояснения приведем еще один пример осциллятора, не похожий на все приведенные выше примеры. Допустим, имеется катушка индуктивности L из хорошо проводящей проволоки, концы которой присоединяют к конденсатору емкости C, имеющему заряд Q_0. В цепи возникают электромагнитные колебания. Если катушка сделана из сверхпроводника (для этого нужна низкая температура), колебания практически не будут затухать.

Энергия такой системы состоит из двух слагаемых: энергии магнитного поля в катушке и энергии электрического поля в конденсаторе. Энергия электрического поля конденсатора пропорциональна квадрату заряда Q, который в данный момент находится на обкладке конденсатора: $П=\frac{1}{C}Q^2/2$. Энергия магнитного поля катушки пропорциональна квадрату силы тока I, текущего в данный момент по катушке: $K=LI^2/2$. Но сила тока равна скорости изменения заряда конденсатора со временем: $I=\dot Q$. Таким образом, энергия магнитного поля катушки $K=L\dot Q^2/2$.

Следовательно, энергия системы в любой момент времени равна

$$E=\frac{1}{C}Q^2/2+L\dot Q^2/2.$$

Наша система — осциллятор; роль координаты осциллятора играет заряд Q, потенциальная энергия осциллятора — энергия конденсатора, кинетическая — энергия магнитного поля катушки. Из записи энергии видно, что жесткость этого осциллятора — величина $1/C$, а роль массы играет индуктивность L. Сразу можем записать частоту колебаний: $\omega=\sqrt{1/LC}$.


$q\to Q,\quad \dot q\to\dot Q=I,$
$\gamma\to 1/C,\quad \beta\to L$
$\omega=\sqrt{1/LC}$

Такой осциллятор называется электрическим колебательным контуром.

Как угадать решение?

Приведем пример того, как проясняются некоторые черты решения, прежде чем будет построен аппарат для точного решения задачи, до того как найдены уравнения, на основе которых задача будет решаться. Это заодно и пример более сложного анализа размерностей, чем в случае осциллятора.

Одна из труднейших и неразрешенных задач теоретической физики — связь гравитационных и электромагнитных явлений.

Если такая связь существует, то в результате решения каких-то еще не найденных уравнений будет получено безразмерное число *), дающее соотношение между гравитационной постоянной γ и величинами, характеризующими электромагнитные явления, такими как скорость света c, заряд электрона e и его масса m. Если существенны квантовые явления, то в задачу может войти еще постоянная Планка h. Зная размерности величин γ, c, e, m, h, нетрудно убедиться, что из этих величин можно составить только две независимые безразмерные комбинации:

$$\alpha = e^2/\hbar c; \qquad \xi = \hbar c/\gamma m^2$$

(напомним, что $\hbar = h/2\pi$).

Первая из этих комбинаций характеризует взаимодействие электрона с электромагнитным полем (безразмерный «заряд» электрона) и называется постоянной тонкой структуры. Подстановка численных значений дает $\alpha = 1/137$, $\xi = 5\cdot 10^{44}$. Может ли такое большое число как ξ возникнуть в результате решения каких-либо разумных уравнений? Безразмерные числа, возникающие в результате решения физических задач, как мы уже говорили, имеют порядок нескольких единиц или долей единицы. Поэтому мы вправе ожидать, что величина ξ войдет в задачу в такой форме, чтобы в результате получилось число порядка 1. Пока мы применяли здравый смысл. Теперь должен быть сделан небольшой интуитивный логический скачок. Правдоподобно, что в теорию войдет комбинация

$$\alpha \ln \xi \sim 1.$$

Ясно, что знание такого соотношения облегчает поиски решения. Именно в такой форме входит величина ξ в существующие сейчас теоретические попытки решения задачи о связи электродинамики с гравитацией.

III. ПРЕДЕЛЬНОЕ УПРОЩЕНИЕ

Основная идея квантовой механики

Попробуем показать на другом примере, как, предельно упрощая задачу, можно определить главные черты явления. Этот пример пояснит, что такое качественный подход к задаче.

Согласно квантовой механике энергия электрона в атоме может принимать только дискретные значения.

Возможные значения энергий электрона в атоме водорода даются выражением

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^2}. \text{ *)} \qquad (**)$$

Разности значений E_n для двух разных n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) определяют с большой точностью частоты наблюдаемых на опыте спектральных линий.

Основная идея квантовой механики состоит в том, что каждая частица (в данном случае — электрон) характеризуется неким волновым процессом с длиной волны

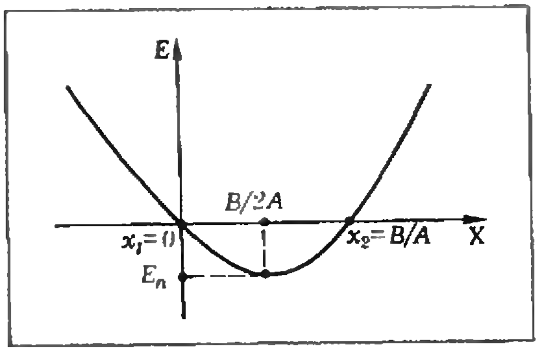
$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv},$$

где m — масса частицы, v — ее скорость. Дискретные значения энергии электрона получаются из того условия, что на длине орбиты, по которой движется электрон, должно уклады-

---

*) Для того чтобы соотношение между различными физическими величинами не зависело от выбора единиц, оно должно быть записано в виде безразмерной комбинации.

*) Физики, как правило, не пользуются системой СИ. (*Примечание автора.*)



ваться целое число волн. Если радиус орбиты r, то n-ному состоянию электрона соответствует условие $2\pi r=\lambda n$ ($n=1, 2, \ldots$), или $mv_n=\hbar n/r$. Отсюда нетрудно найти кинетическую энергию в n-ном состоянии:

$$W_n=mv_n^2/2=\hbar^2n^2/2mr^2.$$

Полная энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле ядра, которая отрицательна и равна $U=-Ze^2/r$. Полная энергия электрона в атоме водорода равна

$$E_n(r)=\hbar^2n^2/2mr^2-e^2/r.$$

В нашем выводе мы предполагаем, что радиус орбиты r имеет фиксированное значение. Согласно квантовой механике радиусы орбит «разбросаны» в окрестности классически устойчивой орбиты. В качестве оценки радиуса можно взять значение r, которое соответствует минимуму энергии $E(r)$.

Чтобы найти минимум $E(r)$, поступим следующим образом. Перепишем выражение для $E(r)$ в таком виде:

$$E=Ax^2-Bx.$$

Мы ввели такие обозначения: $x=1/r$, $A=\hbar^2n^2/2m$, $B=e^2$. Видно, что при $x_1=0$ и $x_2=B/A$ значение E равно нулю. Внутри интервала $]x_1, x_2[$ E отрицательно. Где-то внутри этого интервала лежит минимум E. Будем для оценки считать, что $E_{\min}$ соответствует значение x в середине интервала, то есть $x=B/2A$. Соответственно, $r=1/x=2A/B$, то есть

$$r_n=\frac{\hbar^2n^2}{me^2}.$$

(Отметим, что при $n=1$ это выражение дает верную оценку для радиуса атома в наинизшем состоянии.) Подставив это значение r_n в выражение для $E_n(r)$, получим

$$E_n=-\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^2},$$

то есть выражение, совпадающее с (**)!

В действительности электрон может с разной вероятностью находиться на любом расстоянии от ядра. Наше упрощение состояло в предположении, что это расстояние определенное, равное r, и находится из условия минимальности энергии. Разумеется, мы действовали грубо. Поэтому нельзя доверять числовому множителю впереди этой формулы, хотя он случайно получился правильным. Но всему остальному можно доверять! И множителю $me^4/\hbar^2$, и, что особенно важно, зависимости от «квантового числа» n.

Точное решение потребовало бы знания основного уравнения квантовой механики (уравнение Шредингера) и очень сложной (по школьным понятиям) математики. То, что мы получили, и есть качественное решение, когда результат получается с точностью до неизвестного числового множителя, но характер зависимости от параметров задачи передается точно. Качественное решение чрезвычайно облегчает получение точного решения, поскольку выясняются главные черты явления. Более того, если есть качественное решение, а точного не удается получить аналитически, можно без особых потерь в понимании задачи найти его с помощью вычислительных машин.

Еще одно обобщение — квантовые осцилляторы

Не сложнее решается задача о квантовании осциллятора. При этом нам не существенно, как реализован осциллятор — представляет ли он груз, колеблющийся на пружине, или электрический колебательный контур.

Обозначим через q обобщенную координату осциллятора. Запишем энергию осциллятора:

$$E=\gamma q^2/2+\beta\dot{q}^2/2.$$

Можно себе представить, что осциллятор — это некая «частица» с массой β, колеблющаяся на пружине с жесткостью γ. Для того чтобы сформулировать для этого объекта основную идею квантовой механики, введем длину волны λ волнового процесса, связанного с нашей «частицей»:

$$\lambda=2\pi\hbar/\beta\dot{q}.$$

В знаменателе стоит произведение «массы» на ее скорость. Так как скорость изменяется при движении частицы, то и длина волны тоже меняется — она минимальна вблизи положения равновесия и растет в тех областях, где скорость «частицы» мала.

Пусть «частица» движется в области от $-q_0$ до q_0. (Подчеркнем, что $2q_0$ — не размах колебаний осциллятора, а та область, в которой «дрожит» его координата.) Для того чтобы образовалась стоячая волна, на «длине» $2q_0$ должно укладываться целое число полуволн: $2q_0=(n+1)\lambda/2$ ($n=0, 1,2,..$). В качестве оценки скорости возьмем значение скорости при $q=q_0$, то есть $(\dot{q})_0=2\pi\hbar/\beta\lambda=\pi\hbar(n+1)/2\beta q_0$. Подставляя это значение в выражение для кинетической энергии, находим:

$$W_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{8\beta}\,\frac{(n+1)^2}{q_0^2}.$$

Для полной энергии получаем:

$$E_n(q_0)=\frac{(\pi\hbar)^2}{8\beta}\,\frac{(n+1)^2}{q_0^2}+\frac{\gamma q_0^2}{2}.$$

При малых значениях q_0 энергия велика из-за первого слагаемого, а при больших q_0 — из-за второго. Примерное значение q_0, дающее наименьшую энергию, получится, если приравнять оба слагаемых. Из этого условия находим:

$$q_0^2=\frac{\pi\hbar(n+1)}{2\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Подставляя в выражение для энергии, получаем:

$$E_n=\frac{\pi}{2}\hbar\sqrt{\gamma/\beta}\,(n+1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\hbar\omega(n+1)\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

Величина $\omega=\sqrt{\gamma/\beta}$ представляет собой частоту колебаний классического осциллятора.

При точном расчете для энергии получается выражение

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, мы ошиблись в числовом множителе ($\pi/2$ вместо 1), а также в численном значении энергии в самом низшем состоянии, то есть при $n=0$ $\left(\frac{\pi}{2}\hbar\omega\right.$ вместо $\left.\frac{1}{2}\hbar\omega\right)$. Но все остальное получилось точно! Теперь, когда результат получен, следует задуматься над тем, что́ мы использовали для его получения и что́ вытекает из полученных нами выражений для энергии осциллятора и для величины q_0^2.

Прежде всего, мы применили к нашему осциллятору, не интересуясь тем, как он устроен, принципы квантовой механики, установленные первоначально применительно к электронам. Конечно, естественно ожидать, что общие принципы должны быть такими же и для других частиц, массы которых отличаются от массы электрона. Действительно, такое обобщение с большой точностью подтвердилось опытом. Но почему эти же принципы можно применять и к такому объекту, как колебательный контур, где роль «координаты» играет заряд на обкладках конденсатора? Здесь мы подошли к важному предположению, которое широко использовалось и используется в теоретической физике XX века. Если две системы имеют энергию, одинаково зависящую от координат и скоростей, то такие системы обладают одинаковыми свойствами, несмотря на то, что «координаты» и «скорости» могут иметь совершенно разный смысл в этих системах.

Не было ни одного примера, где бы это предположение противоречило опыту. Поэтому мы вправе считать, что решили задачу о применении квантовой механики сразу для всех возможных осцилляторов.

Теперь подумаем, что означают полученные нами результаты. Как они переходят в формулы классической механики? Прежде всего, мы получили, что энергия изменяется не непрерывно, а порциями величины $\hbar\omega$. Правда, величина $\hbar$ очень мала, и для обычных макроскопических осцилляторов эта скачкообразность изменения энергии практически не наблюдается. Впрочем, есть такие особые макроскопические системы, где скачкообразность играет определяющую роль (например, лазеры). Правильность полученного нами выражения для энергии осциллятора проверена с большой точностью для многих видов осцилляторов.

Есть еще одно важное свойство квантового осциллятора, которое тоже нами получено. Когда энергия минимальна, классический осциллятор находится в покое в положении равновесия; между тем квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии совершает колебания (их называют «нулевые колебания»). Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка $\hbar\omega$. При этом среднее значение координаты осциллятора равно нулю, а среднее значение квадрата координаты дается приведенной выше формулой для q_0^2. Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и играет важную роль в современной физике.

Если рассмотреть звуковые колебания в твердом теле как набор квантовых осцилляторов, то мы получим, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны, а совершают нулевые колебания. И этот факт был подтвержден опытами по рассеянию света при низких температурах! Если мы будем рассматривать электромагнитные волны, которые могут распространяться в пустом пространстве, как набор осцилляторов, то мы придем к заключению, что в пустоте, даже когда в ней нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля. И эти колебания также были обнаружены на опыте! Но это уже более сложный вопрос, который требует подробного обсуждения.

Понимание возникает в процессе работы

Мы ввели без объяснения несколько непонятных слов: квантование, волновой процесс, связанный с частицей, квантовый осциллятор и т. д. И начали действовать, не очень их понимая. Тем не менее мы нашли, как зависит энергия атома водорода от квантового числа n; узнали, что квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии колеблется, и даже стали применять результаты квантования осциллятора к такому объекту, как колебания электромагнитного поля в пустоте. И в результате этих действий возникло хотя бы частичное понимание.

Итак, понимание возникает в процессе работы. Ведь если бы мы попытались добиться полного понимания до того, как начали наши простые вычисления, ничего бы не получилось. Понимание возникает не скачком, а по мере продвижения в работе. И наоборот, работа продвигается по мере углубления понимания.

Для того чтобы достичь более глубокого понимания, надо самому решать задачи в данной области физики. Пассивное изучение дает только слабое представление о тех красотах, которые открываются при самостоятельной работе.

Задачи наших читателей

1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках G_a, G_b и G_c соответственно. Вневписанные окружности касаются сторон BC, CA и AB в точках N_a, N_b и N_c. Пусть r, r_a, r_b и r_c — радиусы вписанной и вневписанных окружностей соответственно. Докажите следующие равенства:

а) $$\frac{1}{|AG_c|\cdot|G_cB|}+\frac{1}{|BG_a|\cdot|G_aC|}+\frac{1}{|CG_b|\cdot|G_bA|}=\frac{1}{|AN_c|\cdot|N_cB|}+\frac{1}{|BN_a|\cdot|N_aC|}+\frac{1}{|CN_b|\cdot|N_bA|}=\frac{1}{r^2};$$

б) $$\frac{|BN_a|^2}{r_a r_b}+\frac{|CN_b|^2}{r_b r_c}+\frac{|AN_c|^2}{r_c r_a}=\frac{|AN_b|^2}{r_a r_b}+\frac{|BN_c|^2}{r_b r_c}+\frac{|CN_a|^2}{r_c r_a}=1;$$

(Окончание см. с. 25)

Р. Винокур

Домовой, колдун и... резонатор Гельмгольца

В рассказе А. Вьюркова «Пустырь» *) можно прочитать о том, как некий Иван Павлович, желающий разбогатеть, нанял артель каменщиков для постройки «доходного» дома и жестоко обманул их, выплатив лишь часть заработанных денег. Однако «доходный» дом не принес мошеннику желанных прибылей — постепенно его покинули все квартиросъемщики. Их напугал таинственный домовой, поселившийся в доме. Не помогла Ивану Павловичу избавиться от «нечистой силы» и полиция.

«... В квартиру выехавшего купца посадили на ночь двух городовых. Они уселись в кухне на пустые ящики, достали «для храбрости» бутылку водки, колбасу и стали ждать «домового». — В случае, ежели что... — наставлял старший чин младшего, — ты его хватай, а я руки крутить буду.

«Засада» выпивала и прислушивалась. В квартире было тихо. На улице гудел ветер, выла собака, хлопала калитка у ворот, и вдруг... в пустых комнатах кто-то вздохнул и завыл. Городовые переглянулись и, не прожевав колбасы, вскочили и вылетели на улицу легче пуха.

— Так точно... — дрожа от страха, доложил дежурному старшой.

— Своими глазами видел, ваше благородие!... Голова у него — во! Хвост и рога — во!

После этого происшествия из дома выехало еще несколько жильцов...».

Наступил срок уплаты процентов, денег не было. Ивана Павловича арестовали. И только много лет спустя строительный подрядчик, также когда-то обманутый Иваном Павловичем, раскрыл ему секрет:

«Это тебя, брат, Иван Павлович, каменщики подвели. Они тебе в стену бутылки пустые заложили, ветерок-то в них и гудел. Поди их теперь ищи. Не придумаешь, где и стену ломать...»

---

*) А. Вьюрков. Рассказы о старой Москве. (М., «Московский рабочий», 1958.)

Звучащие свойства пустых сосудов известны давно. Так, еще в античном театре большие глиняные либо бронзовые сосуды использовались для усиления голоса актера. Большое практическое применение в акустике получили так называемые *резонаторы Гельмгольца* — полости шарообразной или бутылочной формы с узким длинным горлом.

С помощью набора резонаторов Гельмгольца (названных так в честь немецкого физика Гельмгольца, создателя физической теории слуха) можно производить анализ сложных звуков. Действие резонатора основано на резонансе колебаний воздуха, заключенного внутри резонатора. Из всех колебаний, входящих в состав сложной звуковой волны, каждый резонатор сильнее всего откликается на частоту, равную собственной частоте колебаний воздуха в нем.

От чего и как зависит собственная частота колебаний резонатора Гельмгольца? Если размеры резонатора малы по сравнению с длиной звуковой волны, его можно рассматривать как колебательную систему, аналогичную пружинному маятнику. Поскольку горло узкое, при колебаниях скорость движения воздуха в горле гораздо больше скорости воздуха внутри полости, так что роль колеблющейся массы играет, главным образом, воздух в горле. Другими словами, кинетическая энергия колебательной системы сосредоточена, в основном, в горле. Упругой же энергией обладает воздух, находящийся внутри полости. Действительно, так как объем воздуха в горле намного меньше, чем в полости, изменением объема воздуха в горле при колебаниях можно пренебречь и считать, что весь этот воздух смещается как единое целое — своеобразная «воздушная пробка», а объем воздуха в полости изменяется заметно. Таким образом, воздух внутри полости играет роль пружины в нашей колебательной системе.

Как известно, собственная частота колебаний пружинного маятника равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Найдем соответствующие параметры нашей колебательной системы—массу m и коэффициент упругости k.

Массу «воздушной пробки» определить легко. Она равна

$$m = \rho S l,$$

где ρ — плотность воздуха, S — площадь поперечного сечения горла резонатора и l — его длина.

Для определения коэффициента упругости проведем такие рассуждения. Пусть «воздушная пробка» сместилась на некоторое расстояние внутрь полости. Это вызовет сжатие воздуха (увеличение плотности) в прилегающем слое воздуха в полости и, как следствие, — повышение давления, что вызовет движение следующего слоя воздуха, и так далее. Сжатие будет передаваться от слоя к слою — в воздухе будет распространяться импульс сжатия, возникнет звуковая волна.

Обозначим смещение «воздушной пробки» через x. Тогда объем воздуха V внутри полости уменьшится на величину

$$\Delta V = Sx,$$

а плотность ρ увеличится на

$$\Delta\rho = \frac{M}{V-\Delta V} - \frac{M}{V} \approx \frac{M}{V}\frac{\Delta V}{V} =$$

$$= \rho\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho S}{V}x$$

(здесь M — масса воздуха в полости).

Как при этом изменится давление p внутри резонатора?

Выделим внутри полости площадку ΔS, перпендикулярную к направлению распространения волны сжатия. Пусть скорость волны (скорость звука) равна c. За время Δt импульс сжатия распространится на расстояние $c\Delta t$, так что за выделенной площадкой масса воздуха увеличится на

$$\Delta m = \Delta\rho\Delta S c\Delta t,$$

а количество движения — на

$$\Delta mc = \Delta\rho\Delta S c^2\Delta t.$$

Согласно второму закону Ньютона, изменение количества движения равно импульсу действующей силы:

$$\Delta mc = |\vec{F}|\Delta t.$$

Следовательно, изменение давления

воздуха в полости равно

$$\Delta p = \frac{|\vec{F}|}{\Delta S} = \Delta\rho c^2$$

— изменение давления пропорционально изменению плотности воздуха.

Теперь можно найти силу, действующую на «воздушную пробку» со стороны воздуха в полости. При перемещении «пробки» на расстояние x плотность воздуха внутри резонатора увеличивается на $\Delta\rho = \frac{\rho S}{V}x$, а давление — на

$$\Delta p = \Delta\rho c^2 = \frac{\rho S c^2}{V}x.$$

Значит, на «пробку» площадью S будет действовать сила упругости

$$|\vec{F}_{\text{упр}}| = \Delta p S = \frac{\rho S^2 c^2}{V}x.$$

Это означает, что поведение воздуха в полости аналогично поведению пружины с коэффициентом упругости

$$k = \frac{|\vec{F}_{\text{упр}}|}{x} = \frac{\rho S^2 c^2}{V}.$$

Следовательно,

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl}}.$$

Оценим теперь резонансную частоту колебаний воздуха в бутылке, рассматривая ее как резонатор Гельмгольца. К сожалению, нам не известны точные размеры бутылок, выпускаемых во времена «деятельности» Ивана Павловича. Поэтому для оценки предположим, что $S=1$ см², $l=5$ см, $V=500$ см³, скорость звука в воздухе $c=340$ м/с. Подставляя эти значения в формулу для частоты, получим $\nu \approx \approx 108$ Гц. Проверим, кстати, справедливость исходного предположения: длина звуковой волны в воздухе, соответствующая этой частоте, равна $\lambda = c/\nu \approx 3{,}2$ м и, следовательно, действительно много больше размеров бутылки.

Так почему же в пустых комнатах «доходного» дома возникали пугающие всех звуки? Завывание ветра, лай собаки и другие внешние шумы с физической точки зрения представляют собой неупорядоченные наборы гармонических колебаний различных частот (так называемых чистых тонов). Проходя через стены здания, существенно ослаблялись звуковые колебания всех частот, за исключением резонансных, совпадающих с собственными частотами колебаний воздуха в пустых бутылках. Эти последние колебания могли даже усилиться. Обычно звуковые колебания, характерные для человеческой речи, лежат значительно выше 100 Гц. Поэтому можно понять причину паники, охватившей городовых: в пустых комнатах внезапно раздался громкий нечеловеческий голос — в «доходном» доме выл домовой!

После ознакомления со свойствами резонатора Гельмгольца вы легко разоблачите и колдуна, героя такой занимательной задачи:

Колдун на острове Чунга-Чанга безошибочно предсказывает приближение цунами к острову, творя заклинания над пустым сосудом из-под бананового сока емкостью 1000 л, имеющим горлышко длиной 20 см и площадью поперечного сечения 0,5 см². Какова частота инфразвукового излучения, обычно предшествующего приближению цунами к острову Чунга-Чанга?

Напомним, что инфразвуковыми называются колебания с частотой ниже 20 Гц. Звуки с такой частотой обычно не воспринимаются человеческим слухом, однако вибрации твердых тел с частотой меньше 20 Гц могут быть обнаружены на ощупь. В настоящее время специальные инфразвуковые приемники широко используются в так называемой службе цунами для предупреждения о возможном появлении этих гигантских морских волн.

А. Вирский, А. Звонкин

Овал, восьмерка, два овала...

В этой статье рассматриваются примеры алгебраических кривых четвертого порядка. Напомним, что *алгебраической кривой n-го порядка* называется график уравнения $p_n(x,y)=0$, где $p_n(x,y)$ — многочлен n-ой степени от переменных x, y *). Например, алгебраическая кривая первого порядка — это прямая линия; алгебраическими кривыми второго порядка являются, в частности, эллипс, гипербола, парабола — известные вам кривые, обладающие рядом замечательных свойств **).

Более интересны, да к тому же не полностью изучены, кривые более высоких порядков. Достаточно сказать, что знаменитая «шестнадцатая проблема Гильберта» для случая кривых шестого порядка была решена лишь совсем недавно, а для бо̀льших порядков осталось много просто формулируемых, но нерешенных проблем. Об этом, однако, мы скажем подробнее в Послесловии, а сейчас перейдем к обещанным примерам.

Изменим одно слово

Хорошо известно геометрическое определение эллипса: *эллипс* — это множество точек (на плоскости), сумма расстояний от которых до точек F_1 и F_2 постоянна: $|MF_1|+|MF_2|=2a$. Заменим в этом определении одно слово.

Определение. *Овалом Кассини называется множество точек (на плоскости), произведение расстояний от которых до точек F_1 и F_2 постоянно:*

$$|MF_1|\cdot|MF_2|=a^2. \qquad (1)$$

Точки F_1 и F_2, как и у эллипса, называются *фокусами*. «Овал Кассини» появился на свет благодаря ошибке. Его «изобрел» знаменитый французский астроном (итальянец по происхождению) Жан Доминик Кассини (1625—1712). Этот выдающийся ученый, член Парижской академии наук, директор Парижской обсерватории, открывший вращение Юпитера и Марса, а также четыре новых спутника Сатурна, почему-то считал, что именно такую форму имеет орбита Земли. Дальнейшее развитие науки показало, что более верным ответом будет обычный эллипс. Но овал Кассини остался жить. Дело в том, что он обладает одним замечательным свойством.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$ и составим уравнение овала Кассини в системе координат, в которой $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Подставляя

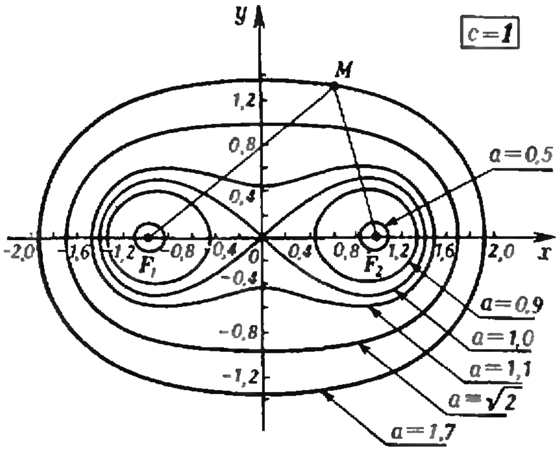


Рис. 1.

---

*) Вспомним, что такое степень многочлена от двух переменных. *Степенью одночлена* $a\cdot x^k y^l$ называется число $k+l$ (например, xy — одночлен степени 2). *Степенью многочлена* называется максимальная степень входящих в него одночленов (например, многочлен $p(x, y)=x^3+2xy^4+11y^2-xy$ имеет степень 5).

**) См. «Квант», 1975, №№ 1, 3, 4.

$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ в равенство (1) и возводя в квадрат, после преобразований получим

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2=a^4.$$

Получилось уравнение четвертой степени. Конкретный вид кривой зависит, разумеется, от того, какие мы выберем значения параметров a и c. Давайте, для примера, зафиксируем a и будем увеличивать c (можно поступить и наоборот: зафиксировать c и уменьшать a — результат будет тот же; см. рис. 1). Тут-то и произойдет самое интересное: подобно куску теста, который растягивают в разные стороны, овал сначала удлинится, потом у него появится «талия», она будет становиться все тоньше, пока, наконец, наша фигура не разорвется на две части, на два меньших овала. Более точно картина будет такой (рис. 2):

1) при $c=0$ — окружность;

2) при $0<c\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}$ — выпуклый овал, похожий на эллипс;

3) при $\frac{a}{\sqrt{2}}<c<a$ — овал с «талией»;

4) при $c=a$ — «лежащая восьмерка» (она имеет отдельное название — *лемниската Бернулли*);

5) при $c>a$ — два овала; один из них содержит внутри точку F_1, другой — точку F_2.

Указанное свойство «делимости» овалов Кассини впервые обнаружил и детально изучил другой французский ученый — Жан Поль де Гюа де Мальв (1712—1785). Его работа была одной из первых работ, посвященных исследованию особых точек алгебраических кривых (особой точкой в данном случае является точка самопересечения при $c=a$). Впоследствии из таких работ родилась обширная ветвь современной математики — алгебраическая геометрия.

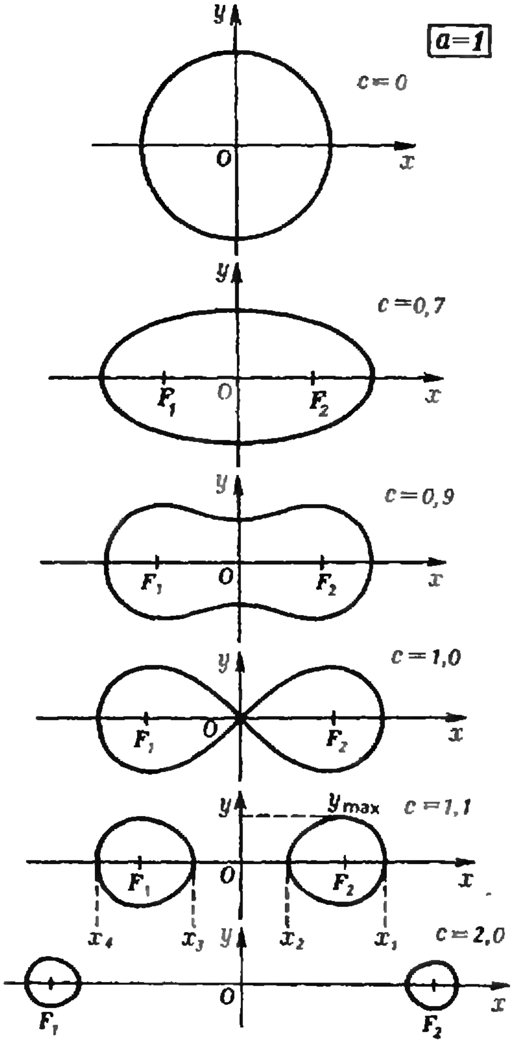


Рис. 2.

Второй пример

Рассмотрим теперь *множество точек M, для которых сумма величин, обратных квадратам расстояний от M до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная:*

$$\frac{1}{|MF_1|^2}+\frac{1}{|MF_2|^2}=\frac{1}{b^2}. \qquad (2)$$

Как и прежде, положим $|F_1F_2|=2c$. Подставляя в (2) формулы для $|MF_1|$ и $|MF_2|$, получаем уравнение

$$\frac{1}{(x+c)^2+y^2}+\frac{1}{(x-c)^2+y^2}=\frac{1}{b^2}. \qquad (3)$$

Контрольный вопрос. Почему уравнение (3) является уравнением четвертой степени?

Полученная кривая своим поведением очень напоминает овалы Кассини. На рисунке 3 изображены последовательные «фазы деления», которые проходит кривая при увеличении параметра c (параметр b остается постоянным). Рассмотрим этот процесс чуть подробнее.

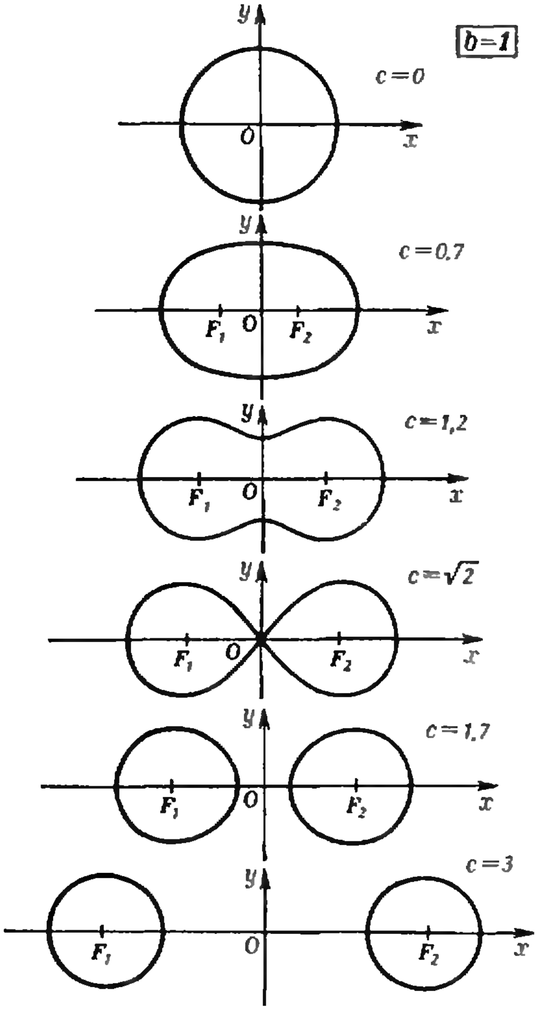


Рис. 3.

Задача 1. При каком соотношении между параметрами b и c уравнение (3) задает «лежащую восьмерку»?

Несколько труднее уловить момент, в который выпуклые, «эллипсообразные», овалы переходят в овалы «с талией».

Задача 2. При каких соотношениях между параметрами b и c получается

а) выпуклый овал?

б) овал с талией?

Одна особенность отличает кривую (3) от овалов Кассини: по мере роста c «разделившиеся» овалы Кассини все более и более уменьшаются в размерах (см. рисунок 2), а овалы, описываемые уравнением (3), — нет. Они становятся все более и более похожими на две окружности радиуса b. Это можно легко вывести из уравнения (3). Сделайте это самостоятельно.

Режем бублик

Одна простая геометрическая идея позволяет построить еще один пример, аналогичный предыдущим. Возьмем *тор* — поверхность, напоминающую бублик; эта поверхность получается *вращением окружности вокруг прямой, не пересекающей ее* (и лежащей в той же плоскости, что и окружность). Будем пересекать тор плоскостями, параллельными друг другу и параллельными оси вращения (рис. 4). Если поднимать секущую плоскость снизу вверх, мы увидим знакомую картину: сначала сечением будет выпуклый овал, постепенно увеличивающийся в размерах; потом овал приобретет талию, она будет становиться все тоньше, овал превратится в восьмерку, а восьмерка распадется на два овала. В верхней части тора весь процесс повторится в обратном порядке: два овала «срастутся» в восьмерку, восьмерка превратится в овал с талией и т. д.

А теперь переведем наши геометрические рассуждения на язык алгебры.

Выведем для этого уравнение тора. Пусть оси координат направлены так, как на рисунке 4; в частности, ось вращения тора совпадает с осью Oy. Пересечем тор произвольной плоскостью, проходящей через ось Oy, и рассмотрим одну из получившихся в сечении окружностей (рис. 5). Ее уравнение

$$(t-R)^2+y^2=r^2.$$

Здесь через r мы обозначили радиус окружности, а через R расстояние от ее центра до оси Oy. Если теперь вспом-

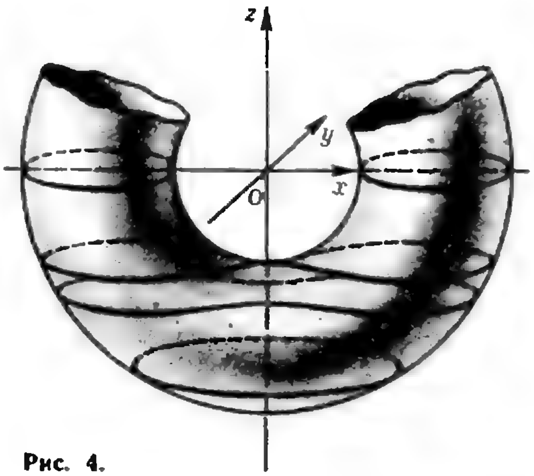


Рис. 4.

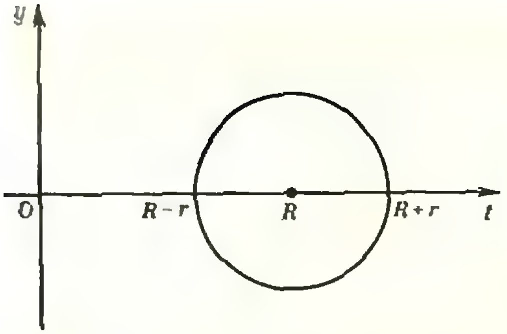


Рис. 5.

нить, что t — это расстояние от точки (x, y, z) до оси Oy, то есть $t=\sqrt{x^2+z^2}$, мы получим уравнение тора:

$$(\sqrt{x^2+z^2}-R)^2+y^2=r^2. \qquad (4)$$

Если в (4) освободиться от радикалов, получится уравнение четвертой степени. Теперь, чтобы «алгебраически» пересечь тор (плоскостью $z=c$, следует в уравнение 4) вместо z подставить c.

Задача 3. Исследуйте (с помощью рисунка 4) внешний вид кривой, задаваемой уравнением

$$(\sqrt{x^2+c^2}-R)^2+y^2=r^2,$$

при различных c.

Задача 4°. Рассмотрим «овал с талией»

$$\frac{1}{(x-1)^2+y^2}+\frac{1}{(x+1)^2+y^2}=1.$$

Сдвинем его на 3 единицы вправо (заменив x на $x-3$):

$$\frac{1}{(x-4)^2+y^2}-\frac{1}{(x-2)^2+y^2}=1;$$

теперь он не пересекает ось Oy. Образуем поверхность вращения, вращая этот овал вокруг оси Oy; уравнение этой поверхности получится, если вместо x подставить $\sqrt{x^2+z^2}$; если освободиться от радикалов (что делать не обязательно), получится уравнение *восьмой* степени. Исследуйте (геометрически) внешний вид сечений этой поверхности плоскостями $z=c$ при различных c.

Послесловие

А сейчас — самое интересное. В рассмотренных нами примерах кривая четвертого порядка, если она не имеет самопересечений, состоит из одного или из двух овалов (овал с талией мы теперь тоже будем считать овалом). Вам, возможно, захочется узнать, каково *максимальное число овалов* для кривой указанного порядка, и как они могут располагаться друг относительно друга. Это мы сейчас и выясним, но прежде заметим, что эти два вопроса имеет смысл формулировать для кривой любого четного порядка; собственно говоря, математики уже давным давно задавали себе эти вопросы.

Еще в 1876 году А. Гарнак доказал, что максимальное число овалов, из которых может состоять кривая n-го порядка, равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$. В частности, для $n=4$ получается 4 овала, для $n=6$ — 11 овалов, для $n=8$ — 22 овала, и т. д. Задача об их взаимном расположении оказалась значительно сложнее. На рубеже нашего столетия, в 1900 году, на Втором всемирном математическом конгрессе великий немецкий математик Д. Гильберт сформулировал знаменитые 23 проблемы, которые он считал наиболее важными для развития математики XX века. Интересующий нас вопрос вошел в список Гильберта под номером 16. С тех пор шестнадцатая проблема Гильберта не перестает занимать математиков. Но полное решение пока получено лишь для $n=6$ — это сделал советский математик Д. А. Гудков немногим более 10 лет назад. Для 11 овалов возможны лишь три типа взаимного распо-

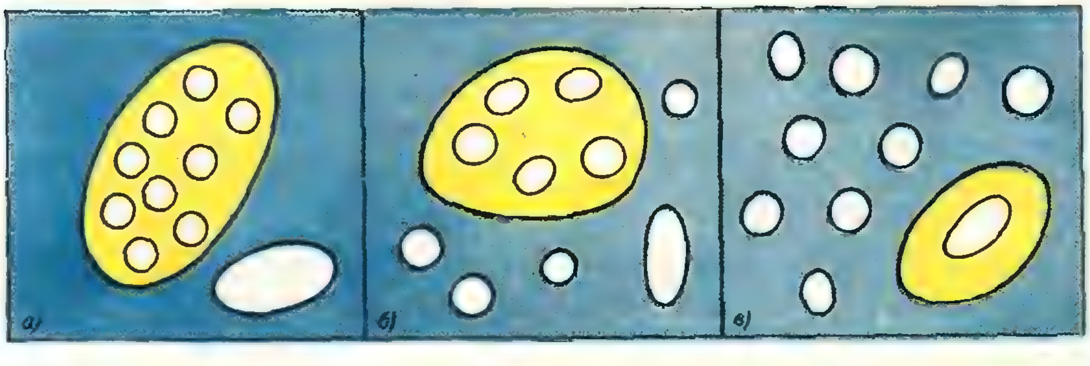


Рис. 6.

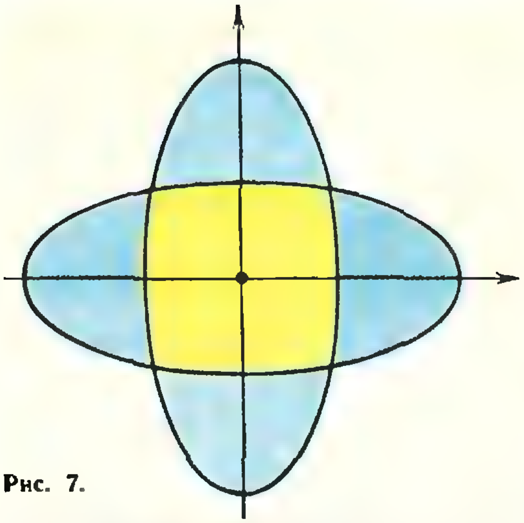


Рис. 7.

ложения; они схематически изображены на рисунке 6 (конфигурации с меньшим числом овалов не приведены, т. к. их слишком много; всего, вместе с указанными тремя, возможны 56 разных конфигураций). Вряд ли *вам удастся найти доказательство;* но зато аналогичное исследование для кривых четвертого порядка мы проведем полностью. Для этого вам предлагается решить приведенные ниже задачи.

Задача 5 (легкая). Постройте пример кривой четвертого порядка, состоящей из двух вложенных друг в друга овалов.

Задача 6 (трудная). Постройте пример кривой четвертого порядка с четырьмя овалами. (Указание. Начните с пары пересекающихся эллипсов и подпортите уравнение так, чтобы «цветок», изображенный на рисунке 7, распался на четыре голубых лепестка.)

Задача 7 (на уровне предыдущей). Постройте пример кривой четвертого порядка с тремя овалами.

Если вы решили задачи 6, 7 (или подглядели ответ), вы, наверное, обратили внимание на то, что ни один овал не содержится в другом. Это неспроста:

Задача 8. Докажите, что кривая четвертого порядка, содержащая два вложенных друг в друга овала, больше не содержит никаких других точек. (Указание. Покажите, что любая прямая пересекает кривую четвертого порядка не более чем в четырех точках.)

Интересующий нас вопрос будет исследован полностью, если будет решена заключительная

Задача 9 (очень трудная). Докажите, что кривая четвертого порядка не может содержать более четырех овалов. (Указание. Воспользуйтесь тем, что через любые пять точек проходит ровно одна кривая второго порядка.)

Задачи наших читателей

(Начало см. с. 17)

$$\text{в) } |AG_c|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat A}{2}+|BG_a|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat B}{2}+|CG_b|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat C}{2}=|AN_c|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat B}{2}+|BN_a|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat C}{2}+$$

$$+|CN_b|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat A}{2}=|AN_b|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat C}{2}+|BN_c|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat A}{2}+|CN_a|^2\cdot \operatorname{tg}\frac{\hat B}{2}=S,$$

где S — площадь треугольника ABC.

2. *Из вершин B и C (C и A, A и B) треугольника ABC восставлены перпендикуляры* к сторонам AB и CA (BC и AB, CA и BC соответственно) до пересечения с биссектрисой угла $\widehat{A}$ ($\widehat{B}$, $\widehat{C}$ соответственно) в точках B_a и C_a (C_b и A_b, A_c и B_c). Пусть h_a, h_b, h_c — длины высот, опущенных, соответственно, из вершин A, B и C; a, b, c — длины сторон BC, CA и AB, r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, p — его полупериметр. Докажите, что:

$$\text{а) } \frac{1}{h_a|CC_b|}+\frac{1}{h_b|AA_c|}+\frac{1}{h_c|BB_a|}=\frac{1}{h_a|BB_c|}+\frac{1}{h_b|CC_a|}+\frac{1}{h_c|AA_b|}=\frac{1}{2r^2};$$

$$\text{б) } \frac{ab^3}{|CA_c|^2}+\frac{bc^3}{|AB_a|^2}+\frac{ca^3}{|BC_b|^2}=\frac{a^3b}{|CB_c|^2}+\frac{b^3c}{|AC_a|^2}+\frac{c^3a}{|BA_b|^2}=p^2.$$

3. A_0, B_0 и C_0 — основания высот остроугольного треугольника ABC, опущенных, соответственно, из вершин A, B и C. Прямые, соединяющие вершины A, B и C с центром описанной около треугольника ABC окружности, пересекают прямые B_0C_0, C_0A_0 и A_0B_0 в точках M_a, M_b и M_c соответственно. Докажите равенства:

а) $|M_aB_0|=|M_bA_0|$, $|M_bC_0|=|M_cB_0|$, $|M_cA_0|=|M_aC_0|$;

б) $|M_aB_0|+|M_bC_0|+|M_cA_0|=d$,

где d — длина отрезка, соединяющего проекции основания любой высоты треугольника ABC на две другие его стороны.

У. Алла (г. Выру)

Интеграл помогает доказать неравенство Коши

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, среди которых есть различные. Тогда выполняется **неравенство Коши**:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}. \qquad (1)$$

Обозначим левую часть неравенства Коши через S_n и докажем его в такой форме:

$$(S_n)^n > a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n. \qquad (2)$$

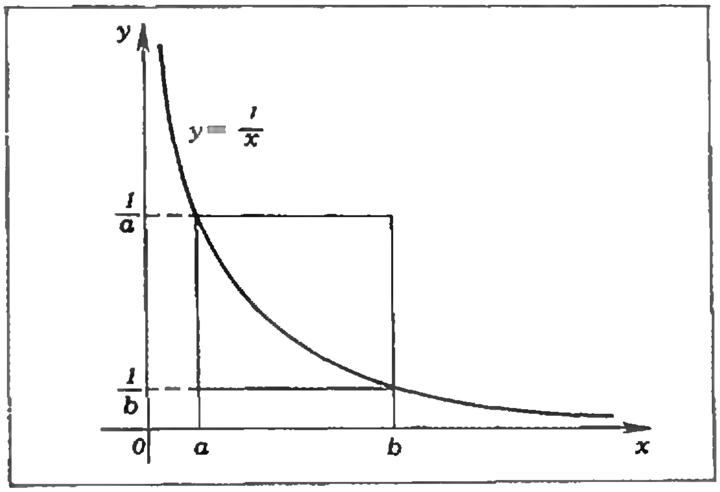
Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что для некоторого k такого, что $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant \leqslant S_n \leqslant a_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n. \quad (3)$$

Основой доказательства неравенства (2) будет неравенство

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}, \qquad (4)$$

где $0<a<b$. Неравенство (4) вытекает из равенства $\int\limits_a^b \frac{1}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$ и неравенства $\frac{b-a}{b} < \int\limits_a^b \frac{1}{t}\,dt < \frac{b-a}{a}$ (см. рисунок и пп. 113,101 пособия «Алгебра и начала анализа 10»). Заметим, что при $a = b$ вместо (4) имеем $\frac{b-a}{b} = \ln\frac{b}{a} = \frac{b-a}{a}$.



Из (3) и (4)

$$\frac{S_n-a_1}{S_n}+\frac{S_n-a_2}{S_n}+\ldots+\frac{S_n-a_k}{S_n} \leqslant \ln\frac{S_n}{a_1}+\ln\frac{S_n}{a_2}+\ldots+\ln\frac{S_n}{a_k}, \qquad (5)$$

или

$$\frac{kS_n-(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{S_n} \leqslant \ln\frac{(S_n)^k}{a_1\,a_2\cdot\ldots\cdot a_k}. \qquad (6)$$

Опять-таки из (3) и (4)

$$\ln\frac{a_{k+1}}{S_n}+\ln\frac{a_{k+2}}{S_n}+\ldots+\ln\frac{a_n}{S_n} \leqslant \frac{a_{k+1}-S_n}{S_n}+\frac{a_{k+2}-S_n}{S_n}+\ldots+\frac{a_n-S_n}{S_n}, \qquad (7)$$

или

$$\ln\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} \leqslant \frac{(a_{k+1}+\ldots+a_n)-(n-k)S_n}{S_n}. \qquad (8)$$

Легко проверить, что левая часть неравенства (6) равна правой части неравенства (8). Значит, из (6) и (8)

$$\ln\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} \leqslant \ln\frac{(S_n)^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}. \qquad (9)$$

Поскольку среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть различные, в цепочке неравенств (3) какие-то неравенства выполняются «строго». Тогда эти «строгие» неравенства перейдут в (5) или (7). Значит, по крайней мере, одно из неравенств (6), (8) тоже будет «строгим». Поэтому вместо (9) мы можем утверждать

$$\ln\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} < \ln\frac{(S_n)^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k},$$

или

$$\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(S_n)^{n-k}} < \frac{(S_n)^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k},$$

откуда вытекает (2).

Если же $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, то, очевидно,

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

С. Берколайко

В. Майер

Опыты с ложкой бульона

Пожалуй, самые интересные явления в жидкости происходят на ее поверхности, там, где она граничит со своим паром, с другой какой-нибудь жидкостью или с твердым телом.

Поверхностный слой жидкости находится в особых условиях по сравнению с остальной массой жидкости и потому отличается особыми свойствами. Прежде всего, это — поверхностное натяжение. С ним связаны такие явления, как, например, смачивание или несмачивание.

Предлагаем вам провести несколько очень простых опытов и понаблюдать за поведением одной жидкости на поверхности другой.

Набрав ложку хорошего мясного бульона, не спешите отправить ее в рот. Посмотрите внимательно на бульон — на его поверхности плавают крупные капельки жира. Заметьте размер этих капелек. Отлейте немного бульона из ложки обратно в тарелку и опять посмотрите на его поверхность — капельки жира расползлись, став больше в диаметре и меньше по толщине. Чем объясняется это интересное явление?

Прежде всего давайте выясним, при каких условиях капелька жира может находиться на поверхности бульона, не растекаясь. Посмотрите на рисунок 1 — капля жидкости *2* (жира) лежит на поверхности жидкости *1* (бульона). Форма капли напоминает чечевицу. Сверху находится среда *3* — смесь воздуха с парами жидкостей *1* и *2*. Три среды (*1*, *2* и *3*) соприкасаются по окружности, ограничивающей каплю. Выделим малый элемент этой окружности (вблизи точки O на рисунке 1) длиной Δl. На него действуют три силы поверхностного натяжения. На границе раздела жидкостей *1* и *2* действует сила $\vec{F}_{12}$, направленная по касательной к границе раздела и равная по модулю

$$|\vec{F}_{12}| = \sigma_{12}\,\Delta l,$$

где σ_{12} — коэффициент поверхностного натяжения на границе сред *1* и *2*. Аналогичные силы $\vec{F}_{13}$ и $\vec{F}_{23}$ действуют на границах раздела сред *1*, *3* и *2*, *3*:

$$|\vec{F}_{13}| = \sigma_{13}\,\Delta l$$

и

$$|\vec{F}_{23}| = \sigma_{23}\,\Delta l.$$

Здесь σ_{13} и σ_{23} — соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения.

Очевидно, что капля будет находиться в равновесии, если сумма всех трех сил равна нулю:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0,$$

или — в проекциях на оси координат X и Y (после подстановки соответствующих абсолютных значений и сокращения на Δl) —

$$\sigma_{13} = \sigma_{12}\cos\theta_1 + \sigma_{23}\cos\theta_2, \qquad (*)$$

$$\sigma_{12}\sin\theta_1 = \sigma_{23}\sin\theta_2.$$

Здесь θ_1 и θ_2 — углы между касательными к поверхности капли жидкости *2* и поверхностью жидкости *1*, их называют *краевыми углами*.

Из равенства (*) видно, что равновесие капли возможно в том случае, если коэффициенты поверхностного натяжения связаны определенным соотношением:

$$\sigma_{13} < \sigma_{12} + \sigma_{23}.$$

Поскольку поверхностные явления в жидкости мало зависят от присутствия над жидкостью газообразной среды, практически можно считать, что

$$\sigma_{13} = \sigma_1 \text{ и } \sigma_{23} = \sigma_2.$$

Величины σ_1 и σ_2 называют коэффициентами поверхностного натяжения жидкостей *1* и *2* соответственно; в нашем случае — это коэффициенты поверхностного натяжения бульона и жира.

Таким образом, капля жира будет плавать на поверхности бульона, не растекаясь, если коэффициент поверхностного натяжения бульона меньше суммы коэффициентов поверхностного натяжения жира и границы раздела бульон — жир:

$$\sigma_1<\sigma_2+\sigma_{12}. \qquad (**)$$

В частном случае, когда капля очень тонкая (почти плоская), углы θ_1 и θ_2 малы ($\theta_1=\theta_2=0$) и условие равновесия капли имеет вид:

$$\sigma_1=\sigma_2+\sigma_{12}.$$

При

$$\sigma_1>\sigma_2+\sigma_{12}$$

не существует значений углов θ_1 и θ_2, для которых выполнялось бы равенство (*). Это означает, что в этом случае жидкость *2* не собирается в каплю на поверхности жидкости *1*, а растекается по ней тонким слоем.

Теперь постараемся объяснить результаты опытов с ложкой бульона. Капли жира плавают на поверхности бульона, значит, выполняется соотношение (**). Почему же при уменьшении бульона в ложке капли расплываются по его поверхности, увеличиваясь в размерах? Что при этом изменяется?

Предлагаем такое объяснение. Коэффициенты поверхностного натяжения жира σ_2 и границы раздела бульон — жир σ_{12} остаются неизменными. Остается допустить, что при выливании части бульона из ложки изменяется коэффициент поверхностного натяжения бульона σ_1. Но бульон (в первом приближении) — это вода. Разве может измениться коэффициент поверхностного натяжения воды, если уменьшить количество воды в сосуде? По-видимому, нет. Правда, бульон — это не просто вода, а вода, покрытая тонким слоем жира. Выливая из ложки бульон, мы выливаем и часть жира, так что толщина слоя жира, покрывающего бульон, уменьшается. Это, очевидно, и приводит к увеличению коэффициента поверхностного натяжения бульона. В ре-

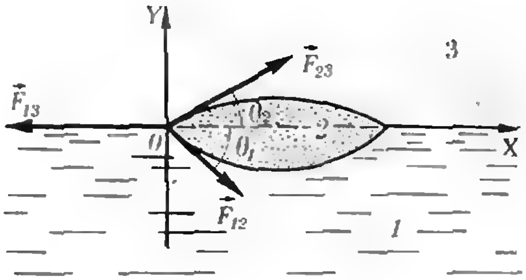


Рис. 1.

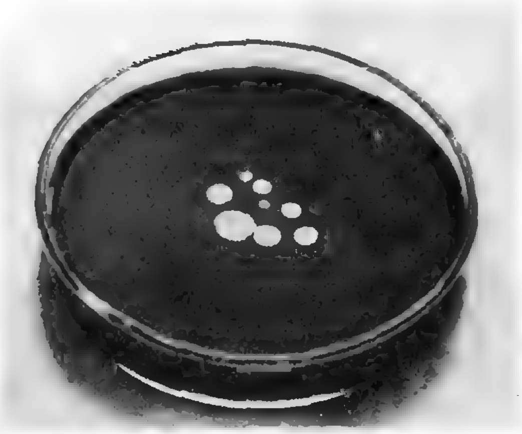


Рис. 2.

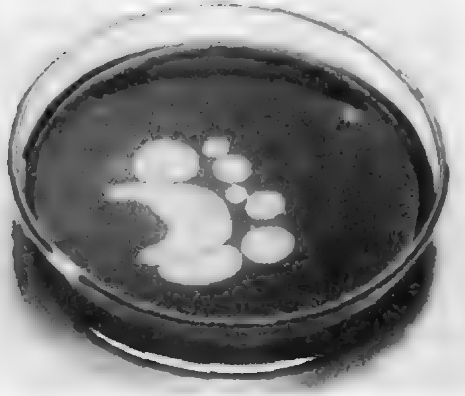


Рис. 3.

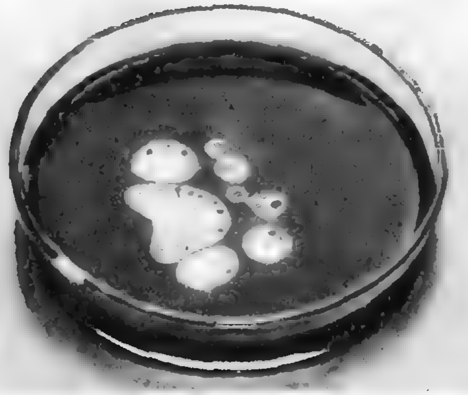


Рис. 4.

зультате капли жира расползаются по поверхности бульона.

Для проверки предлагаем вам самостоятельно провести такой опыт. В чистое блюдце (без следов жира) наберите чистой водопроводной воды. Тонкой пипеткой или трубочкой (можно использовать чистый стержень от шариковой авторучки) капните на поверхность воды чуть-чуть подсолнечного масла. Вы увидите, что первая капля полностью растечется по поверхности воды. Следующие капли уже не растекутся, а образуют чечевицы. Аккуратно вылейте часть воды — капли расползутся по ее поверхности.

В заключение вернемся еще раз к опытам с ложкой бульона. Внимательно наблюдая за поведением капелек жира, вы сможете заметить очень любопытные явления разрывов и восстановления капель.

На рисунках 2—8 представлены фотографии результатов одного из таких экспериментов. В чистую стеклянную чашку мы налили водопроводной воды, подкрашенной синей тушью (не содержащей спирта). Слегка смоченной подсолнечным маслом стеклянной трубкой осторожно коснулись поверхности воды и получили восемь очень маленьких капель (см. рис. 2). Затем резиновой грушей отобрали немного воды из чашки — все капли увеличились в размерах После следующей такой операции капли увеличились еще заметнее, при этом они несколько исказились по форме (из-за течения воды) и на них появились зародыши разрывов (см. рис. 3).

Все дальнейшие изменения происходили самопроизвольно, без постороннего вмешательства. Вначале разрывы в каплях росли, затем сливались в один большой разрыв — капля превращалась в кольцо. Наконец, это кольцо разрывалось и вновь стягивалось в каплю (см. рис. 4—8).

Не правда ли — действительно стоит понаблюдать за ложкой бульона, прежде чем отправить ее в рот!

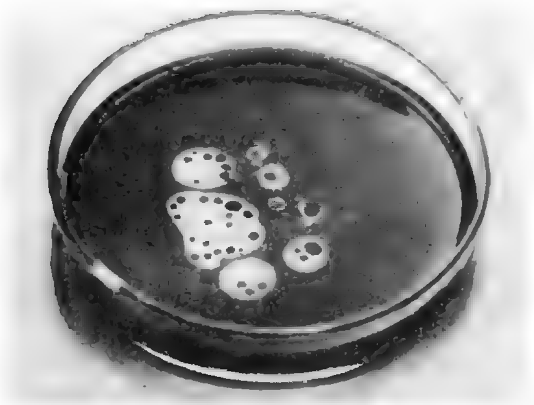


Рис. 5.

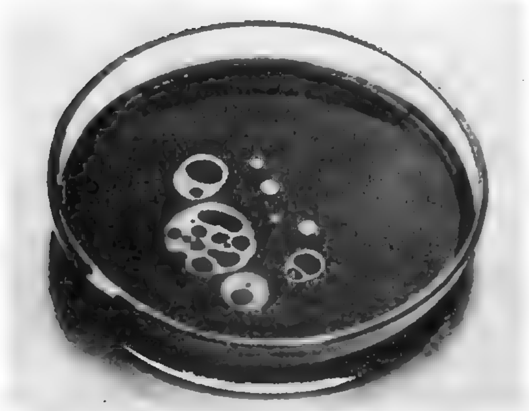


Рис. 6.

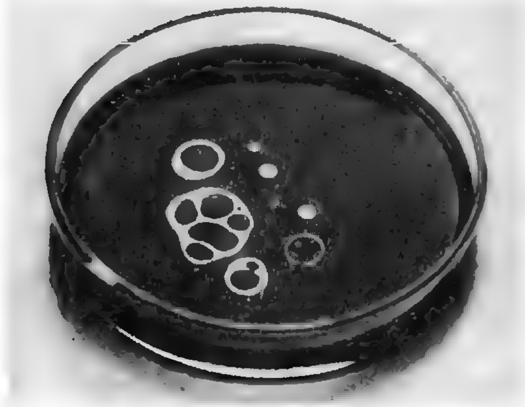


Рис. 7.

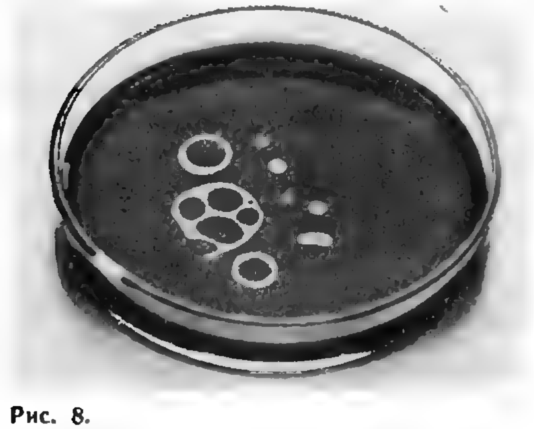


Рис. 8.

А. Лопшиц

Векторное решение аффинных задач

На этом занятии математического кружка мы научимся решать геометрические задачи определенного типа — так называемые *аффинные задачи*. Мы не будем предварительно объяснять, что это за задачи. Надеемся, что, прочитав статью, вы поймете это.

1. Аффинная версия теоремы Морлея

В «Кванте» № 8 за 1978 год (с. 28) рассматривалась следующая замечательная теорема: *если в треугольнике ABC провести трисектрисы углов A, B и C, то точки их пересечения, ближайшие к сторонам, являются вершинами равностороннего треугольника.* А что получится, если трисектрисы заменить *тридианами*, т. е. прямыми, проходящими через вершины треугольника и делящими противоположные его стороны на три равные части? Оказывается... Впрочем, настойчивый читатель сам закончит формулировку теоремы, выяснит свойства треугольника $P_{14}P_{36}P_{25}$ (обозначения легко сообразить, глядя на рисунок 1), убедится в том, что стороны шестиугольника $P_{13}P_{46}P_{15}P_{24}P_{35}P_{26}$ параллельны сторонам исходного треугольника ABC, и, наконец, докажет, что середины сторон этого шестиугольника и точки P_{36}, P_{23}, P_{25}, P_{45}, P_{14}, P_{61} лежат на трех прямых. Если вам пока не понятно, как решать эту задачу, — не расстраивайтесь. Прочитав статью, вы несомненно сможете это сделать. Начнем с более простой задачи.

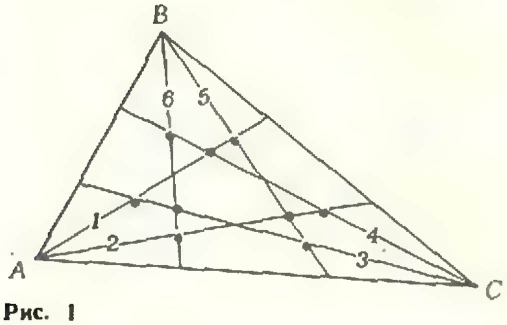


Рис. 1

2. Аффинная задача Льюиса Кэррола

Предпоследняя задача сборника «Полуночные задачи, придуманные в часы бессонницы» *) требует вписать в данный треугольник такой шестиугольник, чтобы его противоположные стороны были равны и параллельны, три из них лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника. Решение, приведенное Кэрролом, использует средства, привычные для школьника тех давних времен (восьмидесятые годы прошлого столетия). Мы рассмотрим более общую формулировку задачи Кэррола и решим ее, используя средство, знакомое современному школьнику уже с седьмого класса, — векторы. Конечно, задачу Кэррола совсем несложно решить и без их помощи. Но именно потому, что она несложная, на ней хорошо учиться!

Мы решим задачу Кэррола в следующей формулировке: *на прямых, содержащих стороны BC, CA и AB треугольника ABC, расположить, соответственно, точки A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 так, чтобы противоположные вершины шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$* (т. е. точки A_1 и B_2, A_2 и C_1, B_1 и C_2) *были симметричны относительно точки P, произвольно заданной в плоскости треугольника ABC* (рис. 2) **). (Такой шестиугольник называют *центральным*.)

---

*) Льюис Кэррол. *История с узелками* (М., «Мир», 1973).

**) В этом и состоит бо́льшая общность нашей формулировки — Кэррол считает, что точка P лежит внутри треугольника ABC.

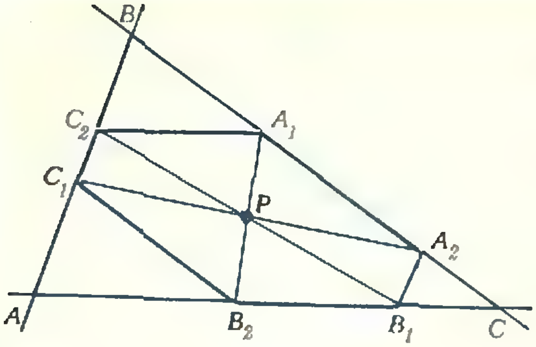


Рис. 2.

3. Разложение по векторам

Нам понадобится такой факт: *если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, лежащий в той же плоскости, что и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, можно представить в виде*

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$$

(здесь α и β — действительные числа), *причем такое представление единственно* (ср. с теоремой из § 23 «Геометрии 9»).

Мы будем называть это представление *разложением вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$* (рис. 3).

Заметим, что если O — фиксированная точка плоскости, то любой точке M плоскости можно сопоставить вектор $\overrightarrow{OM}$. Точку O называют *полюсом*, вектор $\overrightarrow{OM}$ — радиус-вектором точки M. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ однозначно определяет «свою» точку M; мы будем для краткости обозначать его через $\overline{M}$.

4. Решение задачи Кэррола

Выберем в качестве полюса вершину C данного треугольника.

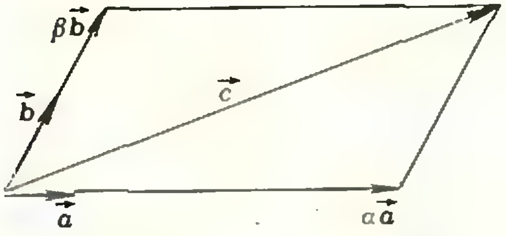


Рис. 3.

Радиус-вектор данной точки P разложим по векторам $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$\overline{P}=\alpha\overline{A}+\beta\overline{B}.$$

Поскольку искомая точка A_1 лежит на прямой CB (рис. 2),

$$\overline{A}_1=x\overline{B},$$

где x — та доля, которую точка A_1 «отсекает» от направленного отрезка $\overrightarrow{CB}$. Слово «отсекает» мы взяли в кавычки потому, что точка A_1 не обязательно лежит внутри отрезка CB; она может «отсекать» даже отрицательную «долю» (в этом случае $x<0$). Аналогичным образом для искомой точки B_2 получаем

$$\overline{B}_2=y\overline{A}$$

(здесь y — доля, которую «отсекает» искомая точка от направленного отрезка $\overrightarrow{CA}$). Из того, что точка P является серединой отрезка A_1B_2, вытекает (§ 22 «Геометрии 9»)

$$\overline{P}=\frac{1}{2}(\overline{A}_1+\overline{B}_2),$$

то есть

$$\alpha\overline{A}+\beta\overline{B}=\frac{1}{2}(x\overline{B}+y\overline{A}),$$

откуда

$$x=2\beta,\quad y=2\alpha$$

и, следовательно,

$$\overline{A}_1=2\beta\overline{B},\quad \overline{B}_2=2\alpha\overline{A}.$$

Эти равенства позволяют построить точки A_1 и B_2.

Найти точки B_1 и C_2 немного труднее. Если точка B_1 отсекает долю z от направленного отрезка $\overrightarrow{CA}$, то

$$\overline{B}_1=z\overline{A}.$$

Составим теперь выражение для радиус-вектора точки C_2, отсекающей долю u от направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AC_2}=u\overrightarrow{AB}.$$

Воспользуемся тем, что $\overrightarrow{AC_2}=\overline{C}_2-\overline{A}$; $\overrightarrow{AB}=\overline{B}-\overline{A}$. Поэтому $u(\overline{B}-\overline{A})=\overline{C}_2-\overline{A}$ и, следовательно, $\overline{C}_2=\overline{A}+u(\overline{B}-\overline{A})=(1-u)\overline{A}+$

$+u\overline{B}$. По условию

$$P=\frac{1}{2}(\overline{B}_1+\overline{C}_2),$$

то есть

$$\alpha\overline{A}+\beta\overline{B}=\frac{1}{2}[z\overline{A}+(1-u)\overline{A}+u\overline{B}]$$

и, таким образом,

$$u=2\beta,\ z=2\alpha+2\beta-1$$
$$\overline{B}_1=(2\alpha+2\beta-1)\overline{A},$$
$$\overline{C}_2=(1-2\beta)\overline{A}+2\beta\overline{B}.$$

Выполнив заключительный этап самостоятельно, читатель убедится, что

$$\overline{A}_2=(2\alpha+2\beta-1)\overline{B},$$
$$\overline{C}_1=2\alpha\overline{A}+(1-2\alpha)\overline{B}.$$

Мы обнаружили, таким образом, что задача Кэролла имеет решение (как бы ни была задана точка P!) и это решение единственное:

$$\begin{cases}\overline{A}_1=2\beta\,\overline{B},\ \overline{A}_2=(2\alpha+2\beta-1)\,\overline{B}\\ \overline{B}_1=(2\alpha+2\beta-1)\,\overline{A},\ \overline{B}_2=2\alpha\overline{A}\\ \overline{C}_1=2\alpha\,\overline{A}+(1-2\alpha)\,\overline{B},\ \overline{C}_2=\\ \qquad=(1-2\beta)\,\overline{A}+2\beta\overline{B}\end{cases}\qquad(1)$$

5. Отступление от задачи Кэррола.

Вывод формулы для $\overline{C}_2$ фактически доказывает следующий общий результат: если $\overline{A}$ и $\overline{B}$—радиус-векторы произвольных точек A и B (относительно произвольно выбранного полюса C!), то радиус-вектор $\overline{M}$ точки, принадлежащей прямой AB и отсекающей «долю» λ от направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, то есть точки M, для которой $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$ (рис. 4), определяется по простой и красивой формуле:

$$\overline{M}=(1-\lambda)\overline{A}+\lambda\overline{B}.\qquad(!!)$$

Эту формулу следует запомнить — она с большой пользой применяется при решении многих геометрических задач *).

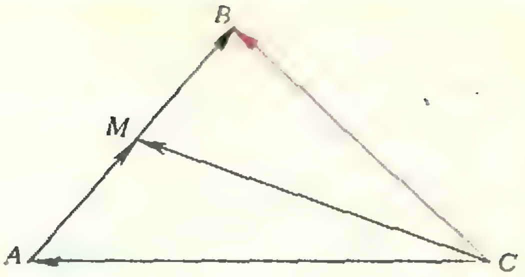


Рис. 4.

Число λ называют *аффинной координатой* точки M (относительно координатной системы, заданной началом A и масштабным вектором $\overrightarrow{AB}$). Такое название вполне оправдано: ведь если заданы координатная система и произвольное число λ, то точка M на прямой AB определена однозначно:

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}.$$

Вернемся к формуле

$$\overline{P}=\alpha\overline{A}+\beta\overline{B},$$

с помощью которой мы записали радиус-вектор точки P, расположенной в плоскости треугольника ABC. Она показывает, что задание произвольной упорядоченной пары чисел α, β определяет точку P в плоскости ABC, если задана точка C и векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ (рис. 5).

Эти числа называются *аффинными координатами* точки P (в координатной системе, начало которой — точка C, а масштабные векторы— $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$). Легко видеть, что точки плоскости ABC, у которых вторая координата равна нулю, лежат на прямой CA; поэтому ее называют *первой координатной осью*. Аналогично, точки, у которых первая координата равна нулю, лежат на

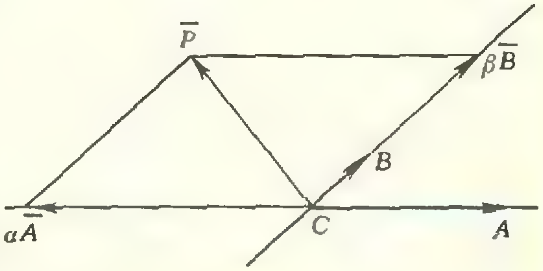


Рис. 5.

---

*) См. статью В. Болтянского «Три точки на одной прямой» («Квант», 1978, № 10) и статью Н. Габовича «Векторы помогают на экзамене» («Квант», 1979, № 1).

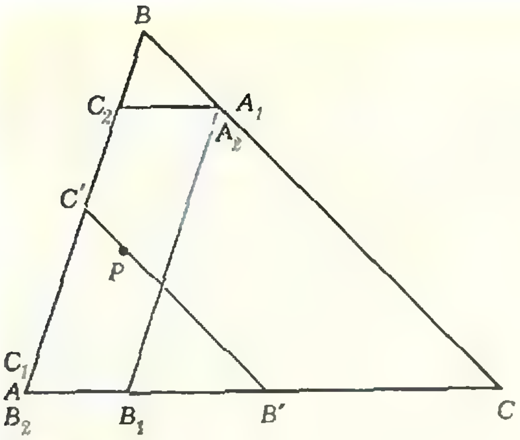


Рис. 6.

прямой CB; поэтому ее называют *второй координатной осью.*

6. Частные случаи задачи Кэррола

1) Если точка P есть *центроид* треугольника ABC (т. е. пересечение его медиан), то (§ 22 «Геометрии 9»)

$$\vec{OP}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right)$$

и, следовательно,

$$\overline{P}=\frac{1}{3}\overline{A}+\frac{1}{3}\overline{B},$$

то есть

$$\alpha=\frac{1}{3},\quad \beta=\frac{1}{3}.$$

Подставив эти значения в формулы (1), получим $\overline{A}_1=\frac{2}{3}\overline{B}$,

$$\overline{A}_2=\frac{1}{3}\overline{B},\ \overline{B}_1=\frac{1}{3}\overline{A},\ \overline{B}_2=\frac{2}{3}\overline{A},$$

$$\overline{C}_1=\frac{2}{3}\overline{A}+\frac{1}{3}\overline{B},\ \overline{C}_2=\frac{1}{3}\overline{A}+\frac{2}{3}\overline{B}$$

и, следовательно (в силу сказанного в предыдущем пункте), вершины найденного шестиугольника отсекают от сторон треугольника $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

2) Пусть P — какая-либо точка отрезка $B'C'$, соединяющего середины B' и C' сторон CA и AB. Так как эта точка расположена внутри отрезка $B'C'$, она отсекает от него долю $0<\lambda<1$ и, в силу формулы (!!),

$$\overline{P}=(1-\lambda)\overline{B'}+\lambda\overline{C'}$$

$$\overline{P}=\frac{1-\lambda}{2}\overline{A}+\frac{\lambda}{2}(\overline{A}+\overline{B})$$

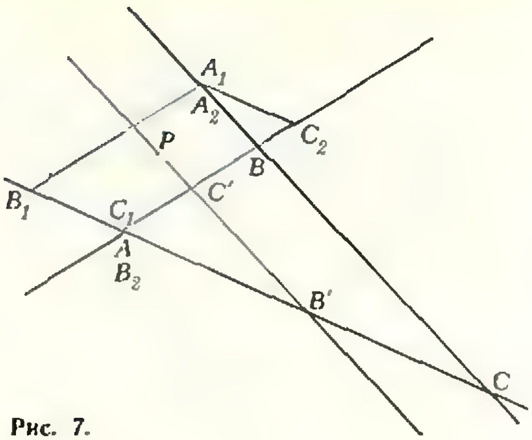


Рис. 7.

$$\overline{P}=\frac{1}{2}\overline{A}+\frac{\lambda}{2}\overline{B},$$

то есть

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{\lambda}{2}.$$

Подставив эти значения в формулы (1), получим

$$\overline{A}_1=\lambda\overline{B},\ \overline{A}_2=\lambda\overline{B},\ \overline{B}_1=\lambda\overline{A},\ \overline{B}_2=\overline{A},$$

$$\overline{C}_1=\overline{A},\ \overline{C}_2=(1-\lambda)\overline{A}+\lambda\overline{B}.$$

Таким образом, в этом случае шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ вырождается в параллелограмм $A_1A_1B_1AAC_2=A_1B_1AC_2$ (рисунок 6 сделан для случая, когда $\lambda=\frac{4}{5}$).

3) Если точка P расположена произвольным образом на прямой $B'C'$ вне отрезка $B'C'$, то ее аффинная координата λ (в координатной системе, имеющей начало в точке C' и масштабный вектор $\vec{B'C'}$) есть либо положительное число, большее единицы, либо отрицательное число. Радиус-векторы вершин построенного шестиугольника определяются, конечно, теми же формулами, что и в общем случае, однако эти вершины — в этом самостоятельно убедится читатель — хотя и расположатся на прямых AB, BC и CA, будут вне отрезков AB, BC, CA (на рисунке 7 $\lambda=\frac{5}{4}$).

4) Если точка P выбрана в середине A' отрезка BC, то есть если $\overline{P}=\frac{1}{2}\overline{B}$ и, следовательно, $\alpha=0,\ \beta=\frac{1}{2}$, то, в силу формул

(1) ,$\overline{A}_1=\overline{B}$, $\overline{A}_2=\overline{C}$, $\overline{B}_1=\overline{C}$, $\overline{B}_2=\overline{C}$, $\overline{C}_1=\overline{B}$, $\overline{C}_2=\overline{B}$. Таким образом, в этом случае шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ вырождается в отрезок $BCCCBB=BC$.

Пусть читатель самостоятельно построит чертеж, соответствующий случаям, когда $P=C$, $P=A'$ или P делит пополам отрезок AC'.

7. Не ошибся ли Кэррол?

Последняя строка в решении, которое приводит Кэррол, гласит: «Если точка P лежит вне треугольника $A'B'C'$, то задача неразрешима» *). Но мы ведь видели, что задача имеет решение (и притом единственное) для любого расположения точки P в плоскости ABC!

Объяснение этого расхождения заключается вот в чем:

Кэррол считает (хотя явно этого не говорит), что шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ только тогда вписан в треугольник ABC, когда его стороны A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 расположены внутри сторон BC, CA, AB соответственно. Но если включить в условие нашей задачи это дополнительное ограничение, то, в частности, точка A_1 должна лежать внутри отрезка CB и, в силу первой формулы системы (1), $2\beta<1$, то есть $\beta<\frac{1}{2}$, а это означает, что точка P должна лежать по другую сторону от прямой $A'C'$, чем вершина B.

Аналогичным образом, она должна лежать по другую сторону от прямой $A'B'$, чем точка C, и по другую сторону от прямой $B'C'$, чем точка A. Отсюда и следует, что точка P должна лежать внутри треугольника $A'B'C'$!

Приведем две задачи, связанные с задачей Кэррола; их векторное решение очень просто, а геометрическое...

1) Легко проверить, что в случае 1 пункта 6 центроиды треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ совпадают. Существуют ли другие вписанные центральные шестиугольники, обладающие этим свойством?

2) Легко проверить, что в случае 1 пункта 6 площади треугольников PA_1A_2, PA_2B_1 и PB_1B_2 равны между собой; в этом случае центральный шестиугольник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ называют *аффинно-правильным*. Существуют ли другие аффинно-правильные шестиугольники, вписанные в заданный треугольник?

Решение использует следующую красивую формулу *) для вычисления площади треугольника $P_1P_2P_3$, вершины которого заданы равенствами $\overline{P}_i=\alpha_i\overline{A}+\beta_i\overline{B}$ $(i=1, 2, 3)$ ($\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ — заданные векторы):

$$S_{\overline{P_1P_2P_3}}=\left\{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \alpha_1 & \beta_1\end{vmatrix}\right\}S_{\overline{CAB}}.$$

8. И все же — что означает слово «аффинный»?

Заметил ли читатель, что в нашей статье мы ни разу не употребили слово «длина»? Мы не воспользовались и понятием «угол».

Например, складывая векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$, не лежащие на одной прямой, мы пользуемся только понятием параллельности: через конец M первого слагаемого $\overrightarrow{CM}$ мы проводим прямую, параллельную прямой CN; через конец N второго слагаемого $\overrightarrow{CN}$ мы проводим прямую, параллельную прямой CM; точка D пересечения этих прямых есть конец вектора $\overrightarrow{CD}$, который мы и называем *суммой* векторов $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$.

А как же складывать — не используя понятия длины! — векторы $\overrightarrow{CT}$ и $\overrightarrow{CU}$, расположенные на одной прямой? Как умножить вектор $\overrightarrow{CM}$ на произвольное действительное число λ? Как доказать при «аффинном» определении (т. е. определении, не использующем понятий длины и угла, а опирающемся только на понятие параллельности) правила векторной алгебры, которыми мы щедро пользовались во всем нашем изложении? Мы не будем отвечать на эти вопросы, а ограничимся тем, что предложим читателю решить, пользуясь только простейшими, «аффинными», операциями (сложение векторов и умножение вектора на число), несколько «аффинных» задач.

---

*) «История с узелками», с. 186. Однако доказательства этой неразрешимости Кэррол не приводит! Отметим тут же, что, хотя разрешимость своей задачи для случая, когда точка P лежит внутри треугольника $A'B'C'$, Кэррол и доказывает, но вопрос о единственности решения он не рассматривает!

*) См. статью «Площади ориентированных фигур» («Квант», 1978, № 3).

Задачи

1. Докажите, что, как бы ни были расположены точки A, B, C и D, три отрезка, соединяющие середины отрезков AB и CD, AC и BD, AD и BC, имеют общую точку.

2. На прямых AB и CD, произвольно расположенных в пространстве, лежат точки A' и C', отсекающие, соответственно, от отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одну и ту же долю. На прямых BC и DA лежат точки B' и D', отсекающие от отрезков $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ одну и ту же долю. Докажите, что прямые $A'C'$ и $B'D'$ пересекутся.

3. Семь точек A_i ($i=1, 2, \ldots, 7$) произвольно расположены в пространстве, P — произвольная точка. Пусть B_{ijk} — центроид системы точек A_i, A_j, A_k, B_{lmnp} — центроид системы остальных точек (индексы i, j, k, l, m, n, p все различны), φ_{ijk} — прямая, проходящая через точку B_{ijk} параллельно прямой PB_{lmnp}, ψ_{lmnp} — прямая, проходящая через точку B_{lmnp} параллельно прямой PB_{ijk}. Докажите, что 1) все прямые φ_{ijk} пересекаются в одной точке; 2) все прямые ψ_{lmnp} пересекаются в одной точке.

4. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC расположите, соответственно, точки C', A', B' так, чтобы центроиды треугольников $A'B'C'$ и ABC совпали.

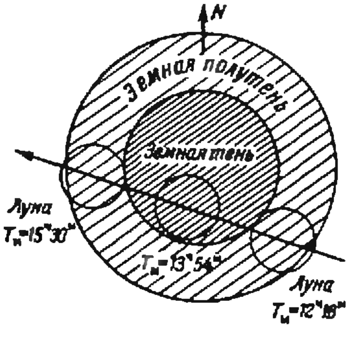
5. Докажите, что из всех треугольников $A'B'C'$, вписанных в треугольник ABC так, что центроиды треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, наименьшая площадь будет у того, вершины которого делят стороны треугольника ABC пополам.

6. Каждая сторона четырехугольника $ABCD$ разделена на три равные части. Через те две точки деления сторон AB и AD, которые ближе других расположены к вершине A, проведена прямая. Аналогичным образом, через точки деления, ближайшие к вершинам B, C, D, проведены еще три прямые. Докажите, что центр тяжести четырехугольника, образованного этими четырьмя прямыми, совпадает с центром тяжести четырехугольника $ABCD$.

Полное лунное затмение 6 сентября 1979 года

Все фазы этого затмения будут видны в крайних восточных и северо-восточных районах Советского Союза, расположенных к востоку от линии, проходящей примерно от Хабаровска и Николаевска-на-Амуре к Охотску и Восточно-Сибирскому морю. К западу от этой линии Луна взойдет в частном затмении, а западнее линии, идущей от Ерофея Павловича через Алдан, Якутск, Сангар и Верхоянск к Новосибирским островам — уже в полной фазе затмения. Западнее Улан-Удэ, Баргузина, Витима и Суханы полного затмения видеть нельзя, так как Луна там взойдет после его окончания.

Во время затмения Луна будет находиться в созвездии Водолея и пройдет сквозь южную зону земной тени (см. рисунок; буквой N обозначено направление к северному полюсу мира, то есть примерно к Полярной звезде). Наибольшая фаза полного затмения $\Phi_m=1.10$.



Ниже приведены моменты затмения по московскому времени ($T_м$):

начало
частного затмения $12^ч\ 18^м$
начало
полного затмения $13^ч\ 31^м$
наибольшая фаза $13^ч\ 54^м$
окончание
полного затмения $14^ч\ 17^м$
окончание
частного затмения $15^ч\ 30^м$

Чтобы получить те же моменты по местному времени, нужно к указанным значениям $T_м$ прибавить разность в целых часах между местным и московским временем.

М. Дагаев

Окружность девяти точек

(*см. 4 с. обложки*)

Построим произвольный треугольник ABC и проведем в нем высоты и медианы. На рисунке 1 основания высот (точки D, E, F) и основания медиан (точки K, P, G) выделены красным цветом. Оказывается, все эти точки лежат на одной окружности. Впервые это заметил великий Эйлер. Поэтому ее часто называют *окружностью Эйлера*. Кроме указанных шести точек на этой же окружности лежат середины L, M, N отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника с его вершинами. Поэтому иногда ее называют *окружностью девяти точек*.

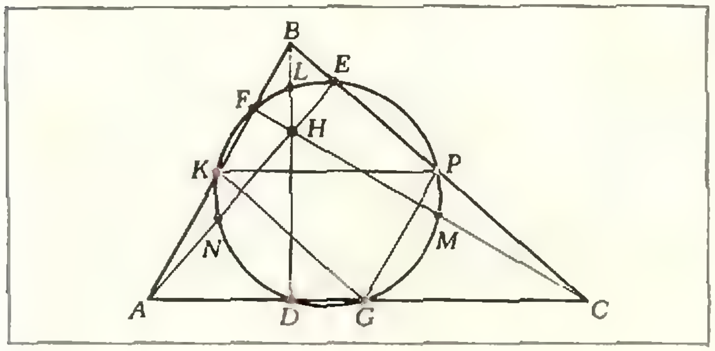


Рис. 1.

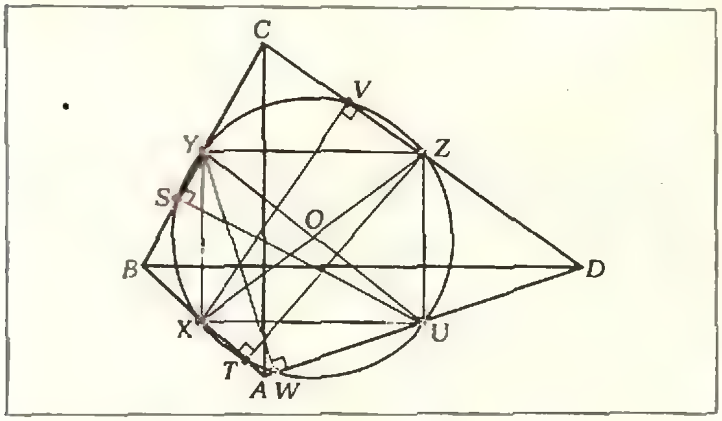


Рис. 2.

Чтобы все это доказать, рассмотрим произвольный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. На рисунке 2 вы видите выпуклый четырехугольник $ABCD$, но, вообще говоря, он может быть невыпуклым и даже самопересекающимся. Рассмотрим середины его сторон X, Y, Z, U. Легко видеть, что они являются вершинами прямоугольника (докажите это). Следовательно, они лежат на одной окружности, а XZ и YU — ее диаметры. Опустим из этих точек перпендикуляры XV, YW, ZT и US на противоположные стороны четырехугольника или их продолжения. Ясно, что точки V, T, W и S лежат на той же окружности: действительно, например, углы XVZ и XTZ — прямые.

Теперь мы можем доказать, что на рисунке 1 точки D, E, F, K, P и G лежат на одной окружности. На нем, при пристальном рассмотрении, можно обнаружить три невыпуклых четырехугольника $AHBC$, $ABHC$, $ABCH$ с перпендикулярными диагоналями. Например, в четырехугольнике $AHBC$ такими диагоналями служат отрезки HC и AB. Покажем с помощью этого четырехугольника, что точки E, P, D и G действительно принадлежат одной окружности. Точка P — середина стороны BC, а точка E — основание перпендикуляра, проведенного из нее к противоположной стороне AH. Аналогично, точка D — основание перпендикуляра, проведенного из точки G, середины стороны AC, к противоположной стороне BH того же четырехугольника. Точно так же, рассматривая четырехугольник $ABCH$, убеждаемся, что и точка F лежит на той же окружности, и т. д.

Легко сообразить, что радиус окружности Эйлера равен половине радиуса окружности, описанной около треугольника ABC. Попробуйте доказать, что центр окружности Эйлера делит пополам отрезок, соединяющий центр описанной окружности и ортоцентр H.

В. Березин

Наша обложка

Памятник нулю

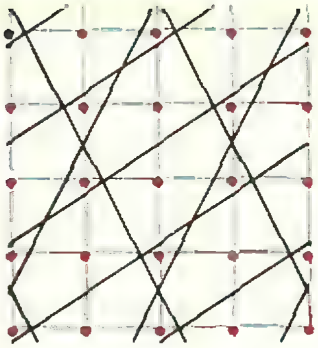
«Из пунктов *A* и *B*, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста». Кому не знакомы традиционные школьные задачи «на составление уравнений», начинающиеся подобной фразой? Здесь все понятно: два пункта — это две точки на изображающей шоссе линии, и длина участка линии между точками является расстоянием между пунктами.

Однако давайте задумаемся: что на самом деле означают слова «расстояние по шоссе между двумя городами»? Ведь реальный город — это далеко не точка... Чтобы измерить расстояние от города, очевидно, надо не только иметь единицу длины, но еще установить «начало отсчета», условиться, от какого места будет мериться расстояние. В СССР в крупных городах за точку, от которой (или до которой) измеряется расстояние, принимается здание почтамта. Например, все расстояния от Москвы по шоссейным дорогам исчисляются от здания Московского почтамта (ул. Кирова, д. 26). Поэтому «расстояние от Москвы до Ленинграда» есть расстояние между Московским и Ленинградским почтамтами.

А вот в Венгерской народной республике все расстояния отмеряются от специального каменного изваяния, установленного в центре Будапешта, недалеко от красивейшего Цепного моста. Цифра «0» и буквы «км» на пьедестале означают начало всех дорог по Венгрии. Этот «Нуль», как называют его будапештцы, — одна из достопримечательностей столицы ВНР; вы видите его на снимке, на второй странице обложки.

Н. Х.

Многоугольники и точки

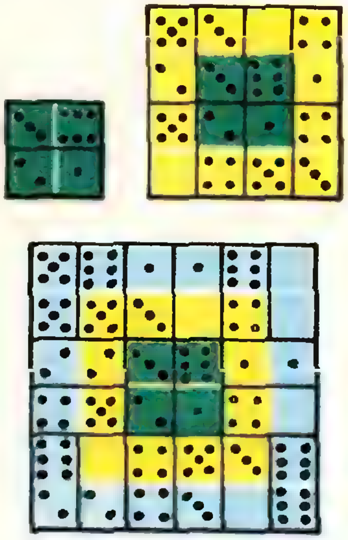


На рисунке изображена плоскость с единичной решеткой. На плоскости проведены прямые, не проходящие через узлы единичной решетки, разбивающие всю плоскость на треугольники и пятиугольники, причем каждый треугольник и каждый пятиугольник содержит один узел единичной решетки.

Несложно разбить плоскость прямыми на параллелограммы, каждый из которых содержит один узел единичной решетки. Каким образом еще можно разбить плоскость прямыми на фигуры, каждая из которых содержит один узел единичной решетки?

А. Епифанов

Домино-пасьянс



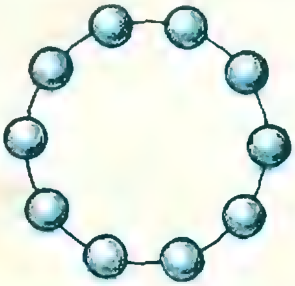
Полный комплект косточек домино уложен в три квадрата: 2×2; 4×4 и 6×6 (см. рисунок). При этом маленький квадрат содержится в среднем и большом, а средний — в большом квадрате. Средний квадрат — магический (магическая сумма равна 12). Можно ли аналогичным образом разложить косточки домино так, чтобы магическим оказался большой квадрат? Или большой и средний?

Л. Мочалов

Ожерелье из шариков

Напишите на шариках числа от 1 до 10 так, чтобы никакая сумма двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7.

Л. Мочалов



Где ошибка?

Теорема. *Если две плоскости симметричны относительно начала координат O, то они обе проходят через точку O.*

«Доказательство». Пусть плоскости α, β симметричны относительно начала координат O. Если уравнение плоскости α

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (1)$$

то уравнение плоскости β

$$-ax-by-cz+d=0. \qquad (2)$$

Сложив (1), (2), получаем $d=0$. Значит, $(0;\ 0;\ 0)$ является решением обоих уравнений, то есть точка O принадлежит обеим плоскостям. Где ошибка?

В. Колмыков

задачник кванта

Задачи

М576—М580; Ф588—Ф592

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1979 года В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М576, М577 или «Ф588». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом.

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

В этом номере Задачник составлен из задач, предлагавшихся на XIII Всесоюзной олимпиаде школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась соответствующая задача.

М576. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар (A; B) этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$. (8)

В. Произволов

М577. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами

а) 8×8 клеток,

б) $n\times n$ клеток

для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.) (8; 10)

Н. Васильев

М578. Найти x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a, \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b \end{cases}$$

(a и b — данные числа). (8; 10)

В. Гутенмахер

М579. Докажите, что для любых чисел x_1, $x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполнено неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2\geqslant 4\,(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2). \tag{9}$$

А. Плоткин, С. Фомин

М580. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A — враг B, то B — враг A.) (8—10)

О. Бородин

Ф588. Рисунок 1 (вид сверху) сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от трех паровозов, которые движутся по прямолинейному участку железнодорожного пути. Скорость первого паровоза $|\vec{v}_1|=50$ км/ч, а второго — $|\vec{v}_2|=70$ км/ч,

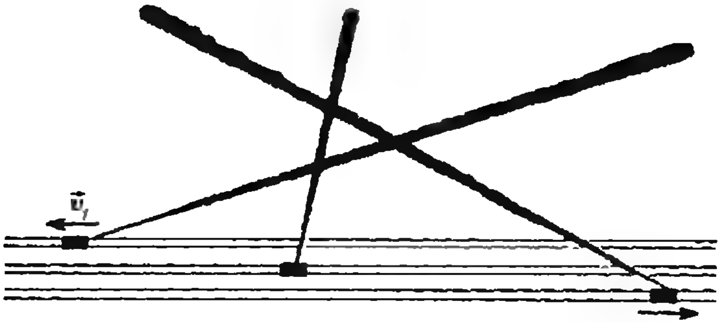


Рис. 1.

направления их движения указаны на рисунке стрелками. Какова скорость третьего паровоза? (9)

И. Слободецкий

Ф589. В цилиндре объемом 10 л, закрытом поршнем и помещенном в термостате с температурой 40°С, находится по 0,05 моля двух веществ. Определить массу жидкости в цилиндре после изотермического сжатия, вследствие которого объем под поршнем уменьшается в 3 раза. Давление насыщенных паров первой жидкости при температуре 40°С равно $0{,}7\cdot10^4$ Па, второй — $1{,}7\cdot10^4$ Па. Начертить изотерму сжатия. Молярная масса первой жидкости составляет $1{,}8\cdot10^{-2}$ кг/моль, второй — $4{,}6\cdot10^{-2}$ кг/моль. (10)

М. Ваврух

Ф590. При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель потребляет ток $I_0=100$ А, при этом КПД двигателя равен $\eta=0{,}9$ *). При движении трамвая по наклонному участку пути вниз с той же скоростью ток в двигателе равен нулю (двигатель выключен). Какой ток будет потреблять двигатель при движении трамвая по тому же участку пути вверх с той же скоростью? (10)

В. Скороваров

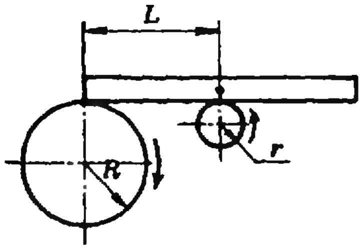


Рис. 2

Ф591. Два цилиндра различных радиусов вращаются в противоположные стороны вокруг горизонтальных параллельных осей с угловой скоростью $\omega_1=\omega_2=\omega=2$ рад/с. Расстояние по горизонтали между осями $L=4$ м. В момент времени $t=0$ на цилиндры перпендикулярно осям кладут балку так, что она находится в горизонтальном положении и одновременно касается обеих поверхностей вращения, а ее центр масс расположен точно над осью цилиндра меньшего радиуса ($r=0{,}25$ м), как указано на рисунке 2. Рассчитать и проиллюстрировать графически зависимость горизонтального смещения балки от времени, начиная с момента $t=0$. Коэффициент трения $\mu=0{,}05$, ускорение свободного падения принять равным $g=10{,}0$ м/с^2. (10)

Д. Футорский

Ф592. Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится 5 л воды при температуре $t_1=60$°C, во втором — 1 л воды при температуре $t_2=20$°C. Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, когда во втором сосуде установилось тепловое равновесие, из него в первый сосуд отлили столько воды чтобы ее объемы в сосудах стали равны первоначальным. После этих операций температура воды в первом сосуде стала равной $t=59$°C. Сколько воды переливали из первого сосуда во второй и обратно? (8)

---

*) КПД трамвайного двигателя зависит от силы тока.

А. Зильберман

Решения задач

М521—М527; Ф533—Ф536

М521. *Обозначим через* a_n *целое число, ближайшее к* $\sqrt{n}$. *Найдите сумму* $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots$ $\ldots+\frac{1}{a_{1980}}$.

По аналогии с целой частью числа обозначим через $]a[$ целое число, ближайшее к a. Например, $\left]\frac{5}{4}\right[=1$, $\left]\frac{7}{4}\right[=2$, $]\sqrt{3}[=2$ и так далее.

Пока все ясно. А как быть с числом $\frac{3}{2}$? Чему равно $\left]\frac{3}{2}\right[$: 1 или 2?

Мы видим, что понятие «ближайшее целое» для чисел вида $\frac{m}{2}$, где m — нечетное число — нуждается в уточнении. Однако для решения задачи это уточнение не требуется, поскольку при любом натуральном n число $\sqrt{n}$ — либо натуральное, либо иррациональное (докажите!).

Вычислим первые члены последовательности $a_1=]\sqrt{1}[$, $a_2=]\sqrt{2}[,\ldots$: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4,... Мы замечаем, что в этой последовательности 1 встречается 2 раза, 2 встречается 4 раза, 3—6 раз. Поэтому естественно предположить, что в нашей последовательности каждое натуральное число k встречается $2k$ раз. Для доказательства этого предположения нам достаточно показать, что при любом натуральном k неравенство $k-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<k+\frac{1}{2}$ имеет ровно $2k$ решений в натуральных числах.

Возведя каждую из частей этого неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$k^2-k+\frac{1}{4}<x<k^2+k+\frac{1}{4}.$$

Это неравенство имеет ровно $2k$ решений: k^2-k+1, k^2-k+2, ..., k^2+k, что и требовалось доказать.

Теперь мы легко можем вычислить сумму $S=\frac{1}{]\sqrt{1}[}+$ $+\frac{1}{]\sqrt{2}[}+\ldots+\frac{1}{]\sqrt{1980}[}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{44}+\ldots+\frac{1}{44}\right)}_{88\text{ раз}}$.

Так как сумма чисел в каждой круглой скобке равна 2, $S=88$.

Г. Гуревич

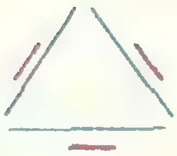


Рис. 1.

М522. *На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?*

Ответ: не всегда. На рисунке 1 изображены шесть отрезков, концы которых нельзя соединить требуемым образом. В самом деле, каждый из шести концов коротких отрезков может быть соединен лишь с концом «своего» длинного отрезка, а поскольку свободных концов должно остаться два, то у одного из коротких отрезков оба его конца должны быть соединены отрезками с концами длинного. В результате получится замкнутая ломаная из четырех звеньев — противоречие.

В. Произволов

◆

М523. *Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.*

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

а) Пусть n нечетно. В этом случае доску размером $n \times n$, кроме углового поля, можно покрыть костями домино 2×1 (рис. 2, *а*). Пусть тот, кто ходит вторым, следует такой стратегии: ставит фишку на второе поле того домино, на первое поле которого поставил фишку начинающий игру. Ясно, что, поступая таким образом, второй игрок выиграет.

Пусть n четно. Тогда доску размером $n \times n$ можно покрыть костями домино целиком (рис. 2, *б*). В этом случае начинающий игрок, считая, что «нулевым» ходом его партнер поставил фишку на угловое поле доски, должен следовать описанной выше стратегии второго игрока. Ясно, что теперь победит начинающий игру.

б) Если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним, то выигрывает всегда начинающий. Для четного n это доказывается как выше (доска сразу разбивается на «доминошки», и первый игрок должен поступать как и раньше). Пусть n нечетно. Тогда начинающий может «отрезать» угловое поле доски (второй игрок туда все равно не попадет, так как оно неподходящего цвета — см. рис. 2, *в*), после чего разбить оставшуюся часть доски на «доминошки» и снова поступать согласно описанной стратегии.

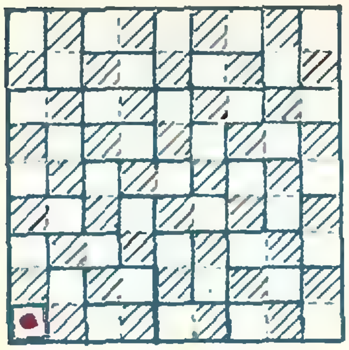


Рис. 2а.

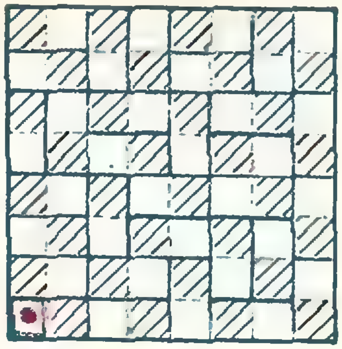


Рис. 2б.

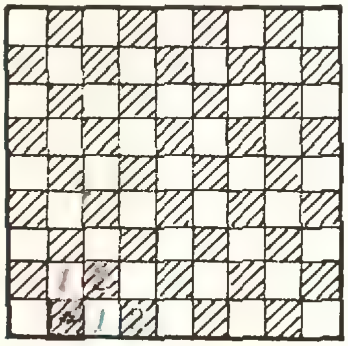


Рис. 2в.

Предлагаем читателю разобраться в том, кто выигрывает, если первоначально фишка стоит на каком-то ином поле.

Н. Нецветаев

◆

М524. *Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.*

Если $1978^m - 1$ при некотором натуральном m делится на $1000^m - 1$, то при этом m разность $(1978^m - 1) - (1000^m - 1) = 1978^m - 1000^m$ также делится на $1000^m - 1$.

$$1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m).$$

Поскольку $1000^m - 1$ — число нечетное, на $1000^m - 1$ должна делиться разность $989^m - 500^m$. Но это невозможно, так как для любого натурального m

$$989^m-500^m<1000^m-1.$$

Полученное противоречие решает задачу.

Некоторые наши читатели получали утверждение задачи, доказывая, что максимальная степень тройки, на которую делится число 1000^m-1, больше, чем максимальная степень тройки, на которую делится число 1978^m-1

С. Конягин

◆

М525. *Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.*

Проведем через два противоположных ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ параллельные плоскости Π_1 и Π_2 (рис. 3). Пусть h — расстояние между ними. Будем рассматривать лишь проекции тетраэдра на плоскости, перпендикулярные Π_1, и уже среди них найдем такие, отношение площадей проекций тетраэдра на которые не меньше $\sqrt{2}$.

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — проекция тетраэдра $ABCD$ на такую плоскость α. Тогда $[A_1B_1]\subset\Pi_1\cap\alpha$, $[C_1D_1]\subset\Pi_2\cap\alpha$, и, следовательно, $[A_1B_1]\parallel[C_1D_1]$. Таким образом, проекция $A_1B_1C_1D_1$ тетраэдра $ABCD$ на плоскость α — это трапеция с высотой длины h (в некоторых случаях вырождающаяся в треугольник). Средняя линия KL трапеции $A_1B_1C_1D_1$ — это проекция параллелограмма $PQRS$, где P, Q, R, S — середины ребер AC, AD, BD и BC тетраэдра $ABCD$ соответственно (см. рис. 3). (Действительно, все точки K, L, P, Q, R, S лежат в плоскости, параллельной плоскостям Π_1 и Π_2 и равноудаленной от них.) Вершины параллелограмма P, Q, R, S проектируются в точки пересечения средней линии KL с отрезками A_1C_1, A_1D_1, B_1D_1 и B_1C_1 соответственно. Для определенности будем считать, что $[PQ]$ — меньшая сторона параллелограмма, а $[PR]$ — большая из его диагоналей. Очевидно,

$$|PR|/|PQ|\geqslant\sqrt{2}.$$

Возьмем теперь плоскость α_1, параллельную диагонали PR (и, конечно, перпендикулярную плоскости Π_1), и плоскость α_2, перпендикулярную $[PS]$ $(\alpha_2\perp\Pi_1)$. Длина средней линии трапеции (проекции тетраэдра) в первом случае равна $|PR|$, а во втором — не больше $|PQ|$. В первом случае площадь проекции тетраэдра равна $h\cdot|PR|$, во втором — не более $h\cdot|PQ|$. Отношение этих площадей не меньше $\sqrt{2}$.

Для правильного тетраэдра оценка $\sqrt{2}$ — наилучшая: площади проекций правильного тетраэдра на плоскости α_1 и α_2 будут равны $a^2/2$ и $a^2/2\sqrt{2}$, где a — длина ребра тетраэдра. Но это также требует доказательства.

А. Берзиньш

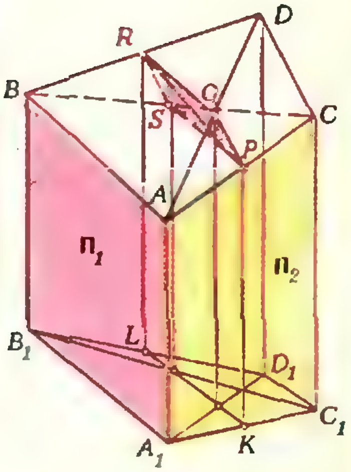


Рис. 3.

◆

М526. *а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна*

$$S=\frac{\operatorname{tg}\varphi\,|a^2-b^2+c^2-d^2|}{4},$$

где a, b, c, d — длины последовательных сторон четырехугольника, φ — величина угла между его диагоналями, $\varphi\neq90^\circ$.

б) Можно ли найти площадь S, зная a, b, c и d, если $\varphi=90^\circ$?

а) Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|CD|=c$, $|DA|=d$ (рис. 4). Тогда

$$S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\varphi.$$

Попробуем выразить площадь S четырехугольника $ABCD$ через скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Ясно, что выполняется одно из следующих равенств:

$$\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BD}}=\varphi \text{ или } \widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BD}}=\pi-\varphi.$$

Поэтому $|\cos(\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BD}})|=\cos\varphi$. Если $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$, то

$$S=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\times$$

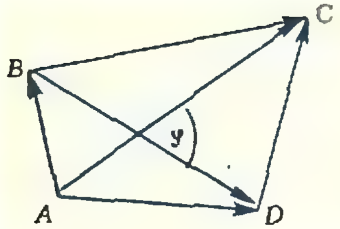


Рис. 4.

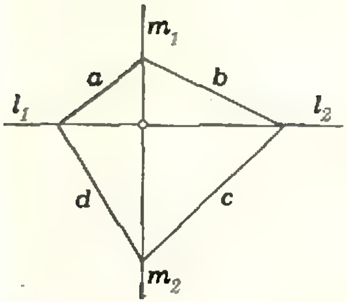


Рис. 5.

$$\times|\cos(\widehat{\vec{AC};\vec{BD}})|\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}||\vec{AC}|\cdot|\vec{BD}|\cos(\widehat{\vec{AC};\vec{BD}})|\cdot\operatorname{tg}\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{AC}\cdot\vec{BD}|\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

Однако $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=\vec{AC}(\vec{AD}-\vec{AB})=\vec{AC}\cdot\vec{AD}-\vec{AC}\cdot\vec{AB}=$

$$=\frac{1}{2}(2\vec{AC}\cdot\vec{AD}-2\vec{AC}\cdot\vec{AB})=\frac{1}{2}[(\vec{AC})^2+(\vec{AD})^2-(\vec{AC}-\vec{AD})^2-$$

$$-((\vec{AC})^2+(\vec{AB})^2-(\vec{AC}-\vec{AB})^2)]=\frac{1}{2}[(\vec{AC})^2+(\vec{AD})^2-$$

$$-(\vec{DC})^2-(\vec{AC})^2-(\vec{AB})^2+(\vec{BC})^2]=\frac{1}{2}((\vec{BC})^2-(\vec{CD})^2+$$

$$+(\vec{DA})^2-(\vec{AB})^2);$$

поэтому

$$S=\frac{1}{2}|\vec{AC}\cdot\vec{BD}|\cdot\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{4}|a^2-b^2+c^2-d^2|\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

В. Губа

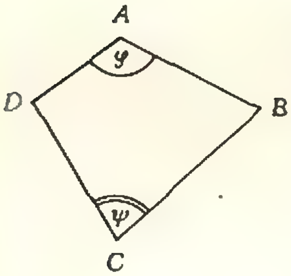


Рис. 6.

б) При $\varphi=90°$ выразить площадь S выпуклого четырехугольника через длины a, b, c, d его сторон нельзя. Заметим, что в этом случае $a^2-b^2+c^2-d^2=0$. Пусть a—наименьшее из чисел a, b, c, d. Отрезок длины a с концами на лучах l_1 и m_1 (рис.5) можно достроить до четырехугольника с заданными сторонами; меняя положения отрезка, мы получим целое семейство таких четырехугольников (с разными углами при вершинах). Докажем, что площади всех этих четырехугольников не равны одному и тому же числу. Для этого, воспользовавшись равенством (рис. 6)

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin\varphi+cd\sin\psi),$$

где φ и ψ — углы при вершинах A и C четырехугольника, найдем, какие значения может принимать величина S.

Углы φ и ψ связаны соотношением

$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi=c^2+d^2-2cd\cos\psi \qquad (*)$$

(теорема косинусов).

Будем считать, что угол ψ есть функция от φ. Из соотношения (*)

$$\psi'=\frac{ab\sin\varphi}{cd\sin\psi}, \qquad (**)$$

так что для производной S' (по φ) получаем:

$$S'=\frac{1}{2}(ab\cos\varphi+\psi'cd\cos\psi)=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(\cos\varphi+\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\sin\varphi\right)=\frac{ab}{2\sin\psi}\sin(\varphi+\psi).$$

Мы видим, что $S'=0$, когда $\sin(\varphi+\psi)=0$, то есть когда $\varphi+\psi=180°$. Это значит, что около соответствующего четырехугольника можно описать окружность.

Мы почти доказали знаменитую *теорему Штейнера* о том, что из всех четырехугольников с заданными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность. *Почти* — потому, что нужно еще проверить, что в указанном нуле производной S' функция $S=S(\varphi)$ действительно имеет максимум. Мы ограничимся проверкой этого утверждения только для рассматриваемого нами случая, когда диагонали четырехугольника перпендикулярны (пока мы этим обстоятельством не пользовались).

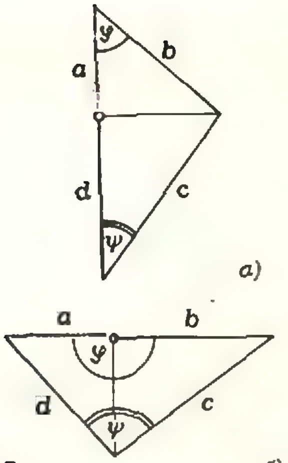


Рис. 7.

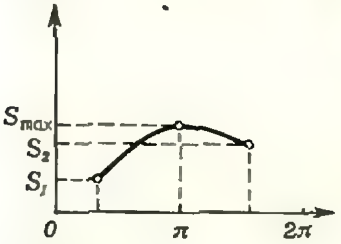


Рис. 8.

Заметим, что производная ψ' неотрицательна (это видно из формулы (**)), так что при росте угла φ угол ψ также растет. Минимальное значение угол φ принимает в четырехугольнике на рисунке 7, *а*, а максимальное — на рисунке 7, *б* (напомним, что a — минимально). Поэтому сумма $\varphi+\psi$ меняется от некоторого значения, меньшего 180°, до некоторого значения, большего 180° и меньшего 360°. Производная S' положительна при $\varphi+\psi<180°$, равна нулю при $\varphi+\psi=180°$ и меньше нуля при $180°<\varphi+\psi<360°$. Следовательно, сама функция S возрастает при $\varphi+\psi<180°$ и достигает максимума при $\varphi+\psi=180°$, после чего убывает; так что минимум S достигается в одной из концевых точек (соответствующих рисункам 7, *а*, *б*). Несложно вычислить (сделайте это самостоятельно), что максимальная площадь $S_{\max}$ равна $\frac{ac+bd}{2}$, а в концевых точках $S_1=\frac{1}{2}(a+d)\sqrt{b^2-a^2}$ и $S_2=\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{d^2-a^2}$ соответственно ($S_1<S_2$, если $b<d$; $S_1=S_2$, если $b=d$; $S_1>S_2$, если $b>d$). График функции S изображен на рисунке 8, площадь S (четырехугольника с заданными длинами сторон и взаимно перпендикулярными диагоналями) может принимать любые значения в пределах $S_1\leqslant S\leqslant S_{\max}$, $S_{\max}\leqslant S\leqslant S_2$.

Л. Лиманов

◆

М527. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, $0\leqslant x_i\leqslant 1$. Докажите, что величина*
$x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1$
не превосходит
а) 1 при $n=3$;
б) 2 при $n=4$;
в) $[n/2]$ при $n\geqslant 3$.

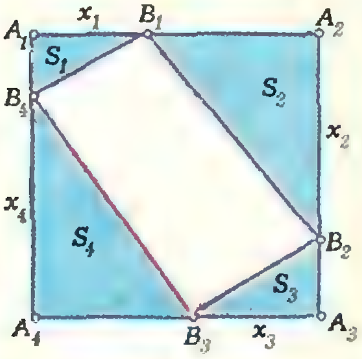


Рис. 9.

Мы приведем два решения пункта в) задачи. Первое из них использует метод математической индукции, причем индукционный шаг осуществляется от $n=k$ к $n=k+2$. При этом необходимо проверить выполнение соответствующих неравенств для двух начальных значений n: $n=3$ и $n=4$. Эта проверка, собственно, и составляет содержание пунктов а) и б) задачи.

а) Итак, пусть $n=3$. Из условий $0\leqslant x_i\leqslant 1$ ($i=1, 2, 3$) следует, что

$$(x_1-1)(1-x_2)(1-x_3)\leqslant 0,$$

то есть

$$x_1x_2x_3+x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1\leqslant 1.$$

Поскольку $x_1x_2x_3\geqslant 0$, получаем требуемое неравенство

$$x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1\leqslant 1.$$

б) Пусть $n=4$. Докажем, что

$$x_1+x_2+x_3+x_4-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1\leqslant 2,$$

используя геометрию.

Возьмем квадрат $A_1A_2A_3A_4$ со стороной длины 1. На его сторонах A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 отметим, соответственно, точки B_1, B_2, B_3, B_4 так, чтобы $|A_iB_i|=x_i$ ($i=1, 2, 3, 4$; — см. рис. 9). Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников $A_1B_1B_4$, $A_2B_2B_1$, $A_3B_3B_2$, $A_4B_4B_3$. Очевидно,

$$S_1+S_2+S_3+S_4\leqslant 1$$

(треугольники лежат внутри квадрата площади 1 и не пересекаются); поэтому

$$\frac{x_1(1-x_4)}{2}+\frac{x_2(1-x_1)}{2}+\frac{x_3(1-x_2)}{2}+\frac{x_4(1-x_1)}{2}\leqslant 1,$$

откуда получается нужное неравенство для $n=4$.

в) Предположим, что неравенство

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1\leqslant [n/2] \quad (1)$$

верно для $n=k$; докажем, что оно верно для $n=k+2$.

Прежде всего заметим, что

$$x_{k+1}+x_{k+2}+x_kx_1-x_kx_{k+1}-x_{k+1}x_{k+2}-x_{k+2}x_1\leqslant 1. \quad (2)$$

(Действительно, это следует из неравенства

$$(x_1-1)(1-x_{k+1})(1-x_{k+2})\leqslant 0$$

при $x_k\geqslant x_1$ и из неравенства

$$(x_k-1)(1-x_{k+1})(1-x_{k+2})\leqslant 0$$

при $x_1\leqslant x_k$.

По предположению индукции

$$x_1+\ldots+x_k-x_1x_2-\ldots-x_{k-1}x_k-x_kx_1\leqslant [k/2]. \qquad (3)$$

Складывая неравенства (2) и (3), получаем

$$x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}+x_{k+2}-x_1x_2-\ldots-x_kx_{k+1}-$$
$$-x_{k+1}x_{k+2}-x_{k+2}x_1\leqslant [k/2]+1=[k/2+1]=\left[\frac{k+2}{2}\right],$$

так что неравенство (1) справедливо и для $n=k+2$. Задача в) решена.

Другое, быть может, более «естественное», решение задачи в) — следующее:

Зафиксируем переменные $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \ldots,\ x_n$, а переменную $x_i=x$ будем изменять (на отрезке $[0;\ 1]$). Тогда

$$x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1=kx+b,$$

где k и b — постоянные числа. Очевидно, линейная функция от x, определенная на отрезке $[0;\ 1]$, принимает наибольшее значение на одном из концов отрезка. Поскольку это рассуждение можно применить последовательно к x_1, затем к x_2, …, к x_n, наибольшее значение выражения $\Sigma=x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1$ достигается, когда некоторые из чисел x_i равны единице, а остальные — нулю. Заметим теперь, что если два соседних «икса» оба равны единице (например, x_i и x_{i+1}), то один из них можно превратить в нуль, не уменьшив при этом значения Σ. Таким образом, Σ принимает наибольшее значение, когда несколько (скажем, m) несоседних «иксов» равны единице. Поскольку $m\leqslant[n/2]$, («иксы» — не соседние!), мы получаем, что $\Sigma_{\max}\leqslant[n/2]$. Но легко проверить, что при $x_1=x_3=x_5=\ldots=0$, $x_2=x_4=\ldots=1$ значение Σ как раз равно $[n/2]$, откуда следует, что $\Sigma_{\max}=[n/2]$.

В. Батырев, И. Клумова

◆

Ф533. *Гантелька длины l стоит в углу, образованном гладкими плоскостями (рис. 10). Нижний шарик гантельки смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найти скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.*

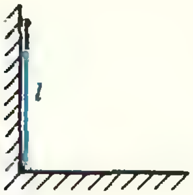


Рис. 10.

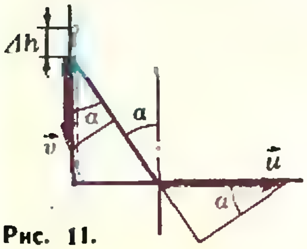


Рис. 11.

Пусть в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости гантелька составляет угол α с вертикалью (рис. 11), скорость верхнего шарика равна $\vec v$, скорость нижнего — $\vec u$.

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{mu^2}{2}=mg\Delta h=mgl\,(1-\cos\alpha),$$

или

$$v^2+u^2=2gl\,(1-\cos\alpha) \qquad (1)$$

(m — масса каждого шарика; v, u, g — модули соответствующих векторов).

Поскольку стержень жесткий,

$$v\cos\alpha=u\sin\alpha. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим:

$$u^2=2gl\,(\cos^2\alpha-\cos^3\alpha). \qquad (3)$$

До момента отрыва центр масс гантельки двигался с горизонтальным ускорением (это ускорение сообщалось силой реакции вертикальной стенки). Поэтому к моменту отрыва верхнего шарика от вертикальной стенки скорость $\vec u$ максимальна. Найдем значение $\cos\alpha$, при котором выражение $\cos^2\alpha-\cos^3\alpha$ (см. (3)) максимально: $(x^2-x^3)'=2x-3x^2=0$ $(x=\cos\alpha)$ при $x={}^2/_3$, то есть $\cos\alpha={}^2/_3$.

Подставив это значение $\cos\alpha$ в (3), найдем:

$$u=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gl}.$$

А. Зильберман

Ф534. *Астронавты «Скайлэба» с помощью специального радиолокационного высотомера обнаружили, что поверхность океана в районе «Бермудского треугольника» ниже нормального уровня на 25 метров (см., например, журнал «Наука и жизнь», 1976, № 9). Предполагая, что этот «прогиб» можно объяснить наличием под дном океана шаровой полости, заполненной водой, оценить радиус этой полости. Глубина океана $h=6$ км, средняя плотность земных пород $\rho_п = 3\cdot 10^3$ кг/м³.*

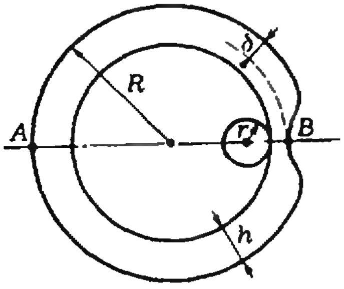


Рис. 12.

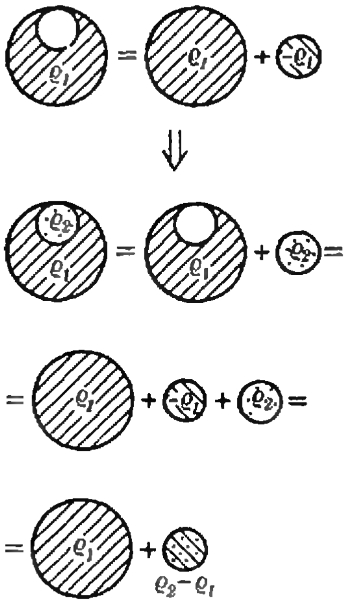


Рис. 13.

Свободная поверхность воды в поле тяготения Земли всегда устанавливается так, что в любой точке поверхности сила тяготения перпендикулярна к ней, то есть направлена к центру Земли по радиусу. Из-за наличия полости поверхность океана искривлена — суммарная сила тяготения (со стороны Земли и со стороны «полости») направлена, вообще говоря, не по радиусу Земли.

В дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться аналогией между электростатическим полем точечного заряда Q и полем тяготения точечной массы M. (Напомним, что поле тяготения шара массы M эквивалентно полю тяготения точечной массы M, помещенной в центр шара.)

Сила, действующая на пробный заряд q со стороны заряда Q, и сила, действующая на пробную массу m со стороны массы M, равны, соответственно,

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}, \quad F_т = \gamma\frac{Mm}{r^2},$$

где r — расстояние между Q и q, M и m. Эти формулы похожи: $F_{эл} \sim 1/r^2$ и $F_т \sim 1/r^2$, $F_{эл} \sim q$, а $F_т \sim m$, то есть зависимость этих сил от расстояния одна и та же и зависимости от величины пробного заряда и величины пробной массы одинаковы. Пользуясь этой аналогией, введем потенциал $\varphi_т$ поля тяготения точечной массы M (равный потенциальной энергии единичной массы в поле массы M). Выражение для $\varphi_т$ аналогично выражению для потенциала $\varphi_{эл} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ электростатического поля точечного заряда Q:

$$\varphi_т = -\gamma\frac{M}{r}.$$

(Знак «минус» отражает основное различие между $F_{эл}$ и $F_т$: под действием гравитационных сил тела всегда притягиваются. Поскольку потенциальная энергия при бесконечно большом r полагается равной нулю, в случае сил притяжения потенциальная энергия в поле тяготения оказывается отрицательной.)

Потенциальная энергия частицы массы m на поверхности воды должна быть всюду одинаковой. (Поскольку сила тяготения всюду перпендикулярна поверхности, работа силы тяготения по перемещению частицы по поверхности равна нулю.) Следовательно, поверхность океана (поверхность Земли) — эквипотенциальная поверхность (аналог — эквипотенциальная поверхность в электростатическом поле).

Запишем потенциал поля тяготения Земли в точке A, находящейся далеко от полости, и в точке B, находящейся непосредственно над полостью (рис. 12). В точке A наличием полости можно пренебречь и считать потенциал равным

$$\varphi_A = -\gamma\frac{M}{R},$$

где R — радиус Земли, $M = {}^4/_3\pi R^3\rho_п$ — ее масса. Чтобы найти потенциал в точке B, воспользуемся принципом суперпозиции. Рисунок 13 иллюстрирует суперпозицию полей тяготения Земли и полости. Из рисунка понятно, что потенциал в точке B складывается из потенциала поля тяготения Земли (без полости) и поля тяготения шаровой массы с плотностью $\rho_в - \rho_п$, то есть точечной массы $\mu = {}^4/_3\pi r^3(\rho_в - \rho_п)$, где r — радиус полости, $\rho_в$ — плотность воды. Итак (см. рис. 13),

$$\varphi_B = -\gamma\frac{M}{R-\delta} + \left(-\gamma\frac{\mu}{r+h-\delta}\right).$$

Поскольку поверхность океана — эквипотенциальная, $\varphi_A = \varphi_B$, то есть

$$\frac{M}{R}=\frac{M}{R-\delta}+\frac{\mu}{r+h-\delta}.$$

Преобразуем это выражение:

$$-M\frac{\delta}{R(R-\delta)}=\frac{\mu}{(r+h)-\delta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -\frac{M}{\mu}\left[(r+h)\delta-\delta^2\right]=R(R-\delta).$$

Пренебрегая δ^2 в левой части и δ — в правой, получаем

$$-\frac{M}{\mu}(r+h)\delta\approx R^2,$$

или, подставляя $-\frac{M}{\mu}=-\frac{R^3}{r^3}\frac{\rho_п}{(\rho_в-\rho_п)}$,

$$\frac{(r+h)}{r^3}\frac{R\delta\rho_п}{(\rho_п-\rho_в)}\approx 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{r^3}{(r+h)}\approx\frac{\rho_п}{(\rho_п-\rho_в)}R\delta=\frac{3}{2}\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 25\ (м^2)$$

(здесь подставлены численные значения $R=6{,}4\cdot 10^6$ м, $\rho_п=3\cdot 10^3$ кг/м^3, $\rho_в=1\cdot 10^3$ кг/м^3, $\delta=25$ м). Мы не будем решать это кубическое уравнение относительно r, а лишь оценим значение r. Для оценки воспользуемся тем, что функция $r^3/(r+h)$ монотонно возрастает при $r>0$.

Непосредственными вычислениями легко убедиться, что r заключено в интервале между 18 км и 20 км.

А. Стасенко

◆

Ф535. *Потенциальная энергия взаимодействия двух одинаковых заряженных маленьких шариков с зарядами q_1 и q_2 равна $W_1=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}$, где l — расстояние между центрами шариков. Если шарики соединить проволокой, заряды шариков станут одинаковыми, и потенциальная энергия взаимодействия шариков станет равной $W_2=\frac{(q_1+q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 l}$. Так как $(q_1+q_2)^2>4q_1q_2$ (при $q_1\neq q_2$), то $W_2>W_1$, то есть потенциальная энергия взаимодействия зарядов возрастает! Откуда берется дополнительная энергия?*

Рассуждения, приведенные в условии задачи, не верны: в них учтена только потенциальная энергия взаимодействия шариков и не учтена энергия электростатического поля отдельных зарядов.

Энергия электростатического поля отдельного (изолированного) шарика с зарядом q равна работе, которая совершается при зарядке шарика. Ее можно рассматривать как энергию сферического конденсатора, внешняя обкладка которого находится бесконечно далеко от внутренней (от шарика). Эту энергию можно вычислить по формуле $W=\frac{1}{2}qU$, где q — заряд конденсатора (заряд шарика), U — разность потенциалов его пластин. В нашем случае U равно потенциалу φ шарика по отношению к бесконечности (где потенциал принят равным нулю): $U=\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, где r — радиус шарика.

Таким образом, $W=\frac{1}{2}q\varphi=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$. Энергия системы до соединения шариков проволокой равна

$$W_1=\frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l},$$

а после соединения —

$$W_2=2\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\, r}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, l}=\frac{(q_1+q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0\, r}+\frac{(q_1+q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0\, l},$$

где $q=(q_1+q_2)/2$.

Так что

$$W_1-W_2=\frac{(q_1-q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)>0,$$

то есть $W_1>W_2$. Это и естественно, так как при соединении шариков проволокой часть энергии выделилась в виде джоулева тепла.

И. Слободецкий

Ф536. *Жесткая прямоугольная конструкция AOB ($\widehat{AOB}=90°$) вращается вокруг вертикальной оси OO', так что $\widehat{AOO'}=\alpha$ (рис. 14). С помощью колец, которые могут свободно скользить по сторонам AO и OB, на конструкцию надет легкий стержень KE длины 2a. К середине стержня прикреплен небольшой массивный шарик. При какой угловой скорости вращения конструкции стержень займет горизонтальное положение?*

Когда стержень KE находится в горизонтальном положении, шарик вращается вокруг оси OO' по окружности радиуса $r=a\sin(\pi/2-2\alpha)=a\cos 2\alpha$ (см. рис. 14). Центростремительное ускорение $\omega^2 r$ (ω — угловая скорость вращения конструкции) шарику сообщает сила $\vec{R}$ реакции стержня (ее горизонтальная проекция). Запишем уравнение движения шарика в проекциях на оси X и Y (рис. 15):

$$\begin{aligned} R_x &= m\omega^2 r = m\omega^2 a\cos 2\alpha, \\ R_y &= mg \end{aligned} \qquad (1)$$

(R_x, R_y, mg — модули проекций векторов $\vec{R}$ и $m\vec{g}$).

Теперь запишем уравнение движения невесомого стержня KE в проекциях на оси X и Y (см. рис. 15):

$$\begin{aligned} N_1\cos\alpha - R'_x - N_2\sin\alpha &= 0, \\ N_1\sin\alpha - R'_y + N_2\cos\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

($\vec{R}'=-\vec{R}$ — действующая на стержень сила реакции шарика; $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — действующие на стержень силы реакций «плеч» OA и OB конструкции; R'_x, R'_y, $N_1\cos\alpha$, $N_2\sin\alpha$ и т. п. — модули соответствующих проекций; $R'_x=R_x$, $R'_y=R_y$).

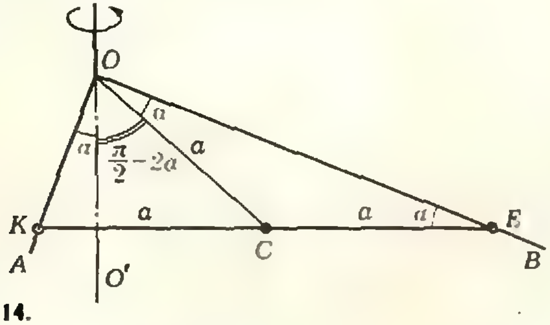


Рис. 14.

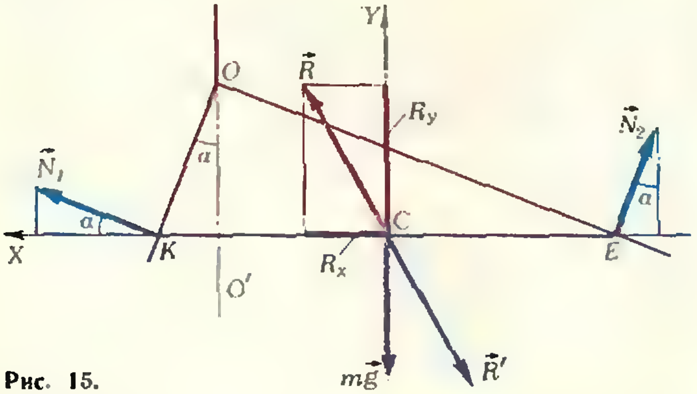


Рис. 15.

Условием того, что стержень занимает горизонтальное положение, является равенство нулю суммы моментов сил, действующих на стержень, относительно горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости конструкции. Запишем уравнение моментов относительно точки C:

$$|\vec{N}_1|a\sin\alpha - |\vec{N}_2|a\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) находим:

$$\omega = \sqrt{g/(a\sin 2\alpha)}.$$

С. Кротов

КВАНТ для младших школьников

Задачи

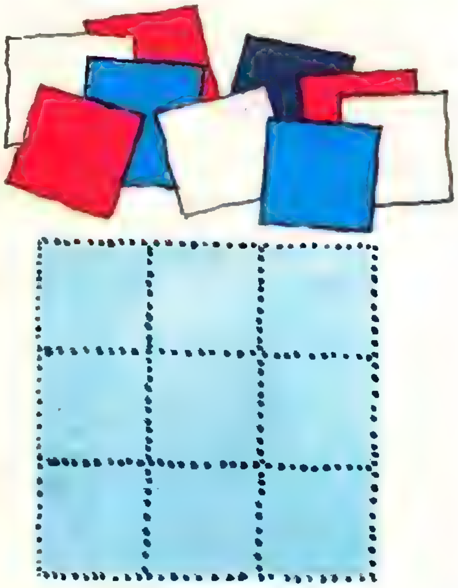
1. Разность двух целых чисел, являющихся полными квадратами, оканчивается на 2. На какие цифры оканчиваются уменьшаемое и вычитаемое, если последняя цифра уменьшаемого больше последней цифры вычитаемого?

2. Найдите все двухзначные числа $\overline{ab}$, обладающие тем свойством, что трехзначное число $\overline{a0b}$ кратно исходному.

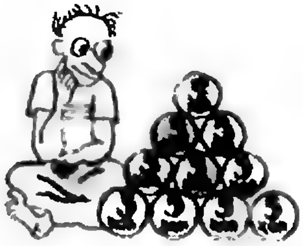
3. В футбольном турнире каждая пара команд должна встретиться между собой один раз. В среду, после очередного тура, Боря подсчитал, что четное число встреч провели семь команд. После следующего тура Боря обнаружил, что четное число встреч по-прежнему имеют семь команд! Возможно ли такое? Если да, то можно ли определить, сколько команд участвовало в турнире? (Расписание турнира, разумеется, составлено так, что в каждом туре свободно не более одной команды.)

4. Коля отправился за грибами где-то между восемью и девятью часами утра, в момент, когда стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня; при этом стрелки его часов были направлены в прямо противоположные стороны. Сколько длилась прогулка Коли?

5. Сколькими способами девять конгруэнтных квадратиков: три красных, три белых и три синих, — можно расположить в виде квадрата 3×3 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались квадратики всех цветов?



Веселая викторина



В этом номере мы предлагаем шуточные и занимательные задачи, для решения которых не нужно ни карандаша, ни бумаги. Эти задачи можно использовать на викторинах, в математических боях и КВНах.

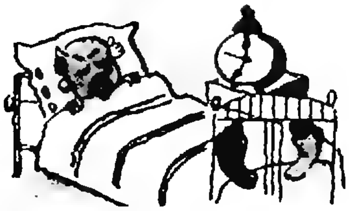
1. Десять монет расположены так, как показано на рисунке 1. Какое наименьшее число монет нужно убрать, чтобы центры любых трех из оставшихся монет не были расположены в вершинах правильного треугольника?

2. Придумайте четыре целых числа, сумма и произведение которых являются нечетными числами.

3. На часах 8 часов 20 минут. Чему равен угол между стрелками?

4. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

5. Начнем считать пальцы на правой руке. Первым будет большой, вторым — указательный, третьим — средний, четвертым — безымянный, пятым — мизинец, шестым — снова безымянный, седьмым — средний, восьмым — указательный, девятым — большой, десятым — указательный, и т. д. Какой палец будет 1979-м?



6. Существуют ли треугольники, у которых середины всех высот лежат на одной прямой?

7. Сильно устав, физик лег спать в семь часов вечера, поставив будильник на 9 часов следующего утра. Сколько часов ему удастся проспать до звонка будильника?

8. Горело 7 свечей, три из них потушили. Сколько осталось?

9. Стороны треугольника равны 17, 35 и 18. Чему равна его площадь?

10. Какую последнюю цифру имеет произведение всех нечетных чисел от 1 до 99?

11. Когда Коля вышел из леса со своей собакой Жучкой, из деревни в лес направился его брат Витя. Жучка сразу же побежала к дому, но встретив Витю, повернула и помчалась навстречу Коле. Добежав до Коли, она снова повернула и побежала к Вите. Так она бегала пока братья не встретились. Какое расстояние пробежала Жучка, если Коля шел со скоростью 3 км/час, Витя со скоро-

стью 5 км/час, а Жучка бегала со скоростью 8 км/час? Расстояние от леса до деревни равно 4 км.

12. Две ракеты летят навстречу друг другу со скоростями 15000 км/час и 21000 км/час. Их стартовые площадки находятся на расстоянии 1979 км одна от другой. Какое расстояние будет между ракетами за минуту до столкновения?

13. Какое число делится (без остатка) на все числа?

14. Названия каких литературных произведений начинается с чисел 3, 12, 20, 80000?

15. В равнобедренном треугольнике основание вдвое длиннее высоты. Чему равны его углы?

16. Угол в 1° рассматривают в лупу, дающую четырехкратное увеличение. Какой величины покажется угол?

▲

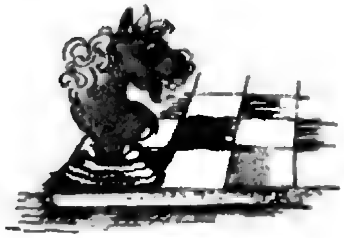
Предлагаем также несколько игр. В каждой из них существует стратегия, позволяющая одному из игроков выиграть. Постарайтесь не просто играть, но и найти эту выигрышную стратегию.

Игра 1. Имеется две кучки камешков: в одной 13, а в другой 10 камешков. Двое по очереди берут камешки: либо любое количество из произвольной кучки, либо из обеих кучек поровну. Выигрывает тот, кто берет последние камни.

Игра 2. Из кучки в 25 камешков двое по очереди берут один, два или три камешка. Выигрывает тот, у кого в конце будет четное число камешков.

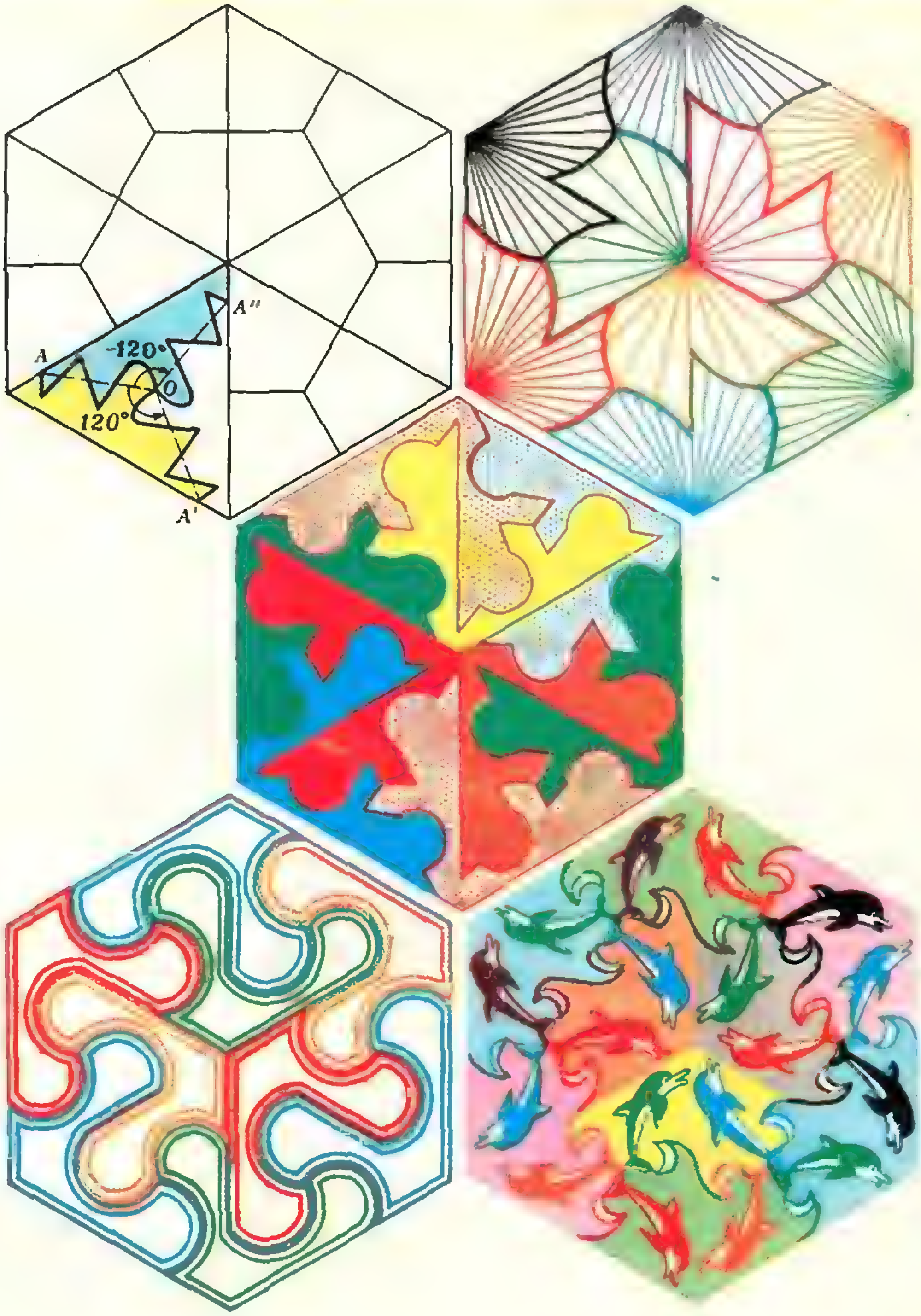
Игра 3. Есть две кучки конфет, по 9 в каждой. Двое играют в такую игру: за один ход нужно переложить из одной кучки в другую одну конфету и съесть две конфеты из одной какой-нибудь кучки. Ходы делаются по очереди. Тот, кто не сможет сделать ход, проиграл.

Игра 4. На шахматную доску двое ставят свои фишки: первый — белую, а второй — черную. Далее они по очереди передвигают свои фишки каждый раз на одно из соседних (по горизонтали или вертикали) полей. Выигрывает тот, кто ставит свою фишку на фишку противника.



Игра 5. В углу шахматной доски стоит фигура — конь. Двое по очереди отмечают на доске мелом по одной клетке так, чтобы конь мог пройти в любую неотмеченную клетку, не становясь в отмеченные клетки. Тот, кто не сможет сделать очередного хода, проигрывает.

А. Савин



Новые картинки к калейдоскопу

В «Кванте» № 11 за 1978 год была опубликована небольшая заметка о разбиении правильного шестиугольника на девять одинаковых частей. Несколько разбиений было помещено на обложке.

Присмотревшись к этим разбиениям, наш читатель *Е. Коган* из Москвы заметил, что во всех случаях диагонали шестиугольника, проходящие через его центр, делят каждую фигуру разбиения на две одинаковые части (см. рисунок). Таким образом, в каждом из шести правильных треугольников оказывается по три конгруэнтные части, причем при повороте любого из них около центра на 120° разбиение переходит в себя. Это замечание позволяет строить разбиения треугольника и получать новые разбиения шестиугольника на 18, а следовательно, и на 9 одинаковых частей. Некоторые из получающихся таким образом разбиений Е. Коган прислал в редакцию. А какие разбиения можете предложить вы?

С учетом специальности

Современный рабочий с его активным, творческим отношением к делу, заботящийся о повышении производительности труда и качества продукции, участвующий в рационализаторской и изобретательской деятельности, немыслим без глубоких профессиональных знаний. Основой таких знаний является общее образование. Одним из элементов, обеспечивающих человеку современный научный и культурный кругозор, является знание математики. Математика — это одно из слагаемых культуры современного человека и один из главных инструментов, постоянно применяющихся при решении многих практических задач.

Неудивительно поэтому, что в профессионально-технических училищах (ПТУ), готовящих кадры для различных отраслей промышленности и сельского хозяйства, такое большое внимание при обучении уделяется математике. Преподавание математики в ПТУ не должно слепо копировать преподавание этого предмета в общеобразовательной школе. Здесь нужно не только изучить всю «школьную» математику, но и научить применять ее в специфических задачах, возникающих в конкретной профессиональной области. Вот почему появились учебники, предназначенные для системы профессионально-технического образования, и что, пожалуй, еще более ценно, —специальные сборники задач.

В качестве весьма удачного такого сборника можно отметить книгу Н. А. Терешина *). Эта книга содержит 425 задач, наглядно иллюстрирующих многообразные связи теоретического курса математики с конкретными проблемами, возникающими в различных областях сельскохозяйственного производства. Здесь можно найти чисто учебные упражнения, сформулированные как задачи практического содержания, довольно интересные задачи на исследование функций и вычисление площадей и объемов, которые имеют вполне конкретный реальный смысл и действительно возникают в процессе производства, задачи, требующие выявления количественных математических зависимостей при анализе технологических процессов. Автор успешно решает проблему межпредметных связей — широко используются сведения и факты из физики, химии, биологии, а также из специальных предметов, изучаемых учащимися средних сельских профтехучилищ. Особенно хочется отметить наличие задач, требующих расчетов по специальным эмпирическим формулам из смежных дисциплин, что позволяет учащимся осознать границы применимости строгих математических рассуждений при решении прикладных проблем.

Составление подобного сборника задач — дело довольно трудоемкое и сложное: найти одну доступную и в то же время содержательную задачу много труднее, чем выписать два десятка уравнений или «стандартных» упражнений на решение треугольников. Поэтому инициатива автора заслуживает всяческой поддержки. Учащиеся ПТУ работают по этой книге вот уже пять лет. Этот срок вполне достаточен для ее апробации, и надо отметить, что это пособие с честью выдержало испытание временем. Конечно, за это время выявились и отдельные недочеты, которые, однако, не влияют на высокую оценку, которую получила эта книга у математической общественности.

Так как эта книга стала библиографической редкостью, мы надеемся, что ее переиздание не заставит себя долго ждать.

Хотелось бы, чтобы при подготовке нового издания автор устранил отдельные недостатки. Так, явно недостаточно представлены в книге задачи с экономическим содержанием (очень полезны были бы простейшие задачи с элементами линейного программирования и задачи на вычисление экстремумов функций с «ломаным» графиком), задачи, связанные с вопросами селекции и генетики, задачи, связанные с вопросами электротехники и электрофикации. Не уделяется внимания таким важным с прикладной точки зрения аспектам, как графическое изображение зависимостей в виде кривых, диаграмм, схем. Терминология автора и применяемая им символика сегодня уже не соответствуют принятым в школьном курсе математики. Устранение этих недостатков сделает задачник еще более полезным.

Было бы очень хорошо, чтобы это полезное начинание не ограничивалось только рамками математики, и на книжных прилавках появились подобные «специализированные» задачники для профессионально-технических учебных заведений и по другим дисциплинам (физика, химия и т. д.).

Н. Розов

---

*) Терешин Н. А. *Сборник задач по математике для средних сельских профтехучилищ* (М., «Высшая школа», 1974).

По страницам новой книги

Прямые и кривые

Математика — большой и очень своеобразный мир идей, удивляющий красотой покоренных и непокоренных вершин, ажурных мостов, переброшенных через пропасти и соединяющих одну горную страну фактов и методов с другой. Однако эти поражающие воображение горизонты открываются лишь тем, кто сумел проникнуть в мир математики, научился видеть скрытую от непосвященных красоту, постиг трудное умение видеть в окружающем мире чудесный калейдоскоп фигур, чисел и математическую логику. Но проникнуть в мир математических идей непросто: помимо способностей и интереса нужны еще настойчивость, воля, желание и умение много работать. Лишь большая систематическая работа и, в частности, решение задач могут принести школьнику успех в математике.

Но вот все есть: и интерес к математике, и страстное желание решать задачи (особенно «трудные»), и усидчивость, и трудолюбие. И тогда возникает основной вопрос: что читать и какие решать задачи? Ведь если прочитанная книга окажется устаревшей, не проникнутой современным «духом» математики и ее приложений, или если решаемые задачи окажутся не способствующими развитию хорошего вкуса и исследовательской жилки, не нацелены на овладение новыми методами и расширение кругозора, то что-то невосполнимо потеряно в воспитании и становлении будущего математика. Но если выбранная книга будет удачной, то она окажется добрым и опытным учителем и наставником, и это может служить гарантией того, что она поможет в воспитании хорошего вкуса, приобретению кругозора и исследовательских навыков.

Именно таким добрым и опытным наставником юного математика, по нашему мнению, является книга Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые»*). Книга содержит интересный подбор задач, решая которые, читатель, — может быть, еще не осознавая этого — приобщается к духу и идеям современной математики. Здесь связаны (особенно в излагаемых решениях узловых задач, которые служат своеобразным маяком для читателя) язык теории множеств и метод координат, использование различных перемещений и кинематические соображения (которым авторы придают форму «теорем о колечках»), векторные методы решения задач и логические связи между элементами условия. При этом одна и та же задача часто рассматривается с различных точек зрения, решается разными методами, что позволяет, сравнивая эти методы, приобрести нужный кругозор.

Как вы увидите, эта книга не рассчитана на легкое чтение, наоборот, она учит трудолюбию, усидчивости, умению упорно работать над решением задач, помогает сделать трудную работу по приобретению навыков решения задач увлекательной и интересной. При этом она одинаково удобна и для начинающего школьника, и для кружковца, уже умудренного опытом решения задач. Несомненно, решение этих задач и усвоение теоретического текста гарантирует воспитание у школьника математической культуры, умение самостоятельно мыслить, видеть взаимосвязь методов и математических идей на доступном читателю уровне.

Мы выбрали из этой книги цикл задач, связанных с одной темой — вписанные углы. Эта тема начинается в 7-м классе (п. 64, «Геометрия 7»), затем продолжается в 8-м классе (п. 111, «Геометрия 8»). Нам представляется, что школьникам 7-х классов будет интересно ознакомиться с этой темой в целом, а школьникам старших классов будет полезно повторить всю последовательность соответствующих теорем.

Вписанные углы

Задача 1. *Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы?*

Ответ (вероятно, неожиданный). Котенок движется по окружности.

Пояснение. Середина M данного отрезка KL ($|KL|=d$) всегда находится на расстоянии $d/2$ от точки O (рис. 1). Это следует из теоремы: *длина медианы OM прямоугольного треугольника KOL равна половине длины гипотенузы KL.* (В ее справедливости легко убедиться, достроив треугольник KOL до прямоугольника $KOLT$ и вспомнив, что диагонали прямоугольника KL и OT равны по длине и точкой пересечения M делятся пополам: см. рис. 2, 3)

Посмотрим теперь на движение лестницы дру-

---

*) Н. Б. Васильев и В. Л. Гутенмахер. «Прямые и кривые». М., «Наука», 1978, изд. 2-е, перераб.

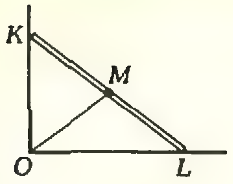


Рис. 1.

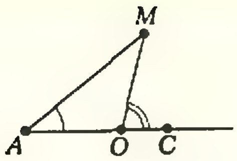


Рис. 4.

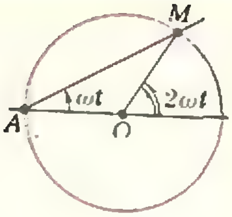


Рис. 7.

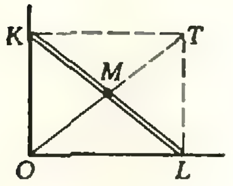


Рис. 2.

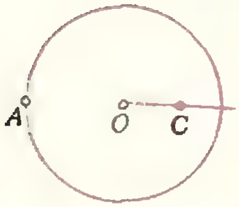


Рис. 5.

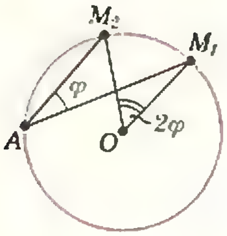


Рис. 8.

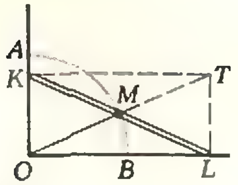


Рис. 3.

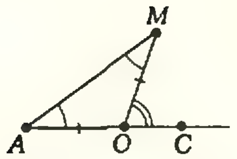


Рис. 6.

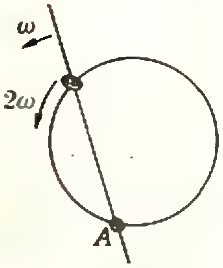


Рис. 9.

гим способом. Пусть отрезок KL («лестница») закреплен, а прямые KO и LO («стена» и «пол») вращаются соответственно вокруг точек K и L так, что угол между ними остается прямым. На этот раз тот факт, что расстояние от середины отрезка до вершины O прямого угла все время одно и то же, превращается в теорему A из п. 64 «Геометрии 7»: *если на плоскости заданы две точки K и L, то точки O, для которых $K\hat{O}L=90^\circ$, лежат на окружности с диаметром KL.*

З а д а ч а 2. *Точка O лежит на отрезке AC. Найти множество точек M, для которых $M\hat{O}C=2M\hat{A}C$* (рис. 4).

О т в е т. Объединение окружности с центром O радиуса AO (без точки A) и луча OC (без точки O) — см. рисунок 5.

П о я с н е н и е. Пусть точка M искомого множества не принадлежит прямой AO. Докажем, что $|MO|=|AO|$. Построим треугольник OAM (рис. 6). По теореме о внешнем угле треугольника $O\hat{A}M+A\hat{M}O=M\hat{O}C$. По условию $M\hat{O}C=2M\hat{A}C$.

Из условия задачи сразу получаем $OA\hat{M}=A\hat{M}O$; следовательно, треугольник AMO равнобедренный, то есть $|OM|=|AO|$.

На языке «движения» результат задачи 2 можно представить себе так: пусть прямая AM вращается вокруг точки A с постоянной угловой скоростью ω (то есть за единицу времени поворачивается на угол величины ω), а прямая OM вращается вокруг точки O с угловой скоростью 2ω, причем в начальный момент времени обе прямые совпадали с прямой AO (рис. 7). Тогда точка M пересечения этих прямых движется по окружности с центром O.

Отсюда мы можем извлечь *теорему о вписанном угле* (теорема 62 из п. 111 «Геометрии 8»). Если прямая AM за время t поворачивается из положения AM_1 в положение AM_2 на угол ωt, то прямая OM поворачивается на угол $2\omega t$, другими словами, *величина вписанного угла M_1AM_2 равна половине угловой величины соответствующего центрального угла M_1OM_2* (рис. 8).

Можно сформулировать эту теорему более наглядно:

Теорема о колечке на окружности*). На проволочную окружность надето маленькое колечко. Вокруг точки A окружности вращается стержень, который проходит через это колечко. *Если стержень вращается равномерно с угловой скоростью ω, то колечко при этом бегает по окружности равномерно с угловой скоростью 2ω* (рис. 9).

---

*) Заметим, что теорему о колечке не следует понимать в буквальном смысле: воображаемое «колечко» — просто точка пересечения прямой и окружности; если же сделать проволочную модель, то после одного оборота (в ту или другую сторону) колечко застрянет.

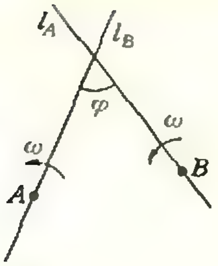


Рис. 10.

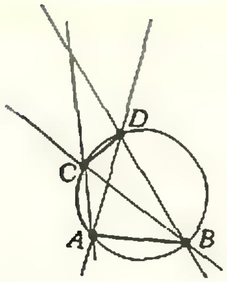


Рис. 13.

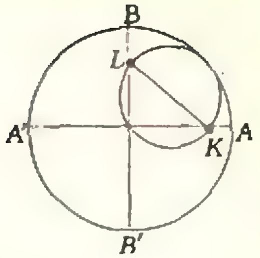


Рис. 16.

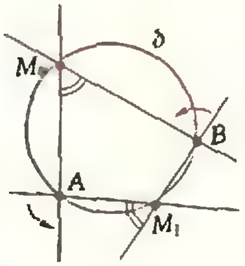


Рис. 11.

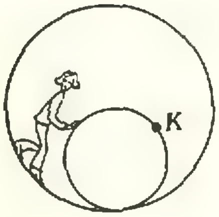


Рис. 14.

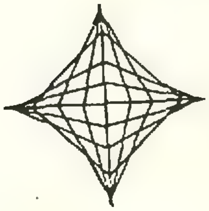


Рис. 17.

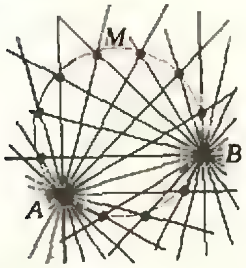


Рис. 12.

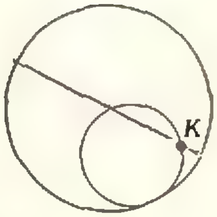


Рис. 15.

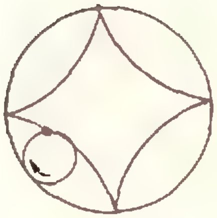


Рис. 18.

Еще один вариант теорем о вписанном угле и о колечке на окружности:

Теорема о вращающихся прямых. *Если две пересекающиеся прямые l_A и l_B вращаются в плоскости вокруг своих точек A и B с одинаковой угловой скоростью* ω (рис. 10); при этом, конечно, величина угла между ними остается постоянной), *то траектория точки пересечения этих прямых — окружность.*

Пояснение. Построим окружность δ, проходящую через три точки: A, B и еще одно положение M_0 точки пересечения прямых l_A и l_B (рис. 11). По теореме «о колечке на окружности» точка пересечения прямой l_A и окружности δ движется по окружности δ равномерно с угловой скоростью 2ω. Точно так же движется и точка пересечения l_B с окружностью δ. Поскольку в один момент времени эти точки совпадают (положение M_0), то они совпадают и в любой другой момент времени. Отсюда следует утверждение теоремы.

Задача 3. *Сделайте самостоятельно рисунок, иллюстрирующий теорему о вращающихся прямых.*

Пояснение. Начертите окружность, разбейте ее на 12 равных частей. Проведите через одну из точек деления A и остальные точки деления прямые, а также касательную к окружности в точке A (рис. 12; получится пучок из 12 прямых, разделяющих плоскость на 24 равных по величине угла). Двигая карандаш по окружности, можно убедиться, что при переходе от точки деления M к следующей точке деления прямая AM поворачивается на один и тот же угол. Выберите еще одну точку деления B (скажем, четвертую от A) и постройте для нее такой же пучок из 12 прямых, как для точки A. Отметьте для каждой точки деления M острый угол между прямыми AM и BM (все эти углы одинаковы!).

Из теоремы о вращающихся прямых следует, что если продолжить все 23 построенные прямые до пересечения, то все 110 полученных точек пересечения (не считая A и B) лежат на одиннадцати окружностях — по десять на каждой.

Задача 4. *Хорда AB окружности закреплена, а хорда CD перемещается, не меняя своей длины. По какой линии движется точка пересечения прямых: а) AD и BC; б) AC и BD* (рис. 13)?

Пояснение. Пусть точка D равномерно движется по данной окружности, тогда и точка C равномерно движется по ней, а следовательно, и прямые AD, BC, AC, BD равномерно вращаются вокруг точек A и B (с одной и той же угловой скоростью). Согласно теореме о вращающихся прямых точки пересечения соответствующих прямых движутся по окружностям.

Эта задача тесно связана с задачами 12*, 13* из п. 111 «Геометрии 8».

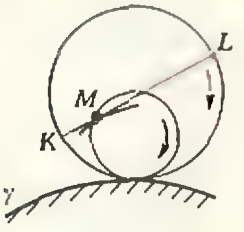


Рис. 19.

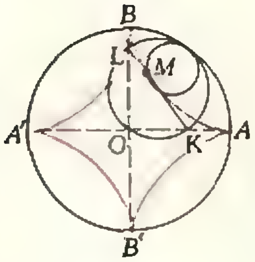


Рис. 20.

Задача 5. *По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую линию описывает точка K подвижной окружности* (рис. 14)?

Ответ в этой задаче до удивления простой: точка движется по прямой, точнее — по диаметру неподвижной окружности (рис. 15). Этот результат называется *теоремой Коперника*.

Попробуйте убедиться в справедливости теоремы Коперника на опыте. Ее нетрудно и доказать — нужно лишь вспомнить теорему о вписанном угле.

Сравним результаты задач 1 и 5. В обеих задачах речь идет о довольно сложном движении фигуры (в первой — отрезка, во второй — окружности), но траектории некоторых точек получаются неожиданно простыми. Оказывается, эти две задачи похожи не только внешне, но и сами движения, рассмотренные в них, совпадают!

Действительно, пусть по окружности радиуса d изнутри катится окружность радиуса $d/2$, и пусть KL — диаметр этой окружности, жестко связанный с ней. Согласно теореме Коперника точки K и L двигаются по неподвижным прямым (диаметрам большой окружности — AA' и BB' соответственно; рис. 16). Итак, диаметр KL скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, то есть движется так, как отрезок в задаче 1.

Поставим еще вопрос, связанный с движением отрезка KL:

Задача 6. *Какое множество точек заметает этот отрезок, то есть каково объединение всевозможных положений отрезка KL при его движении?*

Ответ. Кривая, ограничивающая это множество, называется *астроидой* (рис. 17). Оказывается, ее можно получить так: заставить круг диаметра $d/2$ катиться изнутри по окружности диаметра $2d$ и нарисовать траекторию какой-то определенной точки окружности катящегося круга (рис. 18; эта траектория и есть астроида).

Прежде чем пояснять задачу 6, сформулируем любопытное правило, позволяющее наглядно описать семейство касательных к траектории точки M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по некоторой линии γ (рис. 19). Покатим по той же линии γ окружность радиуса $2r$ вместе с ее диаметром KL (жестко с ней скрепленным), причем диаметр выберем так, что в некоторый момент времени его конец K и точка M попадают в одну и ту же точку A линии γ. Оказывается, что тогда в любой момент времени *диаметр KL касается траектории точки M*. Другими словами, *эта траектория служит огибающей всех положений диаметра KL*. Это удобное правило мы назовем *теоремой о двух кругах*. Эта теорема тесно связана с теоремой Коперника.

Если две окружности, о которых идет речь в теореме, катить одновременно так, чтобы точки их соприкосновения с кривой γ все время совпадали, то меньшая окружность будет катиться по большей без скольжения. Тогда по теореме Коперника точка M будет двигаться по фиксированному диаметру KL большей окружности. А теорема о двух кругах утверждает, что прямая KL будет касательной, проведенной в точке M, к траектории этой точки.

Пояснение к задаче 6. Пусть окружность радиуса r с отмеченной точкой M катится изнутри по окружности радиуса $R=4r$. Покатим вместе с ней окружность радиуса $2r$ вместе с ее диаметром KL (рис. 20; в начальный момент точки K и M совпадают с точкой A неподвижной окружности). По теореме Коперника концы диаметра KL скользят по двум взаимно перпендикулярным диаметрам AA' и BB' неподвижной окружности. В то же время по теореме о двух кругах диаметр KL при своем движении касается траектории точки M, то есть *огибающей прямых KL служит астроида с остриями в точках A, B, A', B'.*

В. Болтянский,
М. Смолянский

Путеводитель по звездным лабиринтам

Говорят, что, когда у Анаксагора, греческого философа, жившего в V веке до н. э., спросили: «Ради чего лучше родиться, чем не родиться?», мудрец ответил: «Чтобы созерцать небо и устройство всего космоса!».

На протяжении веков люди расширяли свои знания об устройстве космоса. Из поколения в поколение передавались способы и приемы, воспользовавшись которыми можно сравнительно быстро освоиться с наиболее яркими звездами и наиболее приметными созвездиями.

Эти способы и приемы в известной степени нашли свое отражение в школьной программе по астрономии и в общеобразовательных программах для СПТУ. Но курс астрономии в школе и ПТУ изучается на пороге выпуска из этих учебных заведений. Поэтому, не дожидаясь, пока вы станете десятиклассниками или учащимися III курса ПТУ, займитесь уже сейчас изучением звездного неба с помощью научно-популярных книг и журналов. Мы уверены, что знание звездного неба пригодится каждому из вас. Вашими помощниками могут стать книги Ф. Ю. Зигеля «Сокровища звездного неба» (М., «Наука», 1976), М. М. Дагаева «Наблюдения звездного неба» (М., «Наука», 1978), серии статей, публикуемые в научно-популярных журналах «Земля и Вселенная» и «Наука и жизнь». В 1978 году издательство «Наука» выпустило путеводитель по звездному небу — книгу Б. А. Максимачева и В. Н. Комарова «В звездных лабиринтах. Ориентирование по небу». Чем она интересна? Прекрасно сказал об этом в предисловии к книге Герой Советского Союза, летчик-космонавт СССР В. В. Лебедев: «Предлагаемая читателю книга поможет ему не только познакомиться со звездным небом, но и научит его приемам быстрого и уверенного отыскания созвездий и навигационных звезд, окажет практическую помощь не только любителям астрономии, но и всем тем, кто по роду своей деятельности встречается с задачей ориентирования по звездам, — геодезистам, картографам, штурманам, летчикам-космонавтам».

Начало книги знакомит читателя с «небесной геометрией» (так называют авторы книги основы сферической астрономии), дает представление о небесной сфере, угловых измерениях на ней, системах небесных координат, особенностях суточного движения небесных светил на разных географических широтах. Авторы рассказывают об основных методах определения географической широты и долготы, о принципах астрономической навигации.

Теперь, когда читатель подготовлен к «самому главному», авторы начинают вести его по «пути к созвездиям». Процесс изучения звездного неба авторы делят на два этапа: сначала знакомят с основными созвездиями и (что очень важно!) с входящими в них объектами. Потом переходят к распознаванию фигур созвездий, правилам их отыскания на небе и перехода от одного созвездия к другому. «Мы будем знакомиться с созвездиями и звездами так, как знакомимся с новыми для нас людьми: сначала это просто люди с различными именами, принадлежащие к тем или иным группам, потом в каждом из них открывается что-то свое, особенное, присущее только данному индивидууму...»

Созвездиями, «озаренными Солнцем», называют авторы зодиакальные созвездия, в которых по месяцу успевает «погостить» дневное светило. Конечно, созвездие, в котором Солнце находится сейчас, увидеть можно либо на электрическом небе планетария, либо на настоящем небе в редкие минуты полных солнечных затмений. Но эта трудность не лишает нас возможности изучать зодиакальные созвездия. Не нужно только торопиться: давайте сегодня поздно вечером знакомиться с зодиакальным созвездием, кульминирующим в полночь. В нем Солнце было полгода назад, а тем созвездием, в котором Солнце «находится» сегодня, мы будем любоваться через полгода (поскольку кажущееся годичное движение Солнца есть отражение действительного движения Земли вокруг Солнца).

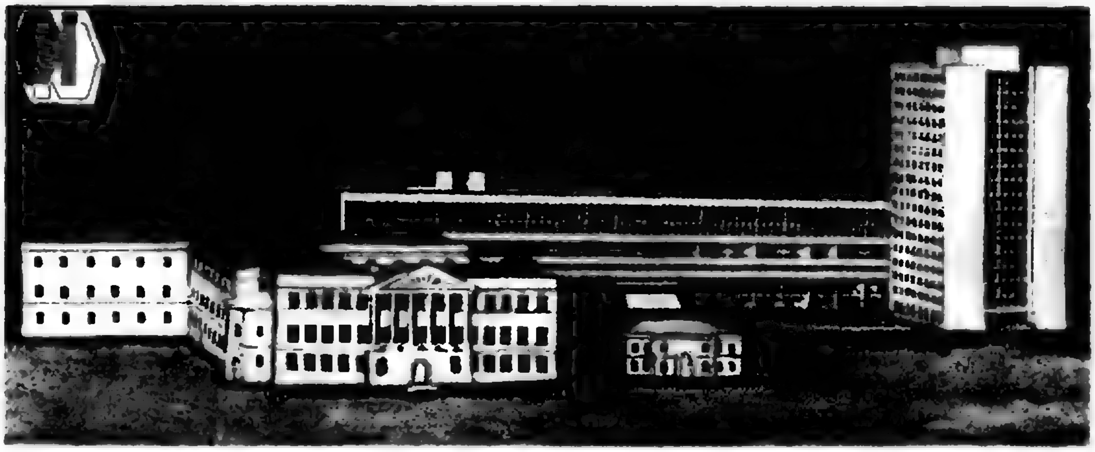
На наш взгляд, книга интересна. Тем более досадно, что в ней встречаются некоторые неточности. Так, не следует писать, что «Капелла *бледнее* [курсив Е. Л.] *многих* других звезд...» (с. 89), «В созвездии Змеи лишь одна звезда... α ярче третьей величины (*все остальные* — четвертой величины)» (с. 156) и т. п.

Изучать звездное небо вы обязательно будете с помощью звездных карт и астрономических календарей. О них подробно рассказывается в книге, а небольшой комплект звездных карт вложен в книгу. Важным дополнением к этим пособиям явятся многочисленные схематические изображения отдельных созвездий и групп созвездий, которыми хорошо иллюстрирована книга.

Заключительная глава книги посвящена Луне и планетам Солнечной системы. В параграфе «Чтобы не заблудиться на Луне» довольно подробно объясняется необходимость астроориентировки на Луне и сообщается немало интересных сведений из области «лунной астрономии».

Мы желаем успеха тем, кто отправится в увлекательное путешествие по звездным лабиринтам!

Е. Левитан



Наш журнал уже неоднократно рассказывал о ведущих вузах страны. В этом номере мы расскажем об одном из старейших вузов — Московском ордена Ленина институте инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Указом Президиума Верховного Совета СССР 11 апреля 1979 года Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии «за заслуги в подготовке высококвалифицированных специалистов для народного хозяйства, значительный вклад в развитие науки и в связи с 200-летием со дня основания» награжден орденом Ленина.

Старейший технический вуз страны

Московский ордена Ленина институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии ведет свою историю от Константиновского землемерного училища, открытого 14 (27) мая 1779 г. Одним из оснований для создания такого учебного заведения послужило подписание Екатериной II в 1765 году Манифеста о Генеральном межевании земель Российской империи. В 1766 г. была издана «Инструкция землемерам к Генеральному всей Империи земель размежеванию». В указанной инструкции в части, касающейся съемок, говорилось: «Снятие производить через вернейший инструмент — астролябию с принадлежностями, которые, приняв, осмотреть с прилежанием в ее исправности и содержать в крайнем бережении, чтобы оный не испортился».

Для организации и производства работ по Генеральному межеванию в составе Правительствующего Сената была на правах департамента образована Межевая экспедиция, в Москве — Межевая канцелярия, в губерниях — Межевые конторы; было учреждено звание землемеров.

Естественно, встал вопрос о подготовке лиц, владеющих искусством измерений на Земле, — землемеров (по современной терминологии — геодезистов).

Указом Правительствующего Сената от 23 апреля 1779 г. было предписано начать при Межевой канцелярии обучение землемерному делу помощников и учеников. Рапортом в Сенат по Межевой экспедиции 16 мая 1779 г. Межевая канцелярия доносила: «...училище... открыто сего мая 14 дня..., сие землемерное училище наименовано Константиновским».

Основателем училища и его как бы директором был первый член (директор) Межевой канцелярии, обер-прокурор Сената тайный советник Сергей Рожнов.

В первый год в училище обучалось 75 человек.

Если учесть, что первый состав учеников КЗУ более чем на половину состоял из землемерных помощников, т. е. людей взрослых и образованных, то уровень подготовки в Землемерном училище по тем временам надо признать самым высоким в области геодезии для нужд Генерального межевания.

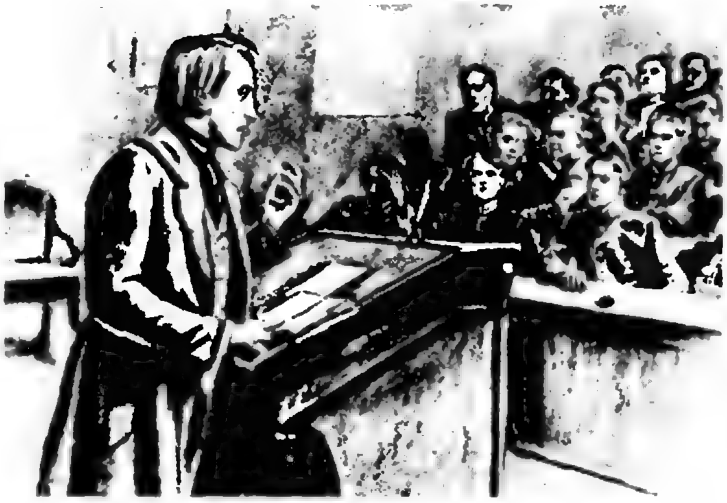
Первая, наиболее существенная, реформа КЗУ после его основания была проведена в 1819 г., когда были утверждены устав училища и новый штат. Вместо 100 учеников по новому уставу полагалось 200. Срок обучения составлял 4 года; перевод из нижних классов в высшие производился только по экзаменам. Училище было открытым, с лекционной системой, и все ученики — приходящими.

Главным поводом для очередной реорганизации КЗУ была нехватка землемеров, что привело к преобразованию в 1835 г. училища в Константиновский межевой институт.

Первым директором КМИ был назначен известный русский писатель С. Т. Аксаков.

При приеме детям землемеров и чиновников Межевого ведомства отдавалось предпочтение.

Срок обучения был сохранен прежний — 4 года; особое внимание обращалось на необходимость практической выучки по геодезии в полевых условиях, на что отводилось в два последние года обучения время с 15 июня по 1 августа. Добавлены были предметы: алгебра, физика, геодезия, агрономия. Большим достижением являлось введение предмета «геодезия» как самостоятельного, хотя и в училище геодезия изучалась довольно основательно. Наряду со специальными и физико-математическими дисциплинами большое внимание уделялось изучению географии, истории, русского языка. Для преподавания русского языка тогдашний директор КМИ С. Т. Аксаков пригласил знаменитого Виссариона Григорьевича Белинского. Правда, В. Г. Белинский пробыл в институте недолго — с 10 марта по 22 октября 1838 г.



В. Г. Белинский читает лекцию в КМИ

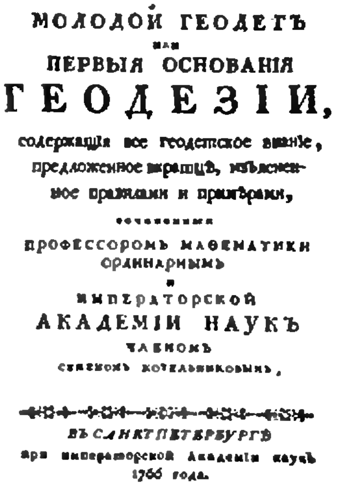
Н. И. Лузин

В 1844 г. в институте было введено семилетнее обучение. Институт был официально признан «Главным межевым учебным заведением» для подготовки землемеров по Государственному межеванию земель.

Геодезия всегда оставалась основной, ведущей дисциплиной института. Большое внимание уделялось также преподаванию высшей математики, механики и других фундаментальных наук. К преподаванию математики в институте привлекались такие выдающиеся ученые, как С. А. Чаплыгин и Н. Н. Лузин. О том, как преподавалась математика в Межевом институте, можно судить по отзыву известного военного геодезиста А. П. Болотова, который, побывав в институте на занятиях по геометрии, сказал: «У вас геометрия проходится так основательно, как нигде».

Исключительно большое значение в КМИ придавалось дополнительному обучению астрономии и геодезии в Пулковской обсерватории, куда направлялись лица, оставленные для подготовки к профессорской деятельности. Пулковская обсерватория непосредственно участвовала в подготовке астрономо-геодезистов Межевого, а затем Московского геодезического института до 1932 г.

Константиновский межевой институт всегда проводил большую научную работу. Постоянные наблюдения велись на астро-



МОЛОДОЙ ГЕОДЕТЪ
или
ПЕРВЫЯ ОСНОВАНІЯ
ГЕОДЕЗІИ,
содержащія все геодетское знаніе,
предложенное кратцѣ, изъясненное правилами и примѣрами,
сочиненныя
профессоромъ математики
ординарнымъ
и
императорской
АКАДЕМІИ НАУКЪ
членомъ
Семеномъ Котельниковымъ,

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ
при императорской Академіи наукъ
1766 года.

Титульный лист первого учебника по геодезии номической, магнитной и метеорологической обсерваториях института. На астрономической обсерватории профессором Б. Я. Швейцером в 1853 г. была открыта новая комета.

Начиная с 40-ых годов прошлого века преподаватели и воспитанники КМИ участвовали во многих научных экспедициях — в Астраханской, Восточно-Сибирской, Алтайской, экспедиции на Шпицберген, в Русской полярной экспедиции Толля, а также в съемках многих городов России. Для участия в полярной экспедиции адмирала С. О. Макарова был командирован по окончании института в 1896 г. К. А. Цветков. Директор института получил от адмирала С. О. Макарова отзыв: «От души благодаря за содействие по назначению на «Ермак» межевого инженера К. А. Цветкова. В обстановке, для него совершенно чуждой, он скоро освоился и был энергичным сотрудником по съемке льдов, гидрологии и метеорологии. У меня остались о нем лучшие воспоминания».

Студенчество КМИ весьма чувствительно реагировало на деспотизм, насилие и произвол, имевшие место в стране при царском строе: время от времени в институте вспыхивали «беспорядки». В 1891 г. из института за призыв «оказать администрации прямое сопротивление действием» были изгнаны студенты-старшекурсники В. Бонч-Бруевич, Н. Хавский и В. Ярмоленко.

В период первой русской революции в Межевом институте революционное настроение студентов было особенно резко выражено; в силу этого распоряжением реакционно-столыпинского правительства институт в течение двух учебных годов был закрыт.

Подлинного расцвета высшее геодезическое образование достигло после Великой Октябрьской социалистической революции. Выдающуюся роль сыграл Декрет о создании Высшего Геодезического Управления, который был подписан Владимиром Ильичом Лениным 15 марта 1919 г.

В 1930 г. Геодезический факультет был развернут в Московский геодезический институт с пятью отделениями, а землеустроительный факультет был выведен из состава института с передачей Наркомзему. В 1936 г. Геодезический институт переименовали в Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. В нем были созданы три факультета: геодезический, картографический и геодезического инструментоведения.

В настоящее время институт готовит инженеров по следующим специальностям и специализациям: астрономо-геодезия, морская геодезия (с 1974 г.), прикладная геодезия, космическая геодезия (с 1968 г.), аэрофотогеодезия, издание карт, проектирование и составление карт, оптическое и оптико-электронное приборостроение, исследование природных ресурсов (с 1976г.).

В МИИГАиК, как и прежде, математика остается одним из основных предметов и изучается в большом объеме.

Учебный процесс по математике непрерывно совершенствуется. На основании новых программ составляются рабочие программы для всех специальностей МИИГАиК с учетом запросов специальных кафедр. Например, на геодезическом факультете, кроме основных разделов математики, изучаются некоторые разделы дифференциальной геометрии и уравнение Лапласа; на оптико-механическом факультете — преобразование Фурье и операционное исчисление; на аэрофотогеодезическом факультете — преобразование Фурье и теория случайных функций; на картографическом факультете даются сведения о конформном отображении. Созданный в институте вычислительный центр успешно используется в учебном процессе и является технической базой для научных исследований преподавателей, аспирантов и студентов. Для студентов младших курсов проводятся занятия в классе программированного обучения. Студенты института выступают с докладами на ежегодных научных студенческих конференциях и на занятиях студенческих научных кружков.

Большую работу проводят кафедры института в подготовке и проведении вступительных экзаменов в институт. В течение учебного года проводится кружковая работа со школьниками, организуется очный зачет для слушателей московских телевизионных курсов по физике и математике. В апреле и мае читаются воскресные лекции для школьников, а в июне и июле организуются ежедневные занятия со школьниками.

Институт богат революционными традициями. Многие выпускники и преподаватели были активными участниками Великой Октябрьской социалистической революции и гражданской войны, среди них В. Д. Бонч-Бруевич — управляющий делами Совета Народных Комиссаров, М. Д. Бонч-Бруевич — первый начальник полевого штаба Реввоенсовета республики, П. А. Кобозев — председатель Совета Министров Дальневосточной республики.

В настоящее время коллектив института вдохновенно трудится над выполнением задач, поставленных XXV съездом КПСС по дальнейшему повышению качества подготовки специалистов для народного хозяйства страны и, в первую очередь, по новым направлениям науки и техники.

В. Большаков

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете с 1968 года работает Заочная школа для учащихся 8—10 классов школ Сибири, Дальнего Востока, Казахстана и Средней Азии. В настоящее время в Заочной школе три отделения: математическое, физическое и химическое, на которых учатся более 2000 школьников. Обучение в Заочной школе углубляет знания учащихся, способствует развитию самостоятельного логического мышления, расширяет кругозор.

Учащиеся Заочной школы в течение учебного года должны выполнить 5—6 заданий, тематика которых совпадает с недавно пройденным или изучаемым в данный момент материалом школьной программы. Особое внимание уделяется тем разделам программы, которые в средней школе усваиваются недостаточно глубоко.

Каждое задание начинается с краткой подборки теоретического материала, вполне достаточного, чтобы после внимательного его изучения и творческого использования можно было решить все предложенные 15 задач. При этом в качестве примера подробно рассматриваются 1—2 задачи, аналогичные тем, что приведены в задании. Задания содержат задачи двух типов: несколько простых задач, обязательных для решения, и 3—4 сложных, которые весьма желательно решить полностью или частично.

Лучшие учащиеся Заочной школы ежегодно, в период с 1 по 22 августа, приглашаются в Летнюю школу при НГУ, где они вместе с победителями Сибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, встречаются со своими преподавателями, решают интересные задачи по физике, математике, химии, знакомятся с университетом и институтами Сибирского отделения АН СССР. Около 60—70 ребят Заочной школы, успешно пройдя собеседования, становятся учениками очной физико-математической школы-интерната при НГУ. В период зимних каникул 200 учащихся Заочной школы из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Учащиеся Заочной школы, успешно выполнившие все задания, по окончании 10 класса получают удостоверения; при поступлении в НГУ при прочих равных условиях они имеют приоритет на зачисление. Статистика показывает, что выпускники Заочной школы поступают в НГУ вдвое успешнее, чем остальные учащиеся.

Чтобы стать учащимся Заочной школы, необходимо в период с 1 по 30 сентября прислать на имя директора Заочной школы заявление с просьбой выслать 1-е задание. В заявлении нужно указать свою фамилию, имя, отчество, класс, в котором Вы учитесь, отделение Заочной школы, на котором Вы желаете учиться (математическое, физическое, химическое), и подробный домашний адрес (с индексом почтового отделения).

При положительной оценке за первое задание ученик зачисляется в Заочную школу, ему высылается работа с рецензией и очередное задание.

Учиться в Заочной школе можно начать не только в 8, но и в 9 и 10 классах.

Напоминаем, что в Заочной школе рассматриваются заявления только от учащихся школ Сибири, Дальнего Востока, Казахстана и Средней Азии.

Дорогие ребята! Ждем Ваших заявлений о приеме в Заочную школу при НГУ.

Наш адрес: 630090, г. Новосибирск, 90, ул. Пирогова 11, Заочная школа при НГУ

Э. Марченко

Вечерняя физическая школа

Вечерняя физическая школа (ВФШ) на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся 8—10 классов на 1979/80 учебный год. Систематические занятия в ВФШ способствуют развитию навыков самостоятельного решения физических задач, вводят учащихся в курс проблем современной физики. Семинарские занятия проводят студенты старших курсов и аспиранты. Наиболее сложные вопросы школьной программы подробно разбираются на лекциях преподавателями и научными сотрудниками физического факультета. Экскурсии в лаборатории физического факультета, в Научно-исследовательский институт ядерной физики и Государственный астрономический институт позволяют учащимся ВФШ познакомиться с методикой научного эксперимента.

Конкурсный набор в Вечернюю физическую школу состоится в сентябре. Принять участие в конкурсе могут школьники 8—10 классов (в 9 и 10 классы проводится дополнительный набор). Для участия в конкурсе нужно до 20 сентября подать заявление на имя директора ВФШ, заполнить анкету в Комитете ВЛКСМ физического факультета, а также сдать 2 фотокарточки размером 3×4 см.

Прием заявлений будет проходить со 2 по 20 сентября с 16.00 до 18.00 (кроме воскресенья) в Комитете ВЛКСМ физического факультета МГУ (здание физического факультета, комната 2—47).

Зачисление в школу проводится по результатам собеседования. Требования по собеседованию не выходят за рамки школьной программы.

Наш адрес: Москва, Ленинские Горы, МГУ, Физический факультет. Телефон для справок: 139-26-56.

А. Васильев

Овал, восьмерка, два овала ...

1. «Восьмерка» содержит точку (0; 0); подставив $x=0$, $y=0$ в уравнение (5), получим $\frac{2}{c^2}=\frac{1}{b^2}$, т. е. $c=b\sqrt{2}$.

2. Указание. Найдите точки пересечения нашей кривой с осью Oy; подставьте одно из полученных значений y в уравнение (5) (геометрический смысл этой операции изображен на рисунке 1). Если полученное уравнение (относительно x) будет иметь одно решение, то овал выпуклый, а если три — то овал с талией.

Ответ. а) $0\leqslant c\leqslant b/\sqrt{2}$; б) $b/\sqrt{2}<c<b\sqrt{2}$.

3. Ответ. $|c|<R-r$ — два овала; $|c|=R-r$ — восьмерка; $R-r<|c|<R$ — овал с талией; $R\leqslant|c|<R+r$ — выпуклый овал; $|c|=R+r$ — точка, $|c|>R+r$ — $\varnothing$.

5. Уравнение $x^2+y^2-1=0$ задает окружность радиуса 1 с центром в начале координат; уравнение $x^2+y^2-4=0$ — окружность радиуса 2 с тем же центром. Поэтому уравнение $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)=0$ задает объединение этих окружностей.

6. Уравнение $P(x, y)=\frac{x^2}{10^2}+y^2-1=0$ задает «лежащий» эллипс, у которого горизонтальная полуось равна 10, а вертикальная 1. При этом, как легко убедиться, для точек $(x; y)$ внутри эллипса $P(x, y)<0$,

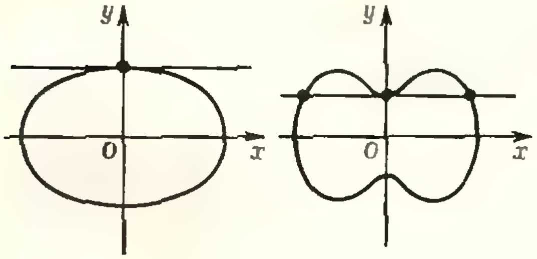


Рис. 1.

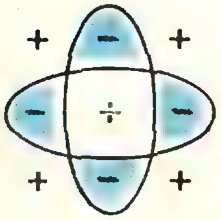


Рис. 2.

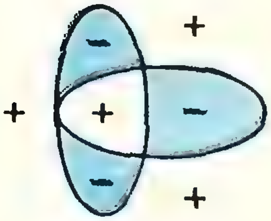


Рис. 3.

а для точек вне эллипса $P(x, y)>0$. Аналогично, уравнение $Q(x,y)=x^2+\frac{y^2}{10^2}-1=0$ задает «вертикальный» эллипс, внутри которого $Q(x, y)>0$, а снаружи $Q(x, y)>0$. Ясно, что уравнение $P(x, y)\cdot Q(x, y)=0$ задает объединение этих двух эллипсов, причем знаки функции $F(x, y)=P(x, y)\times Q(x, y)$ будут такими, какие изображены на рисунке 2. Поэтому, если взять очень маленькое число $\varepsilon>0$, то кривая, являющаяся графиком уравнения $F(x, y)=-\varepsilon$, пройдет целиком по «отрицательной области» (на рисунке 2 она ограничивает голубые области).

7. Можно проделать то же самое, что и в предыдущей задаче, с двумя эллипсами, расположенными, как показано на рисунке 3.

8. Пусть кривая четвертого порядка $P(x, y)=0$ содержит, кроме двух овалов (один из которых вложен в другой), еще хотя бы одну точку. Проведем через эту точку прямую, пересекающую оба овала; полученная прямая имеет с нашей кривой 5 или более общих точек. Пусть уравнение этой прямой $Ax+By+C=0$. Запишем систему:

$$\begin{cases} P(x,y)=0 & (1)\\ Ax+By+C=0 & (2)\end{cases}$$

С помощью уравнения (2) выразим одну из переменных через другую и подставим ее в уравнение (1). Мы получим уравнение четвертой степени. Как известно, оно не может иметь более четырех решений, что противоречит наличию пяти общих точек у прямой и кривой.

9. Пусть кривая $P(x, y)$ состоит из 5 или более овалов. Возьмем на каждом из овалов по точке и через полученные 5 точек проведем кривую второго порядка (ее уравнение $Q(x, y)=0$). Ясно, что точки можно выбрать так, чтобы эта кривая пересекала все овалы, а не касалась их. Тогда у кривых $P(x, y)=0$ и $Q(x, y)=0$ будет 10 (или более) точек пересечения. Мы получим противоречие, если докажем, что система

$$\begin{cases} P(x, y)=0\\ Q(x,y)=0\end{cases} \qquad (3)$$

имеет не более 8 решений (напомним, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — многочлены, соответственно, четвертой и второй степени); верен и более общий факт: если $P(x, y)$ имеет степень m, а $Q(x, y)$ — степень n, то система (3) имеет не более $m\cdot n$ решений *). Для того, чтобы это доказать, сведем систему (3) к одному алгебраическому уравнению 8-й степени следующим образом:

---

*) Следует сделать одну оговорку: число решений системы (3) может быть *бесконечным*. (Например, кривая $P(x, y)$ состоит из двух окружностей, а $Q(x, y)=0$ — одна из этих окружностей.) Этот случай, однако, нам неинтересен (почему?). Если же число решений *конечно*, то оно не превосходит $m\cdot n$.

1) С помощью замены переменных $z=ax+by+c$, $t=dx+ey+f$, подобрав подходящие числа a, b, c, d, e, f, сведем уравнение $Q(x, y) = 0$ к одному из следующих видов:

(а) $z+At^2=B$

(б) $z^2+At^2=B$.

Далее уравнение $P(x, y) = 0$ тоже можно переписать через новые неизвестные: $R(z, t)=0$; при этом (что очень важно!) оно останется уравнением четвертой степени (объясните!).

2) В случае (а), выразив $z=-At^2+B$, подставим это выражение для z в уравнение $R(z, t)=0$ и получим уравнение 8-й степени относительно t.

3) В случае (б) возьмем уравнение $R(z, t)=0$ и оставим в нем слева те одночлены, в которые z входит в четной степени, а остальные перенесем в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. Мы получили уравнение восьмой степени, которое содержит *только четные степени* z. Подставив в него выражение $z^2=-At^2+B$ (см. (б)), получим уравнение восьмой степени относительно t.

Где ошибка?

Сложив уравнения (1), (2), мы получаем уравнение

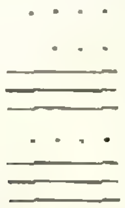
$$0x + 0y + 0z + 2d = 0. \qquad (3)$$

Отсюда числовое равенство $d=0$ получается только при условии, что уравнение (3) имеет хотя бы одно решение. Таким образом, наше «доказательство» доказывает только следующее утверждение: если две плоскости симметричны относительно начала координат O и пересекаются, то они обе проходят через точку O.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Заполним две первые пустые клетки буквами x и y. Заметим, что $x+y=9$, тогда в следующей клетке должно стоять число 6, в следующей x, в следующей y и т. д., пока не дойдем до клетки, где стоит число 4, но там должно стоять число y, отсюда $y=4$, а $x=5$, и в последней пустой клетке стоит число 5.

2. Ответ:



3. VI+III=IX.

4. Рассмотрите осевую симметрию с осью OE, где O — центр полуокружности (см. рис. 4), и докажите, что сторона большего квадрата в два раза длиннее стороны меньшего квадрата.

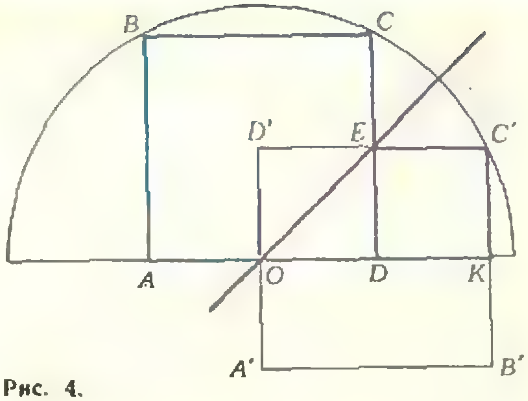


Рис. 4.

5. Пусть одна книга стоит x коп. Тогда $9x<1000$, т. е. $x\leqslant 111$. В то же время $10x>1100$, т. е. $x>110$. Следовательно, $x=111$ — книга стоит 1 р. 11 коп.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Э. Назаров, А. Пономарева,
Н. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

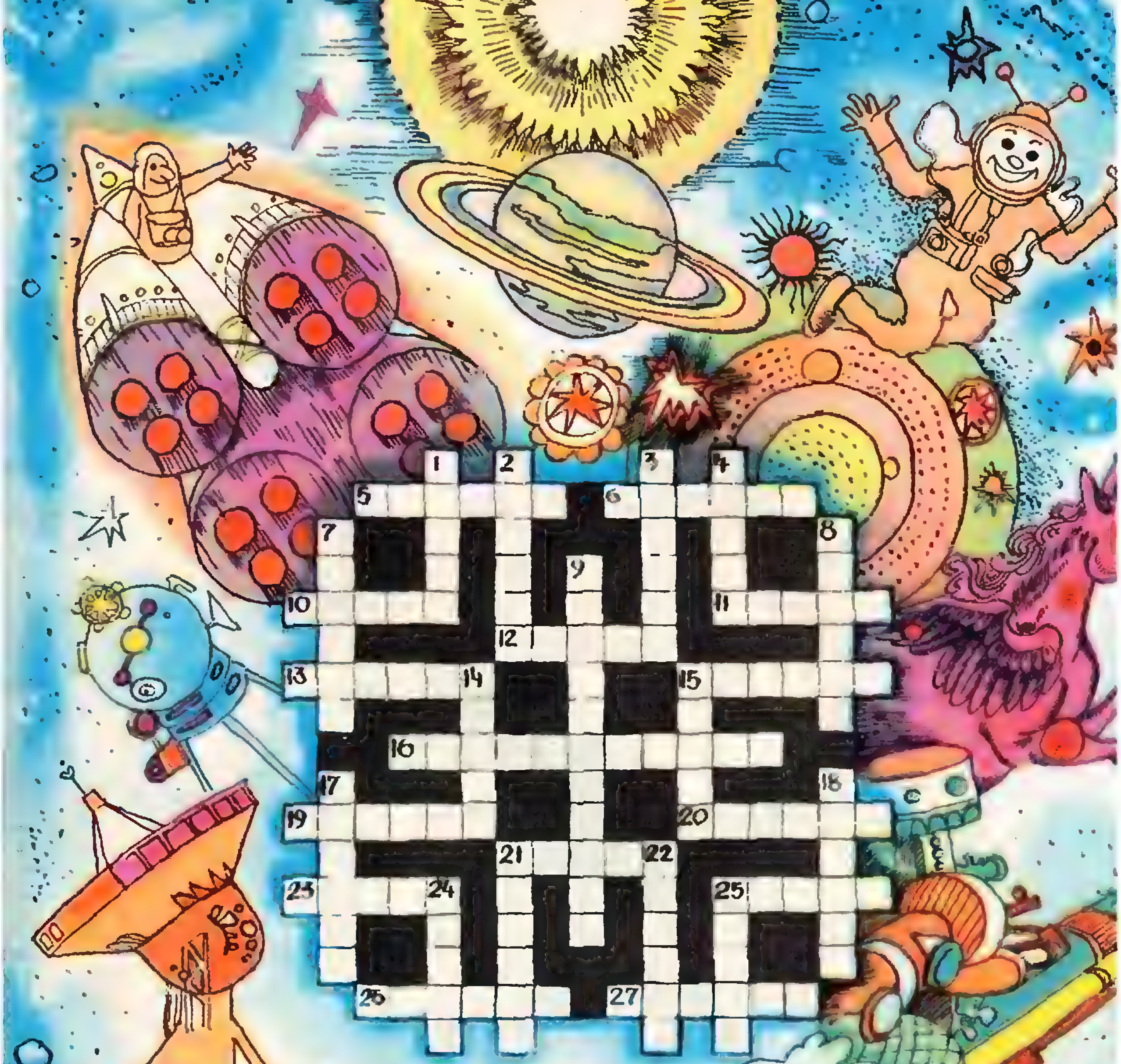
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Л. Н. Боровина, В. П. Сорокина

113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 1/VI-79
Подписано в печать 12/VII-79
Бумага 70×108$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,76 Т-11249
Цена 30 коп. Заказ 1209 Тираж 279 035 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Как мерить расстояния между географическими пунктами? Ведь некоторые из этих пунктов весьма велики и, скажем, совсем не безразлично, от какой точки Москвы мерить расстояние до Мытищ: результат может измениться почти вдвое. О том, как связаны рисунок на этой странице обложки и упомянутая проблема, можно прочесть на с. 37



Кроссворд «Космос»

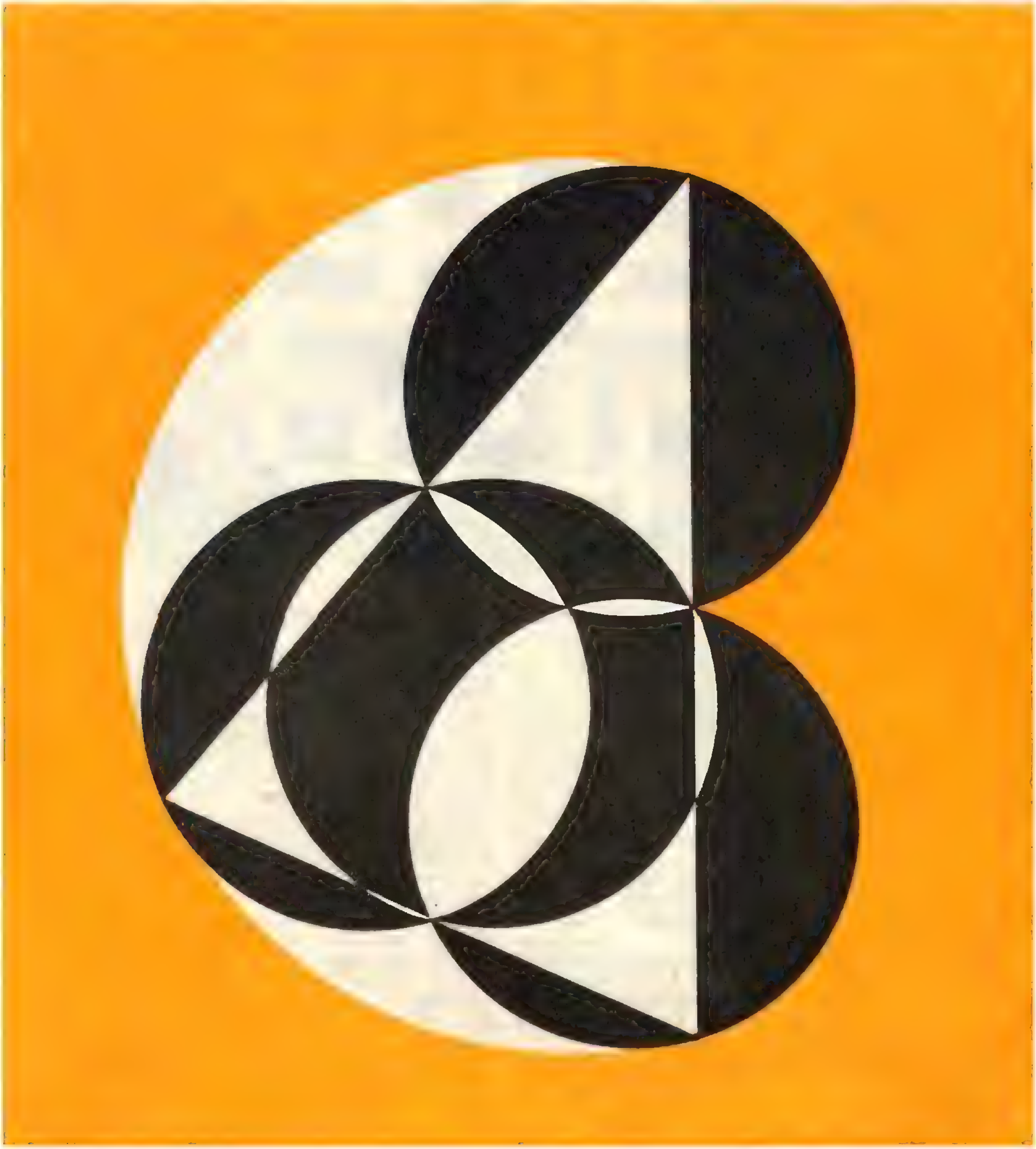
По горизонтали: 5. Крупнейшая планета Солнечной системы. 6. Замкнутая кривая, являющаяся одной из возможных форм орбиты. 10. Экваториальное созвездие, три звезды которого образуют «пояс». 11. Часть суток. 12. Одна из основных частей камеры ракетного двигателя. 13. Вторая по порядку от Солнца планета. 15. Серия советских спутников связи. 16. Прохождение светила через меридиан небесной сферы. 19. Вселенная. 20. Яркая звезда в созвездии Ориона. 21. Оптический прибор, с помощью которого космонавт контролирует угловое положение корабля при выполнении ручной ориентации. 23. Взлет ракеты. 25. Советский ученый в области механики, академик, президент Международной астрономической федерации в 1959—1963 гг. 26. Созвездие Северного полушария неба. 27. Летчик-космонавт СССР, осуществивший переход из одного космического корабля в другой через открытый космос.

По вертикали: 1. Спутник Сатурна. 2. Созвездие Южного полушария неба. 3. Советский ученый, академик, конструктор ракетных двигателей. 4. Летчик-космонавт СССР, совершивший полет на корабле «Восток-2». 7. Созвездие Северного полушария неба. 8. Наиболее удаленная от центра Солнца точка орбиты небесного тела, движение которого рассматривается относительно Солнца. 9. Недостаточная мышечная деятельность, обусловленная пребыванием космонавта в кабине малого объема и невесомостью. 14. Американская ракета-носитель, применявшаяся для запуска ряда спутников и космических кораблей. 15. Двойная звезда в созвездии Большой Медведицы. 17. Серия советских одноместных космических кораблей. 18. Звезда в созвездии Персея. 21. Летчик-космонавт СССР (1935—1971). 22. Полная продолжительность работы двигателя на ракете. 24. Созвездие Южного полушария неба. 25. Стационарное сложное комплексное сооружение, на котором производится огневое испытание ракетного двигателя.

В. Грязе

Индекс 70465
Цена 30 коп.

Если треугольник разбить его средними линиями на четыре треугольника и около каждого из них описать окружность, то получится фигура, изображенная на этом рисунке. Средняя окружность — описанная около внутреннего треугольника — это знаменитая окружность Эйлера. Иногда ее называют окружностью девяти точек: оказывается, она проходит не только через основания медиан основного треугольника, но и через основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины и ортоцентр треугольника. Подробнее об этой окружности рассказано на с. 36



НОМЕР
9

Основан в 1970 году

КВАНТ

9
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

2 *А. Земляков.* Биллиарды и поверхности
10 *А. Михайлов.* Когда наступает полдень?
15 *М. Дагаев.* Исчезновение кольца Сатурна

Лаборатория «Кванта»

17 *В. Майер.* Модели смерча

Математический кружок

19 *А. Ширшов.* Об одной комбинаторной задаче

Задачник «Кванта»

21 Премии «Кванта»
22 Задачи М581 — М585; Ф593 — Ф597
24 Решения задач М528, М529; Ф538 — Ф541

По страницам школьных учебников

29 *В. Гутенмахер.* Неравенства с фиксированной суммой

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *Н. Михайлова.* Емкости

Практикум абитуриента

38 *Я. Суконник, П. Горнштейн.* Геометрические решения геометрических задач

Искусство программирования

44 Представляем новый раздел
47 *А. Ершов, Г. Звенигородский.* Зачем надо уметь программировать?
52 *Г. Звенигородский.* Заочная школа программирования, уроки I и 2

Информация

58 Заочная физическая школа

Рецензии, библиография

60 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
62 *И. Слободецкий.* Новая научно-популярная серия издательства «Наука» — Библиотечка «Квант»
63 *И. Петраков.* Прекрасное собрание первоисточников по математике
64 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с. 9, 14, 16, 36, 43, 59*)

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Кривые
на первой странице
обложки
нарисованы ЭВМ
с помощью
системы АЛГРАФ
Подробнее
об этих кривых
см. на четвертой
странице обложки

Ю. Котов

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

А. Земляков

Биллиарды и поверхности

Отражаясь от стенок, точечный шарик движется по биллиардному столу многоугольной формы. При каких условиях его движение будет периодическим? Бывают ли, при данном непериодическом движении, такие области, куда шарик не попадет никогда?

Чтобы ответить на эти просто формулируемые, но трудные вопросы, в этой статье вместо движения с отражениями по плоскости рассматривается движение без отражений по поверхности. Оказывается, от биллиарда в многоугольнике к движению по поверхности можно перейти некоторой склейкой многоугольников.

В начале статьи этот переход поясняется на примере прямоугольного биллиарда. После необходимого разговора о склейке поверхностей рассматривается общий случай. В частности, решаются задачи 16 и 17 из статьи «Математика биллиарда» («Квант», 1976, № 5).

1. Биллиард в прямоугольнике и обмотки тора

Нас интересует следующий вопрос: *какими могут быть траектории биллиардного шара, движущегося в прямоугольнике П?* Мы считаем шар точкой и интересуемся *бесконечными* траекториями — никогда не попадающими в вершины прямоугольника (рис. 1). Наличие многочисленных отражений от стенок биллиарда сильно затрудняет исследование траекторий шарика. Однако каждую биллиардную траекторию можно «выпрямить» с помощью последовательных отражений ее отрезков относительно сторон прямоугольника — так, как показано на рисунке 2. Если с самого начала с помощью отражений «замостить» всю плоскость прямоугольниками, конгруэнтными П, то, при обратных отражениях, прямые на плоскости дадут биллиардные траектории в прямоугольнике П. Оказывается, нет нужды рассматривать бесконечное множество отраженных прямоугольников — можно обойтись четырьмя, образующими «большой» прямоугольник П′ (рис. 3), если считать, что шарик, дойдя до его стороны, «перепрыгивает» в соответственную точку противолежащей стороны ($C \to C'$, $E \to E'$, ..., $K \to K'$, $L \to L'$, ..., $S \to S'$) и движется в прежнем направлении до следующего попадания на одну из его сторон. Действительно, складывая (с помощью симметрий) из П′ прямоугольник П, мы получим из прыгающих траекторий в П′ настоящие биллиардные траектории в П.

Таким образом, мы сумели избавиться от отражений траектории, однако у нее появились «прыжки». Чтобы избавиться от них, свернем прямоугольник П′ в цилиндр и склеим стороны XY и $X'Y'$; при этом точки L и L', N и N', ..., I и I' (рис. 3) склеются между собой, и траектория будет плавно обматываться вокруг цилиндра (рис. 4). Однако остаются

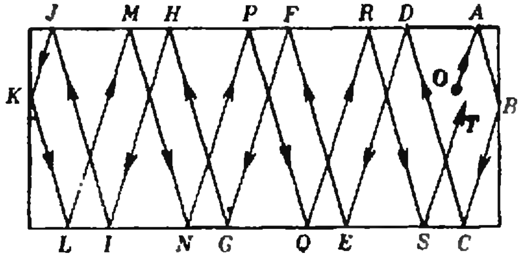


Рис. 1.

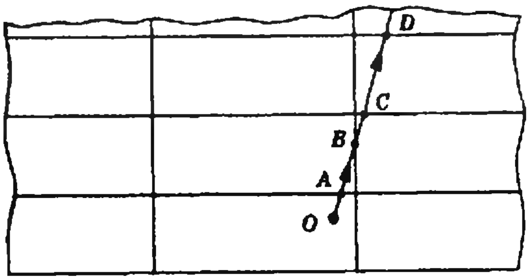


Рис. 2.

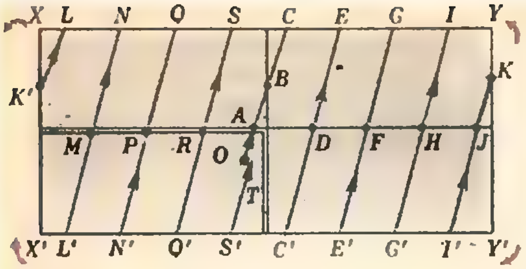


Рис. 3.

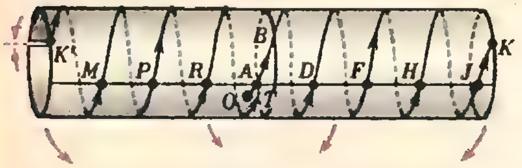


Рис. 4.

еще прыжки со стороны YY' на сторону XX' (на наших рисунках — прыжок $K \to K'$). Чтобы избавиться и от них, свернем цилиндр, считая его как бы резиновым, в кольцо и склеим его основания: получим поверхность, напоминающую бублик — математики называют ее *тором*, — по которой плавно обматывается, без отражений и скачков, наша траектория (рис. 5).

2. Биллиардные траектории в прямоугольнике

Тор можно также получить вращением окружности Г около не пересекающей ее оси ZZ', лежащей в плоскости окружности (рис. 6). При этом каждая точка окружности Г даст на торе окружность, которую назовем *параллелью* тора. Окружности, получающиеся из Г при каждом конкретном повороте, естественно назвать *меридианами* тора (рис. 6). Наконец, большой прямоугольник П', из которого был склеен тор, удобно рассматривать как *карту* тора. Хотя траектория из п. 1 обматывается вдоль тора, следить за ней можно, как и в навигации, по карте.

Пусть шарик движется с единичной скоростью под углом α к стороне «a» прямоугольника П. Тогда составляющие скорости движения по карте тора П' вдоль параллелей и меридианов равны, соответственно, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Параллели на карте тора имеют длину $2a$, поэтому через время $t_0 = 2a/\cos\alpha$ точка на торе возвращается на прежний меридиан, причем сдвигается вдоль него на расстояние (по карте) $l_0 = t_0 \cdot \sin\alpha = 2a \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, последовательные точки пересечения траектории, обматывающей тор, с фиксированным меридианом получаются одна из другой поворотом на один и тот же угол, равный в радианах

$$\varphi = 2\pi \frac{l_0}{2b} = 2\pi \frac{a}{b} \operatorname{tg}\alpha$$

(здесь $2b$ — длина меридианов тора на карте). Следовательно, траектория на торе будет замкнутой, т. е. периодической, если некоторое целое число поворотов на угол φ даст пово-

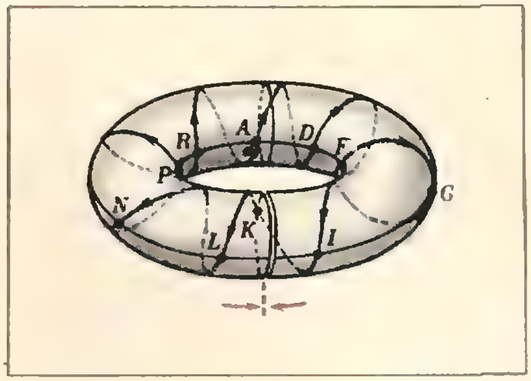


Рис. 5.

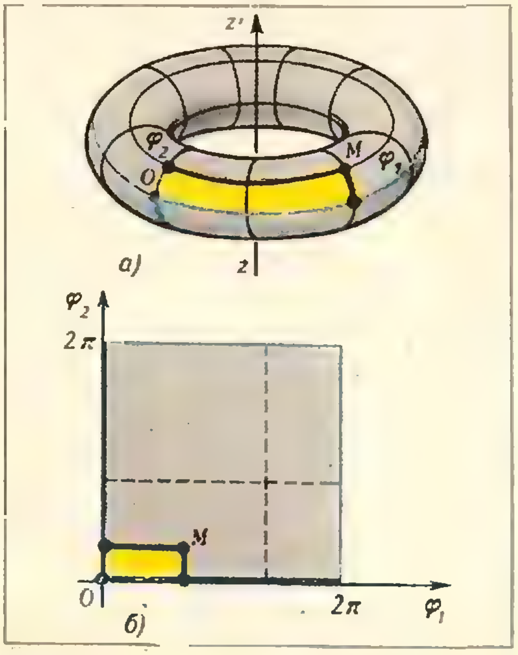


Рис. 6.

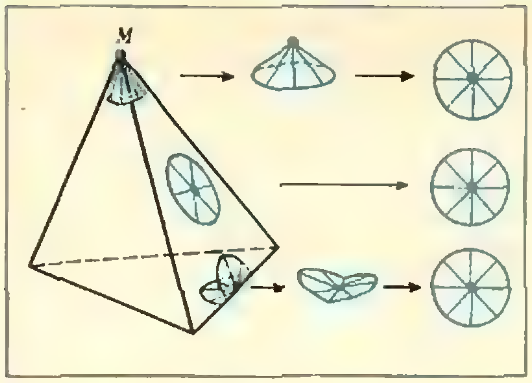


Рис. 7.

рот на целое кратное 2π, то есть $n\varphi = 2\pi m$ или $\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}$ — рациональное число. Если же число $(a/b)\operatorname{tg}\alpha$ иррационально, то траектория на торе будет незамкнутой — непериодической. Точки пересечения траектории с каждым фиксированным меридианом расположены на нем *всюду плотно*, т. е. так, что они попадают в любую окрестность любой его точки*). В силу произвольности выбора меридиана, непериодическая траектория будет всюду плотной на всем торе, соответствующая траектория всюду плотна на карте тора Π', а биллиардная траектория всюду плотна в прямоугольнике Π. Проще можно сказать так: *где бы мы ни проделали дырочку* (радиуса $r>0$) *в прямоугольном биллиардном столе, точечный биллиардный шарик, пущенный под таким углом α к стороне a, что число $(a/b)\operatorname{tg}\alpha$ иррационально, рано или поздно провалится в эту дырочку.*

Итак, мы свели биллиард в прямоугольнике к «обмоткам» тора и установили следующий важный факт: *любая биллиардная траектория, не попадающая в вершины прямоугольника, либо периодична* (*в случае* $(a/b)\operatorname{tg}\alpha\in\mathbf{Q}$), *либо всюду плотна в прямоугольнике* (*в случае* $(a/b)\operatorname{tg}\alpha\notin\mathbf{Q}$). Тем самым решена задача 16 из статьи «Математика биллиарда». Не желая лишать читателя удовольствия, задачу 17 из той же статьи мы предложим в виде следующих задач:

Задача 1. *Аналогичным образом докажите, что любая не попадающая в вершины биллиардная траектория в равнобедренном прямоугольном треугольнике либо периодична, либо всюду плотно заполняет соответствующий треугольник.*

Задача 2. *Докажите то же самое для:* а) *равностороннего треугольника,* б) *прямоугольного треугольника с углом в 30°.*

Если задача 2 не будет получаться, отложите ее до прочтения пп. 3, 4.

3. Поверхности и их склейка

Конечно, интересно посмотреть, что получится для биллиардов в других многоугольниках (отличных от прямоугольника и треугольников из задач 1, 2). Нельзя ли обобщить конструкцию из п. 1 на произвольный случай? Прежде, однако, разберемся с поверхностями и склейками.

В § 47 учебника «Геометрия 10» замкнутая многогранная поверхность определяется как множество точек в пространстве, составленное из многоугольников и удовлетворяющее некоторым условиям. *Основное свойство* такой поверхности заключается в том, что каждая ее точка M обладает окрестностью, которая может быть непрерывно преобразована в обычный круг с центром в точке M (рис. 7). Под *окрестностью* точки M понимается множество точек поверхности, удаленных от M не более чем на некоторое расстояние $\varepsilon>0$. При наших непрерывных преобразованиях окрестность можно изгибать, местами сжимать или растягивать, но запрещается «склеивать» между собой ее точки и «разрывать» окрестность. Если представить себе окрестность точки M сделанной из резины, то нужное преобразование можно получить, если положить окрестность под пресс и, медленно растягивая (так, чтобы не получилось складок и разрывов), расплющить ее.

Указанным основным свойством обладают не только замкнутые многогранные, но и искривленные поверхности — например, сфера или тор. Если в сфере вырезать две дырки и заклеить их подходящим образом изогнутой «ручкой» — боковой поверхностью цилиндра, то получится «сфера с ручкой», которая может быть преобразована в тор (рис. 8). Приклеив к сфере аналогичным образом две ручки, мы получим так называемый *крендель*, или сферу с двумя ручками; на рисунке 9 эта поверхность представлена в пяти видах. Можно построить сферу S_p с любым числом приклеенных ручек $p \geqslant 0$. Легко видеть, что все сферы с ручками обладают основным свойством.

---

*) См. теорему Якоби в статье «Математика биллиарда».

Полная поверхность цилиндра также обладает этим свойством, а его боковая поверхность — нет: точки M на окружностях оснований имеют окрестности в виде искривленного полукруга; их нельзя деформировать без разрывов и склеек в круг с центром в точке M (рис. 10). Далее, поверхность двойного конуса и объединение двух пересекающихся или касающихся сфер не обладают основным свойством (рис. 11), а объединение двух непересекающихся сфер — обладает.

Мы хотим исключить из рассмотрения поверхности, состоящие из нескольких отдельных кусков. Потребуем поэтому, чтобы любые две точки поверхности можно было соединить проходящей по поверхности непрерывной линией. Это свойство называется *связностью* поверхности.

Мы не хотим рассматривать и бесконечно протяженные поверхности — такие как плоскость или бесконечная цилиндрическая поверхность — а также поверхности типа круга без границы. Поэтому наложим еще одно условие (назовем его *конечностью*): потребуем, чтобы поверхность можно было разбить («разрезать») на конечное число «криволинейных многоугольников», каждый из которых без разрывов и склеек преобразовывается в плоский выпуклый многоугольник (с границами). Например, сфера по экватору и четырем меридианам разрезается на 8 криволинейных треугольников, а плоскость на конечное число многоугольников разбить нельзя.

Итак, далее мы рассматриваем только такие поверхности (множества точек пространства), которые обладают тремя перечисленными свойствами: основным свойством, свойством конечности и связностью.

Две такие поверхности считаются *эквивалентными* (математики говорят — «топологически эквивалентны-

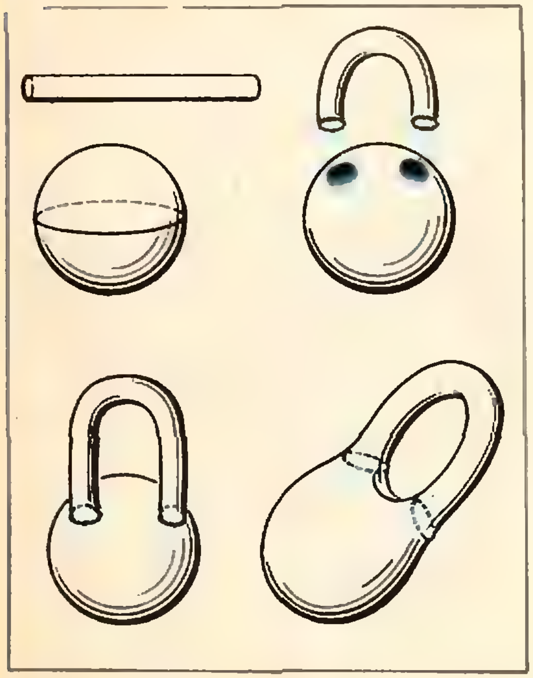


Рис. 8.

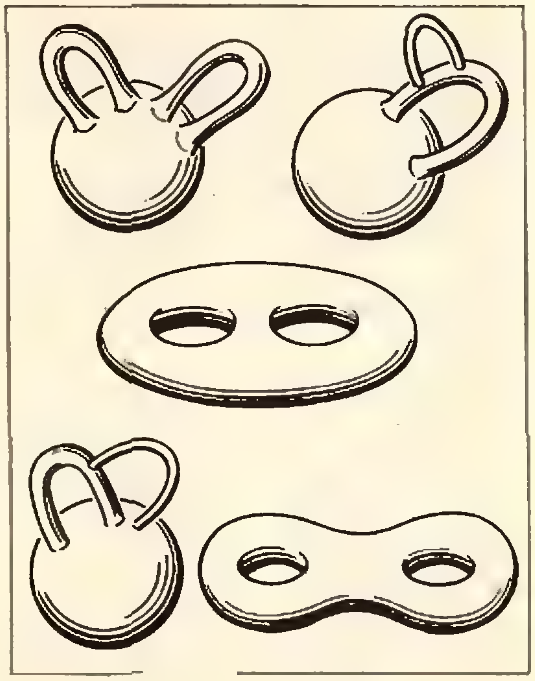


Рис. 9.

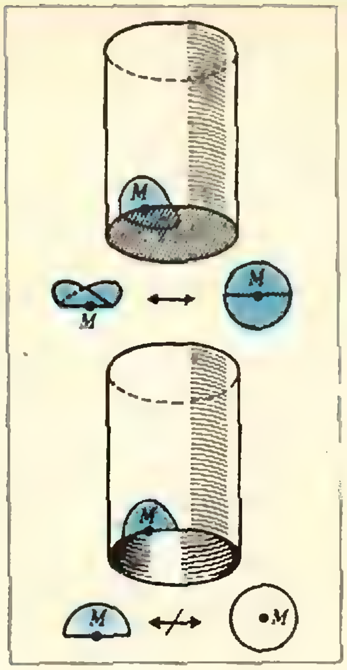


Рис. 10.

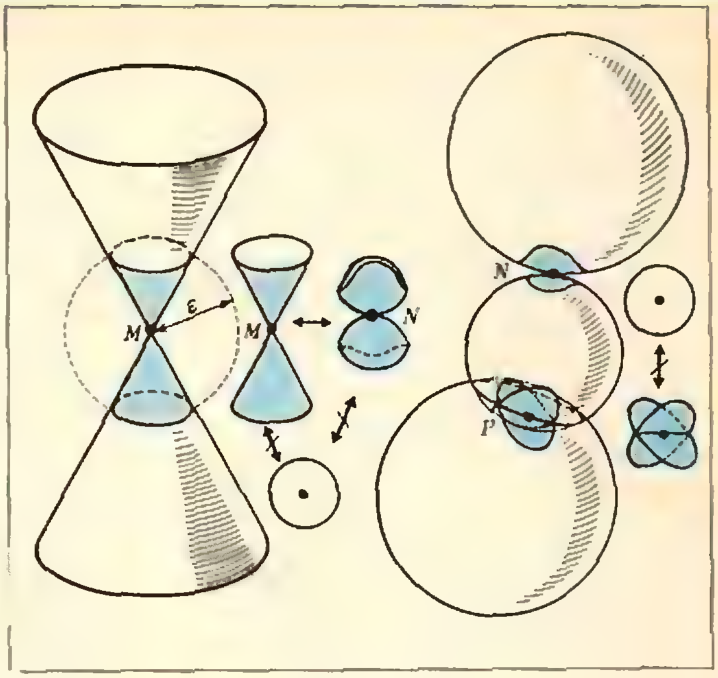


Рис. 11.

ми»), если существует обратимое отображение одной из них на другую, при котором нет ни разрывов, ни склеек (но допускаются растяжения, сжатия, изгибания и разгибания). Например, поверхность тетраэдра эквивалентна сфере, две последние поверхности на рисунке 8 эквивалентны тору, все пять поверхностей на рисунке 9 эквивалентны между собой. Можно доказать*), что *любая поверхность в пространстве* (в нашем смысле) *эквивалентна ровно одной из сфер с p ручками* (т. е. либо сфере, либо тору, либо кренделю, либо сфере с p ручками для некоторого $p>2$).

Задача 3. *Покажите, что тор, крендель и, вообще, сфера с любым числом ручек обладают свойством конечности, т. е. укажите их разбиения на конечное число криволинейных многоугольников.*

Задача 4. *Для каждой из перечисленных ниже поверхностей укажите, сфере с каким числом ручек она эквивалентна*: а) *поверхность чашки* (*рис. 12а*); *б*) *поверхность стула* (*рис. 12б*); *в*) *поверхность оконного переплета* (*рис. 12в*)).

Задача 5*. *Покажите, что тор и сфера не эквивалентны.*

Указание. Найдите такое свойство, которое сохраняется при рассматриваемых преобразованиях и которым одна из этих поверхностей обладает, а другая — нет.

Поверхность, обладающая свойством конечности, разрезается на многоугольники и поэтому может быть склеена из многоугольников. Оказывается, можно обойтись одним многоугольником. Мы уже видели, что тор может быть получен склейкой противолежащих сторон квадрата (или прямоугольника). Так вот, из любого $2n$-угольника после попарной склейки его противолежащих сторон получается поверхность нашего типа, т. е. сфера с некоторым числом ручек. Например, на рисунке 13 показано, как при склейке сторон восьмиугольника получается крендель.

Задача 6. *Найдите число ручек p поверхности S_p, склеенной указанным выше образом из $2n$-угольника.*

В принципе закон склейки сторон $2n$-угольника можно задавать произвольно, но при этом далеко не всегда получится поверхность нашего типа.

---

*) См., например, статью В. А. Ефремовича «Основные топологические понятия» в книге V «Энциклопедии элементарной математики» (М., «Наука», 1966) или главу 3 в книге Г. Рингеля «Теорема о раскраске карт» (М., «Мир», 1977).

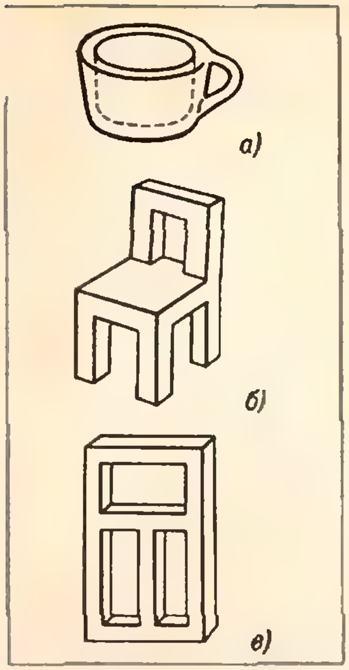


Рис. 12.

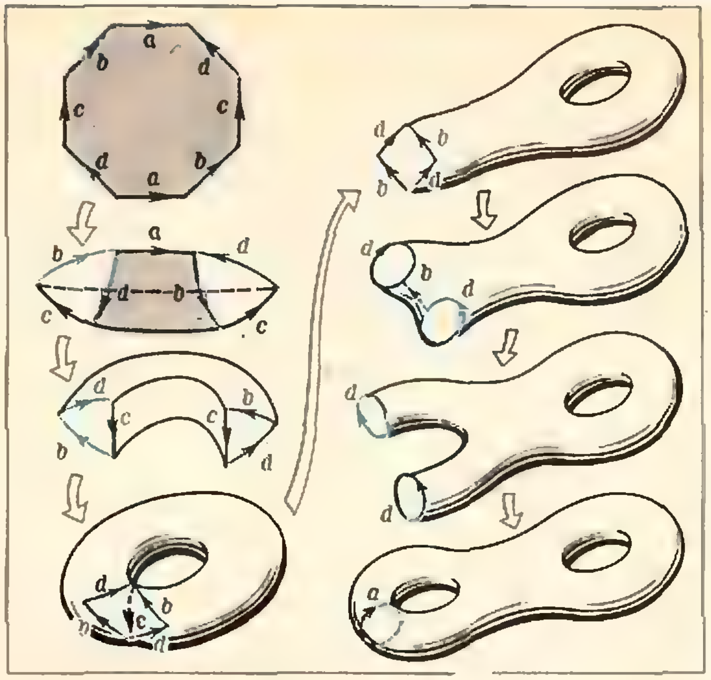


Рис. 13.

Задача 7. *Проведите склейку по рисункам 14а, б.* (В случае 14а получится самопересекающаяся поверхность — так называемая «бутылка Клейна».)

4. Биллиарды и поверхности

Вернемся к биллиардам: попытаемся конструкцию из п. 1 обобщить на случай произвольного многоугольника. Что при этом может получиться, покажем на примере прямоугольного треугольника $T=ABC$ с острым углом $\hat{A}=\pi/8$.

Для выпрямления биллиардной траектории в T опять воспользуемся последовательными отражениями. Такие отражения относительно сторон, исходящих из вершины A, дадут, как показано на рисунке 15*а*, правильный восьмиугольник, составленный из 16 треугольников $T_1=T$, T_2, T_3, ..., T_{16}, конгруэнтных треугольнику T. Заметим, что замостить всю плоскость треугольниками, конгруэнтными T, с помощью отражений нельзя. Сейчас мы увидим, что это и не нужно, — можно обойтись 16 указанными треугольниками.

Пусть траектория $[PM)$ доходит до точки M на стороне восьмиугольника Q. Продолжение $[PM)$ за точку M в случае, изображенном на рисунке 15*а*, следовало бы рисовать в треугольнике T'_5, симметричном T_5. Заметим, что среди треугольников T_i есть треугольник T_{12}, из которого T'_5 получается параллельным переносом. Легко видеть, что этот перенос можно выполнить как последовательную композицию симметрий:

$$T_{12}\to T_{11}\to T_{10}\to\ldots\to T_6\to T_5\to T'_5.$$

При этом луч, проведенный через соответственную точку M' (такую, что $|A'M'|=|AM|$ — рис. 15*а*) на стороне треугольника T_{12} параллельно лучу $[PM)$, при указанной композиции отобразится на продолжение луча $[PM)$ за точку M. Поэтому можно считать, что шарик перепрыгивает из точки M в точку M' и про-

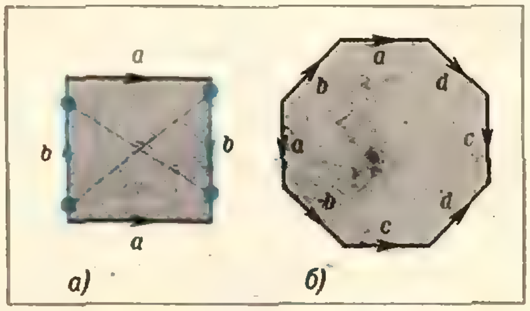


Рис. 14.

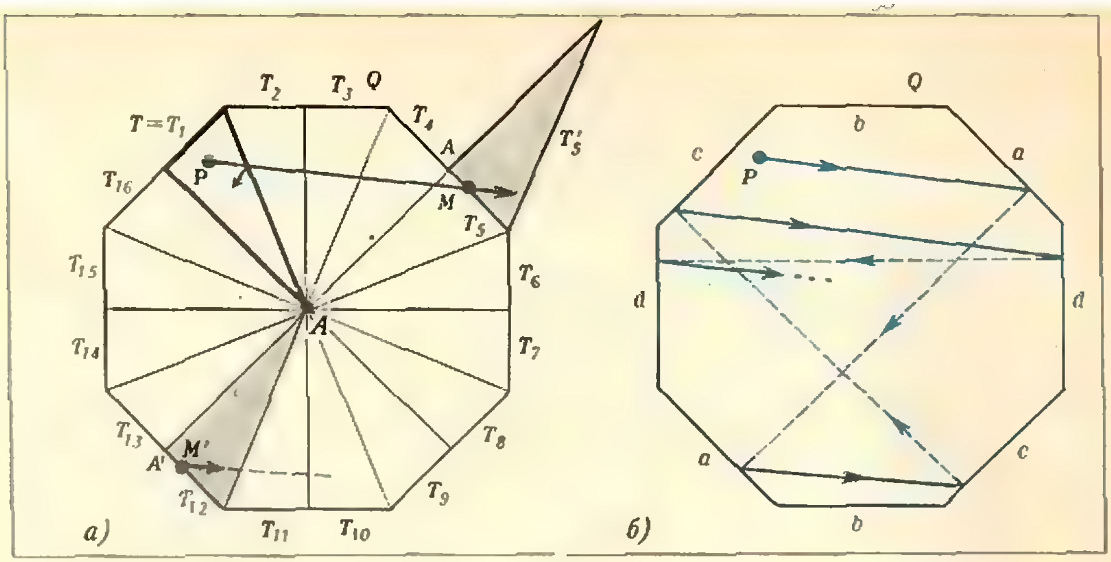


Рис. 15.

должает движение в прежнем направлении по восьмиугольнику Q: прыгающая траектория в Q после отражений даст биллиардную траекторию в треугольнике T. Такое же рассуждение проходит и во всех других случаях, какой бы из треугольников T_i ни собиралась покидать траектория, выходя за пределы восьмиугольника Q. Таким образом, как и выше (в п. 1), биллиардным траекториям в треугольнике T отвечают траектории шарика, движущегося в одном и том же направлении внутри восьмиугольника Q и перепрыгивающего — при достижении его сторон Q — в соответственные точки противолежащих сторон (начало одной из таких траекторий изображено на рисунке 15б).

Чтобы сделать прыгающие траектории непрерывными, нужно склеить противолежащие стороны восьмиугольника Q. Как мы видели в п. 3, при этом получится крендель, а биллиардным траекториям в треугольнике T будут отвечать обматывающие этот крендель кривые!

Хотя на кренделе и нельзя ввести хорошие координаты по образцу тора, тем не менее с помощью описанной конструкции можно доказать, что *любая биллиардная траектория в прямоугольном треугольнике с острым углом* $\pi/8$, *не попадающая в вершины, либо периодична, либо всюду плотно заполняет треугольник*. Доказательство этого утверждения мы оставляем в качестве весьма трудной задачи (без номера).

Задача 8. *Постройте поверхности, отвечающие биллиардам: а) в прямоугольном треугольнике с углом* $\pi/12$, *б) в прямоугольном треугольнике с углом* $\pi/5$, *в) в квадрате с вырезанной в нем квадратной дыркой (стороны дырки параллельны сторонам квадрата).*

Оказывается, *биллиард в любом многоугольнике, величины всех углов которого соизмеримы с* π, *сводится к движениям по соответствующим поверхностям — сферам с* p *ручками* (где p больше 1 во всех случаях, кроме прямоугольника и треугольников из задач 1, 2). Мы изложим доказательство этого факта в виде серии задач.

Задача 9*. а) Биллиардный шар движется под углом α к фиксированной стороне a многоугольника Φ и, отразившись от стороны, образующей с a угол β, продолжает движение под новым углом α' к стороне a. Выразите α' через α и β.

Предположим теперь, что величины всех углов многоугольника Φ соизмеримы с π или, что то же самое, что стороны Φ образуют с фиксированной стороной a углы $\beta_i = \frac{m_i}{n_i}\pi$, где m_i и n_i — целые.

б) Докажите, что если начальный отрезок биллиардной траектории в многоугольнике Φ направлен под углом α к стороне a, то все следующие отрезки этой траектории могут быть направлены к стороне a только под конечным числом углов $\alpha_1 =$

$= \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$, не зависящих от выбора начальной точки движения.

в) Пусть все углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ из пункта б) отличны от углов β_i, т. е. траектория никогда не идет параллельно сторонам многоугольника Φ. Возьмем N многоугольников $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$, конгруэнтных Φ, и в многоугольнике Φ_k проведем все возможные отрезки под углом α_k к стороне a. Рассмотрим биллиардную траекторию, выходящую из произвольной точки под углом $\alpha = \alpha_1$ к a. Ее отрезки, идущие под углами α_k к стороне a (см. пункт б), будем брать в соответствующих многоугольниках Φ_k. Тогда биллиардной траектории в Φ будет отвечать траектория в объединении многоугольников Φ_k, «перепрыгивающая» при достижении сторон Φ_k в соответственные точки каких-то следующих многоугольников из числа $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_N$ (нарисуйте!). Докажите, что после склейки соответствующих пар сторон этих N многоугольников получится поверхность нашего типа.

Пояснение. Согласно определению из п. 3 нужно проверить наличие у каждой точки M получившегося после склейки множества окрестности, преобразующейся без разрывов и склеек в круг с центром в M. Для точек внутри многоугольников это тривиально, для точек на сторонах Φ_k — очевидно (объясните). Остается рассмотреть окрестности точек, получающихся склейкой вершин многоугольников Φ_k.

Во всех случаях, когда биллиард в многоугольнике Φ сводится к обмоткам некоторой сферы с ручками, можно доказать, что любая траектория либо попадает в одну из вершин Φ, либо периодична, либо всюду плотно заполняет Φ. Физиками уже давно высказана гипотеза, что так будет для любого многоугольника*). До настоящего времени эта гипотеза не доказана и не опровергнута!

---

*) Интерес к биллиардам в многоугольниках возник в связи с так называемой «эргодической гипотезой» статистической механики, которая в сильном своем виде говорит о возрастании энтропии в физических системах, а в слабой формулировке в данном случае как раз и есть сформулированная нами гипотеза о периодичности и всюду плотности. Отметим, что для многих фигур с кривыми границами последняя гипотеза доказана.

Советуем купить!

Математика

Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. *Лекции и задачи по элементарной математике,* 2 изд. (М., «Наука», 1974), 576 с., 81 к.

Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И. *Задачи по элементарной математике,* 7 изд., испр. и доп. (М., «Наука», 1973), 416 с., 70 к.

Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений* (М., «Наука», 1976), 80 с., 12 к.

Физика

Гурский И. П. *Элементарная физика с примерами решения задач,* 2 изд., испр. и доп. (М., «Наука», 1976), 94 к.

Зубов В. Г., Шальнов В. П. *Задачи по физике.* Пособие для самообразования, 10 изд., стереотип. (М., «Наука», 1975), 280 с., 47 к.

Пинский А. А. *Задачи по физике* (М., «Наука», 1977), 288 с., 65 к.

Баканина Л. П., Белонучкин В. Е., Козел С. М. и др. *Сборник задач по физике,* 3 изд., испр. (М., «Наука», 1975), 416 с., 67 к.

Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. *Сборник задач по элементарной физике.* Пособие для самообразования, 4 изд., перераб. (М., «Наука», 1974), 416 с., 72 к.

Селезнев Ю. А. *Основы элементарной физики,* 4 изд., перераб. (М., «Наука», 1974), 544 с., 92 к.

Физика, пер. с англ.

ч. I. *Вселенная* (М., «Наука», 1973), 432 с., 1 р. 30 к.

ч. II. *Оптика* (М., «Наука», 1973), 400 с., 1 р. 18 к.

ч. III. *Механика* (М., «Наука», 1974), 432 с., 1 р. 22 к.

ч. IV. *Электричество и строение атома* (М., «Наука», 1974), 528 с., 1 р. 42 к.

Элементарный учебник физики, под ред. акад. Г. С. Ландсберга, 9 изд., стереотип. (М., «Наука», 1975).

т. I. *Механика. Теплота. Молекулярная физика,* 656 с., 1 р. 11 к.

т. II. *Электричество и магнетизм,* 528 с., 91 к.

т. III. *Колебания и волны. Оптика. Строение атома,* 640 с., 1 р. 13 к.

Эллиот Л., Уилкокс У. *Физика,* пер. с англ. (М., «Наука», 1975), 736 с., 1 р. 94 к.

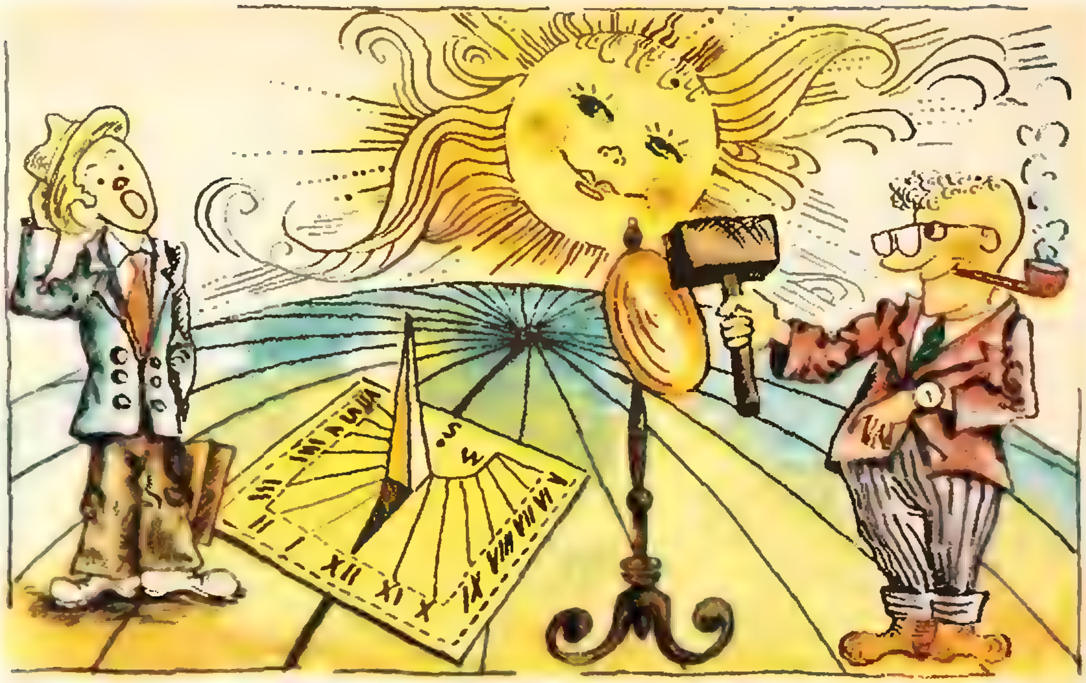
Яворский Б. М., Пинский А. А. *Основы физики,* 2 изд. перераб., (М., «Наука», 1974). Том I — 98 к., том II — 1 р.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования* (М., «Наука», 1975), 624 с., 1 р. 15 к.

Перечисленные выше книги можно приобрести в магазинах Книготорга, Центрокоопкниги и Академкниги, распространяющих литературу данной тематики.

При отсутствии этих изданий на месте заказы следует направлять по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект 15, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука».

Книги будут высланы наложенным платежом, без задатка.



А. Михайлов

Когда наступает полдень?

Прежде чем ответить на этот вопрос, зададим другой: что такое полдень? Казалось бы, слово говорит само за себя: полдень — это половина дня, то есть средний момент между восходом и заходом Солнца. Но можно ли на основании такого определения точно установить момент полдня, например, стукнуть молоточком и сказать: «Вот наступил полдень»? Очевидно, нет. Во-первых, моменты восхода и захода Солнца можно уверенно заметить разве лишь на море, где горизонт идеально правильный. Во-вторых, заход Солнца происходит на несколько часов позже полдня, и поэтому момент наступления полдня можно выяснить лишь после окончания дня.

Однако есть явление, чрезвычайно близкое к полдню, которое действительно можно наблюдать, — это *кульминация* Солнца, то есть момент прохождения Солнца через меридиан данного места. Так, для жителей умеренных поясов Солнце каждый день восходит в восточной части горизонта, поднимается над ним, кульминирует, проходя через меридиан, затем начинает снижаться и заходит в западной части горизонта.

Кульминации светил наблюдают с помощью специальных инструментов, называемых *пассажными*. Их основным элементом является зрительная труба, которая может вращаться лишь по высоте вокруг горизонтальной оси, направленной с востока на запад. Такая труба всегда смотрит в плоскости меридиана (рис. 1). Для удобства наблюдателя трубу иногда делают ломаной, посылая свет после отражения в горизонтальном направлении через полую ось вращения, на конце которой находится окуляр (рис. 2). Благодаря этому глаз наблюдателя всегда остается в неизменном положении и смотрит в горизонтальном направлении.

В поле зрения трубы натянуто несколько вертикальных тонких нитей, обычно паутиновых: средняя нить задает направление меридиана. Придав трубе нужный наклон, наблюда-

Рис. 1. Большой пассажный инструмент Пулковской обсерватории.

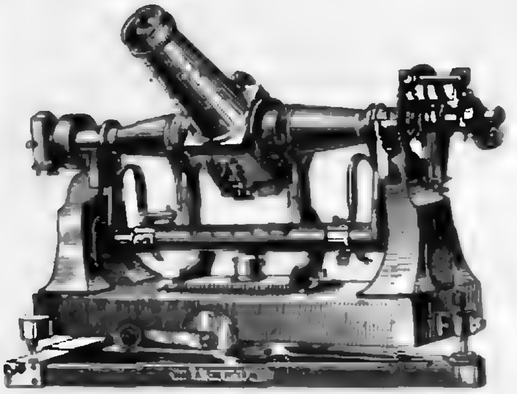


Рис. 2. Пассажный инструмент с ломаной трубой.

тель выжидает, когда наблюдаемое светило, в данном случае Солнце, войдет в поле зрения и пересечет среднюю нить. В этот момент он нажимает кнопку, замыкающую контакт, и перо самописца, называемого *хронографом*, делает на бегущей бумажной ленте отметку параллельно с секундными метками от часов. Таким образом момент прохождения светила через меридиан может быть зафиксирован с точностью до сотых долей секунды. (У Солнца центр ничем не обозначен, поэтому наблюдают прохождение двух его краев и затем полученные результаты усредняют.)

Описанный способ в сильной степени связан с быстротой реакции наблюдателя. Сейчас он значительно усовершенствован, вплоть до автоматической записи момента кульминации: свет от Солнца попадает через узкую щель на фотоэлемент, последний посылает сигнал на хронограф.

Допустим, что мы несколько дней подряд по хорошим часам наблюдали кульминацию Солнца и получили такие результаты:

1979 январь 1 12 ч 3 мин 16 с
» 2 12 » 3 » 44 »
» 3 12 » 4 » 12 »
» 4 12 » 4 » 40 »

и т. д. Очевидно, мы должны были бы прийти к заключению, что наши часы спешат на 28 секунд в сутки, и были бы склонны переставить регулятор для замедления их хода. Но вот, не трогая часов, мы через пару месяцев вновь пронаблюдали Солнце и обнаружили следующее:

1979 март 1 12 ч 12 мин 31 с
» 2 12 » 12 » 19 »
» 3 12 » 12 » 7 »
» 4 12 » 11 » 55 ».

Теперь, казалось бы, часы отстают на 12 секунд в сутки. В чем же дело?

В действительности во всем виноваты не часы, а неравномерность видимого движения Солнца по эклиптике. Точнее — эллиптичность земной орбиты, вследствие чего (согласно второму закону Кеплера) Земля движется быстрее всего близ перигелия, проходя в сутки дугу в 1°1′10″, что бывает ежегодно около 2 января, и медленнее всего близ афелия, около 5 июля, когда эта дуга сокращается до 0°57′12″. Кроме того, имеется еще другая, слабее влияющая, причина несовпадения моментов кульминации Солнца. Она состоит в том, что одинаковые участки эклиптики в проекции на плоскость экватора дают не-

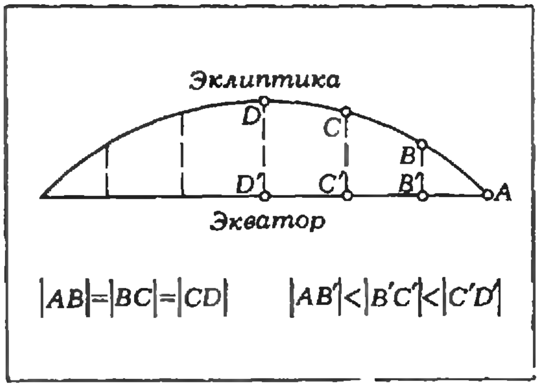


Рис. 3. Равновеликие отрезки эклиптики в проекции на экватор дают неравные части.

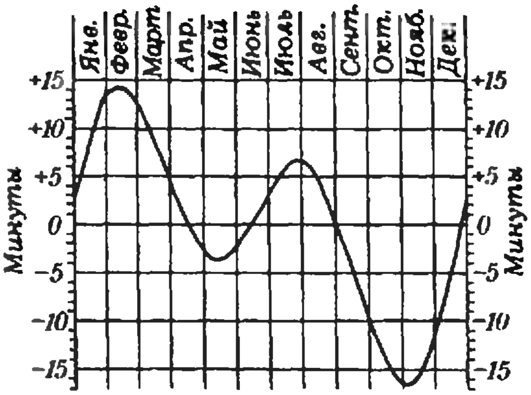


Рис. 4. График уравнения времени.

равные отрезки — наиболее короткие вблизи равноденствий (рис. 3).

Таким образом, оказалось, что время, задаваемое видимым движением Солнца, получившее название *истинного солнечного времени*, течет неравномерно и для точного употребления не годится. Поэтому пришлось ввести новое понятие — *среднее солнечное время*, в основу которого положена средняя продолжительность истинных солнечных суток за целый год. Иначе можно сказать, что среднее солнечное время задается воображаемой точкой, называемой *средним солнцем*, которая равномерно движется по небесному экватору, совершая один оборот в течение года.

Разность между средним и истинным солнечным временем называют *уравнением времени*. В течение года уравнение времени колеблется между +14,3 мин (в середине февраля) и —16,4 мин (в начале ноября), четыре раза проходя через нуль (около 16 апреля, 14 июня, 2 сентября и 25 декабря). График изменения уравнения времени показан на рисунке 4. Например, в течение декабря уравнение времени быстро изменяется в положительную сторону, что вызывает прогрессивное запаздывание полдня изо дня в день. То же происходит с восходом и заходом Солнца. Поэтому, когда после 22 декабря продолжительность дня начинает медленно увеличиваться, это увеличение полностью падает на вечер, а утро еще несколько дней продолжает запаздывать. Так, в Москве самый поздний восход Солнца бывает около 30 декабря, а самый ранний заход — около 15 декабря.

Истинное солнечное время определяется по солнечным часам (рис. 5). В них тень от стержня, параллельного оси вращения Земли, или косого ребра вертикальной пластинки падает на горизонтальный, вертикальный или наклонный циферблат с делениями, зависящими от его ориентировки. Если к показанию таких часов прибавить уравнение времени, получится среднее солнечное время. Когда часы, идущие по такому времени, показывают 12 часов, наступает *местный средний полдень*. Мы говорим «местный», потому что в разных местах полдень бывает не одновременно (он зависит от географической долготы данного места).

В старину каждый город жил по своему местному времени, так что, например, в Москве часы показывали всегда на 29 минут больше, чем в Петербурге. Это создавало большие неудобства и даже путаницу на транспорте и в междугородних сношениях. Поэтому было предложено ввести так называемое *поясное время*. Всюду в пределах одного часового пояса, границы которого разнятся по долготе примерно на 15°, время считается одинаковым; в соседних поясах время отличается на один час. За исходный, нулевой, пояс принят тот, посредине которого проходит гринвичский меридиан. Счет поясов идет от него к востоку, и номер пояса указывает, на сколько часов его время впереди гринвичского, называемого *всемирным*. Так, Москва и Ленинград находятся во втором поясе, и поэтому

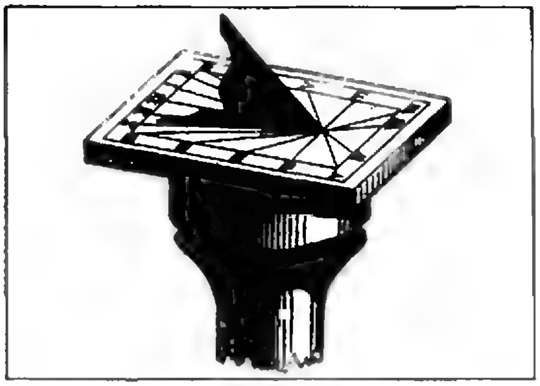


Рис. 5. Горизонтальные солнечные часы.

поясное время там ровно на два часа больше всемирного.

В СССР поясное время было введено в 1919 году, но в 1930 году, для экономии электроэнергии на освещение, к поясному времени был прибавлен один час; такое время стало называться *декретным*. В частности, декретное время второго часового пояса называется *московским*.

Таким образом, существует множество разных систем счета времени. Но для каждого события время, отсчитанное по одной системе, можно связать со временем по другим системам.

Для примера рассчитаем наступление местного истинного полдня. Согласно определению, этот полдень наступает в 12 часов истинного времени. По среднему времени это будет 12 часов плюс уравнение времени — η минут. Всемирного времени в этот момент будет на $1/15\,\lambda$ часов (или на $4\,\lambda$ минут) меньше. Здесь λ — восточная долгота данного места в градусах, а множитель при λ получается из расчета, что Земля поворачивается вокруг своей оси на 360 градусов за 24 часа, так что 1° соответствует $1/15$ ч (или 4 мин). Для получения поясного времени к найденному всемирному времени нужно прибавить n часов (или $60\,n$ минут), где n — номер часового пояса. Наконец, декретного времени будет на 1 ч (или на 60 минут) больше. Таким образом, истинный полдень в данном месте наступает по декретному времени в момент

$$t = 12\ \text{ч} + \eta\ \text{мин} - 1/15\,\lambda\ \text{ч} + (n+1)\ \text{ч}.$$

В этой формуле переменным является только уравнение времени η, зависящее от даты; из года в год оно повторяется с небольшими флуктуациями, связанными с неполным совпадением продолжительности календарного года с годом природы (тропическим годом), равным 365, 2422 суток.

Найдем, например, время наступления истинного полдня в Москве 1 января 1979 года. По географической карте найдем долготу Москвы: $\lambda = 37{,}5^\circ$. Номер пояса для Москвы $n = 2$, уравнение времени $\eta = 3$ мин (см. рис. 4). Тогда искомый момент

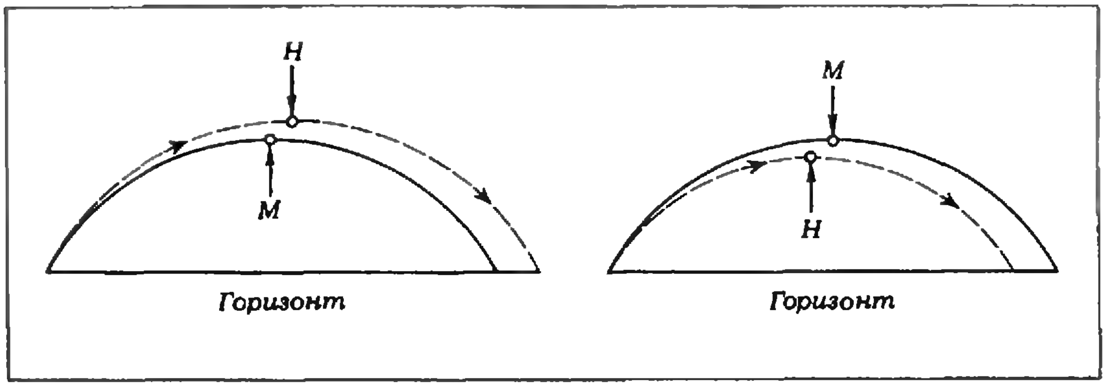


Рис. 6. Различия между прохождением Солнца через меридиан и наибольшей высотой Солнца над горизонтом. Сплошная кривая изображает дневную дугу Солнца с неизменным склонением. Штриховая линия изображает дневную дугу светила с возрастающим склонением весной и с убывающим склонением осенью. M — точка меридиана, H — точка наибольшей высоты.

равен

$$t = 12\text{ ч} + 3\text{ мин} - \frac{1}{15}\,37{,}5\text{ ч} \;\; + 3\text{ ч} =$$

$$= 12\text{ ч } 33\text{ мин}$$ декретного времени.

Мы произвели этот подсчет с точностью до минуты, но можно рассчитать и до секунды, взяв для этого с соответствующей точностью уравнение времени и долготу.

Обсудим еще один любопытный вопрос. Обычно считается, что в момент истинного полдня, когда Солнце проходит через меридиан данного места, высота Солнца над горизонтом бывает наибольшей, откуда и происходит слово «кульминация» (от латинского culmen — вершина). Это было бы действительно так, если бы склонение Солнца в течение дня оставалось неизменным, как это бывает во время зимнего и летнего солнцестояний. Однако в другое время склонение изменяется, быстрее всего увеличиваясь вблизи весеннего равноденствия (до 1′ в час) и уменьшаясь вблизи осеннего равноденствия. Поэтому происходит явление, поясненное на рисунке 6. Допустим, в какой-то день весны Солнце прошло через меридиан и, вследствие видимого суточного движения, начинает понижаться к горизонту. Однако увеличение склонения еще в течение нескольких секунд пересиливает это снижение, так что наибольшая высота Солнца наступает позже прохождения через меридиан. Обратное явление бывает осенью, когда вследствие уменьшения склонения наибольшая высота наступает немного раньше прохождения Солнца через меридиан. На широте Москвы, например, такая разность во время равноденствий достигает 22 секунд.

В заключение, во избежание недоразумения, заметим следующее. Хотя мы и говорим об истинном, среднем, поясном, декретном временах, по существу эти слова относятся лишь к способу измерения времени. Само же время, конечно, течет независимо от того, какой меркой мы его измеряем. Вообще, для измерения времени обычно пользуются каким-либо периодическим процессом, например, колебаниями маятника. Природа дала нам достаточно равномерное для большинства целей периодическое движение — вращение Земли, лежащее в основе всей нашей практики измерения времени, определяющее смену дня и ночи. Правильнее было бы говорить не об истинном или среднем времени, а об измерении времени с помощью движения истинного или среднего Солнца. Но исторически сложилась более краткая, хотя и неправильная терминология, к которой мы так привыкли, что не обращаем внимания на ее неправильность.

Задачи наших читателей

Найдите суммы первых n членов:

1 $1 + 101 + 10101 + 1010101 + \ldots$

2. $3 + 3003 + 3003003 + 3003003003 + \ldots$

3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \ldots$

4. $1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 11 + \ldots$

5. $11 \cdot 13 + 13 \cdot 15 + 1517 + 17 \cdot 19 + \ldots$

6. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 23 + 4 \cdot 33 + \ldots$

8. $19 \cdot 21 + 30 \cdot 28 + 41 \cdot 35 + \ldots$

Сделать это вам помогут следующие две задачи.

Задача 1. Даны арифметическая прогрессия $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots$ и геометрическая прогрессия $b,\ bq,\ bg^2,\ \ldots$ Найдите сумму

$$S = ab + (a+d)bq + (a+2d)bq^2 + \ldots + ([a + (n-1)d]bq^{n-1}$$

(рассмотрите отдельно случаи $q = 1$ и $q \neq 1$).

Задача 2. Пусть есть две арифметические прогрессии:

$$a,\ a+d_1,\ a+2d_1,\ \ldots$$

и

$$b,\ b+d_2,\ b+2d_2,\ \ldots$$

Найдите сумму

$$\Sigma = ab + (a+d_1)(b+d_2) + (a+2d_1)(b+2d_2) + \ldots + [a + (n-1)d_1] \times [b + (n-1)d_2].$$

М. Апресян

М. Дагаев

Исчезновение кольца Сатурна

В марте 1610 года Галилей опубликовал небольшую книгу «Звездный вестник», в которой сообщил о своих первых астрономических открытиях. Там же им была помещена анаграмма*) — зашифрованное сообщение в виде хаотического набора латинских букв. В те времена ученые часто прибегали к анаграммам для охраны и доказательств своего приоритета в открытиях. Они составляли на латинском языке короткую фразу о сущности предполагаемого открытия, переставляли в ней буквы и вместо научного сообщения публиковали бессмысленный набор этих букв. Непосвященному было невозможно из опубликованных букв составить первоначальную фразу, а автор анаграммы, убедившись в реальности своего открытия, публиковал расшифровку анаграммы и тем самым подтверждал свой приоритет.

Прочитав анаграмму Галилея, Кеплер затратил немало труда на ее расшифровку. В конце концов Кеплер решил, что анаграммой Галилей сообщает об открытии двух спутников Марса. (К этому решению он пришел, видимо, под впечатлением восхитившего его открытия Галилеем четырех спутников Юпитера.) Выбросив из анаграммы Галилея три буквы, Кеплер составил на латинском языке фразу: «Привет вам, близнецы, Марса порожденье».

Однако Кеплер ошибся. После тщательной проверки своего открытия Галилей в ноябре 1610 года сообщил Кеплеру дешифровку анаграммы: «Высочайшую планету тройною наблюдал».

В те времена высочайшей планетой называли Сатурн, самую далекую из известных тогда планет.

Почему Галилей назвал Сатурн тройной планетой? Потому, что в свой несовершенный телескоп, увеличивающий всего лишь в 33 раза да еще обладающий оптическими недостатками, Галилей не сумел различить всего тонкого кольца Сатурна, а видел только его более светлые края, расположенные по обе стороны небольшого диска планеты. Через два года, к удивлению Галилея, оба боковых придатка планеты исчезли. Это исчезновение настолько раздосадовало ученого, что он вообще перестал наблюдать непонятную планету.

Лишь полвека спустя Гюйгенс, используя свои более мощные телескопы, решил загадку «боковых придатков» Сатурна. В 1656 году в брошюре с описанием обнаруженного им спутника Сатурна Гюйгенс поместил анаграмму об открытии кольца планеты и только через три года, убедившись в его реальности, опубликовал в книге «Система Сатурна» дешифровку анаграммы: «Кольцом окружен тонким, нигде не прикасающимся, к эклиптике наклоненным». В этой же книге Гюйгенс привел рисунки Сатурна с кольцом и без него.

И действительно, кольцо Сатурна при среднем диаметре в 276 тыс. км (в 2,3 раза превышающем диаметр планеты) имеет ничтожную толщину — не более 20 км. В телескопы даже средних размеров видно, что кольцо состоит из трех концентрических колец с промежутками между ними. Самым ярким является среднее кольцо, отделенное от внешнего кольца четким темным промежутком, называемым щелью Кассини (в честь первого директора Парижской обсерватории). Внутреннее темное кольцо часто именуется креповым, и его внутренний край сильно размыт.

---

*) От греческих слов «ана» — пере и «грамма» — буква, т. е. перестановка букв.

В настоящую эпоху плоскость экватора и колец Сатурна наклонена к плоскости эклиптики (к плоскости земной орбиты) на 28°, и это наклонение сохраняется на протяжении длительного промежутка времени (за 100 лет наклонение уменьшается всего лишь на 47″). Таким образом, за период обращения Сатурна вокруг Солнца, равный 29,5 земного года, плоскость экватора и колец планеты сохраняет свое направление в пространстве, подобно тому как сохраняется направление земной оси вращения и плоскости земного экватора при годовом обращении Земли. Поэтому регулярно, через каждый 14,7 земного года (промежутки времени, равные половине периода обращения Сатурна) кольца планеты обращены к Земле ребром и из-за их ничтожной толщины не видны. Лишь узкая полоска тени от кольца может быть заметна на диске планеты. Кольца становятся также невидимыми, когда их плоскость направлена к Солнцу.

Это явление, называемое в астрономии исчезновением колец Сатурна, произойдет осенью 1979 — весной 1980 года. Уже с начала утренней видимости планеты, наступающей в сентябре 1979 года, и до июня 1980 года кольцо Сатурна не будет видно. Лишь в декабре, январе и мае в телескопы с не менее чем восьмидесятикратным увеличением можно будет заметить кольцо в виде чрезвычайно тонкой светлой полоски.

Исчезновение кольца Сатурна наблюдается очень редко, и мы очень советуем всем, кто интересуется астрономией, регулярно наблюдать эту планету на протяжении почти всего учебного года.

Электрическая цепь извлекает квадратные корни

В «Сборнике вопросов и задач по физике» под редакцией Н. Гольдфарба приводится следующая задача: *составлена электрическая цепь из бесконечного числа ячеек, состоящих из трех одинаковых сопротивлений* r (рис. 1). *Найти сопротивление этой цепи.*

Для решения сосчитаем сначала сопротивление R_1 первой ячейки (разомкнув клеммы K_1, L_1). Очевидно, $R_1=3r$. Замкнув снова клеммы K_1, L_1 и разомкнув клеммы K_2, L_2, найдем сопротивление R_2 двух ячеек:

$$R_2=2r+\frac{rR_1}{r+R_1}.$$

Аналогично,

$$R_3=2r+\frac{rR_2}{r+R_2},\ \ldots,$$

$$R_n=2r+\frac{rR_{n-1}}{r+R_{n-1}},$$

где R_n — сопротивление цепи при разомкнутых клеммах K_n, L_n, n=1, 2, 3, ... (рис. 1). Для бесконечной цепочки мы получим

$$R_\infty=2r+\frac{rR_\infty}{r+R_\infty}.$$

Решим это уравнение относительно R_∞:

$$R_\infty=r\left(1+\sqrt{3}\right).$$

Для того чтобы это рассуждение было корректным, необходимо доказать существование предела $\lim R_n=R_\infty$. Но при наших предположениях это следует из теоремы Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9» п. 32): действительно, последовательность (R_n) ограничена снизу (числом $(1+\sqrt{3})\,r$) и монотонно убывает (проверьте!).

Из полученного ответа видно, что эта схема позволяет вычислить значение $\sqrt{3}$, измерив сопротивление цепочки при достаточно большом числе ячеек.

Положив величину сопротивления в преремычках равной $2r$, получим

$$R_\infty=r\left(1+\sqrt{5}\right).$$

Для значения $3r$

$$R_\infty=r\left(1+\sqrt{7}\right),$$

для значения nr (n — любое натуральное число)

$$R_\infty=r\left(1+\sqrt{2n+1}\right).$$

Наша цепь «извлекает корень» из любого нечетного числа!

Можно показать, что *для любого вещественного числа $a\geqslant 1$ можно так подобрать сопротивление на перемычках, чтобы сопротивление бесконечной цепи равнялось* $r\left(1+\sqrt{a}\right)$.

Это утверждение мы оставляем читателю в качестве задачи.

Н. Дмитриев,
В. Ивлев

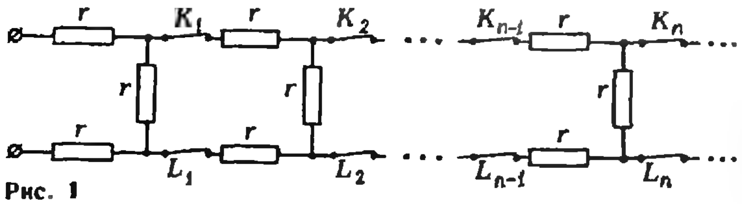


Рис. 1

В. Майер

Модели смерча

Смерч — одно из самых грандиозных и загадочных явлений природы. Энергия его настолько велика, что почти никто и ничто не может выдержать схватку со смерчем.

Каким образом смерч переносит тяжелые предметы порой на весьма значительные расстояния? Как он образуется? На эти и многие другие вопросы современная наука не в состоянии дать исчерпывающих ответов.

На страницах нашего журнала рассказывалось о природных смерчах (см. статью Л. Алексеевой «Вихри, которые «делают погоду» — «Квант», 1977, № 8). Можно ли воссоздать смерч в лабораторных условиях? Предлагаем вам две экспериментальные установки, с помощью которых водяные модели смерча нетрудно получить даже в домашних условиях.

1. К валу микроэлектродвигателя типа ДП-12а (он используется во многих детских игрушках) припаяйте диск из латуни или жести диаметром 40 мм и толщиной 0,5—1 мм. Диск нужно укрепить строго перпендикулярно валу, чтобы при его вращении не возникали биения. Для герметизации двигателя подшипники, в которых вращается вал, смажьте солидолом или густым вазелином, а контакты двигателя, к которым припаяны проводники, покройте слоем пластилина.

На дно стакана (или стеклянной банки) диаметром 9 см и высотой 18 см прилепите пластилиновую лепешку толщиной около 5 мм, на ней укрепите микроэлектродвигатель так, чтобы его вал снизу не касался пластилина. Проводники, идущие от двигателя, закрепите на стенке стакана липкой лентой или пластилином. На рисунке 1 показана установка, готовая к проведению экспериментов.

Налейте в стакан воду, а поверх нее — слой подсолнечного масла толщиной 1—2 см. Подсоедините выводы микроэлектродвигателя к батарейке для карманного фонаря — диск начнет вращаться, при этом жидкость в стакане тоже придет во вращательное движение. Через некоторое время граница раздела между водой и маслом начнет прогибаться вниз, появится заполненная маслом воронка, ко-

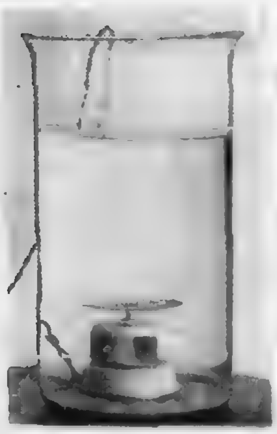


Рис 1.

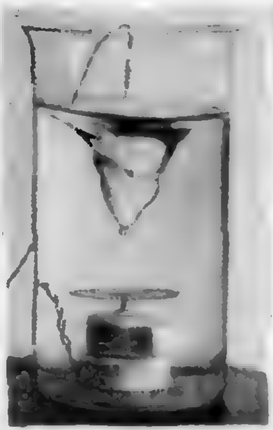


Рис. 2.

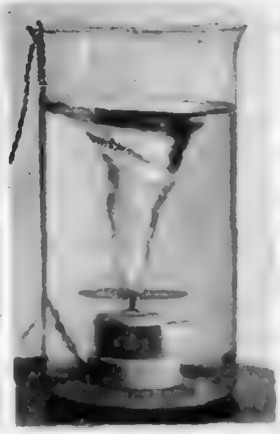


Рис. 3.

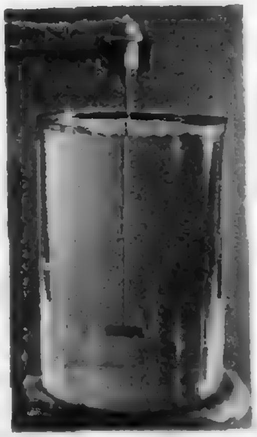


Рис. 4.

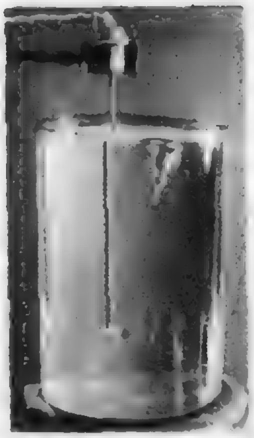


Рис. 5.

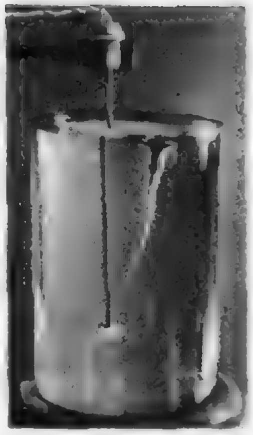


Рис. 6.

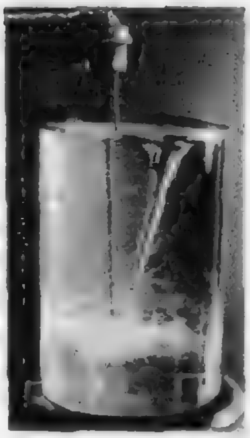


Рис. 7.

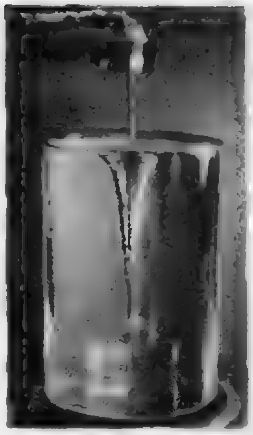


Рис. 8.

торая будет расти до тех пор, пока не коснется диска. В этот момент диск разобьет масло на капли, и жидкость в стакане помутнеет. После выключения двигателя капли масла всплывут вверх, вновь образуя сплошной слой на поверхности воды. Опыт можно повторить снова.

На рисунках 2, 3 приведены фотографии, на которых показан процесс образования воздушной воронки в несколько ином эксперименте, когда в стакан была налита только одна вода.

2. Еще более похожее на настоящий смерч явление можно наблюдать во время такого опыта.

К валу микроэлектродвигателя припаяйте медную проволоку длиной около 25 см и диаметром 2 мм (можно использовать вязальную спицу). К концу проволоки, перпендикулярно к ней, припаяйте прямоугольную пластинку из латуни или жести размером 0,5×10×25 мм (рис. 4). Включив двигатель, проверьте, как работает изготовленная вами вертушка. Если возникнет необходимость, выправьте удлиненный вал (проволоку) так, чтобы при вращении биения были минимальными.

Опустите вертушку вертикально вниз в банку с водой диаметром 15—20 см и высотой 25—30 см и включите питание. Вы увидите постепенное образование воронки на поверхности воды и рост смерча по направлению к вращающейся пластинке (рис. 5—7). Когда смерч своим нижним концом коснется вертушки, образуется множество воздушных пузырьков, обозначающих вихрь вокруг вертушки.

Если держать двигатель рукой, смерч будет вести себя совсем как живой. Можно часами наблюдать за «хищными» движениями его конца.

Продолжите эксперимент. Положите на поверхность воды деревянный кубик — он будет втянут смерчем! Попробуйте подобрать скорость вращения вертушки так, чтобы кубик, вращаясь в воронке, длительное время оставался на одной и той же глубине под поверхностью воды. Точно так же смерч будет втягивать и тела, плотность которых больше плотности воды (в отличие от деревянного кубика) и которые до образования смерча лежали на дне банки.

Расположите двигатель так, чтобы его вал с вертушкой находился на оси банки. Вы обнаружите воронку, сползающую вниз по валу, а под вертушкой — продолжение этой воронки, обозначенное воздушными пузырьками (рис. 8). Поместив на дно банки хорошо промытый речной песок, вы сможете наблюдать структуру смерча под вертушкой.

Предлагаемые опыты показывают, что причиной образования смерча всегда является вихрь в жидкости или газе.

А. Ширшов

Об одной комбинаторной задаче

Как вы хорошо знаете, обычное умножение ассоциативно: $(ab)\,c=a\,(bc)$ для любых чисел. Ассоциативно и умножение функций: $(f(x)\,g(x))\,z(x)=f(x)\,(g(x)\,z(x))$.

Однако в ряде разделов математики рассматриваются неассоциативные «умножения». Если умножение неассоциативно, приходится пользоваться скобками, чтобы указать порядок действий, подобно тому, как приходится ими пользоваться в школьных примерах, содержащих сложение и умножение или деление.

Рассмотрим слово $a_1a_2a_3\ldots a_n$. Сколькими способами можно расставить в нем скобки, чтобы можно было вычислить неассоциативное «произведение» этих «букв»? Обозначим число таких способов через $\varphi(n)$. Ясно, что $\varphi(1)=1$ и $\varphi(2)=1$. Для трехбуквенного слова $a_1a_2a_3$ возможны две «хорошие» расстановки скобок: $(a_1a_2)\,a_3$ и $a_1\,(a_2a_3)$. Для четырехбуквенного — таких расстановок пять: $a_1(a_2(a_3a_4))$, $a_1((a_2a_3)\,a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $((a_1a_2)\,a_3)\,a_4$ и $(a_1(a_2a_3))\,a_4$. Поэтому $\varphi(3)=2$, $\varphi(4)=5$. (Покажите самостоятельно, что $\varphi(5)=14$, $\varphi(6)=42$.)

Числа $\varphi(n)$ называются *числами Каталана*. В «Кванте» № 7 за 1978 год подробно рассказывалось об этих числах. Упомянуто там и о связи между этими числами и расстановками скобок. В этой заметке я хочу привести простое доказательство следующей формулы для чисел Каталана:

$$\varphi(n)=\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}. \qquad (*)$$

(Из этой формулы следует, что число $\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}$ — целое при всех n.)

Для начала мне нужно ввести понятие циклически сравнимых слов. Проще начать с примера. Из символов a_1, a_2, a_3, взятых по одному, можно образовать два класса циклически сравнимых слов:

$$\{a_1a_2a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2\}$$

и

$$\{a_1a_3a_2, a_3a_2a_1, a_2a_1a_3.\}$$

Чтобы получить эти классы, нужно символы a_1, a_2, a_3 написать по кругу, как на циферблате часов, а затем начинать запись по часовой стрелке с любого из символов.

Дадим теперь точное определение. Два слова A и B называются *циклически сравнимыми*, если

$$A=b_1b_2\ldots b_kb_{k+1}\ldots b_n,$$
$$B=b_kb_{k+1}\ldots b_nb_1b_2\ldots b_{k-1}.$$

Поступим теперь следующим образом. Каждому неассоциативному слову (так мы будем называть слова с правильно расставленными скобками) из символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ поставим в соответствие ассоциативное слово (то есть слово без скобок) из символов $a_1, \ldots, a_n, p$ по следующему правилу: $a_i\to a_i$ и, если $u\to A$, $v\to B$, то $u\cdot v\to ABp$. Например, $a_1a_2\to a_1a_2p$,

$$(a_1a_2)\,a_3\to a_1a_2pa_3p,$$
$$a_1(a_2a_3)\to a_1a_2a_3pp,$$
$$a_1((a_2a_3)\,a_4)\to a_1a_2a_3pa_4pp,$$
$$(a_1a_2)(a_3a_4)\to a_1a_2pa_3a_4pp.$$

Легко понять, что каждому неассоциативному слову длины k от символов a_i соответствует некоторое ассоциативное слово длины $2k-1$, в которое p входит $k-1$ раз. Обратное, конечно, неверно. Например, слова $ppa_1a_2a_3$ или $a_1pa_2a_3p$ не могут быть получены с помощью описанной процедуры. Однако справедливо следующее утверждение:

Лемма. *Пусть A — некоторое ассоциативное слово длины $2n-1$, со-*

держащее каждый из символов a_i ($i=1, 2, \ldots, n$) по одному разу и символ p $n-1$ раз. Тогда существует одно и только одно циклически сравнимое со словом A (возможно, оно само) ассоциативное слово, которое соответствует некоторому неассоциативному слову длины n из символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

По своему характеру эта лемма сродни многим простым задачам, публиковавшимся в «Кванте». Я приведу ее доказательство лишь для полноты изложения.

Очевидно, в классе циклически сравнимых с A слов имеет смысл рассматривать лишь те, которые не начинаются с символа p, но кончаются символом p. Такие, конечно, существуют. В таком A_1 — это тоже легко понять — найдется подслово (часть слова) вида $a_i a_j p$, соответствующее неассоциативному слову $a_i a_j$. Обозначим этот кусочек слова A_1 через $\bar{a}_i$. Мы получили слово, в которое входят $a_1, a_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, a_n$, не входит a_j, а символ p входит уже в количестве $n-2$ раз. Из простой индукции по числу n и следует доказательство леммы.

Основанием для индукции является рассмотрение слов типа $a_1 a_2 p$ или аналогичных.

Итак, лемма доказана. Теперь формула (•) становится почти очевидной. В самом деле, среди $2n-1$ мест мы можем в точности C_{2n-1}^{n-1} способами выбрать расстановку $n-1$ символа p, а на оставшиеся места расставить символы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таким образом, чтобы в циклически сравнимом «хорошем» ассоциативном слове индексы у a_i шли в порядке их последовательного возрастания от 1 до n. Так как в каждом классе циклически сравнимых слов длины $2n-1$ окажется ровно $2n-1$ различных (почему?) элементов, $\varphi(n)=\frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}$.

Формула (•) доказана.

• • •

В заключение я хочу рассказать об интересной истории, происшедшей с этой задачей.

Популярный американский математический журнал «The American Mathematical Monthly» (для краткости AMM) в 1935 году опубликовал проблему известного математика Г. Биркгофа (№ 3674) в следующей формулировке:

Показать, что для всякого положительного целого k выражение $\varphi(k)=\frac{1}{2k-1}C_{2k-1}^{k-1}$ есть целое число; доказать справедливость рекуррентного соотношения

$$\varphi(k)=\varphi(1)\varphi(k-1)+\varphi(2)\varphi(k-2)+\ldots+\varphi(k-1)\varphi(1).$$

Легко понять, что Г. Биркгоф, занимаясь близкими вопросами, пришел к формуле (•) эмпирически. Рекуррентное же соотношение, при ближайшем рассмотрении, очевидно.

Эта проблема была решена с помощью достаточно сильных средств математического анализа в октябре 1935 года

Поэтому мне показалось весьма странным в том же журнале за 1941 г. увидеть напечатанной проблему (№ 3954) другого хорошо известного математика О. Оре:

Из трех элементов a, b, c, заданных в указанном порядке, можно составить $\varphi(3)=2$ произведения $(ab)c$ и $a(bc)$, если не считать, что закон ассоциативности имеет место. Аналогично, из четырех элементов a, b, c, d можно составить $\varphi(4)=5$ произведений

$$[(ab)c]d, \quad [a(bc)]d, \quad a[(bc)d], \quad a[b(cd)], \quad (ab)(cd).$$

Найти общее выражение $\varphi(n)$ для n множителей.

В такой формулировке эта задача была решена в том же 1941 г. Я с решением не знакомился, так как оно очевидно вытекало из простой ссылки на предыдущую задачу.

Но вот что интересно. В 1957 году редакция AMM решила посвятить отдельный номер журнала памяти О. Данкела, руководившего много лет отделом проблем. Жюри, составленное из 25 известных математиков США, должно было путем голосования выделить 400 особо интересных проблем из числа напечатанных в этом журнале для включения их в соответствующий выпуск. К моему удивлению, обе эти задачи, независимо, оказались среди выбранных.

(Окончание см. на с. 32)

Премии «Кванта»

В 1978/79 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальной премией, учрежденной редакционной коллегией журнала,— подпиской на «Квант» на 1980 год:

1. АГАЕВ Ализамин (с. Покровка АзССР)
2. БАЛИНСКИЙ Александр (с. Дубляны Львовской обл.)
3. ДАНИЛОВСКИЙ Игорь (г. Горький)
4. ДРЕМИН Алексей (п. Черноголовка Московской обл.)
5. ЕРМОЛИН Александр (г. Петрозаводск)
6. ЖИТЕНЕВ Николай (п. Черноголовка Московской обл.)
7. ЖОРДОЧКИН Валерий (г. Орск)
8. КАПЛАН Алексей (г. Сумгаит)
9. КЕЛАРЕВ Андрей (г. Свердловск)
10. КОГАН Евгений (г. Днепропетровск)
11. ЛЯПИН Александр (г. Гомель)
12. МОЛЧАНОВ Георгий (г. Саратов)
13. СЕРЕДА Владимир (г. Львов)
14. СИВАЦКИЙ Александр (г. Ленинград)
15. СТРЕШИНСКИЙ Михаил (г. Донецк)
16. ШИШКОВ Сергей (г. Москва)

За успешное участие в XIII Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1980 год награждаются:

1. АЙДАГУМОВ Валерий (г. Андижан)
2. АШЫРАЛЫЕВ Чарияр (г. Кара-Кала Туркм. ССР)
3. БАБАК Александр (п. Каменка)
4. ВАХРИН Сергей (с. Бобровка Павлодарской обл.)
5. КУДРЯВЦЕВ Сергей (г. Магадан)
6. ЛЕВИЦКИЙ Константин (г. Кара-Балты Кирг. ССР)
7. МЕСАБЛИШВИЛИ Бачук (г. Тбилиси)
8. ОСТАПЧУК Юрий (г. Здолбунов)
9. ПАВЛИАШВИЛИ Георгий (г. Тбилиси)
10. САТАФОВА Лола (г. Душанбе)
11. ФЕФИЛОВ Константин (г. Поставы)
12. ХОХЛОВ Юрий (г. Эмба)
13. ШУМКО Сергей (г. Лодейное Поле)

За активное участие в олимпиаде, способствовавшее ее отличному проведению, подпиской на «Квант» на 1980 год награждаются:

1. Организатор первых грузинских олимпиад С. ВАШАКМАДЗЕ
2. Председатель жюри олимпиады член-корр. АН ГССР Т. ГЕГЕЛИЯ
3. Физико-математическая школа-интернат им. Комарова г. Тбилиси (директор школы А. ЦХАДАЯ)
4. Директор школы № 42 г. Тбилиси, заслуженный учитель ГССР О. ГАГАНИДЗЕ
5. Учитель школы № 42 г. Тбилиси Р. МОШАШВИЛИ

задачник кванта

Задачи

М581 — М585; Ф593— Ф597

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М581, М582» или «Ф593». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этот конверте вы получите результаты проверки решений). Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М581. а) Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?
б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых — не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?

А. Броцкий

М582. В окружность с центром O вписан четырехугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от точки O до каждой его стороны равно половине длины противоположной стороны.

А. Келарев

М583. Рассматриваются наборы камней, масса каждого из которых не больше 2 кг, а общая масса набора — 50 кг. Из такого набора выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число D. Какое наибольшее значение может принимать число D для всевозможных наборов камней?

А. Вайнтроб, А. Печковский

М584. Можно ли представить все пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых — скрещивающиеся (то есть не лежат в одной плоскости)?

Ф. Вайнштейн

М585. На химической конференции присутствовало N ученых — химиков и алхимиков, причем химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, иногда — лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого ученого должен установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому ученому может задать вопрос: «Кем является такой-то — химиком или алхимиком?» (В частности: «Кто Вы?»). Докажите, что математик может выяснить все, что требуется

а) за $4N$ вопросов; б) за $2N-2$ вопроса;

в) * постарайтесь придумать способ, позволяющий установить, кто — химик, а кто — алхимик, за меньшее число вопросов (авторам известен довольно громоздкий способ, позволяющий сделать это за $[3N/2]$ вопросов).

С. Конягин, П. Блехер

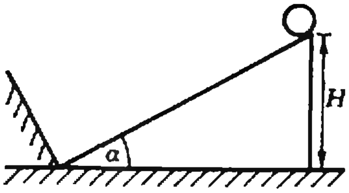


Рис. 1.

Ф593. Обруч радиуса r скатывается с высоты H ($r \ll H$) без проскальзывания по наклонной плоскости с углом α при основании и абсолютно упруго ударяется о гладкую стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 1). На какую высоту поднимется обруч после удара, если коэффициент трения скольжения равен μ?

М. Бородовский

Ф594. Представьте себе, что вы находитесь в жарко натопленной бане, а за окном — мороз. Куда повалит пар, если вы откроете форточку?

А. Варламов

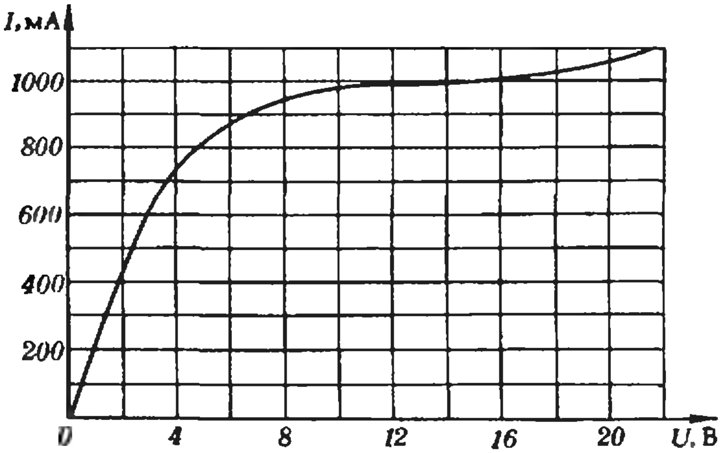


Рис. 2.

Ф595. На рисунке 2 изображена зависимость тока от напряжения для стабилизатора постоянного тока — барретора. Барретор подключен последовательно с нагрузочным сопротивлением $R = 13$ Ом к батарее с ЭДС $\mathscr{E} = 26$ В. В каких пределах может изменяться ЭДС батареи, если ток нагрузки не должен изменяться более чем на 50 мА?

С. Козел

Ф596. Промежуток времени между двумя последовательными затмениями спутника Юпитера Ио в течение года изменяется от минимального значения, равного 42 ч 28 мин 21,5 с, до максимального, равного 42 ч 28 мин 51,5 с. Пользуясь этими данными, определить скорость света, считая, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите с радиусом 150 млн. км. Радиус орбиты Юпитера гораздо больше радиуса орбиты Земли, а скорость движения Юпитера гораздо меньше скорости движения Земли.

В. Белонучкин

Ф597. Магнетрон представляет собой двухэлектродную электронную лампу с цилиндрическим анодом радиуса r, вдоль оси которого расположена тонкая проволочка — катод. При нагревании катода он испускает электроны с энергией E. Магнетрон помещают в однородное магнитное поле, параллельное его оси. При каком значении индукции магнитного поля ток в анодной цепи станет равным нулю?

Решения задач

М528, М529; Ф538 — Ф541

М528. *На каждой клетке шахматной доски стоит по фишке. Фишки нужно переставить так, чтобы расстояние между каждой парой фишек не уменьшилось по сравнению с расстоянием между ними при первоначальном расположении. Сколькими способами это можно сделать? (Расстоянием между фишками считается расстояние между центрами клеток, которые они занимают.)*

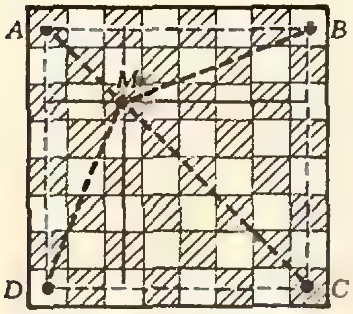


Рис. 1.

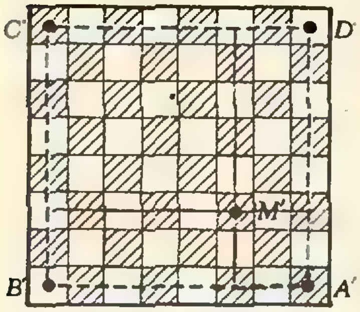


Рис. 2.

Докажем, прежде всего, что *требуемая перестановка фишек сохраняет расстояния между любыми двумя фишками*. Это можно сделать многими разными способами.

Первый способ. Сумма всех попарных расстояний между фишками не изменяется. Отсюда следует, что ни одно из расстояний не может увеличиться (действительно, если после перестановки фишек расстояние между какими-либо фишками увеличится, то, поскольку сумма всех расстояний постоянна, найдутся фишки, расстояние между которыми уменьшится, что противоречит условию перестановки).

Второй способ. Угловые фишки A, B, C, D (рис. 1) по-прежнему должны остаться угловыми, поскольку расстояние от каждой из них до фишки в противоположном (по диагонали) углу не может измениться (это расстояние, равное длине диагонали доски, максимально: $|AC| = |BD| \geq |KL|$, где K и L — произвольные клетки доски). Итак, эти четыре фишки по-прежнему занимают четыре угла доски, причем их новые положения A', B', C', D' — по-прежнему четыре последовательные вершины квадрата (рис. 2). Тогда расстояния от фишки M до сторон квадрата $ABCD$ должны равняться расстояниям от ее образа — фишки M' — до соответствующих сторон квадрата $A'B'C'D'$: иначе бы расстояния от M до каких-то двух соседних сторон квадрата не увеличились, а одно из них — строго уменьшилось; но тогда расстояние до общей вершины этих сторон тоже должно было бы уменьшиться.

Из наших доказательств ясно, что нужная перестановка фишек определяет некоторое перемещение квадрата $ABCD$ на самого себя. Таких самосовмещений существует восемь (включая тождественное, при котором все точки остаются на месте): вершина A может попасть в любую из четырех других, а при этом вершина B — в одну из двух соседних с ней вершин.

Заметим, что основной результат задачи допускает такое красивое обобщение: *если f — непрерывное отображение замкнутого ограниченного множества* (на плоскости или в пространстве) *в себя, такое, что для любых двух точек* M, N

$$\rho(f(M), f(N)) \geq \rho(M, N), \qquad (*)$$

то для любых двух точек M и N неравенство (*) будет равенством. Однако доказательство этого факта довольно сложно (см. Н. Бурбаки «Общая топология» (М., «Наука», 1975), задача 11 к § 2 главы IX).

Н. Васильев

◆

М529. *а) Многоугольник M' — образ выпуклого многоугольника M при гомотетии с коэффициентом $k = -{}^1/_2$. Докажите, что существует параллельный перенос T такой, что $T(M') \subset M$.*
б) При каких коэффициентах гомотетии $k<0$ верно аналогичное утверждение для выпуклого многогранника M в пространстве?

а). На первый взгляд в условии задачи есть неопределенность: не сказано, какой именно гомотетией получен многоугольник M'. Мы предлагаем читателю доказать о наших многоугольниках M, M' следующую лемму: *образ многоугольника M' при любом параллельном переносе может быть получен из M некоторой гомотетией с коэффициентом k (но с другим центром), и, наоборот, образ многоугольника M при произвольной гомотетии с коэффициентом k может быть получен из M некоторым параллельным переносом.*

Перейдем к решению. Выберем среди вершин многоугольника M три (скажем, A, B и C), образующие треугольник ABC наибольшей возможной площади (такие найдутся, так как у M — конечное число вершин). Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Рассмотрим образ M'' многоугольника M при гомотетии Γ с центром O и коэффициентом $k = -{}^1/_2$ (рис. 3). Как мы

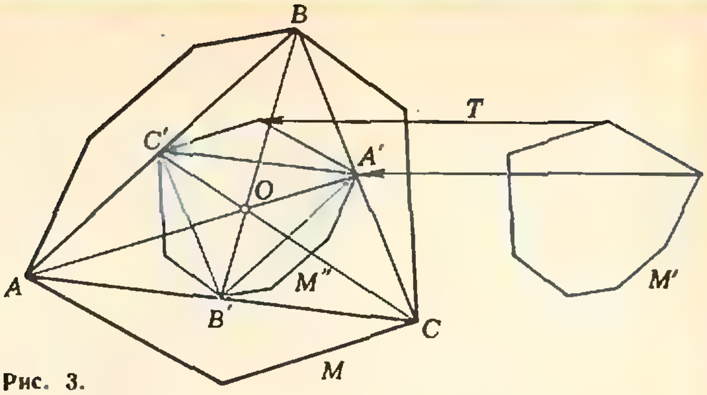


Рис. 3.

отметили, многоугольник M'' может быть получен из многоугольника M' параллельным переносом. Ясно, что если M'' окажется лежащим внутри треугольника ABC (и, тем более, внутри многоугольника M), то задача будет решена.

Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, образованный средними линиями треугольника ABC. Поскольку $\Delta A'B'C' = \Gamma(\triangle ABC)$, точки A', B', C' являются вершинами многоугольника M'', причем треугольник $A'B'C'$ имеет максимальную площадь среди всех треугольников, образованных тремя вершинами многоугольника M''. Пусть теперь какая-нибудь вершина — скажем, X — многоугольника M'' оказалась вне треугольника ABC, например, по разные с ним стороны от $[AB]$ (рис. 4). Но тогда треугольник $XA'C'$, очевидно, лежащий внутри многоугольника M'', имел бы площадь, большую, чем треугольник ABC, что невозможно. Значит, $M'' \subset \triangle ABC$.

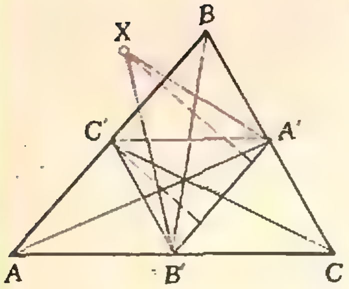


Рис. 4.

Задача а) решена.

б) Решение пункта б) задачи почти полностью повторяет изложенное выше. Прежде всего, если слово «многоугольник» заменить на «многогранник», то лемма останется справедливой. Далее, роль треугольника ABC (максимальной площади) будет играть тетраэдр $ABCD$, вершины которого являются вершинами многогранника M, а объем — максимальный среди объемов всех таких тетраэдров. Роль же центра гомотетии O прекрасно сыграет центр тяжести тетраэдра $ABCD$ (как известно, он делит отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, в отношении 1:3). Внимательный читатель, вероятно, уже догадался, что утверждение пункта б) будет верным, если положить $k = -{}^1/_3$. Так как, очевидно, оно тем более верно при $-\frac{1}{3} \leqslant k < 0$, для полного решения задачи остается показать, что уменьшить значение $k = -{}^1/_3$ нельзя. Чтобы доказать отрицание какого-либо утверждения, достаточно опровергнуть его в каком-нибудь частном случае. Опровергнем его, когда многогранник M — правильный тетраэдр.

Для этого докажем следующее утверждение: *пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр и $A'B'C'D'$ — его образ при гомотетии с коэффициентом $k' > -3$* (рис. 5); центр гомотетии, как мы видели, не играет роли); *тогда не существует параллельного переноса, при котором образ тетраэдра $ABCD$ лежал бы внутри тетраэдра $A'B'C'D'$.*

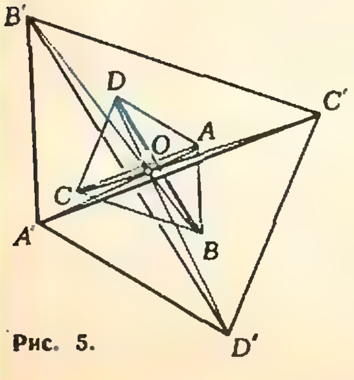


Рис. 5.

В самом деле, проведем через вершины тетраэдра $ABCD$ плоскости, параллельные противоположным граням тетраэдра (через вершину A — плоскость, параллельную грани BCD, и т. д.). Многогранник (обозначим его $A''B''C''D''$), образованный этими плоскостями, будет правильным тетраэдром, гомотетичным тетраэдру $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $k'' = -3$ (центр гомотетии — в центре тяжести тетраэдра $ABCD$). Значит, этот новый тетраэдр «больше» тетраэдра $A'B'C'D'$ (хотя бы по объему) и потому не может быть «задвинут» в него никаким параллельным переносом. Допустим теперь, что существует параллельный перенос T такой, что $T(ABCD)\subset A'B'C'D'$. «Вдвинем» немного грани тетраэдра $A'B'C'D'$ «внутрь», оставляя их параллельными себе, вплоть до касания с вершинами образа тетраэдра $ABCD$ при параллельном переносе T (то есть — с вершинами тетраэдра $T(ABCD)$). Получающийся при этом тетраэдр, очевидно, конгруэнтен ранее построенному тетраэдру $A''B''C''D''$ («большему», чем тетраэдр $A'B'C'D'$) и лежит внутри тетраэдра $A'B'C'D'$, что невозможно. Значит, требуемого параллельного переноса не существует.

Заметим, что правильность тетраэдра $ABCD$ нужна была лишь для наглядности.

Для многогранников же, отличных от тетраэдра, значение $k=-{}^{1}/_{3}$ может быть уменьшено; например, для центрально-симметричных выпуклых тел (не обязательно — многогранников) «минимальный» коэффициент гомотетии равен -1. Таким образом, граничный коэффициент гомотетии может служить мерой «несимметричности» выпуклого тела. Похожие вопросы разбираются в брошюре Б. Грюнбаума *«Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел»* (М., «Наука», 1971) и в книжке В. Г. Болтянского и И. М. Яглома *«Выпуклые фигуры»* (М. — Л., Гостехиздат, 1951).

Кроме вышеприведенного решения задачи а), нам известны еще два ее решения: первое — весьма простое, но использующее «трудную» *теорему Хелли* (см. решение задачи 19 из указанной книжки Болтянского и Яглома; там же можно найти разбор и применения теоремы Хелли); во втором за центр гомотетии принимается центр тяжести O многоугольника M как пластины. То, что O обладает нужными свойствами, проверяется очень просто.

Н. Нецветаев

◆

Ф538. *Тяжелая веревка подвешена в точках A и B (рис. 6). Абсолютное значение силы натяжения веревки в точке C равно 20 Н. Найти массу веревки.*

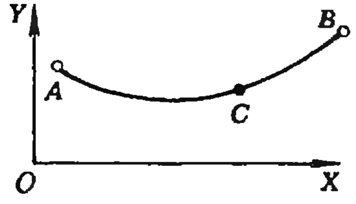


Рис. 6.

Обозначим m массу веревки, $\vec{T}_A$ и $\vec{T}_B$ — силы натяжения веревки в точках A и B. (Силы натяжения в каждой точке направлены по касательной к веревке). Так как веревка находится в равновесии, сумма сил, действующих на нее, равна нулю:

$$\vec{T}_A+\vec{T}_B+m\vec{g}=0.$$

Равна нулю и сумма проекций сил, действующих на веревку, на любую ось, в частности — на вертикальную ось OY. Следовательно,

$$T_{Ay}+T_{By}-m|\vec{g}|=0,$$

откуда

$$m=\frac{T_{Ay}+T_{By}}{|\vec{g}|}.$$

Таким образом, для того чтобы найти массу веревки, следует определить T_{Ay} и T_{By}. Найдем их.

Участок CB веревки находится в равновесии. Это означает, что сумма проекций на горизонтальную ось OX сил натяжения, действующих на веревку в точках C и B, равна нулю:

$$T_{Cx}+T_{Bx}=0.$$

Нарисуем в произвольном удобном масштабе силу $\vec{T}_C$ (рис. 7). Она направлена по касательной к веревке в точке C. Найдем проекцию силы $\vec{T}_C$ на ось OX. Теперь проведем касательную к веревке в точке B. Вдоль этой касательной направлена сила $\vec{T}_B$. На горизонтальной оси отложим проекцию силы T_{Bx} на ось OX, которая равна $-T_{Cx}$. Восстановив перпендикуляр в точке K до пере-

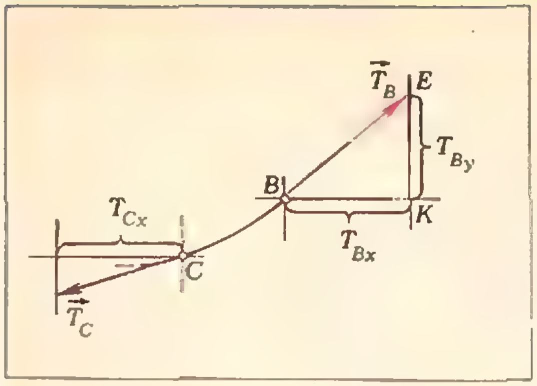


Рис. 7.

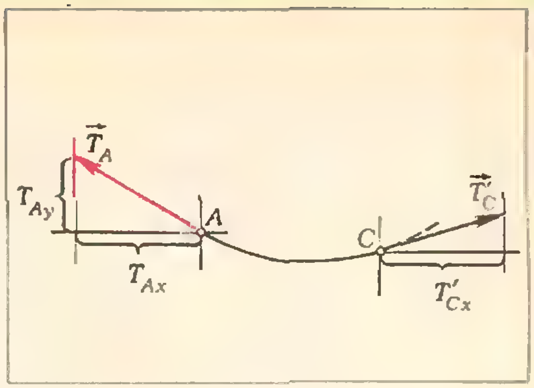


Рис. 8.

сечения с касательной в точке B, найдем силу $\vec{T}_B$. Теперь нетрудно найти проекцию силы $\vec{T}_B$ на вертикальную ось. Она определяется длиной отрезка KE с учетом масштаба, в котором мы рисовали силу $\vec{T}_C$. В нашем случае $T_{By} \approx 22$ Н.

Аналогично строится сила $\vec{T}_A$ натяжения веревки в точке A (рис. 8) и находится ее проекция на ось OY. В нашем случае она равна ≈ 9 Н.

Таким образом, $m = \dfrac{22+9}{9,8}$ кг $\approx 3,2$ кг.

И. Слободецкий

◆

Ф539. *На рисунке 9 показаны два замкнутых термодинамических цикла, проведенных с идеальным одноатомным газом: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ и $1 \to 5 \to 6 \to 4 \to 1$. У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?*

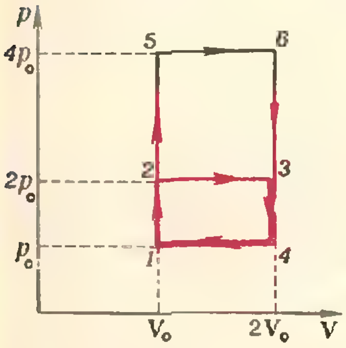


Рис. 9.

КПД цикла равен отношению работы A, совершенной газом, к количеству теплоты Q, сообщенной газу за цикл. Численно работа равна площади, ограниченной графиком цикла. Для первого цикла —

$$A_1 = (2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = p_0V_0,$$

для второго цикла —

$$A_2 = (4p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = 3p_0V_0.$$

Найдем теперь Q_1 и Q_2. В первом случае теплота передается газу на участках $1-2$ и $2-3$. При этом газ нагревается, а на участке $2-3$ еще и совершает работу $A' = 2p_0V_0$. Следовательно, $Q_1 = A' + \Delta U'$, $\Delta U'$ — изменение внутренней энергии газа. Так как температура газа минимальна в точке 1 и максимальна в точке 3, а теплоемкость одного киломоля идеального одноатомного газа равна $\frac{3}{2}R$,

$$\Delta U' = \frac{3}{2}R\nu(T_3 - T_1).$$

Здесь ν — число киломолей газа, $T_1 = \dfrac{p_0V_0}{\nu R}$, $T_3 = \dfrac{4p_0V_0}{\nu R}$.

Поэтому $\Delta U' = \frac{9}{2}p_0V_0$ и $Q_1 = \frac{13}{2}p_0V_0$. Аналогично найдем для второго цикла $A'' = 4p_0V_0$ (на участке $5-6$), $\Delta U'' = \frac{3}{2}R\nu(T_6 - T_1) = \frac{21}{2}p_0V_0$ и $Q_2 = \frac{29}{2}p_0V_0$. Используя полученные данные, находим:

$$\eta_1 = \frac{2}{13},\ \eta_2 = \frac{6}{29},\ \eta_1/\eta_2 \approx 0,74.$$

А. Зильберман

Ф540. *Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно. Какими будут максимальные токи в катушках, если параллельно им подключить конденсатор с емкостью C (рис. 10), предварительно заряженный до напряжения U?*

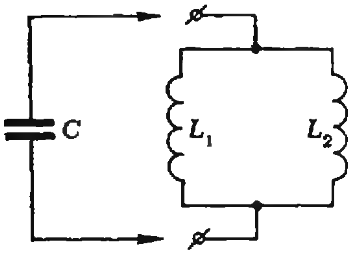


Рис. 10.

Так как катушки соединены параллельно, напряжения на них одинаковы: $U_{L_1}=U_{L_2}$. Но $U_{L_1}=L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$, $U_{L_2}=L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$.

Следовательно,

$$L_1\frac{\Delta I_1}{\Delta t}=L_2\frac{\Delta I_2}{\Delta t}. \qquad (1)$$

В начальный момент токи в обеих катушках равны нулю, поэтому из (1) следует, что токи I_1 и I_2 в любой момент времени таковы, что

$$L_1I_1=L_2I_2. \qquad (2)$$

(Это означает, что максимальные значения токов в катушках достигаются одновременно.)

Ясно, что токи I_1 и I_2 максимальны, когда конденсатор разряжен. Из закона сохранения энергии следует, что в этот момент

$$\frac{CU^2}{2}=\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) находим:

$$I_1=U\sqrt{\frac{L_2C}{L_1(L_1+L_2)}},\quad I_2=U\sqrt{\frac{L_1C}{L_2(L_1+L_2)}}.$$

О. Савченко

◆

Ф541. *Промежуток искрового генератора (рис. 11) отрегулирован на напряжение U, а сопротивление R резистора подобрано таким, чтобы происходило n разрядов в секунду. Определить среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе, если во время разряда конденсатор успевает полностью разрядиться.*

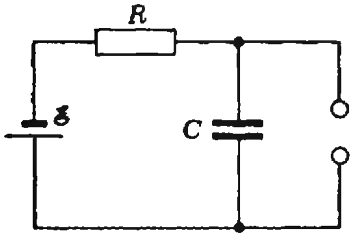


Рис. 11.

Для установившейся устойчивой работы искрового генератора необходимо, чтобы разряд в искровом промежутке не влиял на процесс зарядки конденсатора. Это возможно в случае, когда время разряда конденсатора через искровой промежуток значительно меньше времени зарядки его от источника до напряжения U.

В этом случае при нулевом напряжении на конденсаторе ток в искровом промежутке отсутствует, и промежуток восстанавливает свои диэлектрические свойства. Следующий пробой произойдет при достижении на промежутке, а следовательно, и на конденсаторе, напряжения U.

За время зарядки конденсатора до напряжения U батарея совершает работу $A=q\mathcal{E}$, где $q=CU$ — заряд на конденсаторе. Согласно закону сохранения энергии $A=Q+CU^2/2$, где Q — энергия, выделившаяся за время зарядки конденсатора на резисторе, $CU^2/2$ — энергия, запасенная в конденсаторе. Таким образом,

$$CU\mathcal{E}=Q+CU^2/2,$$

откуда

$$Q=CU\mathcal{E}\,(1-U/2\mathcal{E}).$$

Так как время разряда конденсатора через искровой промежуток мало, можно пренебречь энергией, выделяющейся за это время на резисторе.

Если в 1 секунду конденсатор заряжается n раз, то средняя мощность, выделяющаяся на резисторе, равна

$$N=nCU\mathcal{E}\left(1-\frac{1}{2}\frac{U}{\mathcal{E}}\right).$$

П. Зубков

МУКА
МУКА
МУКА

В. Гутенмахер

Неравенства с фиксированной суммой

В начале учебного года мы выбрали для нашего раздела тему «Неравенства», так как она пронизывает всю школьную программу по алгебре (см. гл. II «Алгебры 7», гл. I «Алгебры 8» и гл. IX пособия «Алгебра и начала анализа 10»).

Отметим, что к решению неравенств с несколькими переменными сводятся многие важные задачи из экономики и других приложений математики.

В статье на простейших задачах[*] мы познакомимся с важными приемами рассуждений, которые помогут вам научиться свободно обращаться с неравенствами.

Задачи про муку

В условиях первых задач речь идет о тройках чисел a, b, c, связанных соотношением $a+b+c=1$, в третьей части — о способе изображения таких троек на плоскости.

Задача 1. *В трех пакетах находится 1 кг муки. Кроме того, известно, что в первом пакете муки не больше, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем.*

а) *Может ли в третьем пакете находиться* $^2/_5$ *кг муки?*

б) *Может ли в третьем пакете находиться* $^1/_5$ *кг муки?*

в) *Сколько, самое меньшее, может быть муки в третьем пакете?*

г) *Сколько, самое большее, может быть муки в третьем пакете?*

а) Ответ. Может. Приведем пример. Распределим муку так: в первый и второй пакеты положим $^3/_{10}$ кг муки, а в третий — $^2/_5$ кг. Тогда все условия выполнены: $^3/_{10}+^3/_{10}+^2/_5=1$, причем в первом пакете муки не больше, чем во втором ($^3/_{10}\leqslant ^3/_{10}$), а во втором — не больше, чем в третьем ($^3/_{10}\leqslant ^2/_5$).

б) Ответ. Нет, не может. Докажем это. Допустим, что в третьем пакете $^1/_5$ кг, тогда во втором — не больше $^1/_5$ кг и в первом — тоже не больше $^1/_5$ кг. Но тогда во всех трех пакетах не больше $^3/_5$ кг муки, что противоречит условию. Поэтому наше допущение (что в третьем пакете $^1/_5$ кг) не верно.

---

[*] Часть этих задач составляет одно из заданий ВЗМШ (см. с. 32).

в) Ответ. В третьем пакете, самое меньшее, $^1/_3$ кг. Докажем это. Покажем сначала, что в третьем пакете не меньше, чем $^1/_3$ кг. Допустим противное: пусть там меньше $^1/_3$ кг муки. Тогда и во втором, и в первом пакетах тоже меньше $^1/_3$ кг, но это означает, что во всех трех пакетах меньше 1 кг муки, что противоречит условию. Итак, в третьем пакете не меньше $^1/_3$ кг. Покажем теперь, что в третьем пакете может быть $^1/_3$ кг муки. Если насыпать в каждый пакет по $^1/_3$ кг, то сумма будет 1 кг и в первом пакете муки окажется не больше, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем.

г) Ответ. В третьем пакете, самое большее, 1 кг. В самом деле, больше 1 кг не может быть по условию, а 1 кг получится, когда в первых двух пакетах муки вообще нет.

Следующие две задачи того же типа, что и задача 1. Напишите их решения, взяв за образец наше решение задачи 1.

Задача 2. *Условие то же, что в задаче* 1. *Нужно ответить на вопросы:*

а) *Может ли во втором пакете быть* $^2/_5$ *кг муки?*

б) *Может ли во втором пакете быть* $^3/_5$ *кг муки?*

и доказать, что

в) *Во втором пакете, самое большее,* $^1/_2$ *кг муки.*

г) *Во втором пакете может быть* 0 *кг муки.*

Задача 3. *Условие то же, что в задаче* 1. *Надо ответить на вопросы:*

а) *Может ли в первом пакете быть* $^{13}/_{37}$ *кг муки?*

б) *Может ли в первом пакете быть* $^{12}/_{37}$ *кг муки?*

в) *Сколько, самое большее, муки в первом пакете?*

г) *Сколько, самое меньшее, муки в первом пакете?*

Вместо муки — числа и углы

Обратимся снова к задаче 1. Ее можно сформулировать и по-другому:

Задача 4. *Про числа a, b, c известно, что $a+b+c=1$ и $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c$.*

а) *Может ли c равняться* $^2/_5$?

б) *Может ли c равняться* $^1/_5$?

в) *Найдите наименьшее значение c.*

г) *Найдите наибольшее значение c.*

Решение задачи 4 можно записать так:

а) c может быть равно $^2/_5$. Например, $c={}^2/_5$, $a={}^3/_{10}$, $b={}^3/_{10}$. тогда ${}^3/_{10}+{}^3/_{10}+{}^2/_5=1$ и ${}^3/_{10}\leqslant{}^3/_{10}\leqslant{}^2/_5$.

б) c не может быть равно $^1/_5$. В самом деле, если $c={}^1/_5$, то $b\leqslant{}^1/_5$, $a\leqslant{}^1/_5$, поэтому $a+b+c\leqslant{}^3/_5<1$, а это противоречит условию задачи.

в) Наименьшее значение c равно $^1/_3$. Покажем сначала, что $c\geqslant{}^1/_3$. Допустим противное, т. е. что $c<{}^1/_3$, тогда $b<{}^1/_3$ и $a<{}^1/_3$, поэтому $a+b+c<1$, что невозможно. Итак $c\geqslant{}^1/_3$. Покажем, что c может равняться $^1/_3$. В самом деле, если положить $a=b=c={}^1/_3$, все условия будут выполнены.

Задача 5. *Переформулируйте аналогичным образом задачу* 2 *и приведите ее решение так же, как мы это сделали с задачей* 1 (*см. задачу* 4).

Решите теперь следующие задачи, похожие на задачи 4 и 5:

Задача 6. *Про числа a_1, a_2, a_3 известно, что $a_1+a_2+a_3=1$ и $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$.*

а) *Найдите максимальное значение $2a_1+3a_2$.*

б) *Найдите минимальное значение $2a_1+3a_2$.*

Задача 7. а) *Может ли наибольший по величине угол в треугольнике равняться* 50°?

б) *Может ли средний по величине угол в треугольнике равняться* 88°?

в) *Может ли меньший по величине угол в треугольнике равняться* 66°?

Задача 8. *Какое наименьшее значение может принимать наибольший угол в треугольнике?*

Задача 9. *В трех пакетах находится* 1 *кг муки, причем известно, что в первом пакете в два раза меньше муки, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем. Сколько, самое большее, может находиться муки во втором пакете?*

Задача 10. *Пять прямых на плоскости расположены так, что никакие две из них не параллельны. Докажите, что среди них найдутся,* *по крайней мере, две прямые, угол между которыми не меньше 36°.*

Указание. Выберите произвольную точку на плоскости и проведите через нее прямые, параллельные данным.

Задача 11. *Докажите, что в выпуклом пятиугольнике не может быть больше трех острых углов.*

Задача 12. *Про числа a, b, c, d известно, что $a+b+c+d=4$ и $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.*

а) *Докажите, что $c \leqslant 2$.*

б) *Докажите, что наибольшее значение $b+c$ равно $^8/_3$.*

в) *Найдите наименьшее значение $a+d$.*

Задача 13. *Про числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 известно, что $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$ и $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$.*

а) *Докажите, что $a_3 \leqslant {}^1/_3$.*

б) *Найдите наибольшее значение $a_2+a_3+a_4$.*

в) *Найдите наименьшее значение a_1+a_5.*

Задачи про правильный треугольник

Задача 14. *Дан равносторонний треугольник. Найдите множество точек внутри него:*

а) *удаленных от стороны AB не больше, чем от стороны BC;*

б) *удаленных от стороны BC не больше, чем от стороны AC;*

в) *удовлетворяющих одновременно условиям а) и б).*

Ответ на вопрос а) показан цветом на рис. 1а), на вопрос в) — на рис. 1 б).

Оказывается, задача 14в) тесно связана с задачей 1. Для того, чтобы перекинуть мостик между этими задачами, решим следующую задачу:

Задача 15. *Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника ABC до его сторон равна длине h его высоты.*

Решение. Возьмем произвольную точку M внутри треугольника ABC и опустим из нее перпендикуляры на стороны AB, BC и AC. Пусть длины получившихся отрезков равны h_1, h_2 и h_3; это и есть расстояния от точки M до сторон. Надо доказать, что $h_1+h_2+h_3=h$. Соединим точку M с вершинами A, B и C. Очевидно, $S_{ABM}+S_{CBM}+S_{CMA}=S_{ABC}$, где S_{ABM}, S_{CBM}, S_{CMA}, S_{ABC} — площади треугольников ABM, CBM, CMA, ABC соответственно. Обозначим длину сторон треугольника ABC через a и перепишем это равенство так:

$$\frac{ah_1}{2}+\frac{ah_2}{2}+\frac{ah_3}{2}=\frac{ah}{2}.$$

Отсюда следует доказываемое равенство: $h_1+h_2+h_3=h$.

Дополнение к задаче 15. Утверждение этой задачи верно не только для внутренних точек треугольника, но и для точек, лежащих на его сторонах и в вершинах. (При этом мы считаем, что если точка лежит на стороне треугольника, то ее расстояние до этой стороны равно нулю.) Докажите это самостоятельно.

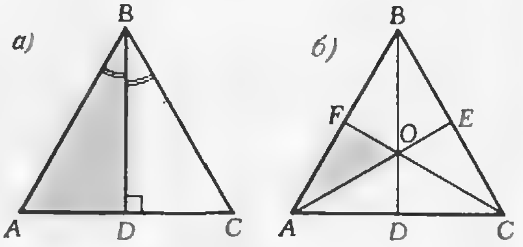


Рис. 1

Возьмем равносторонний треугольник ABC таким, чтобы его высота равнялась единице: $h=1$. Решив задачу 15, мы узнали, что каждой точке внутри нашего треугольника ABC соответствуют три числа h_1, h_2, h_3, сумма которых равна 1.

Мы предлагаем вам самим подумать над доказательством «обратного» утверждения: если заданы три числа h_1, h_2, h_3 таких, что $h_1 \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$, $h_3 \geqslant 0$, $h_1+h_2+h_3=1$, то внутри или на границе треугольника ABC можно найти точку M, расстояние от которой до $[AB]$ равно h_1, до $[BC]$ — h_2, до $[AC]$ — h_3. Конечно, достаточно потребовать, чтобы выполнялись лишь первые два условия, тогда расстояние от M до третьей стороны, согласно задаче 15, будет $1-h_1-h_2=h_3$.

Итак, мы научились тройки положительных (точнее — неотрицательных) чисел (h_1; h_2; h_3), у которых $h_1+h_2+h_3=1$, изображать геометрически. Будем так и говорить: «точка (h_1; h_2; h_3)» *).

Геометрическая иллюстрация первых задач

Теперь снова вернемся к первым задачам. Рассмотрим, например, рис. 1б) к задаче 14 (здесь и дальше мы по-прежнему считаем, что высота треугольника ABC равна 1). На нем выделены цветом те точки (h_1; h_2; h_3), для которых $h_1 \leqslant h_2$ и $h_2 \leqslant h_3$.

Покажем, что на многие вопросы, которые мы ставили в первых задачах, очень легко ответить при помощи барицентрических координат. Например, вернемся к задаче 4.

Теперь у нас другие обозначения: $a=h_1$, $b=h_2$, $c=h_3$, а условия записываются так: $0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant h_3$, $h_1+h_2+h_3=1$.

Вопрос в) задачи 4 можно сформулировать теперь так: какая точка треугольника BOF ближе всего к стороне $[AC]$?

Вопрос г) — какая точка треугольника BOF дальше всего от стороны $[AC]$?

Задача 16. *Сформулируйте вопросы в) и г) в задаче 2 на геометрическом языке — так же, как мы это сделали для задачи 4.*

Задача 17. *Укажите внутри правильного треугольника ABC и на его границе такие точки (h_1; h_2; h_3), что* а) $h_1=1/4$, *б)* $h_1+h_2=1/2$, *в)* $h_1+h_2 \leqslant 3/5$.

Геометрическая иллюстрация наглядно показывает нам, почему экстремальные значения переменных в первых задачах достигаются тогда, когда неравенства обращаются в равенства.

Задание Всесоюзной заочной математической школы

Обязательные задачи: №№ 2, 3, 7 — 10, 12а), 17.

Дополнительные задачи: №№ 6, 11, 12б), 12в), 13б).

---

*) Числа h_1, h_2, h_3 математики называют *барицентрическими координатами* точек правильного треугольника

Об одной комбинаторной задаче

(Окончание. Начало см. на с. 19)

Далее было еще интереснее. В «Математическом просвещении» № 4 (М., ФМ, 1959) профессор А. Лопшиц, комментируя уже упомянутый сборник избранных задач и желая доставить любителям математики информацию и, разумеется, удовольствие, выбирает, конечно, на свой вкус, 27 задач из 400 уже выбранных. И снова обе эти задачи, независимо, попадают в список.

На самом же деле, как мы теперь убедились, обе эти задачи — две стороны одного и того же вопроса.

Из этой «истории» видно, что даже крупные математики не всегда понимают друг друга, так как, зачастую, говорят на разных языках. Это явление довольно широко распространилось в последнее время, когда поток информации превышает человеческие возможности ее качественной переработки.

Квант для младших школьников

Задачи

1. Если Аня идет в школу пешком, а обратно едет на автобусе, то всего на дорогу она затрачивает полтора часа. Если же она едет на автобусе в оба конца, то весь путь занимает у нее тридцать минут. Сколько времени тратит Аня на дорогу, если и в школу, и из школы она идет пешком?

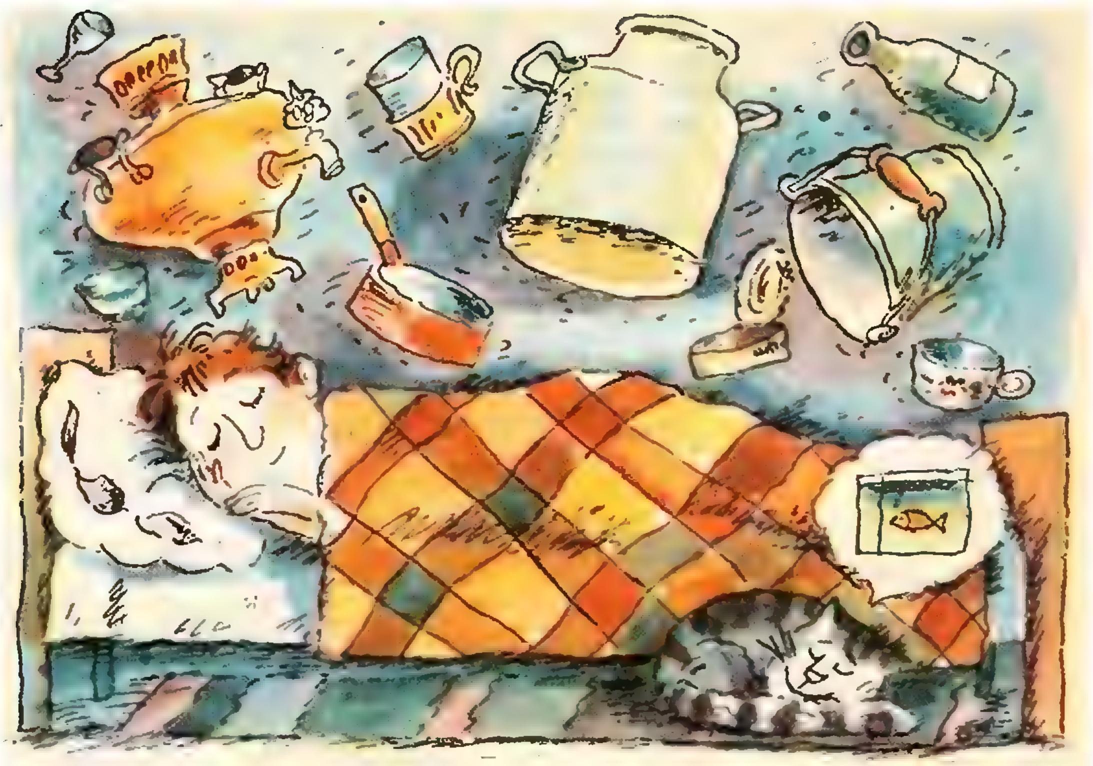
2. Может ли сумма $1+2+3+\ldots+p$ при каком-либо p оканчиваться на 1979?

3. На колхозный двор прилетело 35 ворон. Неожиданно испугавшись чего-то, вороны взлетели и разделились на две стаи: первая стая уселась на ветви старого тополя, а другая — на крышу водонапорной башни. Через некоторое время с тополя на крышу перелетело 5 ворон, столько же ворон совсем улетело с крыши, после чего на тополе осталось вдвое больше ворон, чем на крыше. Сколько было ворон в обеих стаях первоначально?

4. Найдите произведение

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right).$$

5. Задача-фокус. Возьмите трехзначное число. Запишите цифры в обратном порядке (например, 347→743, 525→525); получится еще одно трехзначное число. От большего числа отнимите меньшее. Последнюю цифру разности сообщите отгадчику. Отгадчик называет разность. Как он это делает?



Н. Михайлова

Емкости

Мне сегодня на уроке неинтересно. Мы по арифметике повторяем пройденное. Нужно вставить значок «больше» или «меньше». Я так чаек рисую, только я тогда значок переворачиваю — не так > или <, а так V. И еще кружки считаем — сколько десятков, сколько единиц. Где целые десятки — белые кружки, а где столбик до десятка недорос — красные. Но мы с папой это уже все проходили, потому что мама велела ему меня «натаскать». «Натаскать» — это когда долго арифметику объясняют. Папа меня натаскивал, натаскивал и говорит: «Не понимаю, что от нас мама хочет. Ты у меня и сам все понимаешь.

На сегодня хватит. Вот тебе под занавес еще задача. Подумай пару дней. Когда-то ее решил один маленький мальчик вроде тебя. Потом он великим ученым стал. Только он сразу решил, а ты не потянешь. Но думай, думай, шевели извилинами, от этого их больше становится.»

Думал я, думал, но пока ничего не придумал, а сейчас мне класс мешает. Бубнят все чего-то, как далекий паровозик: «Бу-б-б, чух-чух-чух.»

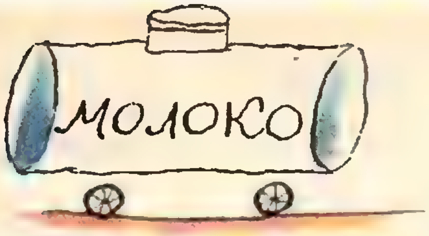
«Открой задачник, Матвеев Женя, а то ты бог знает чем занят», — сказала Зинаида Ивановна.

Он у меня открыт, но не там, где у всех, а где папина задача лежит. Я ее вчера вечером решал, решал, но очень спать хотелось. Лег, а у меня в голове слово «емкость» из задачи застряло. Красивое слово.

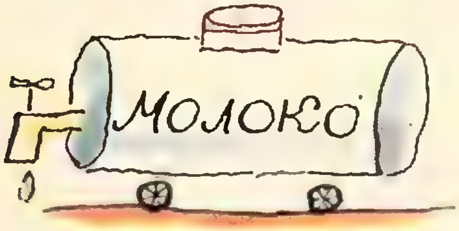
Емкость — это и ведро, и кастрюля, и таз, даже некрасивые, неэмалированные. И банка консервная — тоже емкость. Мне всю ночь емкость снилась, так что я, когда проснулся, то еле добежал. И бабушка сказала, что в моем возрасте это уже стыдно.

А задача такая. *Даны две емкости: 3 литра и 5 литров — и цистерна молока. Как налить 4 литра?* Значит, так. Нужно налить ровно 4 литра молока. Я люблю молоко. Мама говорит — я в нее пошел. Когда была война, а молока не было, она все мечтала пойти в доярки, чтобы пить его целый день.

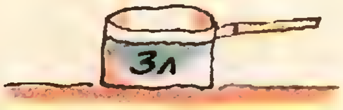
Странно все-таки! Как же лить молоко из цистерны без крана?



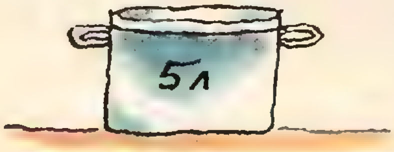
Приделаю ей кран:



Уже лучше. Теперь подставляю емкости. Наливаю полные кастрюли.



В этой кастрюльке 3 л, а нужно 4. Значит, $4>3$ и $4-3=1$. На 1 л меньше, чем нужно. А добавлять все равно некуда. Она же полная.

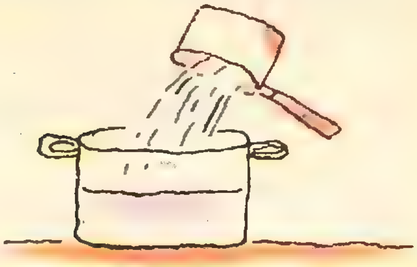


А в этой — 5 л. $5>4$ и $5-4=1$. Наоборот, на 1 л больше.

Как бы этот литр отлить? А как его отмерить? Мерки ведь нет. Вот в магазине черпачок такой есть литровый, и то мама говорит, что недоливают. А без мерки как же я отмерю?

Ничего не получается.

А если обе кастрюли вместе слить? $5+3=8$, а $8=4+4$. Будет целых два раза по 4! А куда сливать? В меня можно, потом пущу туда рыбок, как в аквариум, — пусть плавают.



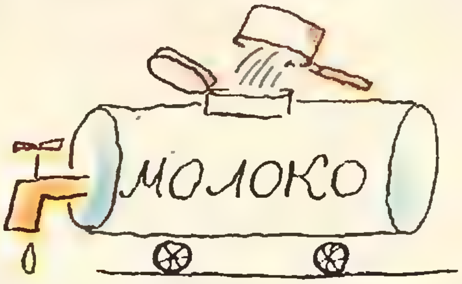
Нет, не нужно рыбок, попрошу лучше папу, чтобы купил в зоомагазине китенка. Пущу в живот, назову Васей. Будем разговаривать.

Но ведь он расти будет. Еще лопну. Нет, не надо никого. Ладно.

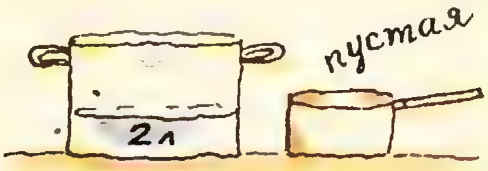
Некуда сливать кастрюлечки. Налью-ка я сначала в меньшую, а потом из нее перелью в большую:

Маленькая теперь пустая совсем, а в большой 3 л молока и 2 литра пустых. Еще можно из маленькой лить. Снова наберу маленькую кастрюлечку полную и вылью в большую, сколько влезет. А туда 2 л влезут. Значит, в маленькой 1 л останется, а мне 1 л отмеривать из большой надо.

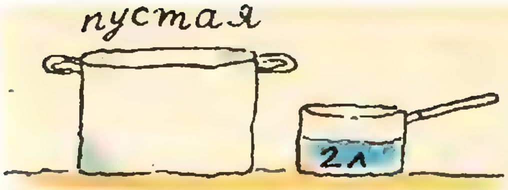
Попробую наоборот—из большой в пустую маленькую лить. Вылил 3 л. В большой 2 л осталось. Вот сколько. Теперь из маленькой кастрюльки вылью молоко, потому что емкость очень нужна. Вылью обратно в цистерну, не на землю же его лить. Правда?



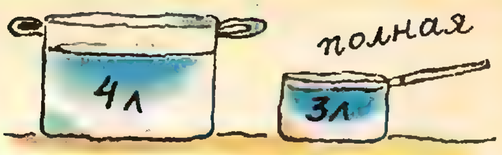
Что у меня теперь получилось?



Ага! Перелью теперь из большой в пустую кастрюлечку. Что получилось?



Так ведь в маленькой пустого места теперь 1 л. Ура! Ура! Я ведь раньше хотел из большой 1 л отлить. Ровно один! Теперь у меня мерка есть. Скорей, скорей! Снова наливаю полную большую кастрюльку и из нее сливаю в маленькую. Сколько сливаю? Ровно литр. Что получается?



Я, наверное, как тот мальчик, буду великим ученым! У меня ведь тоже 4 л налито в кастрюльке! Ах, ты моя кастрюлечка! Уф! Теперь отдохну.

●

«Женя Матвеев, ты еще и заснул вдобавок!»

Разве ж я спал?

Есть еще решения!

В апрельском номере «Кванта» мы предложили младшим школьникам следующую задачу (см. с. 97): *Параллелограмм составлен из трех равнобедренных треугольников, среди которых нет конгруэнтных. Найдите величины его углов.*

В пятом номере журнала мы указали два решения этой задачи: параллелограмм с острым углом 72° и параллелограмм с острым углом $\frac{360^\circ}{7}$, приведя при этом три рисунка с возможными разбиениями (см. с. 63). Как справедливо заметил нам читатель *А. Гольдберг* из Ленинграда, задача имеет не два, а пять решений: параллелограммы с острыми углами 36°, 72°, $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{360^\circ}{7}$ и $\frac{540^\circ}{7}$. Мы извиняемся перед читателями и, не приводя полного решения задачи (это довольно скучный перебор многих случаев), помещаем только рисунки.

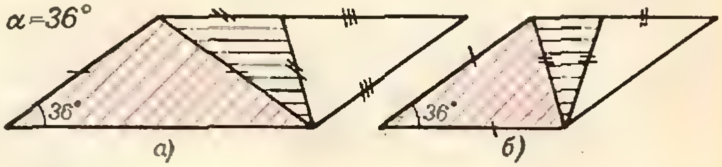


Схема 1.

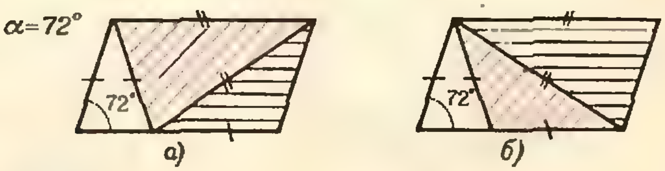


Схема 2.

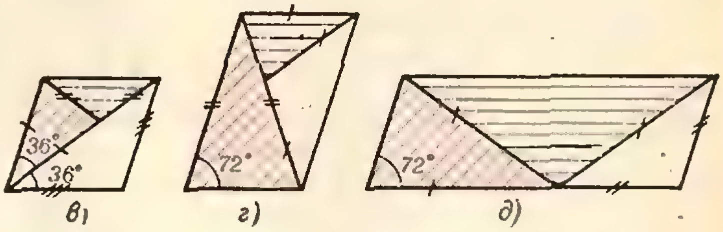


Схема 3.

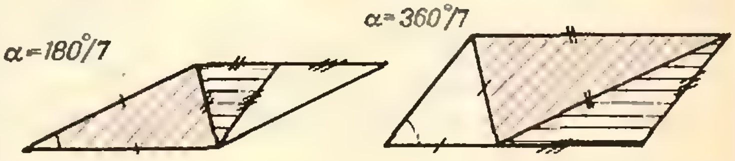


Схема 4.

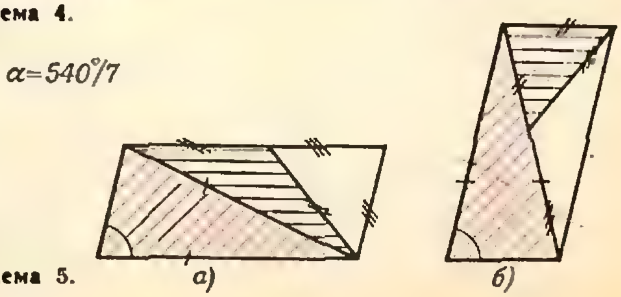


Схема 5.

Кончились летние каникулы, начался новый учебный год. Начинается учебный год и в «Практикуме абитуриента» — традиционном разделе нашего журнала.

Какие задачи и вопросы предлагают абитуриентам на вступительных экзаменах по математике и физике в различных вузах? В чем состоят типичные недостатки ответов поступающих, их характерные ошибки? Как проходят приемные экзамены? Чему при подготовке к этим экзаменам уделять основное внимание? Как наиболее эффективно использовать оставшееся время и организовать повторение материала? Получаемые редакцией письма читателей, их выступления на читательских конференциях свидетельствуют, что подобные вопросы интересуют и волнуют очень многих — учащихся школ и профессионально-технических училищ, рабочую молодежь, учителей, любителей математики и физики и даже... родителей, подчас весьма далеких по своей специальности от этих наук. Ответам на все эти вопросы и посвящены материалы «Практикума абитуриента».

Прежде всего читатели найдут здесь статьи по отдельным разделам программ вступительных экзаменов в вузы по математике и физике. Такие статьи преследуют цель дать углубленное, подробное разъяснение наиболее важных и сложных тем школьных курсов математики и физики, предостеречь будущих абитуриентов от наиболее часто встречающихся ошибок. Изложение теоретических положений в этих статьях, как правило, иллюстрируется разбором типичных задач, взятых из практики вступительных экзаменов. Намечая темы статей, редакция учитывает, по мере возможности, конкретные предложения и пожелания, высказываемые в письмах читателей.

Заменить собой школьные учебники, где изложены систематические курсы математики и физики, статьи «Практикума абитуриента», конечно же, не могут — да и нет такой нужды. Они рассчитаны на тех, кто уже усвоил содержание учебников и хотел бы получить дополнительные пояснения и задания для самостоятельной работы. Помимо публикаций, которые появятся в «Практикуме абитуриента» в последующих номерах «Кванта», при подготовке к вступительным экзаменам полезно познакомиться и с некоторыми статьями, помещенными в журнале в прошлые годы (тематический список таких статей см. в «Кванте», 1974, № 1, с. 52, 1976, № 1, с. 60).

Не следует думать, что материалы «Практикума абитуриента» рассчитаны только на десятиклассников. Ряд статей этого раздела вполне доступен девятиклассникам, да и из остальных статей им будет понятно очень многое.

Вполне естественно, что будущим абитуриентам интересно узнать, какого рода задачи предлагают на вступительных экзаменах. Ведь каждому хотелось бы конкретно представить себе, что такое экзамен, заранее познакомиться с уровнем требований экзаменаторов в различных учебных заведениях. Это особенно важно для молодежи, оканчивающей школы в селах, рабочих поселках, небольших городках. В «Практикуме абитуриента» будут систематически помещаться образцы вариантов письменных экзаменов и задач устных экзаменов по математике и физике, которые предлагались в 1979 году в различных вузах нашей страны. Хотя эти задачи различаются по своей сложности, читатели сами убедятся в главном: для их решения достаточно лишь хорошо усвоить школьные курсы, и никаких дополнительных знаний не требуется. Кстати, публикуемые варианты дают отличную возможность попробовать свои силы в решении «реального» экзаменационного набора задач за фиксированное время (обычно на выполнение работы абитуриенты получают 4 часа).

Очень важно готовить себя к экзаменам и психологически, воспитывая волю, выдержку, самообладание. К сожалению, известно немало случаев, когда неплохо подготовленный абитуриент во время экзамена терялся, начинал нервничать и в результате не мог решить даже простые задачи или рассказать то, что хорошо знал.

Редакция журнала «Квант» надеется, что раздел «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающих. Вероятно, в ходе подготовки к экзаменам у читателей будут возникать какие-то вопросы, замечания, предложения. Напишите нам об этом. Редакция ответит на ваши вопросы — лично или в рубрике «Спрашивайте — отвечаем», а наиболее интересные предложения и соображения читателей будут опубликованы в обзоре «Читатели советуют».

Я. Суконник, П. Горнштейн

Геометрические решения геометрических задач

Памяти Вайнмана Б. Ш.,
учителя математики города Киева,
посвящается.

При решении геометрических задач нередко прибегают к различным аналитическим методам. В настоящей же статье рассказывается о нескольких геометрических способах, которые делают решение простым и рациональным. Изложенные методы и приемы почти очевидны и, несомненно, не новы для читателя, но, тем не менее, думается, что напоминание о них будет полезным всем, кто желает хорошо научиться решать геометрические задачи.

1. Определим вид фигуры.

Решение задачи в некоторых случаях значительно ускорится, если предварительно определить вид, который может (или не может) иметь исходная фигура.

Задача 1 (МГУ, ВМК, 1978). *Около треугольника AMB описана окружность, центр которой удален от стороны AM на расстояние 10. Продолжение стороны AM за вершину M отсекает от касательной к окружности, проведенной через вершину B, отрезок BC, равный 29. Найти площадь треугольника BMC, если известно, что угол ACB равен* $\operatorname{arctg}\frac{20}{21}$.

Определим вид треугольника BMC, для чего проведем его высоту BM_1, продолжим ее до пересечения с окружностью в точке M_2 и спроектируем центр окружности O на сторону AM и хорду BM_2 (рис. 1). Тогда, согласно условию,

$$|OK|=10,\ |BM_1|=|BC|\sin\widehat{ACB}=$$
$$=29\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{20}{21}\right)=29\cdot\frac{20}{29}=20=$$
$$=2|OK|,\ |BM_2|=2|BL|=$$
$$=2(|BM_1|-|LM_1|)=2(|BM_1|-$$
$$-|OK|)=2|BM_1|-2|OK|=$$
$$=2|BM_1|-|BM_1|=|BM_1|.$$

Отсюда следует, что точки M, M_1 и M_2 совпадают (рис. 2) и, следовательно, точка O лежит на $[AB]$ и треугольник BMC — прямоугольный. Дальнейшее ясно. (Ответ. 210.)

Задача 2 (МГУ, геологич. ф-т, 1978). *В треугольнике ABC сторона $|AC|=3$, $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$ и радиус описанной окружности равен 2. Доказать, что площадь треугольника ABC строго меньше 3.*

Покажем, что $\triangle ABC$ не может быть прямоугольным. В самом деле, проведем в окружности радиуса 2 из точки A хорды AC, AB_1, AB_2 и диаметр AD (рис. 3) так, чтобы $|AC|=3$, $\widehat{B_1AC}=\widehat{B_2AC}=\frac{\pi}{6}$. Отрезок AB_1 не совпадает с отрезком AD, поскольку $\widehat{CAB_1}=\frac{\pi}{6}\neq\arccos\frac{3}{4}=$ $=\arccos\frac{|AC|}{|AD|}=\widehat{CAD}$. Следовательно, $\widehat{ACB_1}\neq\frac{\pi}{2}$ и $|AB_1|<|AD|$. Поэтому

$$S_{\Delta AB_1C}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|AB_1|\sin\widehat{B_1AC}<$$
$$<\frac{1}{2}|AC|\cdot|AD|\sin\widehat{B_1AC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\times$$
$$\times\sin\frac{\pi}{6}=3.$$

Неравенство $S_{\Delta AB_2C}<3$ легко следует из $|AB_2|<|AC|=3$.

2. «Достроим» фигуру.

Всякое геометрическое решение геометрической задачи начинается с работы над чертежом.

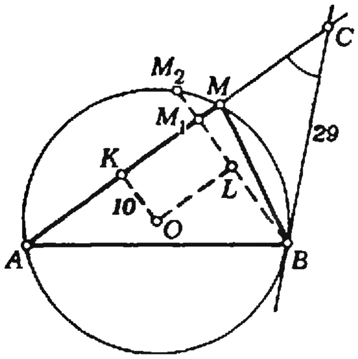


Рис. 1.

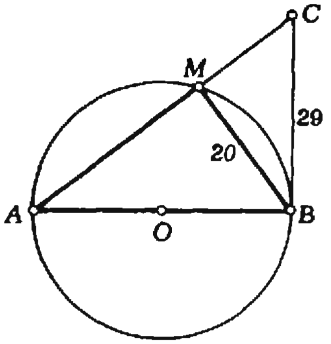


Рис. 2.

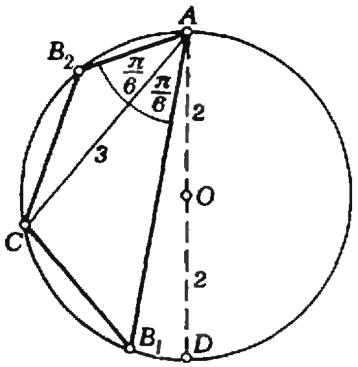


Рис. 3.

При этом иногда на «естественном» чертеже (т. е. на чертеже, на котором только «изображено» условие) трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, а если фигуру «достроить», эти связи становятся очевидными.

Задача 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1977). *Длины основания CD, диагонали BD и боковой стороны AD трапеции $ABCD$ равны между собой и равны p. Длина боковой стороны BC равна q. Найти длину диагонали AC.*

В данной трапеции $ABCD$ (рис. 4) нелегко увидеть связь между искомой диагональю AC и другими отрезками. Если же, приняв во внимание, что точка D равноудалена от точек A, B и C, провести окружность $O(D, p)$ и «достроить» данную трапецию до равнобедренной трапеции $ABCE$, из прямоугольного треугольника ACE легко найдем $|AC| = \sqrt{4p^2 - q^2}$.

Задача 4 (НГУ, 1976). *В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD биссектриса угла B перпендикулярна боковой стороне AD и пересекает ее в точке E. В каком отношении прямая BE делит площадь трапеции, если известно, что длина отрезка AE в два раза больше длины отрезка DE?*

Если «достроить» данную трапецию $ABCD$ до треугольника AFB (рис. 5), получим равнобедренный треугольник, от которого отрезок DC отсекает подобный треугольник DFC с коэффициентом подобия $\frac{1}{4}$. Поэтому искомое отношение равно

$$\frac{S_{EDCB}}{S_{\triangle AEB}} = \frac{S_{\triangle EFB} - S_{\triangle DFC}}{S_{\triangle AEB}} = \frac{\frac{1}{2}S_{\triangle AFB} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 S_{\triangle AFB}}{\frac{1}{2}S_{\triangle AFB}} = \frac{7}{8}.$$

3. Опишем окружность.

В некоторых случаях существенным моментом в геометрическом решении задачи является установление конгруэнтности некоторых углов. Чаще всего такие углы являются соответственными в подобных треугольниках

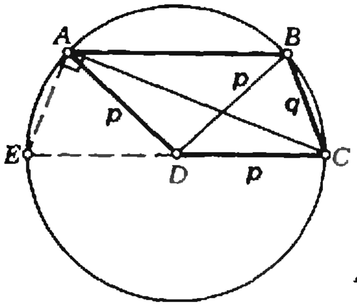


Рис. 4.

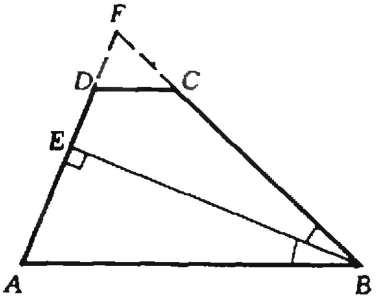


Рис. 5.

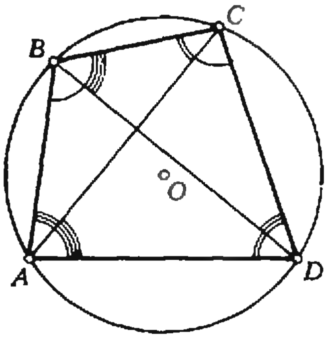


Рис. 6.

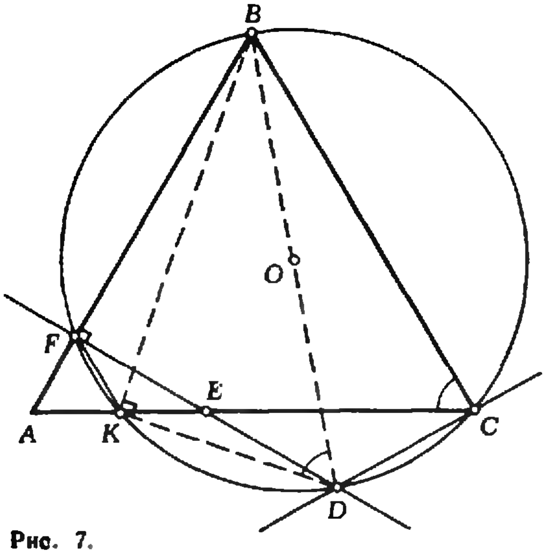


Рис. 7.

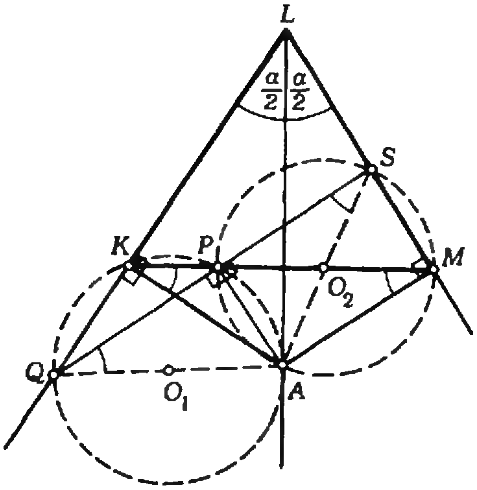


Рис. 8.

или многоугольниках. Однако возможны такие ситуации, когда конгруэнтность рассматриваемой пары углов следует из конгруэнтности другой пары углов, величины которых известны. Например, около четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда можно описать окружность, когда $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180°$ («Геометрия 8», п. 113). Легко доказать, что это условие равносильно условию $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$. Таким образом, равенства $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$, $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$, $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$, $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}$ равносильны (рис. 6).

Задача 5 (МФТИ, 1976). *Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно (AB), и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно (BC), пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.*

Пусть прямая ED пересекает прямую AB в точке F (рис. 7). Тогда треугольник AFE — прямоугольный, причем $[FK]$ — медиана. Значит, треугольник AFK — правильный треугольник, гомотетичный данному треугольнику ABC. Поэтому $[FK] \parallel [BC]$ и четырехугольник $BFKC$ — равнобедренная трапеция. Следовательно, около него можно описать окружность. Из $\widehat{BFD}+\widehat{BCD}=90°+90°=180°$ следует, что точка D принадлежит той же окружности. Поэтому $\widehat{BKD}=\widehat{BFD}=90°$, $\widehat{KDB}=\widehat{KCB}=60°$ и $\widehat{DBK}=30°$.

Задача 6 (МГУ, физфак, 1974). *На биссектрисе угла с вершиной L взята точка A. Точки K и M — основания перпендикуляров, опущенных из A на стороны угла. На отрезке KM взята точка $P(|KP|<|PM|)$ и через точку P перпендикулярно к отрезку AP проведена прямая, пересекающая прямую KL в точке Q (K между Q и L), а прямую ML — в точке S. Известно, что $\widehat{KLM}=\alpha$, $|KM|=a$, $|QS|=b$. Найти длину отрезка KQ.*

Как известно, $|AK|=|AM|$. Легко сообразить, что $\widehat{AKM}=\widehat{ALK}=\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $|AK|=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Вокруг четырехугольников $APKQ$ ($\widehat{APQ}=\widehat{AKQ}=90°$) и $APSM$ ($\widehat{APS}+\widehat{AMS}=90°+90°=180°$) можно описать окружности (рис. 8). Поскольку $\widehat{AQS}=\widehat{AQP}=\widehat{AKP}=\widehat{AKM}=\widehat{AMK}=\widehat{AMP}=\widehat{ASP}=\widehat{ASQ}=\frac{\alpha}{2}$, треугольник AQS — равнобедренный. Из $\triangle AQS$ находим $|AQ|$, затем из прямоугольного треугольника AKQ —

$$|KQ|=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

4. „Этот вездесущий треугольник“

Поиск геометрического решения задачи можно вести в направлении рассмотрения фигур, свойства которых хорошо изучены. Одной из таких фигур, несомненно, является треугольник. Верный и добрый помощник — треугольник — поист не вездесущ и порою незаменим в наших рассуждениях, в отыскании простых и ясных решений. Позволим себе поэтому следующий совет: если вы испытываете затруднения в выборе правильного геометрического пути решения задачи, ищите треугольник!

Задача 7 (МГУ, ВМК, 1975). *Дана прямоугольная трапеция, основания которой равны a и b ($a<b$). Известно, что некоторая прямая, параллельная основаниям, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Определить радиусы этих окружностей.*

Достроим данную трапецию $ABCD$ до треугольника (рис. 9). Пусть окружности, вписанные в трапеции $AEFD$ и $EBCF$, касаются $[EF]$ в точках M и N, а радиусы их будут R и r соответственно. Поскольку данная трапеция — прямоугольная, $|EM|=R$, $|EN|=r$. Из равенства $|KP|=|KQ|$ легко вывести $|EN|=|MF|$. (Это утверждение имеет общий характер: в любом треугольнике точки касания вписанной и вневписанной окружностей равноудалены от концов стороны, которой они касаются. *Вневписанная окружность*—это окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.) Значит, $|EF|=R+r$. Из подобия треугольников BKC, EKF и AKD получаем систему

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{R+r}=\frac{r}{R}, \\ \frac{R+r}{b}=\frac{r}{R} \end{array}\right.$$

(в подобных треугольниках как радиусы вписанных, так и радиусы вневписанных окружностей относятся как соответствующие стороны), из которой $R=\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $r=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

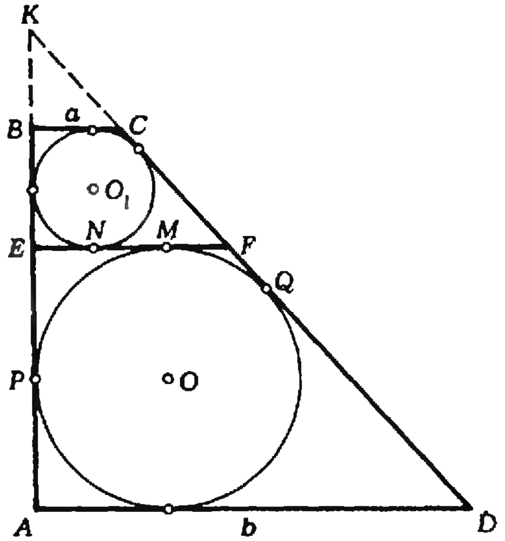


Рис. 9.

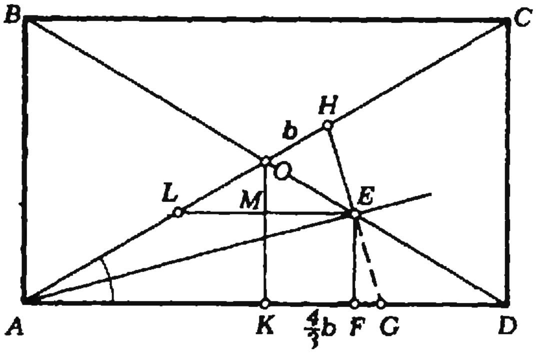


Рис. 10.

Задача 8 (МГУ, физфак, 1975). *В прямоугольнике $ABCD$ ($|BC|>|CD|$) диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Биссектриса угла CAD пересекает $[BD]$ в точке E. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AD; точка K — середина $[AD]$. Через точку E проведен также перпендикуляр к $[AE]$ до пересечения с диагональю AC в точке H. Найти площадь $ABCD$, если $|OH|=b, |KF|=\frac{4}{3}b$.*

Проведем $[EL] \parallel [AD]$, где $L \in [AO]$ (рис. 10). Поскольку

$$\widehat{AEL}=\widehat{EAD}=\widehat{EAC}, |AL|=|LE|= =2|ME|=2|KF|=\frac{8}{3}b.$$

Продолжим перпендикуляр HE до пересечения с $[AD]$ в точке G. Треугольник AHG — равнобедренный ($[AE]$ — биссектриса и высота). Так как $[LE]$ — средняя линия в нем,

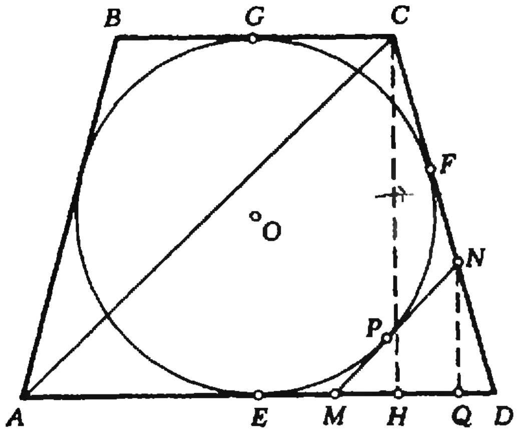


Рис. 11.

треугольник LHE также будет равнобедренным. Поэтому

$$|OM| = \sqrt{|OL|^2 - |LM|^2} =$$
$$= \sqrt{(|LH| - |OH|)^2 - |ME|^2} =$$
$$= \sqrt{(|LE| - |OH|)^2 - |KF|^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{8}{3}b - b\right)^2 - \left(\frac{4}{3}b\right)^2} = b.$$

Используя подобие треугольников ACD и LOM с коэффициентом подобия

$$k = \frac{|AC|}{|LO|} = \frac{2|AO|}{|LH| - |OH|} =$$
$$= \frac{2(|AL| + |LH| - |OH|)}{|LE| - |OH|} =$$
$$= \frac{2\left(\frac{8}{3}b + \frac{8}{3}b - b\right)}{\frac{8}{3}b - b} = 5{,}2,$$

находим искомую площадь

$$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ACD} = 2k^2 S_{\Delta LOM} =$$
$$= k^2 \cdot |LM| \cdot |OM| = (5{,}2)^2 \cdot \frac{4}{3} b \cdot b =$$
$$= \left(36\frac{4}{75}\right) b^2.$$

Задача 9 (МФТИ, 1974). *Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($|AD| > |BC|$). Прямая, параллельная диагонали AC, пересекает стороны AD и CD соответственно в точках M и N и касается окружности в точке P. Определить углы трапеции, если $\frac{|MP|}{|PN|} = k$.*

Рассмотрение подобных треугольников ACD и MND (рис. 11) приводит к несложному геометрическому решению. Обозначим через E, F и G точки касания окружности со сторонами AD, CD и BC соответственно, через H и Q — проекции точек C и N на сторону AD. Положим $|PN| = 1$. Тогда $|MP| = k$, $|AH| = |AE| + |EH| = |ED| + |GC| = |DF| + |FC| = |DC|$. Из свойств подобия и в треугольнике MND будет $|MQ| = |DN|$. Поэтому

$$|MN| = |MP| + |PN| = k + 1, |DQ| =$$
$$= |DE| - |QM| - |ME| = |DF| -$$
$$- |DN| - |MP| = |NF| - |MP| =$$
$$= |NP| - |MP| = 1 - k, 2|NQ|^2 =$$
$$= (|MQ|^2 + |NQ|^2) - (|DN|^2 -$$
$$- |NQ|^2) = |MN|^2 - |DQ|^2 =$$
$$= (k+1)^2 - (1-k)^2 = 4k, |NQ| = \sqrt{2k}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\widehat{D} = \frac{|NQ|}{|DQ|} = \frac{\sqrt{2k}}{1-k}$,

$$\widehat{A} = \widehat{D} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k}}{1-k}, \qquad \widehat{B} = \widehat{C} =$$
$$= \pi - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2k}}{1-k}.$$

Упражнения

1 (МГУ, филологич. ф-т, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1978). Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = 45°$, $\widehat{EBD} = 30°$ и $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

2 (МГУ, геологич. ф-т, 1978). В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, $\widehat{CAB} = \frac{\pi}{3}$, а радиус описанной окружности R равен 2,2. Доказать, что длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, строго меньше $\frac{11\sqrt{3}}{5}$.

3 (НГУ, 1976). В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60°. Окружность, проходящая через точки A, B и D, пересекает сторону CD в середине. Найти площадь параллелограмма, если радиус окружности равен R.

4 (МГУ, ф-т почвоведения, 1977). Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

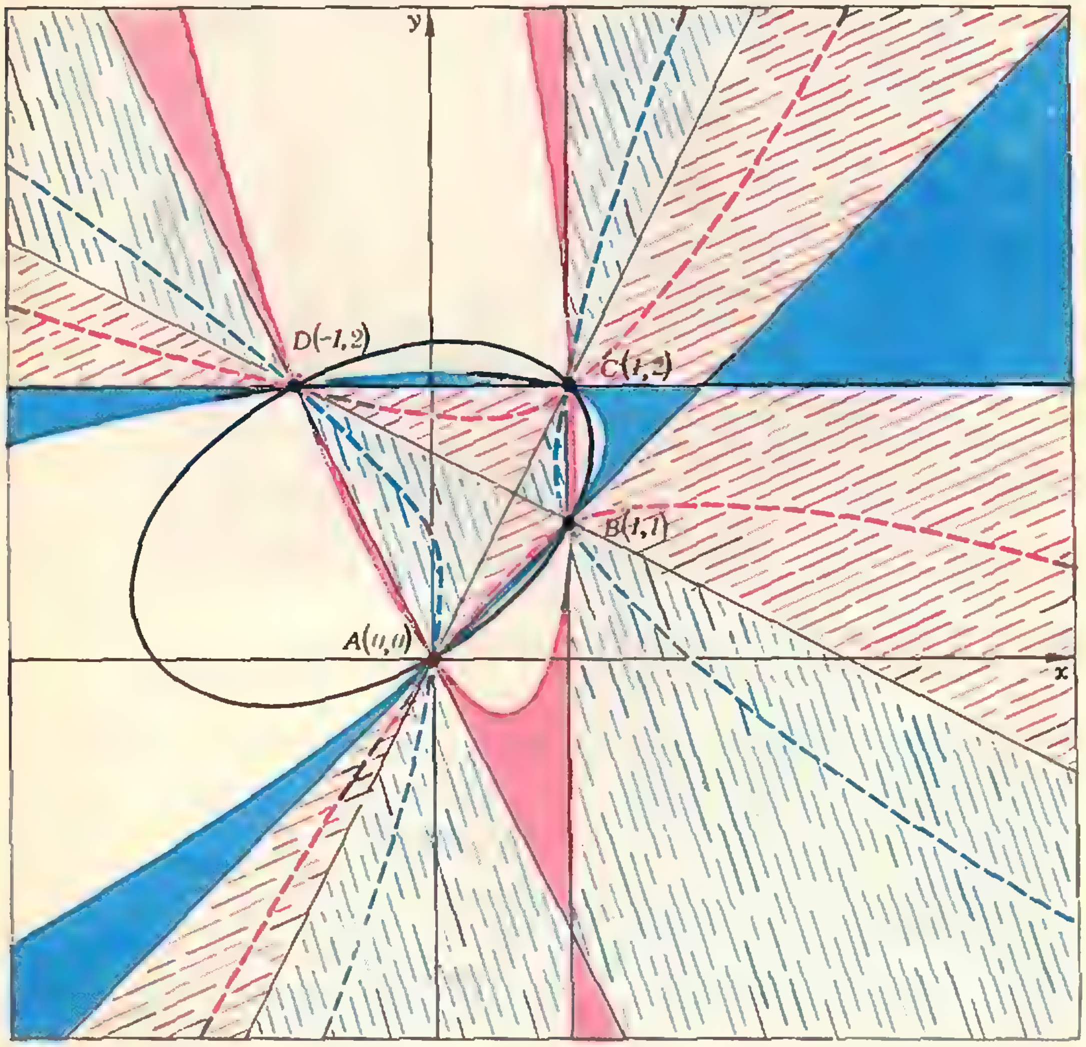
5 (МИИТ, 1977). Центр полуокружности лежит на большем основании AD трапеции $ABCD$; все остальные стороны касаются полуокружности. Доказать, что $|AD| = |AB| + |CD|$.

6 (МФТИ, 1976). Точка E лежит на продолжении стороны AC правильного треугольника ABC за точку C. Точка K — середина $[CE]$. Прямая, проходящая через точку A перпендикулярно (AB), и прямая, проходящая через точку E перпендикулярно (BC), пересекаются в точке D. Найти углы треугольника BKD.

7 (МГУ, физфак, 1976). В треугольнике KLM, все стороны которого различны, биссектриса угла KLM пересекает сторону KM в точке N. Через точку N проведена прямая, пересекающая сторону LM в точке A такой, что $|MN| = |AM|$. Известно, что $|LN| = a$, $|KL| + |KN| = b$. Найти $|AL|$.

8 (МГУ, химфак, 1978). На окружности радиуса 12 см с центром в точке O лежат точки A и B. Прямые AC и BC касаются этой окружности. Другая окружность с центром в точке M вписана в треугольник ABC и касается стороны AC в точке K, а стороны BC в точке H. Расстояние от точки M до прямой KH равно 3 см. Найти величину угла AOB.

9 (МГУ, физфак, 1977). Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника. Найти углы треугольника.



Заполним плоскость кривыми

На нашем рисунке показано семейство кривых второго порядка, проходящих через точки A (0;0), B (1;1), C (1;2), D (—1;2).

Напомним, что *кривой второго порядка* называется график уравнения

$$a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0$$

где не все три числа a_1, a_2, a_3 равны нулю. Полный список кривых второго порядка: *эллипс, гипербола, парабола, пара прямых* (пересекающихся или параллельных), *прямая, точка, пустое множество.*

Оказывается, *через точки A, B, C, D и любую точку E (x_0, y_0), отличную от них проходит ровно одна кривая второго поряд-*

(Окончание см. на с. 59)

Представляем новый раздел

Дорогие читатели! Сегодня в журнале «Квант» открывается новый раздел «Искусство программирования».

Вы, конечно, знаете, какое важное место занимают сейчас электронные вычислительные машины (ЭВМ) в науке и других сферах человеческой деятельности. Умение обращаться с ЭВМ необходимо практически всем — математику и лингвисту, геологу и библиотекарю, физику и биологу, технологу и экономисту, химику и врачу.

Цель нового раздела — научить вас работать с ЭВМ, обучить языку машин, разъяснить, что такое программирование, научить писать программы для ЭВМ. Читая статьи этого раздела, вы узнаете, как работают ЭВМ и где они применяются, что такое алгоритм и алгоритмические языки.

Программирование выросло из математики и ей служит. Поэтому новый раздел появляется именно на страницах журнала «Квант».

* *
*

Кроме статей о вычислительной технике и программировании, с сентябрьского по майский номер «Кванта» в разделе «Искусство программирования» будут публиковаться задания Заочной школы программирования.

Заочная школа организована Вычислительным центром Сибирского отделения АН СССР (ВЦ СО АН СССР) и редакцией журнала «Квант». В школу принимаются учащиеся 6—10 классов. Полный курс школы рассчитан на 3 года, поэтому в первую очередь приглашаются учащиеся 6-го, 7-го и 8-го класса. Школьники, выполняя домашние задания, научатся писать программы для ЭВМ, освоят несколько языков программирования.

Однако машинное решение задачи на самом деле не сводится только к написанию программы. Очень важно запустить написанную программу на ЭВМ и «отладить» ее — найти в программе все ошибки и описки и убрать их. А как помочь читателям в запуске и отладке программы, если у него дома и даже в его школе пока нет вычислительной машины? Для этого Заочная школа программирования имеет свой заочный вычислительный центр, адрес которого указан ниже. По этому адресу можно будет посылать составленные вами программы и получать в ответ не только письмо программиста, прочитавшего ваше послание, но и (это самое главное!) выданный машиной результат работы программы или... сообщение машины об ошибках, которые вами допущены при составлении программы.

Лучшие из учащихся нашей школы будут приглашаться в летнюю школу программистов в Академгородок под Новосибирском, где уже очно познакомятся с современными ЭВМ.

Окончившие полный курс Заочной школы получат специальное удостоверение.

Мы приглашаем в нашу школу также девятиклассников и десятиклассников: хотя первые уроки им могут показаться совсем простыми, а трехлетний курс они не закончат, мы уверены, что они найдут здесь для себя много интересного и полезного.

Для зачисления в школу необходимо не позднее 15 октября выслать по указанному ниже адресу заявление, составленное по следующему образцу:

В Заочную школу программирования

Заявление

Я, Сергеев Владимир Георгиевич, ученик 6 «В» класса школы № 25 Советского района г. Новосибирска, прошу зачислить меня в Заочную школу программирования.

Домашний адрес: 630072, г. Новосибирск, 72, ул. Золотодолинская, 29, кв. 13, телефона нет.

Дата рождения — 9 января 1966 года.

Сведения о родителях: отец — Сергеев Георгий Георгиевич, водитель АТП-20101; мать — Сергеева Елена Николаевна, учительница СШ № 130.

В математических кружках я не занимался, программирования нигде не изучал.

10 октября 1979 г. *Сергеев*

Адрес для отправки заданий: 630090, Новосибирск, 90, просп. Науки, 6, ВЦ СО АН СССР, отдел информатики, Заочная школа программирования.

В каждом выпуске Заочной школы программирования будут публиковаться задания для самостоятельного выполнения, отмеченные стрелкой.

Красной стрелкой отмечены обязательные задания, которые должны быть выполнены и отправлены на проверку в течение двух недель со дня получения журнала. Синей стрелкой отмечены задания повышенной трудности, выполнение которых не обязательно. Все задания одного номера выполняются в отдельной тетради в клетку, на обложке которой необходимо указать свою фамилию, имя, домашний адрес, школу, класс и номер журнала, где оно было напечатано. Решение заданий первых двух уроков высылайте вместе с заявлением.

В марте 1980 г. среди учащихся Заочной школы программирования будет проведена олимпиада. Победители будут приглашены летом 1980 г. в новосибирский Академгородок — в Летнюю школу юных программистов.

⁂

Кроме уроков Заочной школы программирования, в нашем разделе будет несколько подразделов.

О том, как устроена вычислительная машина, будет рассказано в статьях подраздела «Анатомия вычислительных машин». В одном из ближайших номеров вы прочитаете в этом подразделе об устройстве машинной памяти, потом — о работе ее «мозга», центрального процессора, потом — о ее «органах чувств», устройствах ввода и вывода.

Если в «Анатомии вычислительных машин» описываются общие принципы устройства и действия ЭВМ, то рассказу о конкретных серийных машинах и их устройствах посвящается подраздел «Панорама вычислительной техники».

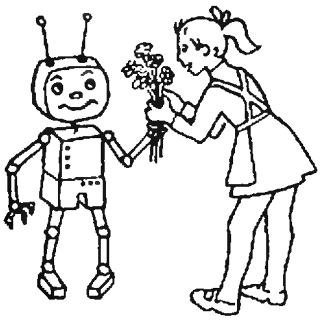
Сведения об истории развития науки очень важны в каждой научной дисциплине, в том числе и в программировании. О том, какими путями развивались теория и практика этой еще молодой науки, кто стоял у ее истоков, какими были первые машины и программы, расскажет «Историческая серия» и ее «Технический музей».

На страницах раздела отведено место и для статей, с которыми выступят школьники, написавшие и отладившие интересные программы. Это место — подраздел «Трибуна юного программиста».

Хорошим уроком программирования может оказаться не только описание какого-нибудь приема программирования, но и подробный анализ машинного решения интересной задачи. Статьи о типовых прикладных задачах, с которыми сталкиваются программисты, помещаются в подразделе «ЭВМ решает задачу». В нем мы постараемся рассказать, как рассчитывается траектория полета ракеты, как редактируется на машине газетный текст, как разыскиваются по просьбе библиотекаря нужная статья или книга.

Следите за разделом «Рецензии и библиография» в «Кванте». Там теперь чаще будут печататься сообщения об учебниках и задачниках, а также о новых интересных книгах по программированию и применению ЭВМ.

А теперь наш раздел мы открываем статьей члена-корреспондента АН СССР А. П. Ершова и преподавателя Заочной школы программирования Г. А. Звенигородского.



А. Ершов, Г. Звенигородский

Зачем надо уметь программировать?

Повсеместное использование ЭВМ привело к появлению новой науки и нового вида занятий, новой профессии — программирования.

Важно сразу понять, что программирование — это нечто большее, нежели умение сообщать команды машине. Оно имеет важное значение для самого человека и оказывает на него заметное влияние. В известном смысле сам человек и даже коллективы людей часто действуют по определенным программам. Более того, мы сами живем в мире программ, подчас не сознавая этого.

Мир программ

Программа — это набор команд, обладающий двумя важными свойствами: выполнимость — каждая команда очень проста и, будучи отданной, всегда может быть выполнена; определенность — в любой момент известно, какую команду выполнять следующей.

Эти два свойства программ — пожалуй, самые важные: именно они объясняют, почему программа обеспечивает ЭВМ автоматическую и непрерывную работу, приводящую к полезному результату.

Приведем пример чисто математической программы, в которой отчетливо проявляются эти два свойства:

Начальное состояние: даны два натуральных числа.

Шаг 1. Если числа равны, взять первое число в качестве результата и перестать работать.

Шаг 2. Если они не равны, вычесть меньшее из большего и разностью заменить большее число. После этого выполнять шаг 1.

Задача. *Что вычисляет эта программа?*

Но программы бывают не только математическими.

Прежде всего программами буквально напичкан наш организм. Человек — это совокупность большого числа биологических машин, каждая из которых управляется своими сложными программами. Ходим ли мы, дышим, читаем, дрожим от холода, ворочаемся во сне — все это результат действия многих биологических программ, введенных в нас генетически (наследственно), или сформировавшихся под воздействием среды, или выработанных сознательно. Не будет большим преувеличением сказать, что почти все, что мы делаем, мы делаем по программе, а когда размышляем, то, главным образом, корректируем наши старые программы и строим планы на будущее.

Умение планировать свои действия наперед — это важнейшая черта поведения человека. Выдающимися программистами в этом смысле являются спортсмены, космонавты, артисты, хирурги — словом, все люди непрестанного, сложного и безошибочного действия. В то же время врожденными программистами являются и осторожные, робкие с виду ребята, которые, попадая в новую обстановку, одолевают старших вопросами типа «А что дальше?», «А что, если?», «А где?», «А как тогда?» и т. п.

С давних времен казалось, что дети учатся, главным образом, подражанием, имитацией поведения старших. Лишь недавно, когда процесс обучения разглядели сквозь увеличительное стекло логического анализа, было обнаружено, что не только умственные, но даже многие двигательные навыки человек вырабатывает, лишь поняв их природу, найдя элементарные движения и положения, осознав и закрепив их в сознании в нужной последовательности, а затем натренировав до полного автоматизма.

Программы для ЭВМ

Теперь самое время спросить, в чем же особая роль ЭВМ в этом мире программ. Дело в том, что именно ЭВМ своим появлением и существованием сделали программы предметом математического исследования, создали программирование как самую массовую математическую профессию.

Математики и философы в сотрудничестве с биологами и инженерами убедительно показали, что законы управления и обработки информации, алгоритмы и программы, относящиеся к биологическим системам, с одной стороны, и к машинам-автоматам — с другой, устроены одинаково; для них годятся одни и те же математические абстракции и теории. ЭВМ, благодаря огромной скорости работы и способности выполнить любую программу, дают принципиальную возможность воспроизвести любое «правильное» действие. Это делает ЭВМ не только нашим послушным и всесильным помощником, но и строгим судьей полноты нашего знания о том действии, которое мы хотим передать машине.

Вернемся к нашей программе из двух команд, которая, как, вероятно, читатели догадались, вычисляет наибольший общий делитель двух чисел. Для того чтобы ЭВМ могла выполнить эту программу, она, конечно, должна «знать», например что значит «вычесть меньшее число из большего». В то же время она усердно и успешно будет трудиться над получением результата, не имея никакого представления о том, что такое наибольший общий делитель. Зато программист, сочиняя программу, должен очень хорошо знать, что будет делать машина и какими свойствами обладает соответствующая программа.

Задача. *Доказать, что указанная выше программа для любой пары исходных натуральных чисел выдаст результат, равный их наибольшему общему делителю.*

Итак, программа воплощает наше полное знание о задаче, причем, в отличие от теоремы или сочинения, в активной, многократно воспроизводимой форме. Машина, снабженная этой программой, будет вычислять наибольший общий делитель так же хорошо, как самый премудрый школьник, овладевший арифметикой. Именно в постоянной передаче ЭВМ человеческого умения последовательно выполнять целенаправленные операции состоит сущность научно-технической революции, связанной с автоматизацией умственного труда.

«Вторая грамотность»

Более пятисот лет назад человечество изобрело книгопечатание. Непосредственной целью этого изобретения было желание ускорить процесс переписывания церковных книг. Его же объективным результатом стала необыкновенно возросшая скорость человеческого прогресса через всеобщую грамотность и распространение печатного слова.

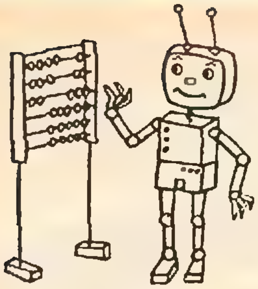
Электронно-вычислительные машины появились примерно 35 лет назад, в разгар второй мировой войны. Непосредственной целью их первоначального применения было ускорение расчетов при разработке систем вооружения. Однако уже сейчас видно то время, когда ЭВМ, создаваемые в десятках миллионов экземпляров, будут нашими верными и понятливыми партнерами во всех уголках Земли и в каждом виде нашей деятельности.

К этому времени программирование, то есть способность выразить любой «правильный» процесс средствами, доступными для передачи машине, станет второй грамотностью каждого образованного человека. Но это — в будущем. А сейчас перед вами стоит задача ликвидации «второй безграмотности». Вам предстоит овладеть азами программирования.

Для этого прежде всего необходимо ответить на вопрос — что умеют делать вычислительные машины?

Машины только вычисляют?

Вероятно, девять из каждых десяти наших читателей ответят на этот



вопрос почти не задумываясь: машины умеют выполнять с огромной скоростью арифметические действия над многозначными числами, поэтому они могут заменить человека всюду, где нужно выполнить сложные подсчеты, решить уравнение, составить таблицу, рассчитать траекторию космического корабля или конструкцию самолета — короче говоря, где нужно считать, вычислять — ведь не зря они называются вычислительными машинами.

Лет 15—20 назад с таким ответом согласилось бы большинство специалистов по вычислительной технике.

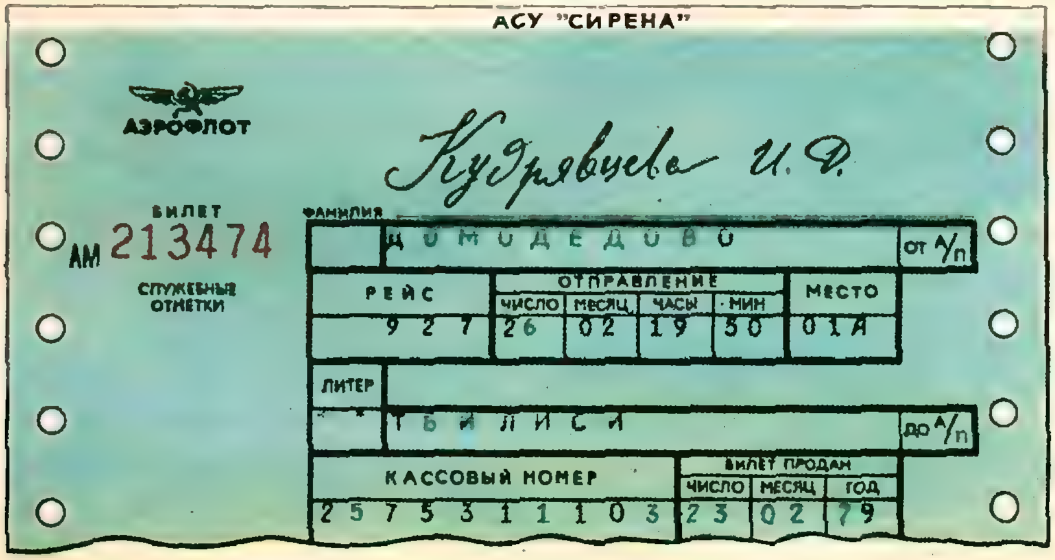
— А разве сегодня это не так? — может спросить удивленный читатель. — Неужели современные машины разучились считать?

Нет, не разучились, конечно. Количество задач, для решения которых нужно уметь только быстро и точно выполнить расчеты по известным формулам и правилам, не только не уменьшилось за последние годы, но даже возросло, и с такими задачами нынешние машины, разумеется, отлично справляются. Но вычисления — давно уже не единственная и, по-видимому, не главная сфера, где ЭВМ приходит на помощь человеку.

Система «Сирена» продает билеты

Рассмотрим один пример. Как известно, современные самолеты могут в течение нескольких часов доставить вас в самую отдаленную точку нашей страны. А вот оформление билета на самолет иногда занимает гораздо больше времени, чем сам полет. Особенно много времени требует бронирование мест, если вам нужно пересаживаться на другой самолет, например, в Киеве, Горьком или другом крупном городе. Агенство Аэрофлота, в котором вы заказывали билет, отправляет телеграмму в пункт пересадки с просьбой забронировать для вас места на таком-то рейсе. Диспетчер, отвечающий за этот рейс, открывает соответствующую таблицу, отмечает забронированные места и составляет ответную телеграмму, на основании которой вам выпишут билеты. Все это занимает три-четыре дня — это если все в порядке, ни одна бумажка нигде не застряла и на нужном рейсе есть свободные места.

Но если вам предстоит пересаживаться на другой самолет в Москве, то оформление билетов, вероятнее всего, займет не более двух-трех минут. Дело в том, что бронированием билетов в Москве занимается автоматизированная система «Сирена», основу которой составляет мощная вычислительная машина.



АСУ "СИРЕНА"

АЭРОФЛОТ

БИЛЕТ
АМ 213474

СЛУЖЕБНЫЕ ОТМЕТКИ

Кудрявцева И. Ф.

ФАМИЛИЯ

ДОМОДЕДОВО от А/п

РЕЙС	ОТПРАВЛЕНИЕ				МЕСТО
	ЧИСЛО	МЕСЯЦ	ЧАСЫ	МИН	
927	26	02	19	50	01А

ЛИТЕР

ТБИЛИСИ до А/п

КАССОВЫЙ НОМЕР	БИЛЕТ ПРОДАН		
	ЧИСЛО	МЕСЯЦ	ГОД
2575311103	23	02	79

Специальные пульты для связи с этой ЭВМ — так называемые *терминалы* — установлены в большинстве крупных городов нашей страны. На каждом пульте есть клавиши, похожие на клавиатуру обычной пишущей машинки, небольшой экран, на котором появляются сообщения вычислительной машины, и печатающее устройство.

Предположим,что мы пришли к новосибирскому оператору системы «Сирена» с просьбой оформить несколько билетов на один из рейсов Москва — Харьков. Оператор набирает на клавиатуре соответствующий запрос, и через одну-две секунды на экране появляется ответ машины. В течение этих секунд вычислительная машина, находящаяся за несколько тысяч километров от Новосибирска, просмотрела расписание, выбрала удобный для нас рейс, определила, сколько на нем свободных мест, отвела нам места и сообщила их номера новосибирскому оператору — словом, проделала всю ту работу, на которую раньше уходило несколько дней.

Если предложенные машиной места нас устраивают, оператор набирает на пульте подтверждающее сообщение, и далекая ЭВМ запоминает, что места эти забронированы для пассажиров, которые таким-то рейсом прилетят из Новосибирска.

Если вспомнить теперь, сколько пассажиров каждый день прилетает в московские аэропорты и улетает из них, и попробовать представить себе, сколько человек одновременно обращается к операторам «Сирены» в разных городах, то, может быть, тогда мы почувствуем, какую огромную работу выполняет «мозг» системы.

Что же делает ЭВМ в системе?

Во-первых, она должна помнить расписание всех самолетов, вылетающих из Москвы, и точный перечень свободных и занятых мест на этих самолетах, по крайней мере, на две недели вперед, иначе говоря, машина должна хранить информацию о расписании и распределении мест на самолетах.

Во-вторых, машина должна принимать запросы, поступающие с терминалов, и отвечать на запросы, то есть вести диалог с человеком (возможно, с большим числом людей одновременно) при помощи терминалов.

В-третьих, она должна уметь, если это необходимо, изменить хранящиеся в памяти сведения: отметить, что места, которые были свободными, теперь забронированы, что в расписание внесены изменения — то есть обрабатывать информацию.

Для осуществления каждого из этих «умений» машины предназначено отдельное устройство: для хранения информации — *память* (*запоминающее устройство*) для диалога с человеком — *терминалы* (универсальный терминал «Видеотон-340» изображен на с. 44), для обработки хранящейся в памяти информации — *центральный процессор*.

Процессор — это мозг и сердце вычислительной системы: он управляет занесением информации в память и чтением ее из памяти, он принимает запросы от терминалов и передает с их помощью свои сообщения человеку, он выполняет всю необходимую обработку информации, хранящейся в памяти и поступающей от терминалов.

Обсуждая умения, необходимые вычислительной машине для работы в системе «Сирена», мы ничего не сказали об умении вычислять. И это не случайно: при оформлении билетов производить арифметические вычисления почти не приходится — разве что подсчитать стоимость льготного билета для школьника или число оставшихся свободных мест в самолете.

Во многих других автоматизированных системах, очень похожих на «Сирену», рассчитывать приходится гораздо больше, но вряд ли возможно придумать задачу, для решения которой машина должна была бы только считать: всегда бывает нужно помнить какую-то информацию (хотя бы порядок вычислений и промежуточные результаты), почти всегда необходимо принимать (вводить) некоторые сведения (например, исходные данные для вычислений) и сообщать о чем-то человеку или техническому устройству (например, другой вычислительной машине), то есть выводить информацию.

Группа юных программистов у графопостроителя.

Ввод и вывод информации не обязательно происходят при помощи терминалов, как в «Сирене». Например, для управления полетом ракеты машине удобно получать информацию прямо от радиолокатора, следящего за полетом. А для того, чтобы выполнить рисунок или чертеж, удобно выводить информацию не на терминал, а на рисующее устройство — графопостроитель (см. фотографию).

Таким образом, устройства для ввода и вывода информации могут быть разными, но общая схема остается неизменной: у всякой вычислительной машины есть *процессор, память, устройства для ввода и для вывода информации.*

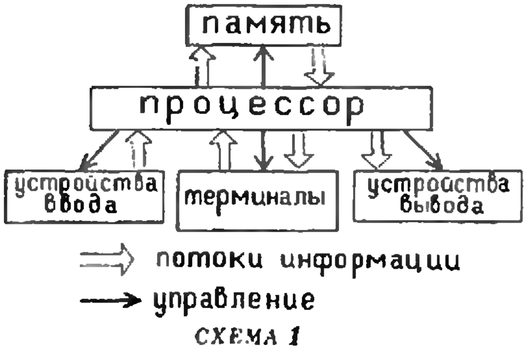


СХЕМА 1

Неизменными остаются и основные «умения» вычислительной машины: *прием, хранение, обработка и вывод информации.*

Итак, на вопрос «Что умеют делать вычислительные машины?» мы, в основном, ответили.

А человек?

Теперь можно спросить: а что должен уметь человек, работающий с вычислительной машиной, составляющий для нее задания — программы?

В качестве ответа приведем цитату из статьи одного из авторов «О человеческом и эстетическом факторах в программировании»:

«Программист должен обладать способностью первоклассного математика к абстракции и логическому мышлению, в сочетании с эдисоновским талантом соорудить все, что угодно, из нуля и единицы. Он должен сочетать аккуратность бухгалтера с проницательностью разведчика, фантазию автора детективных романов с трезвой практичностью экономиста. А кроме того, программист должен иметь вкус к коллективной работе, понимать интересы пользователя и многое другое».

Для тех, кто хочет познакомиться с законами и методами программирования, изучить языки для взаимодействия с вычислительными машинами — *языки программирования,* научиться составлять программы для различных машин, сегодня начинает работу Заочная школа программирования. Передаем ей слово.

Законы программирования. Правила записи предписаний на языке Робик

Заочная школа программирования

Урок 1

Программы, написанные на большинстве современных языков программирования, состоят из отдельных предложений — точно так же, как и тексты на обычных, «человеческих» языках. Большинство читателей «Кванта», вероятно, помнит, что почти любое предложение на русском языке можно отнести к одной из трех больших групп: повествовательные, вопросительные и восклицательные предложения. Нам будет удобнее рассматриваемые предложения называть *утверждениями*, *вопросами* и *предписаниями*. Можно сказать, что *вопрос* — это предложение, на которое можно ответить. Примеры вопросов:

Какой он, этот слонопотам? Неужели очень злой? Идет ли он на свист? И, если идет, то зачем? Любит ли он поросят? И как он их любит?

Утверждение — это предложение, про которое имеет смысл спросить, истинно оно или ложно. Примеры:

Хорошо живет на свете Винни-Пух!

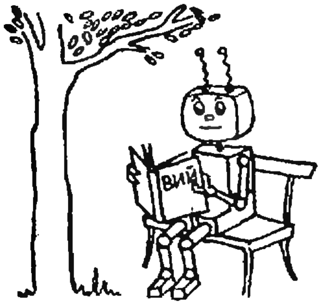
2+2=4.

Кот Матроскин подойти к телефону не может, он очень занят, он на печи лежит.

Предписание — это предложение, про которое имеет смысл спросить — как его исполнить? Примеры:

Позовите, пожалуйста, кота Матроскина к телефону!

Поднимите мои веки!



Не открывай рот, Пятачок, а то в него попадет мыло.

Скажите, пожалуйста, который час.

Широко известен анекдот о крупном физике, который после блестяще прочитанной лекции спросил у слушателей, есть ли у них вопросы.

— Я не понимаю, как Вы получили эту формулу,— сказал один из присутствовавших.

— Это утверждение, а не вопрос,— ответил лектор.— Вопросы есть?

В большинстве языков программирования самостоятельным предложением может быть предписание. Причина — неспособность роботов и ЭВМ понимать переносный смысл слов и предложений: если роботу нужно дать задание (а программа — это, по определению, задание для робота или ЭВМ), то каждое предложение должно быть таким, чтобы его можно было буквально исполнить — оно должно быть предписанием.

Роботу можно сказать:

— Запомни, что 2+2=4.

Но бессмысленно сообщать ему:

2+2=4.

Он просто не будет знать, что нужно сделать с таким утверждением.

Краткую формулировку этого правила называют *первым законом программирования*:

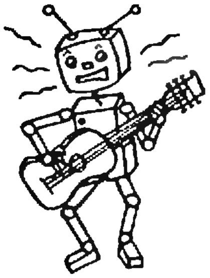
Программа состоит из предписаний.

Очевидно, для составления настоящих программ для конкретных роботов или ЭВМ недостаточно помнить формулировку первого закона, при всей его важности: нужно еще знать, какие предписания умеют исполнять именно эти роботы и машины и по каким правилам записываются эти предписания.

В инструкциях для любых вычислительных устройств обязательно перечисляются предписания, которые могут быть этими устройствами исполнены. Такой перечень называется системой предписаний (сокращенно — СПР).

Итак: *система предписаний* — это множество предписаний, которые понимает и может исполнить робот или вычислительная машина.

Например, система предписаний для робота РД-1, умеющего испол-



нять на каждой школьной перемене обязанности дежурного по классу, может выглядеть так:

Система предписаний РД-1

ОТКРОЙ ОКНО;
ЗАКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
СОТРИ С ДОСКИ;
СЯДЬ НА МЕСТО;

С системами предписаний связано важнейшее правило, которое называют *вторым законом программирования*:

> В программах для любых роботов и ЭВМ можно использовать те и только те предписания, которые есть в их системах предписаний.

Несколько слов о грамматических правилах. В языках программирования их, к счастью, гораздо меньше, чем, например, в русском языке, но соблюдать их приходится очень строго. Вычислительная машина придирчивее самого строгого преподавателя, и одна пропущенная запятая может безнадежно испортить работу большой и красивой программы.

Робота или вычислительную машину можно научить одному или нескольким языкам программирования. В этом случае к их СПР добавляются предписания этого языка (языков).

Общие правила записи предписаний в языке Робик*), с которого мы начинаем изучение программирования, выглядят так:

1. Каждое предписание начинается с новой строки.

2. В конце предписания ставится точка с запятой (;).

Внимательного читателя может удивить отсутствие правил употребления заглавных букв. Объясняется это просто: для того, чтобы ЭВМ или робот исполнили предписание, его необходимо набрать на клавишах терминала или другого аналогичного устройства, а буквы на клавиатуре — только заглавные; поэтому совершенно безразлично, какими буквами будут написаны предписания в журнале; здесь мы будем записывать их заглавными буквами, но при выполнении наших заданий предписания можно писать по правилам русского языка: первая буква — заглавная, далее — строчные.

Теперь, зная общие правила записи предписаний в языке Робик, мы можем составить первую программу для описанного выше робота РД-1, который должен стереть с доски и проветрить класс на перемене.

Вот пример правильной программы:

ОТКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
СОТРИ С ДОСКИ;
ЗАКРОЙ ОКНО;
СЯДЬ НА МЕСТО;

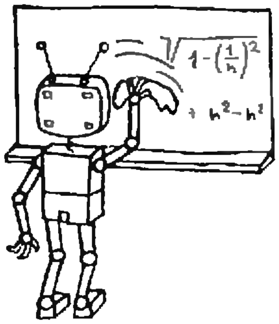
Задание 1.1. *Среди приведенных ниже пяти программ нужно найти правильные и перечислить все ошибки в остальных программах.*

Программа А

1. СОТРИ С ДОСКИ;
2. НАМОЧИ ТРЯПКУ;
3. ОТКРОЙ ОКНО;
4. ЗАКРОЙ ОКНО;
5. СЯДЬ НА МЕСТО;

Программа В

НАМОЧИ ТРЯПКУ;
ОТКРОЙ ОКНО;
СОТРИ С ДОСКИ;



---

*) Описываемый здесь язык Робик — это сокращенный вариант языка Робик-3, используемого для обучения школьников в Харьковской и Новосибирской школах юных программистов.

ЗАКРОЙ ОКНО;
СЯДЬ НА МЕСТО;

Программа C

ОТКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
ВЫТРИ С ДОСКИ;
ПОДМЕТИ ПОЛ;
СЯДЬ ЗА ПАРТУ;

Программа D

ОТКРОЙ ОКНО;
НАМОЧИ ТРЯПКУ;
СЯДЬ НА МЕСТО;

Программа E

НАМОЧИ ТРЯПКУ
СОТРИ С ДОСКИ
СЯДЬ НА МЕСТО

Попробуем представить себе, каким образом РД-1 будет исполнять нашу программу. Будем считать, что робот сидит за партой в классе, а на соседней парте установлен терминал «Видеотон-340». Диалог начинает робот. Как только вы нажимаете выключатель, на экране терминала появляется его первое сообщение:

ЗДРАВСТВУЙТЕ! Я РОБОТ РД-1! Я ГОТОВ К РАБОТЕ!

После этого робот выдает на экран звездочку (*), которая означает, что он готов к приему первого предписания. Набираем

ОТКРОЙ ОКНО;

После точки с запятой нажимаем на клавишу «ETX» (это сокращение английских слов «end of text» — конец текста). Робот читает строку на экране терминала и начинает исполнять предписание: встает с места, идет к окну и т. д. Когда предписание будет выполнено, робот остановится, а на экране вновь появится звездочка. И так до конца программы.

Если система предписаний невелика, часто бывает удобно занумеровать предписания и использовать для управления вместо полного текста эти номера. Такие зашифрованные предписания мы отныне будем называть *командами*. А система предписаний превращается в *систему команд*. В качестве примера приведем систему команд самоходного аппарата Кибик:

Команда	Текст предписания
1	ПРОЕХАТЬ 100 МЕТРОВ
2	ПОВЕРНУТЬ ВПРАВО
3	ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО
0	ЗАКОНЧИТЬ РАБОТУ

В отличие от предписаний языка Робик, такие команды можно записывать на одной строке. Запись программы получается компактной, но понять ее трудно: 111311311121112111212112112112110.

Задание 1.2. *На листе клетчатой бумаги размером 10 на 10 см нарисуйте путь, пройденной Кибиком при исполнении этой программы, если начало координат расположено в левом нижнем углу, оси параллельны сторонам листа, масштаб 1 : 10000 (в 1 см — 100 м), а в начальный момент Кибик находится в точке с координатами (800, 500) (в метрах) и направлен вверх, т. е. вдоль положительного направления оси ординат.*

Важно учесть, что повороты выполняются Кибиком на месте, а правая и левая сторона определяются им по отношению к направлению его движения.

Задание 1.3. *Определите, какую программу выполнял Кибик, если его путь оказался таким, как показано на рисунке* 6*). *Начальные условия те же, рисунок уменьшен вдвое.*

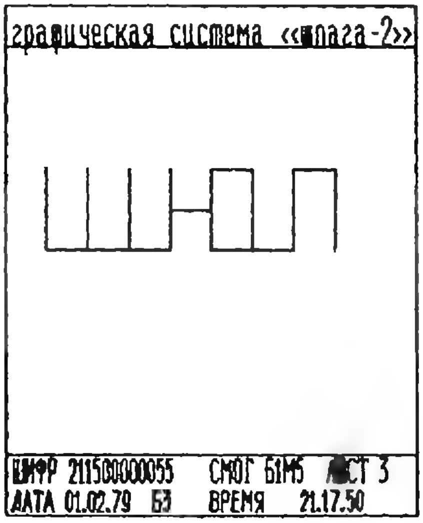

графическая система «Шпага-2»
ШИФР 211500000055 СМОГ 61М5 ЛИСТ 3
ДАТА 01.02.79 БЗ ВРЕМЯ 21.17.50

Рис. 6.

---

*) Рисунок 6 нарисован графопостроителем системы Шпага (об этой системе мы расскажем в одном из следующих номеров). Ученикам 3—4 классов А. Ершову, С. Пустошилову и А. Филатовой из Новосибирской школы юных программистов был дан ответ к заданию 1.3; по этому ответу они составили программу для графической системы Шпага, по которой и был нарисован рисунок 6, т. е. «смоделирована» работа Кибика.

Гибкие системы предписаний, синтаксические диаграммы и переменные поля

Урок 2

Для универсальных ЭВМ и роботов, имеющих большие системы предписаний, огромное значение имеет способ их задания. До сих пор мы задавали СПР «жестким» способом: прямым перечислением всех допустимых предписаний. Понятно, что это — далеко не лучший путь: большие множества жестким способом задать неудобно или невозможно. Нельзя описать этим способом, например, даже сложение произвольных целых чисел. Ведь для каждой пары складываемых чисел нужно предусмотреть в СПР отдельное предписание.

Однако из курса математики известно, что перечисление — не единственный способ задания множеств. Гораздо чаще используют «гибкое» описание: записывается формула или правило, позволяющее получить все элементы множества или проверить, принадлежит ли некоторый объект этому множеству. Второй урок посвящен одному из «гибких» способов описания СПР — синтаксическим диаграммам.

Синтаксическая диаграмма — это правило построения предписания, заданное в графическом виде. Диаграмма показывает, из каких частей можно строить предписание и в каком порядке должны быть расположены эти части. Синтаксическая диаграмма состоит из отдельных полей, соединенных стрелками. Каждое такое поле (обычно это — слово, число или знак) — часть предписания, а стрелки показывают, в каком порядке можно соединять эти части. Каждая диаграмма имеет начальную точку, обозначаемую *Н*, и конечную, обозначаемую *К*.

Для того чтобы получить правильно предписание при помощи синтаксической диаграммы, нужно провести какой-либо путь из начальной точки в конечную, двигаясь строго по направлению стрелок, и выписывать подряд все встретившиеся на этом пути поля. Например, синтаксические диаграммы для вездехода Кибик, описанного в конце первого урока, могут выглядеть так:

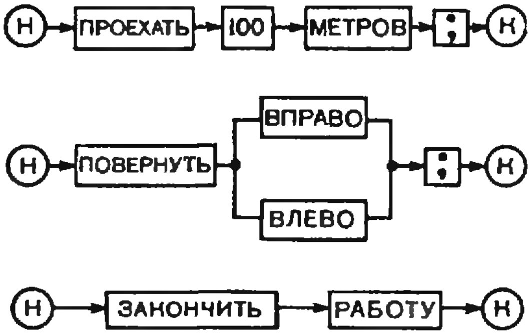


СХЕМА 2

Обратите внимание, что вторая диаграмма описывает сразу два предписания: повернуть вправо и повернуть влево. Так как из начальной точки в конечную можно пройти двумя путями, программист выбирает тот вариант, который нужно использовать в каждом конкретном случае.

Другой способ получения различных предписаний по одной диаграмме — использование переменных полей.

Переменное поле — это часть диаграммы, которую при составлении программы нужно заменить другим текстом из некоторого заданного набора. На синтаксических диаграммах переменные поля обозначают овалами, а слова и знаки, которые нужно в точности переписывать в текст программы (так называемые *постоянные поля*), — прямоугольниками.

Например, в СПР одного из роботов может встретиться такая диаграмма:

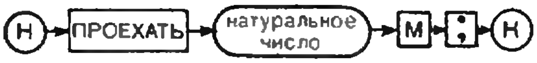


СХЕМА 3

Здесь (натуральное число)

— это переменное поле, которое нужно заменить при составлении программы нужным по смыслу числом; при этом может получиться:

ПРОЕХАТЬ 124 М;

или

ПРОЕХАТЬ 1 М;

Бессмысленно было бы переписать в программу название этого поля. В ответ на предписание:

ПРОЕХАТЬ НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО М;

робот в самом лучшем случае отпечатает сообщение «Не понял!» и будет совершенно прав.

Обратите внимание, что постоянные поля,

[ПРОЕХАТЬ], [М] и [;]

должны быть переписаны в программу дословно.

Переменные поля встречаются не только в программировании. Вот пример схемы предложения с переменными полями, которая не имеет ни малейшего отношения к вычислительной технике:

СПРАВКА

Дана . . . . в том, что он(а)
учится в . . . классе школы № . .
. . . района, города . . . .
Директор школы . . . . .

Задание 2.1. *Подсчитайте, сколько переменных полей в этом бланке, и попробуйте записать его по правилам, принятым для синтаксических диаграмм предписаний. К какой группе, из рассматривавшихся на первом уроке, относится предложение, которое получится из этой диаграммы после правильного заполнения всех переменных полей?*

Переменные в математике — это тоже разновидность переменных полей. Буква x в формуле

$$2x+432-x/8$$

— это переменное поле для вычислений по этой формуле. Например, при $x=23$ букву x в формуле нужно заменить «другим текстом» — числом 23.

Задание 2.2. *Запишите эту формулу по правилам, принятым для оформления синтаксических диаграмм.*

По аналогии с математическими формулами, текст, который проставляется в предписание вместо переменного поля, называется *значением* этого поля. Например, значением поля (целое число) может быть любое целое число.

Разумеется, при описании СПР множество значений каждого переменного поля должно быть задано. Обычно для этого используют такие же синтаксические диаграммы, как и для предписаний:

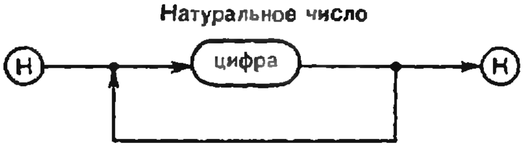


СХЕМА 4

В этой диаграмме есть еще одно переменное поле: (цифра) Множество его значений можно описать, как показано на схеме 5.

Задание 2.3. *Поясните, какое неформальное соглашение, обычно используемое при записи натуральных чисел, не учтено в схемах 4 и 5?*

Используя синтаксические диаграммы, можно описать порядок работы ЭВМ и роботов с памятью. Но перед этим мы предлагаем вам выполнить несколько заданий для тренировки в составлении и чтении синтаксических диаграмм.

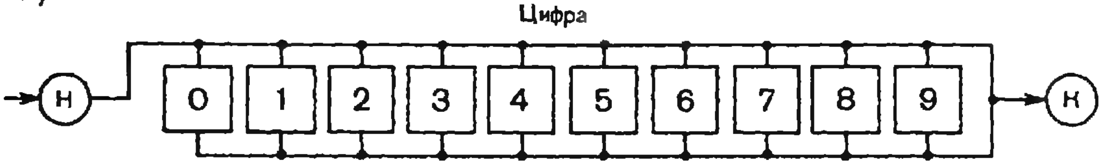


СХЕМА 5

З а д а н и е 2.4. *Переменное поле* (текст) *описывается следующей диаграммой:*

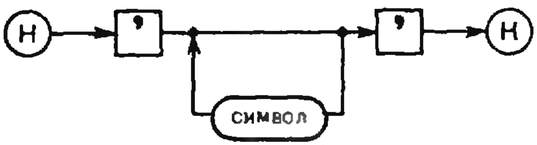


СХЕМА 6

Здесь символ — это буква, цифра или любой знак, имеющийся на клавиатуре терминала, за исключением апострофа (').

Пример текста:

'ЭТО ПРАВИЛЬНЫЙ ТЕКСТ'

Приведите четыре примера правильных текстов и определите, допускается ли диаграммой пустой текст ''

З а д а н и е 2.5. *Переменное поле* (вещественное число) *в языке Робик описывается диаграммой:*

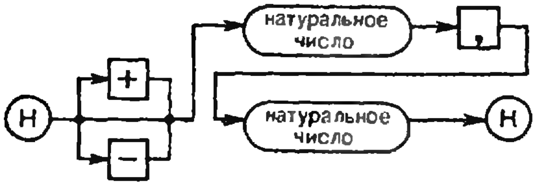


СХЕМА 7

(*В языках программирования принято отделять целую часть от дробной при помощи точки, а не запятой, как в школьной математике.*) *Какие из приведенных ниже вещественных чисел получаются по этой диаграмме:*

5.3—52.0 10.00000+5 0—54. +2,11/25.

Приведите четыре примера правильной записи вещественных чисел на Робике.

З а д а н и е. 2.6. *Нарисуйте синтаксическую диаграмму для описания обычной математической формы записи вещественных чисел. Учтите, что в математике целое число — это частный случай вещественного, а в Робике это не так: числа без дробной части не должны списываться диаграммой.*

З а д а н и е 2.7. *Нарисуйте диаграмму для переменного поля в Робике, значением которого может быть целое число или вещественное число.*

З а д а н и е 2.8. *Система предписаний робота Кибик-2 описывается диаграммой:*

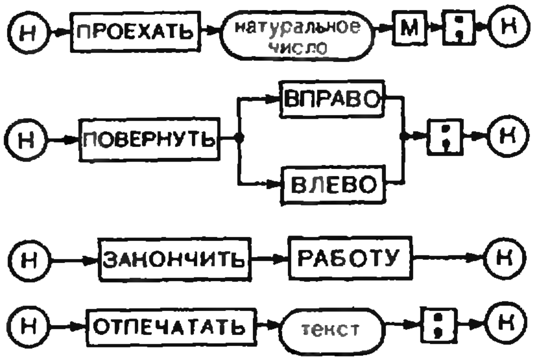


СХЕМА 8

Кибик-2 находится в точке А (800, 500) *и развернут вдоль положительного направления оси ординат. Он должен посетить точки: В* (800, 800), *С* (300, 200), *D* (925, 931) *и вернуться в точку А.*

После прибытия в очередную точку Кибик-2 должен отпечатать на терминале сообщение об этом, например:

'Я ПРИБЫЛ В ТОЧКУ А'

Составить программу.

Г. Звенигородский

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать **до 15 октября** по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*Школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 10 ноября 1979 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается учащемуся (для этого каждый раз вместе с решенным заданием учащийся должен вкладывать конверт с написанным домашним адресом). Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

9 класс

1. На рисунке 1 изображена система движущихся тел. Все поверхности гладкие. Угол $\alpha = 30^\circ$, $m = 1$ кг. Определить ускорения тел и натяжения нитей. Массами нитей и блока, а также трением в оси блока пренебречь.

2. Два идеально упругих шара массами m_1 и m_2 движутся вдоль одной прямой со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответственно. Во время столкновения шары деформируются, причем сначала деформация растет, а затем, достигнув максимального значения, уменьшается. Найти значение потенциальной энергии деформации в момент, когда она максимальна.

3. Найти сопротивление между точками A и B цепи, показанной на рисунке 2; $R = 12$ Ом, $r = 3$ Ом.

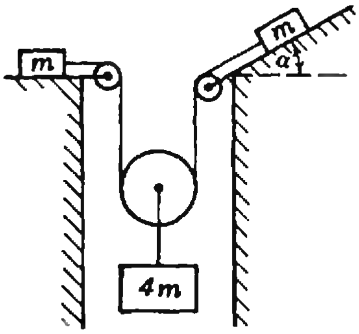


Рис. 1.

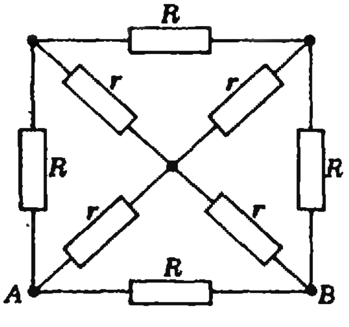


Рис. 2.

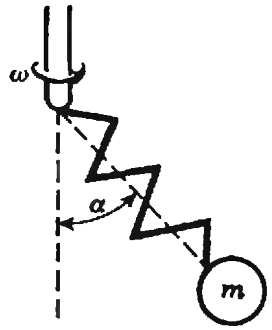


Рис. 3.

10 класс

1. Пружина жесткостью k в нерастянутом положении имеет длину l_0. К нижнему концу пружины подвешено тело массой m, а верхний конец прикреплен к вертикальной оси, вокруг которой пружина может вращаться (рис. 3). Построить график зависимости угла α, образуемого пружиной с осью, от величины угловой скорости ω вращения пружины. Считать, что угловая скорость изменяется настолько медленно, что при каждом значении ω движение успевает установиться. Массой пружины пренебречь.

2. В цилиндре, закрытом поршнем, при температуре T_1 находится m кг воды в жидком состоянии и водяной пар (других газов нет). Объем цилиндра при температуре T_1 равен V_1. Поршень подвешен на пружине жесткостью k, причем пружина находится в ненапряженном состоянии. Затем цилиндр медленно нагревают до температуры T_2, при этом вся вода испаряется. Найти установившееся давление под поршнем. Площадь поршня S, плотность насыщенного водяного пара при температуре T_1 ρ_{H1}, плотность воды при этой температуре ρ_1. Расширением цилиндра при нагревании и трением поршня о стенки цилиндра пренебречь. Молярная масса воды μ.

3. Замкнутый провод длиной l с постоянным сечением σ и удельным сопротивлением ρ свертывают в плоскую восьмерку так, что отношение радиусов образовавшихся окружностей равно 2. Полученный контур помещают в переменное однородное магнитное поле, причем плоскость контура перпендикулярна полю. Найти ток, протекающий по проводу, если скорость изменения магнитного поля постоянна и равна k.

Заполним плоскость кривыми

(Окончание. Начало см. на с. 43)

ка. Покажем это. Рассмотрим четыре прямые $l_1=(AB)$, $l_2=(DC)$, $l_3=(AC)$, $l_4=(BD)$ и обозначим через

$$b_ix+c_iy+d_i=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

уравнение прямой l_i (читатель без труда сможет найти числа b_i, c_i, d_i, но нам они не нужны). Положим

$$F(x,\ y)=(b_1x+c_1y+d_1)(b_2x+c_2y+d_2)$$
$$G(x,\ y)=(b_3x+c_3y+d_3)(b_4x+c_4y+d_4)$$

и рассмотрим семейство кривых

$$\alpha F(x,\ y)+\beta G(x,\ y)=0,$$

зависящих от параметров α, β. Подставим в это уравнение координаты точки E и заметим, что оба числовых коэффициента $F(x_0;y_0)$, $G(x_0;y_0)$ не могут обратиться в нуль одновременно (иначе E совпала бы с одной из точек A, B, C, D!). Поэтому можно подобрать значения параметров α_0, β_0 так, чтобы получилось числовое тождество. Тогда ясно, что уравнение

$$\alpha_0F(x;\ y)+\beta_0G(x;\ y)=0$$

дает искомую кривую. Доказательство единственности кривой мы оставляем читателю. (Указание. Предположите, что их две — $F_1(x,\ y)$, $F_2(x,\ y)$ — и покажите, что для некоторых α, β кривая второго порядка $\alpha F_1+\beta F_2=0$ пересекает некоторую прямую по трем точкам, что невозможно.)

Намеченное выше доказательство устанавливает более общий факт — так называемую теорему Паскаля: *через любые 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, проходит ровно одна кривая второго порядка.*

Посмотрим теперь внимательней на наш рисунок. Шесть прямых (попарно соединяющих наши точки A, B, C, D) и две параболы (содержащие все 4 точки) разбивают плоскость на 5 частей: голубую, розовую, штрихованные (розовым и голубым) и белую. Белая часть заполнена эллипсами (один из них показан), а остальные четыре — гиперболами (две из них показаны).

Наши прошлогодние читатели возможно вспомнят похожий рисунок на обложке *), число частей на котором было, однако, иное. Как заметил один наш читатель, расположение и число областей на той обложке было «нетипичным». Это объясняется тем, что там рассматривался в известном смысле вырожденный случай: две из прямых, соединяющих пары точек, параллельны. В общем же случае всегда получается 5 частей: «эллиптическая» и четыре «гиперболических».

А. Б.

---

*) «Квант», 1978, № 9.

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, вышедшие в III квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. **Гжегорчик А.** *Популярная логика.* Перевод с польск. Издание 3-е. Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Книга Анджея Гжегорчика предназначена для того, чтобы удовлетворить возрастающий интерес к формальной логике людей, не являющихся специалистами ни в математике, ни в логике. В наши дни эта отрасль науки получила важнейшее прикладное значение. Теория электронных цифровых машин и других «умных» автоматов, изучение структуры языка, глубокие философские вопросы оснований математики и других наук — вот сфера применения формальной логики. Формальная логика — это наука, устанавливающая общие методы (правила, схемы) правильных умозаключений. Наиболее важную роль умозаключения играют в математике: все математические теоремы опираются на точные доказательства, основанные на выводе следствий из математических аксиом. Поэтому неудивительно, что больше всего схем (способов) правильных умозаключений ученые открыли при анализе математических рассуждений. В силу этого современная формальная логика носит название математической логики, так как прежде всего она изучает математические рассуждения. Делает она это при помощи логических символов; поэтому современную формальную логику называют также символической логикой.

Книга Гжегорчика посвящена простейшей части математической логики — так называемой *логике высказываний.* На ее примере автор показывает, на чем основаны современные логические схемы правильных умозаключений и каким образом в современной формальной логике используются логические символы. От читателя не требуется ни знания математических фактов, ни привычки к чтению математической литературы. Это — общедоступный очерк. Автор ведет изложение в разговорном стиле, логические символы заменяет словами. Многочисленные примеры облегчают усвоение материала.

2. **Калужнин Л. А., Сушанский В. И.** *Преобразования и подстановки.* Перевод с укр. Объем 4 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

В книге рассматриваются важные частные виды отображений — преобразования и подстановки конечных множеств. Детально изучаются свойства операции суперпозиции функций применительно к преобразованиям и подстановкам и вводятся понятия группы подстановок и полугруппы преобразований. На примере группы подстановок иллюстрируются важные понятия современной абстрактной теории групп: порядок элемента, система образующих.

Вторая часть книги требует больше усилий для понимания и рассчитана на учащихся физико-математических школ. В ней рассказывается о простейших применениях теории групп для классификации многочленов со многими переменными, исследованиях корней уравнений высших степеней, математическом анализе игры в пятнадцать.

Книга может быть использована как для самостоятельного изучения учащимися средних школ, так и учителями в качестве основы факультативного курса.

3. **Ершов А. П.** *Три урока по алголу.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Эта книга предназначена для первоначального ознакомления с алголом и содержит всю необходимую информацию, чтобы «читать» на алголе. Изложение ведется в такой последовательности: первый урок — словесное описание основных конструкций языка; второй урок — изложение особых случаев и исключений из общих правил первого урока; третий урок — примеры, иллюстрирующие самые важные случаи употребления тех или иных конструкций.

Книга может быть полезна всем желающим изучать алгол.

4. **Салтыков А. И., Селюшко Г. А.** *Программирование для всех.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

В книге излагаются основы программирования на ЭВМ. Рассматриваются вопросы, связанные с представлением решения математических задач в виде алгоритмов и программ. Основные приемы программирования иллюстрируются на языке фортран.

Книга рассчитана на широкий круг читателей и может быть использована в качестве самоучителя по программированию.

Издательство «Просвещение»

5. **Березина Л. Ю.** *Графы и их применение.* Объем 9 л., тираж 40 000 экз., цена 30 к.

Автор знакомит читателя с основными определениями, методами и приложениями теории графов. Изложение, подбор упражнений и иллюстраций дают достаточно полное представление об основных идеях и методах теории графов и наиболее интересных ее приложениях. Автор показывает, как можно использовать графы при решении логических задач, задач на смекалку, головоломок, задач олимпиадного типа.

Эта книга может быть использована учителями для внеклассной работы.

6. Щербаков Р. Н., Пичурин Л. Ф. *От проективной геометрии — к неевклидовой. (Вокруг абсолюта.)* Объем 8 л., тираж 100 000 экз. цена 25 к.

Книга посвящена неевклидовой геометрии. Изложение основано на идеях проективной геометрии и понятии *абсолюта* — множества бесконечно удаленных элементов. Авторы в популярной и занимательной форме излагают основы проективной геометрии, описывают различные неевклидовы геометрии на плоскости.

Книга может быть использована во внеклассной работе в школе и для самостоятельного чтения учащимися. Она может быть полезной также всем читателям, интересующимся геометрией.

Физика

Издательство «Наука»

1. Зубов В. Г. *Молекулярные явления. Термодинамика.* Объем 20 л., тираж 200 000 экз., цена 80 к.

Эта книга является второй частью (первая часть «Механика» вышла в 1978 году) курса основ современной физики для подготовительных отделений вузов. Курс содержит весь материал программы вступительных экзаменов по физике.

2. Каганов М. И. *Электроны, фононы, магноны.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

В книге в популярной форме излагается квантовая теория твердого тела. Понять суть и описать с единой точки зрения очень несхожие свойства различных твердых тел можно, лишь используя представления о квазичастицах — квантах энергии кристалла. Из книги читатель узнает, что сближает квазичастицы с обычными частицами, чем они отличаются друг от друга, в какой взаимосвязи находятся свойства твердого тела со свойствами отдельных квазичастиц и их коллективов. Автор знакомит читателя с такими квазичастицами, как фононы, магноны, экситоны и плазмоны.

3. Мякишев Г. Я. *Элементарные частицы.* Издание 3-е, исправленное и дополненное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

В книге в простой и доступной форме излагается физика элементарных частиц. Прочитав эту книгу, читатель сможет не только получить представление о мире элементарных частиц, но и почувствовать ту напряженную, полную неожиданных открытий и смелых гипотез атмосферу, в которой живут физики, изучающие элементарные частицы.

Написана книга живо, увлекательно, с юмором, а также (что является немаловажным достоинством) достаточно кратко.

В данном издании отражены важнейшие достижения физики элементарных частиц за самые последние годы.

4. Бишоп Р. *Колебания.* Перевод с английского. Издание 2-е, переработанное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 55 к.

В популярной и увлекательной форме в книге рассказывается о колебаниях в природе и технике. Затрагивается широкий круг вопросов: колебания машин и приборов, термоупругие колебания, автоколебания, случайные колебания, методы борьбы с вредными колебаниями и использование полезных колебаний. Изложение иллюстрируются большим количеством примеров и фотографий.

5. Навашин М. С. *Телескоп астронома-любителя.* Издание 4-е. Объем 25 л., тираж 30 000 экз., цена 1 р. 10 к.

В книге рассказывается об устройстве телескопа и о возможностях самостоятельного изготовления телескопов-рефлекторов средних размеров.

6. Новиков И. Д. *Эволюция Вселенной.* Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 40 к.

Книга содержит научно-популярное изложение современной физической космологии — науки о строении и эволюции Вселенной в целом. Этот раздел астрофизики переживает сейчас бурное развитие, связанное с новыми открытиями астрономии, физики и теоретическими разработками. В книге рассказывается о расширяющейся Вселенной, о фотометрическом и гравитационном парадоксах, об открытии реликтового излучения и теории горячей Вселенной, о физике процессов в расширяющейся Вселенной, о новых открытиях наблюдательной космологии.

«Атомиздат»

7. Сонин А. С. *Кентавры природы.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

Эта книга о необычных веществах — жидких кристаллах, сочетающих в себе свойства жидкостей и кристаллов. От жидкостей они взяли текучесть и вязкость, а от кристаллов — зависимость физических свойств от направления измерения.

Необычны свойства жидких кристаллов, необычно и их использование в технике, биологии и медицине. Они помогают фотографировать в невидимых лучах, диагностировать воспалительные процессы, измерять температуру в недоступных местах, определять примеси вредных веществ в воздухе. Они — в циферблатах наручных часов, информационных табло, вычислительных машинах, навигационных самолетных приборах ... Оказывается, многие вещества в живых организмах и, в частности, в клетках нервов и мускулов являются жидкими кристаллами!

И. Клумова,
М. Смолянский

Новая научно-популярная серия издательства «Наука» — Библиотечка «Квант»

В 1980 году по решению Президиума Академии Наук СССР Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» начинает издание новой серии научно-популярных книг — Библиотечки «Квант». Для руководства серией создана специальная редколлегия, которую возглавляют академики И. К. Кикоин и А. Н. Колмогоров.

Книги, издаваемые в этой серии, будут предназначены в первую очередь школьникам — ученикам старших классов. Но мы уверены, что серия будет с интересом встречена студентами, учителями, преподавателями вузов и техникумов, а также всеми, кто интересуется естественными науками и их историей.

Название серии подчеркивает общность задач этой серии и нашего журнала. Это прежде всего — воспитание патриотизма, чувства гордости за отечественную науку, пробуждение интереса к занятиям естественными науками и оказание помощи в этих занятиях, расширение кругозора, воспитание умения логически мыслить и т. д.

В Библиотечке «Квант» будут издаваться новые, специально написанные для этой серии книги, а также переиздаваться лучшие популярные книги по естественным наукам советских и зарубежных авторов. Отдельные выпуски будут составлены из материалов журнала «Квант». Представляем первые книги этой серии. Они выйдут в 1980 году.

Книга *«Опыты в домашней лаборатории»* будет посвящена описанию простых, но интересных и поучительных опытов, которые можно поставить у себя дома, пользуясь совсем несложным оборудованием. Она составлена из лучших статей, опубликованных в 1970—1979 годах в Лаборатории «Кванта». Мы надеемся, что эта книга поможет нашим читателям провести первые самостоятельные физические опыты.

Вторая книга — *«Замечательные ученые»* — составлена из опубликованных в нашем журнале статей, посвященных выдающимся ученым: Копернику, Кеплеру, Ньютону, Лапласу, Амперу, Столетову, Ковалевской, Лебедеву и др. В этих статьях рассказывается о жизни и работах этих ученых, о том, как были сделаны эти работы, что позволило выполнить те или иные опыты, какие усовершенствования были внесены в технику эксперимента, на чем основывались эти ученые, высказывая свои гипотезы.

Без сомнения, многих читателей заинтересуют три книги, которые будут переизданы в 1980 году. Это прежде всего — книга М. Фарадея *«История свечи»*. Ей уже более 100 лет. В книге собраны лекции, прочитанные великим английским физиком для детей. В ней автор, рассказывая о свече, рассказывает и о капиллярных явлениях, и о сжижении газов, и о химических реакциях, и о многих других явлениях. На лекциях Фарадей показывал много интереснейших опытов, пользуясь шариками, тарелками, игрушками и т. д. Многие из этих опытов будет интересно повторить и современному читателю. В дополнении к книге, написанном доктором физико-математических наук Б. В. Новожиловым, рассказывается о современных представлениях о горении.

Вторая книга называется *«Атомы и электроны»*. Это — первая часть очень интересной книги «Атомы, электроны, ядра», написанной около 40 лет тому назад известным советским физиком и замечательным популяризатором М. П. Бронштейном. Она относится к числу лучших образцов научно-популярной литературы. В ней рассказывается, как впервые были измерены массы и размеры атомов и молекул, как был открыт электрон, какие опыты привели к выяснению структуры атомов и молекул. (Вторая часть книги будет издана в 1981 году.)

Элементарной алгебре и теории групп посвящена книга академика П. С. Александрова *«Введение в теорию групп»*. Эта область математики находит широкое применение в физике, особенно в таких ее областях как кристаллография, физика твердого тела, физика элементарных частиц. К настоящему изданию книга подверглась существенной переработке.

* * *

Из новых книг прежде всего следует назвать книгу академика В. М. Глушкова и кандидата физико-математических наук В. Я. Валаха *«Что такое ОГАС?»*. В ней рассказывается о математических задачах, связанных с планированием и управлением народным хозяйством страны. Авторы на интересных примерах описывают идеи и методы оптимального управления, обсуждают возможности электронно-вычислительных машин. Подробно рассказывается о целях, задачах и перспективах ОГАС — общегосударственной автоматизированной системы сбора и обработки информации для учета, планирования и управления.

Другая новая книга, которая готовится к изданию, написана профессором Я. А. Смородинским. Называется она *«Температура»*. Эта книга познакомит читателя с тем, как возникло понятие температуры, как была создана температурная шкала, как получают и измеряют низкие температуры, а также с такими интересными объектами как звезды, квазары, «черные дыры» и т. п.

Два специальных выпуска будут посвящены задачам. Это — книга *«Задачи по физике»*, написанная кандидатами физико-математических наук Л. Г. Асламазовым и И. Ш. Слободецким. В ней собраны задачи «олимпиадного типа», многие из которых публиковались ранее в Задачнике «Кванта».

Вторая книга посвящена логическим задачам. Написана она Л. П. Мочаловым и называется *«Головоломки»*. Книга содержит около 200 логических задач, для решения которых нужны сообразительность и смекалка и не очень важен уровень математической подготовки читателя. Некоторые из головоломок были опубликованы в нашем журнале и вызвали большой интерес читателей.

В 1980 году также планируется выпуск перевода книги известного норвежского математика О. Оре *«Приглашение в теорию чисел»*. В ней рассказывается о теории сравнений, о системах счисления и т. д. В книге много задач, ребусов, рассказов о магических квадратах; написана она занимательно и интересно. Автор знакомит читателя с современным состоянием теории чисел, применениями теории, с задачами, еще не получившими своего решения.

В 1980 году выйдет еще одна книга зарубежного автора. Это — книга замечательного польского математика Г. Штейнгауза *«Математический калейдоскоп»*. В этой книге автор показывает, как математика пронизывает всю нашу жизнь. Это набор очень интересных рассказов, задач и вопросов, посвященных самым различным областям математики. Перевод, который планируется в 1980 году, сделан с последнего польского издания, полностью переработанного автором и дополненного большим новым материалом.

На все эти книги уже сейчас можно сделать предварительный заказ, оставив открытку в магазинах «Книга — почтой». (Адреса таких магазинов вы можете найти в «Кванте», 1978, №№ 3, 6.)

Редколлегия серии просит Вас написать нам, какие книги Вы хотели бы прочитать в нашей серии (в том числе и книги, изданные ранее как в нашей стране, так и за рубежом).

И. Слободецкий

Прекрасное собрание первоисточников по математике

Любители математики получили хорошую возможность познакомиться с основными математическими теориями, идеями, открытиями непосредственно по первоисточникам и в их историческом развитии: издательство «Просвещение» выпустило в свет «Хрестоматию по истории математики» (кн. 1 — 1976 г., кн. 2 — 1977 г.). «Хрестоматия», составленная ведущими советскими специалистами по истории математики во главе с профессором А. П. Юшкевичем, освещает развитие математики от глубокой древности до XX века.

Читатели почувствуют особенности рассуждений в период создания соответствующих математических трудов. А особенности эти значительны. Зачастую язык подлинника весьма труден. Но каждый отрывок сопровождается, как правило, его пересказом на современном языке и квалифицированными комментариями. Кстати, комментарии соединяют отдельные отрывки в единое целое, дополняют пропущенные звенья и дают общую характеристику всему содержанию соответствующих документов. Иногда комментарии содержат краткое описание других документов, других трудов ученых той же эпохи.

1-я книга состоит из трех частей.

Первая часть посвящена арифметике и алгебре. За отрывками, принадлежащими математикам Древнего Китая, Индии, Вавилона и Египта, следуют отрывки из работ математиков эпохи Возрождения (например, из сочинений Кардано по решению уравнений и введению комплексных чисел) и трудов Р. Декарта, И. Ньютона, Р. Дедекинда, Н. И. Лобачевского, К. Гаусса, Л. Эйлера, Д. Буля.

Вторая часть относится к теории чисел. За изложением трудов Евклида идут диофантовы уравнения, теоремы Ферма с доказательствами, принадлежащими Эйлеру, элементы теории групп у Эйлера, теория сравнений и теория комплексных чисел Гаусса, а также теоремы по теории чисел П. Л. Чебышева, Б. Римана, А. Пуанкаре.

В третьей части, содержащей геометрический материал, читатель знакомится с измерением объемов в Древнем Египте, с геометрией Евклида и с геометрией народов Средней Азии и Европы. Интересны теория конических сечений Аполлония, вопросы проективной геометрии Паппа, уравнения кривых у П. Ферма, Р. Декарта, И. Ньютона и Л. Эйлера. Далее излагаются вопросы дифференциальной и неевклидовой геометрии. Завершается третья часть материалами по теории абстрактных пространств и топологии.

Во 2-й книге помещены отрывки из работ, содержащих элементы математического анализа: теоремы Архимеда, Евклида, средневековых ученых, ученых XVII—XVIII веков. В отрывках из первоисточников ярко характеризуются основные направления развития математического анализа в XIX—XX веках. Этот материал близко примыкает к программе 9—10 классов школы.

Во второй части 2-й книги читатель знакомится с основными понятиями и теоремами теории вероятностей и их приложениями в науке и на практике. На современном этапе развития школы и при возрастании роли математики и ее приложений знакомство с материалом этой части весьма полезно.

К сожалению, тираж книги очень невелик, и ее первый том сразу же по выходе в свет стал библиографической редкостью.

И. Петраков

Геометрические решения геометрических задач

1. $1+0{,}75\sqrt{3}$. 3. $\sqrt{3}R^2$. 4. $0{,}75\,ab$. 5. Указание. «Достройте» данную полуокружность до окружности и трапецию $ABCD$ до трапеции $EBCF$, описанной около этой окружности. 6. $\widehat{BKD}=90^\circ$, $\widehat{BDK}=60^\circ$, $\widehat{DBK}=30^\circ$. 7. $\frac{a^2}{b}$. 8. 120°. 9. $\arccos\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $\pi-2\arccos\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ или $\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $\pi-2\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

«Квант» для младших школьников

(*см. «Квант» № 8*)

1. Уменьшаемое оканчивается цифрой 6, вычитаемое — цифрой 4.

2. Цифры a и b должны удовлетворять уравнению

$$100a+b=k\,(10a+b),$$

или

$$10a\,(10-k)=b\,(k-1).$$

Легко видеть, что $1<k\leqslant 10$ ($a\neq 10$).

При $k=10$ получаем $b=0$; тогда $a=1$ и нужное число — это 10 ($100=10\cdot 10$).

При $k=2$, 3, 4, 5, 8 решений нет.

При $k=6$ получаем число 18 ($108=6\cdot 18$).

При $k=7$ — число 15 ($105=7\cdot 15$).

При $k=9$ — число 45 ($405=9\cdot 45$).

Ответ: 10, 15, 18, 45.

3. Легко показать, что число команд, участвующих в турнире, не может быть четным.

Возможны два случая.

1°. Каждая из семи команд, имевших в среду после очередного тура четное число встреч, в одном из предшествующих туров была свободной от игры.

2°. Каждая из этих семи команд не была свободной от игры ни в одном из предыдущих туров.

В первом случае после следующего тура у всех этих семи команд будет по нечетному числу встреч. Одна из остальных команд, свободная в этот день от игры, будет по-прежнему иметь нечетное число встреч. Следовательно, после следующего тура нечетное число встреч имели восемь команд. Остальные команды провели четное число встреч. По подсчетам Бори таких команд оказалось семь. Значит, всего в турнире участвовало 15 команд.

Рассуждая аналогично, получим для второго случая ответ — 13 команд.

Итак, в турнире участвовало 13 или 15 команд.

4. 6 часов.

5. Двенадцатью способами.

Кроссворд «Космос»

(*см. «Квант» № 8, 3-ю с. обложки*)

По горизонтали: 5. Юпитер. 6. Эллипс. 10. Орион. 11. Вечер. 12. Сопло. 13. Венера. 15. «Молния». 16. Кульминация. 19. Космос. 20. Ригель. 21. Визир. 23. Старт. 25. Седоя. 26. Дракон. 27. Хрунов.

По вертикали: 1. Титан. 2. Феникс. 3. Глушко. 4. Титов. 7. Персей. 8. Афелий. 9. Гипокинезия. 14. «Атлас». 15. Мицар. 17. «Восток». 18. Алголь. 21. Волков. 22. Ресурс. 24. Тукан. 25. Стенд.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
И. Смирнова, В. Чернов

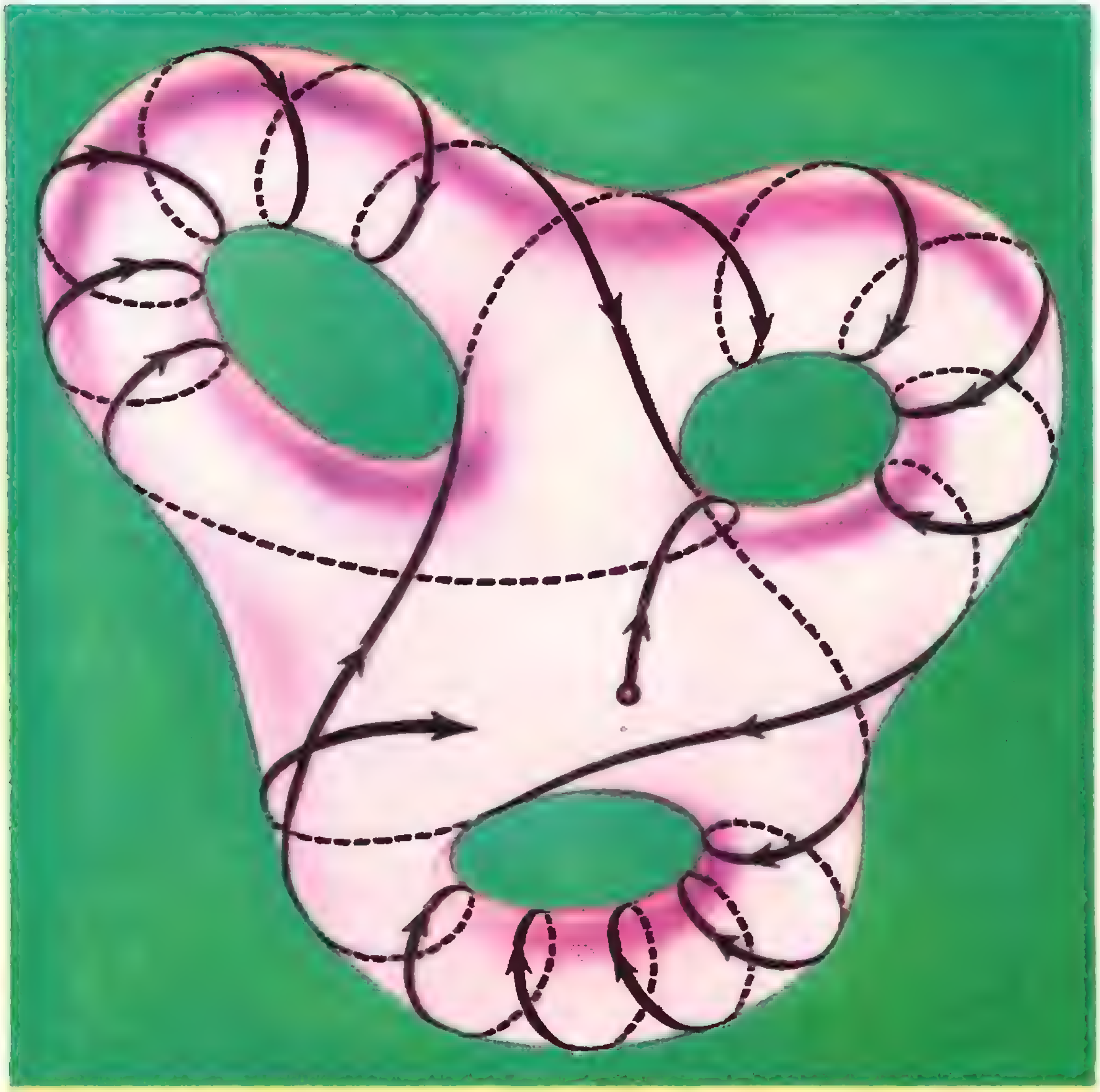
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

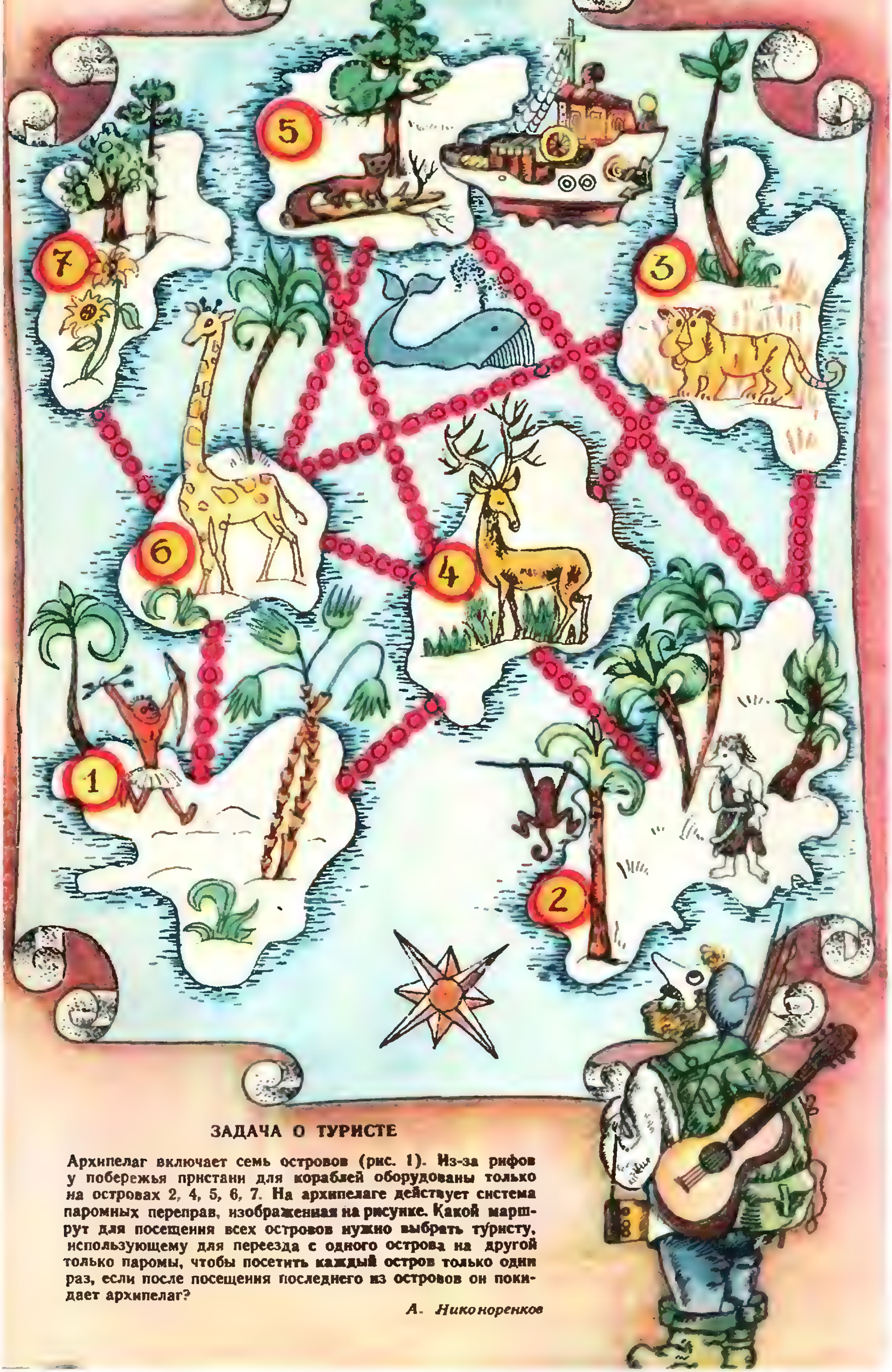
Корректоры Л. Боровина, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 2/VII-79
Подписано в печать 9/VIII-79
Бумага 70×108$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,36 Т-11292
Цена 30 коп. Заказ 1485 Тираж 279390 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области



На этом рисунке показано, как, отражаясь от стенок, биллиардный шарик движется по равнобедренному треугольнику с углом при вершине $\pi/6$. Нет, нет, это не опечатка. Дело в том, что при обычном изображении траектории на треугольнике, число изломов и самопересечений очень велико, картина получается крайне запутанная. Значительно более ясная (и красивая!) картина возникает, если склеить из 12-ти экземпляров нашего треугольника правильный 12-ти угольник, а затем отождествить его противоположные стороны. Тогда получается замкнутая поверхность с тремя «ручками», а траектория плавно вокруг нее обвивается. Зачем и как это делается вы можете прочитать в статье «Биллиарды и поверхности» на с. 2.



ЗАДАЧА О ТУРИСТЕ

Архипелаг включает семь островов (рис. 1). Из-за рифов у побережья пристани для кораблей оборудованы только на островах 2, 4, 5, 6, 7. На архипелаге действует система паромных переправ, изображенная на рисунке. Какой маршрут для посещения всех островов нужно выбрать туристу, использующему для переезда с одного острова на другой только паромы, чтобы посетить каждый остров только один раз, если после посещения последнего из островов он покидает архипелаг?

А. Никоноренков

Цена 30 коп.

Индекс 70465

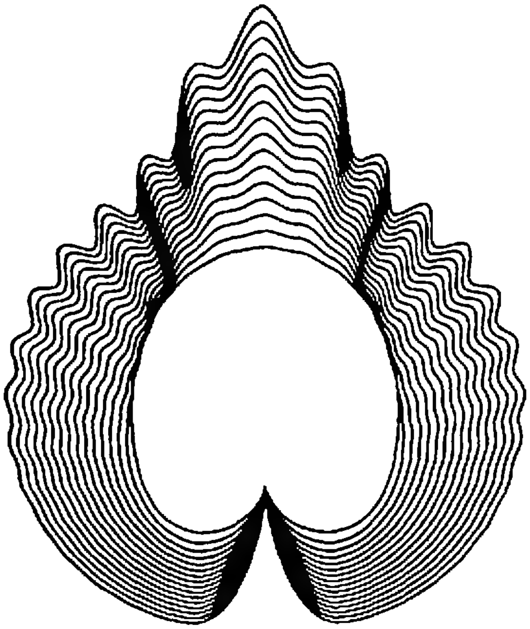
На этой странице обложки вы видите четыре семейства кривых, нарисованные ЭВМ. Их уравнения в полярной системе координат (см. «Квант», № 7 за 1977 год) имеют такой вид:

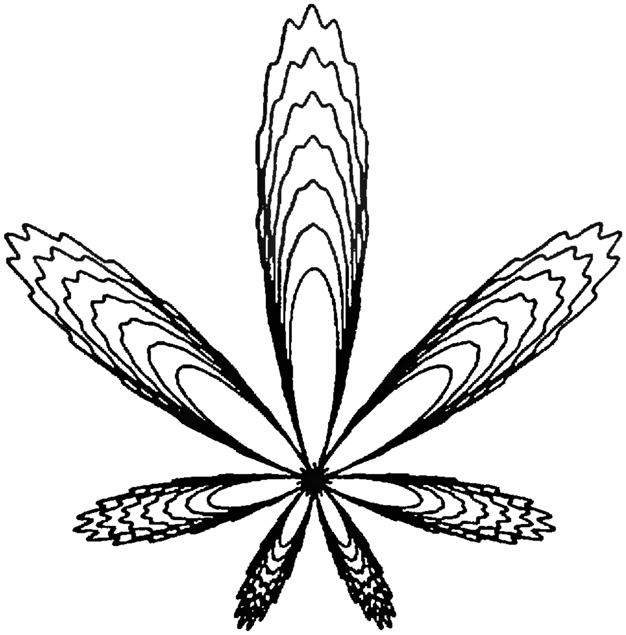
первое семейство: $r = A\,[5+2\cos\varphi+3\,|\cos\varphi|^m \operatorname{sign}(\cos\varphi)] - B\sin^2 18\varphi \cos^8\varphi/2$ (кривые из этого семейства приведены и на первой странице обложки);

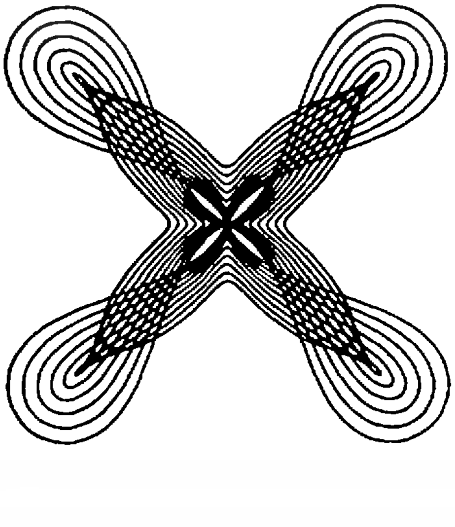
второе семейство: $r = A(\cos\varphi+\sqrt{3+\cos^2\varphi}) \times \cos^2 3{,}5\,\varphi - B\sin^2 60\varphi$;

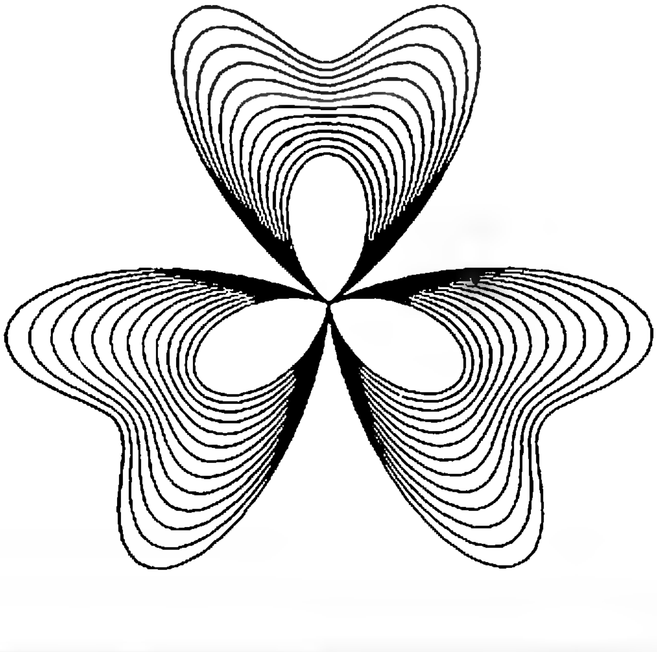
третье семейство: $r = A\cos 4\alpha + B$, $\varphi = \alpha - C\sin 4\alpha$ (здесь кривые заданы в *параметрической форме* — каждому значению *параметра* α отвечают определенные значения r и φ, задающие точку на плоскости; о параметрическом задании кривых рассказывалось в «Кванте» № 8 за 1978 год в статье М. Башмакова); *четвертое семейство* $r = A(1+\cos 3\varphi) + B\sin^2 3\varphi$. Значения величин A, B, C и m — разные для разных кривых. При желании в некоторых из этих кривых можно узнать листья растений.

Ю. Котов









НОМЕР
10

Основан в 1970 году

Квант

10
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

2 Праздник твоего учителя

4 *А. Ширшов, А. Никитин.* Обобщенная сумма углов многогранника

8 *И. Урусовский.* Бег, ходьба и физика

15 *В. Лешковцев, М. Прошин.* На пути к энергетике будущего

Лаборатория «Кванта»

20 Олимпиада дома

Математический кружок

21 *Г. Шестопал.* Как обнаружить фальшивую монету

Задачник «Кванта»

26 Задачи М586—М590; Ф598—Ф602

28 Решения задач М530, М531, М533, М534, М536, М537; Ф537, Ф542—Ф545

По страницам школьных учебников

36 *М. Балк, Ю. Ломакин.* Доказательство неравенств с помощью производной

«Квант» для младших школьников

39 Задачи

40 *А. Дозоров.* Можно ли носить воду в решете?

Практикум абитуриента

44 *С. Овчинников.* Если промежуток не замкнут...

49 *Л. Асламазов.* Закон сохранения импульса. Реактивная сила

Заочная школа программирования

54 Урок 3

Информация

58 *О. Овчинников, К. Шимбирева, Ю. Широков, Г. Яковлев.* Всероссийская олимпиада школьников

61 *Н. Васильев.* Задачи республиканских олимпиад

Наша обложка (*с. 60*)

63 **Ответы, указания, решения**

Смесь (*с. 7, 14, 25, 38, 57*)

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой
странице обложки
воспроизведены
траектории частиц
горячей
плазмы в диверторе
термоядерной
установки «Токамак-12».
Об этом
рассказано
в фотоочерке на стр. 15.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

Праздник твоего учителя

> *Партия и Советское правительство высоко ценят неутомимую, плодотворную деятельность учителей и выражают глубокую благодарность за их самоотверженный труд.*
>
> Из приветствия ЦК КПСС, Президиума Верховного Совета СССР, Совета Министров СССР Всесоюзному съезду учителей.

В октябре наша страна торжественно отмечает традиционный праздник — День советского учителя. Этот праздник — день цветов и улыбок, поздравительных слов и наилучших пожеланий учеников своим наставникам и воспитателям. Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» искренне присоединяются к теплым поздравлениям, адресованным славной армии учителей школ, преподавателей профессионально-технических училищ, всех работников народного образования.

Замечательны страницы истории нашей школы, написанные не одним поколением советских учителей. От ликвидации массовой неграмотности, доставшейся в наследство от царизма, через создание кадров новой рабоче-крестьянской интеллигенции, школа вышла к главной задаче сегодняшнего дня — завершению программы всеобщего обязательного среднего образования, воспитанию гармонической личности активного члена общества развитого социализма. За 1918—1940 годы полную среднюю школу окончили около 1,5 миллиона человек, а за 1976—1978 годы более 8,9 миллиона человек завершили среднее образование. Вдумайтесь в эти цифры! В них — яркая характеристика невиданного роста народного образования в СССР.

Мы уже привыкли к успехам советской школы, ее достижения стали для нас естественными, закономерными. В этом огромное завоевание социализма — право на образование неотделимо от нашего бытия, невозможно представить себе наших детей, юношества без школы, без знаний. Иную картину представляет собой реальность капиталистического мира. По оценке зарубежной печати, в странах капитала около 300 миллионов детей школьного возраста не посещает школ. А вот, например, признание аргентинской прессы: в стране из каждых четырех учащихся один вынужден уходить из начальной школы, не закончив даже второго класса; из ста учеников лишь половине удается получить начальное образование. Причина? Тяжелое материальное положение семей трудящихся, не позволяющее их детям посещать школу.

Роль учителя в нашей жизни переоценить трудно. Ведь это на его глазах, под его непосредственным влиянием проходит самый ответственный период жизни человека — период возмужания, становления личности. Рождение каждого нового гражданина Страны Советов, труженика и творца, в значительной мере неотделимо от кропотливого, поистине самоотверженного труда учителя. Именно поэтому учитель, педагог пользуется любовью и уважением всех советских людей, а его профессиональный праздник стал поистине общенародным.

Но праздник наших учителей — это не только день поздравлений и пожеланий, сколь бы искренними они ни были. В этот день каждый ученик должен особенно четко и честно ответить самому себе на главный вопрос — все ли ты делаешь для того, чтобы труд учителя был более эффективным, легким, радостным? Результаты труда учителя зависят не только от его таланта, знаний, опыта — они зависят и от учеников, от их желания учиться, от их сознательности и понимания дисциплины, от их воли и умения подчас делать не то, что хочется, а то, что необходимо.

Состоявшийся в мае с. г. IV пленум ЦК ВЛКСМ в своем постановлении «Об усилении работы комсомола по коммунистическому воспитанию учащихся общеобразовательных школ и подготовке их к труду» особое внимание обратил на необходимость «воспитывать у учащихся понимание того, что получение всеобщего обязательного среднего образования является гражданским долгом и жизненной потребностью каждого молодого советского человека». Это прежде всего означает, что школьник не может быть пассивной стороной в процессе обучения, воспитания. Он должен активно способствовать созданию атмосферы творчества и заинтересованности в овладении знаниями, принципиально реагировать на случаи недисциплинированности, стремиться к глубокому внутреннему усвоению марксистско-ленинской идеологии и коммунистической морали.

Особые поздравления редакционная коллегия и редакция «Кванта» адресуют сегодня дорогим коллегам — учителям математики и физики. Именно им миллионы школьников обязаны своими знаниями по этим предметам. И именно им тысячи и тысячи школьников обязаны своей любовью к этим наукам, своими первыми успехами. Подметить способности ученика, пробудить в нем интерес к предмету, направить его дальнейшие занятия, помочь превращению интереса к предмету в выбор профессии — сколько все это требует труда, знаний, педагогического мастерства!

Многие скромные школьные учителя математики и физики внесли неоценимый вклад в развитие этих наук — помогли талантливой молодежи найти свое призвание, прийти в большую науку. И нет более приятной, более высокой награды за труд учителя, чем достижения его ученика в математике или физике.

Пройдет не так уж много времени и сегодняшние старшеклассники — читатели «Кванта» окончат школу, выйдут на широкую дорогу самостоятельной жизни. Большинство из них выберет себе специальность, так или иначе связанную с физико-математическими науками. Можно с уверенностью сказать, что они окажутся достойными учениками своих учителей.

А. Ширшов, А. Никитин

Обобщенная сумма углов многогранника

В евклидовой геометрии важное место занимает теорема о сумме углов плоского многоугольника, поэтому естественно возникает вопрос о пространственном аналоге этой теоремы. О таком аналоге и о связанных с ним понятиях рассказывается в этой статье.

Мера n-гранного угла

Будем измерять плоские и многогранные углы следующим образом. Пусть AOB — произвольный угол на плоскости. Построим окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке O и примем за *меру угла* AOB величину отношения длины дуги $A'mB'$, находящейся внутри угла AOB, к длине всей окружности (рис. 1).

При таком измерении углов, например, мера угла в один градус равна $\frac{1}{360}$, мера угла в π радиан равна $\frac{1}{2}$, а известные теоремы о сумме углов треугольника и сумме углов выпуклого n-угольника формулируются соответственно следующим образом: *величина суммы углов треугольника равна* $\frac{1}{2}$ *и величина суммы углов выпуклого* n*-угольника равна* $\frac{n}{2}-1$.

Рассмотрим произвольный n-гранный угол. Вокруг его вершины (а в случае двугранного угла вокруг произвольной точки ребра этого угла) построим сферу и назовем *мерой* n*-гранного угла* величину отношения площади части сферы, находящейся внутри угла, к площади всей сферы (рис. 2).

Если $n > 2$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ — точки пересечения n-гранного угла со сферой, то через $|A_1, A_2 \dots A_n|$ обозначим меру нашего n-гранного угла, а через $|\widehat{A}_1|, |\widehat{A}_2|, \dots, |\widehat{A}_n|$ обозначим соответственно меры внут-

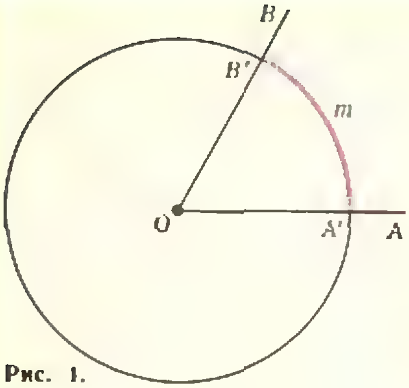


Рис. 1.

ренних двугранных углов $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ n-гранного угла.

Каждая из граней n-гранного угла пересекается со сферой по большой окружности и все грани n-гранного угла отсекают от сферы фигуру, которую обычно называют *сферическим n-угольником* (см. рис. 2).

На рисунках 3 и 4 показаны сферические 2-угольник и треугольники.

Мера двугранного угла, как видно из рисунка 3, равна мере его линейного угла. Из известной формулы площади сферического треугольника, которая дает нам выражение площади через величины углов, измеренных в радианной мере (см. «Квант», 1977, № 1, с. 9), переходя к нашим обозначениям, получим

$$2|ABC| = |\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - \frac{1}{2}, \quad (1)$$

где $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ — внутренние двугранные углы при ребрах OA, OB, OC нашего трехгранного угла.

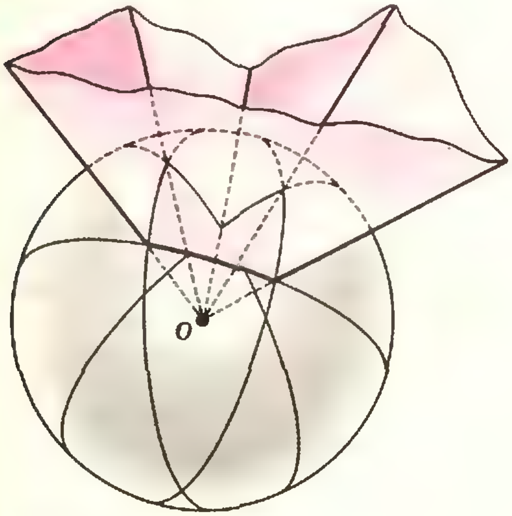


Рис. 2.

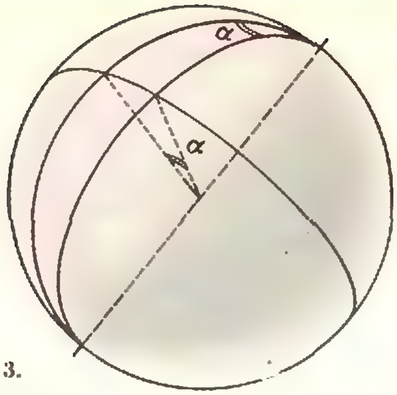


Рис. 3.

Действительно, площадь фигуры Φ_1, составленной из двух сферических треугольников ADC и $A'D'C$, совпадает с площадью 2-угольника $\hat{C}$ *), площадь фигуры Φ_2, составленной из треугольников $AD'B$ и $A'DB$, — с площадью 2-угольника $\hat{B}$: фигура же Φ_3, ограниченная полуокружностями ABA' и $A'CA$, есть 2-угольник $\hat{A}$. Пересечение этих трех фигур $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3 = \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_2 \cap \Phi_3 = \Phi_3 \cap \Phi_1$ является интересующим нас сферическим треугольником ABC. Поэтому, вычисляя сумму площадей этих трех фигур, мы трижды, т. е. два лишних раза, посчитаем площадь треугольника ABC. Вычитая из этой суммы удвоенную площадь треугольника ABC, мы получим площадь видимой (на рисунке 4) полусферы. Итак, $^1/_2 = |\hat{A}| + |\hat{B}| + |\hat{C}| - 2|ABC|$, т. е. справедлива формула (1).

Из равенства (1) следует, что сумма мер внутренних двугранных углов произвольного трехгранного угла на $\frac{1}{2}$ превышает его удвоенную меру.

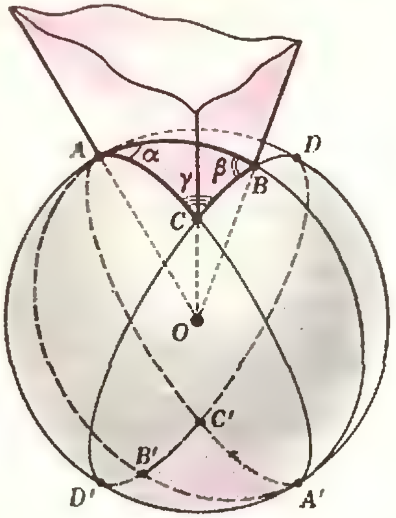


Рис. 4.

---

*) 2-угольник мы обозначаем так же как соответствующий двугранный угол.

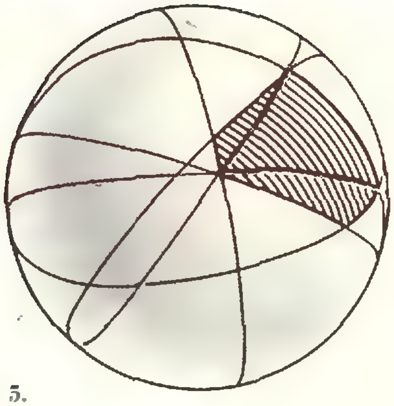


Рис. 5.

Найдем теперь меру выпуклого n-гранного угла. Заметим, что всякий выпуклый n-угольник может быть разбит на $n-2$ треугольника. Аналогично этому, всякий выпуклый n-гранный угол ($n>2$) может быть разбит на $n-2$ трехгранных угла, а соответствующий сферический n-угольник разбивается при этом на $n-2$ сферических треугольника (рис. 5). Применяя формулу (1) ко всем этим треугольникам и суммируя, видим, что для сферического n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, соответствующего некоторому выпуклому n-гранному углу, выполняется формула

$$|\widehat{A}_1| + |\widehat{A}_2| + \ldots + |\widehat{A}_n| - 2|A_1A_2\ldots A_n| = \frac{n}{2} - 1\,, \tag{2}$$

то есть *сумма мер внутренних двугранных углов n-гранного угла на $\frac{n}{2}-1$ превышает удвоенную меру n-гранного угла* (при $n>2$).

Величину $|\widehat{A}_1| + |\widehat{A}_2| + \ldots + |\widehat{A}_n| - 2|A_1A_2\ldots A_n|$ в дальнейшем будем называть избытком многогранного угла $OA_1A_2\ldots A_n$.

Упражнение 1. Применяя формулы (1) и (2), найдите а) меру трехгранного угла в вершинах куба; б) меру трехгранного угла в вершинах правильного тетраэдра; в) меру четырехгранного угла в вершинах октаэдра.

Сумма углов многогранника

Рассмотрим теперь произвольный тетраэдр. Обозначим через α_i ($i=1, 2, 3, 4$) величины его трехгранных углов, а через β_j ($j=1, 2, \ldots, 6$) величины его двугранных углов. Избыток всякого трехгранного угла равен $\frac{1}{2}$, поэтому сумма избытков всех трехгранных углов тетраэдра равна 2. Заметим, что каждый двугранный угол учитывался дважды: сначала при одной вершине ребра, а затем при другой. Таким образом, имеет место равенство $2\sum_{j=1}^{6}\beta_j - 2\sum_{i=1}^{4}\alpha_i = 2$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{6}\beta_j - \sum_{i=1}^{4}\alpha_i = 1\,. \tag{3}$$

Рассмотрим произвольную выпуклую k-угольную пирамиду. Обозначим через α величину k-гранного угла (при вершине пирамиды), через $\bar{\alpha}$ — сумму величин всех ее трехгранных углов при основании, через β — сумму величин всех двугранных углов при основании пирамиды и через $\bar{\beta}$ — сумму величин всех двугранных углов, образованных ее боковыми гранями. Как и в случае тетраэдра, вычислим сумму избытков по всем вершинам пирамиды.

Из формулы (2) следует, что $\bar{\beta} - 2\alpha = \frac{k}{2} - 1$, а из формулы (1) получаем, что $\bar{\beta} + 2\beta - 2\bar{\alpha} = \frac{1}{2}k$, поэтому

$$\beta - \bar{\alpha} + \alpha = \frac{1}{2}\,. \tag{4}$$

$$\beta + \bar{\beta} - (\alpha + \bar{\alpha}) = \frac{k+1}{2} - 1\,. \tag{5}$$

Таким образом, из формул (3) и (5) вытекает, что как для тетраэдра, так и *для любой выпуклой k-угольной пирамиды разность между суммой величин всех двугранных углов и суммой величин всех многогранных углов при вершинах есть величина, зависящая только от числа граней пирамиды*.

Рассмотрим теперь произвольный выпуклый многогранник с n гранями (рис. 6). Выберем произвольно внутри него точку A и соединим ее со всеми точками ребер многогранника. В результате получим разбиение многогранника на n пирамид.

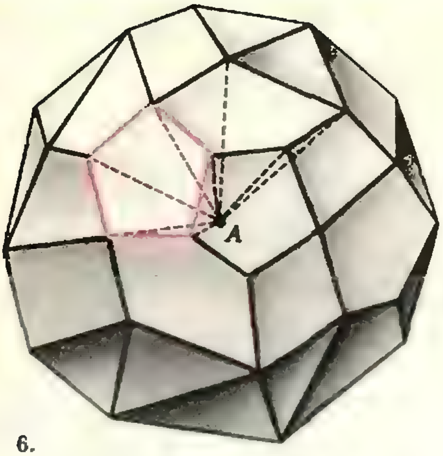


Рис. 6.

Заметим следующее: сумма величин всех многогранных углов этих пирамид с вершинами в точке A равна 1; сумма величин всех трехгранных углов при основаниях пирамид совпадает с величиной суммы φ всех многогранных углов при вершинах многогранника; сумма величин всех двугранных углов при основании пирамид из нашего разбиения совпадает с величиной суммы $\bar{\varphi}$ всех двугранных углов многогранника. Отсюда и из формулы (4) непосредственно получаем, что $1-\varphi+\bar{\varphi}=\frac{1}{2}\cdot n$ или

$$\bar{\varphi}-\varphi=\frac{n}{2}-1. \qquad (6)$$

Заметим, что требование выпуклости многогранника присутствует лишь для простоты изложения. Обобщения в этом направлении читатель может получить самостоятельно.

Теорема об обобщенной сумме углов тетраэдра впервые была доказана де Гюэ в 1783 г., дальнейшие обобщения опубликованы Брианшоном в 1837 г.

Удивительное свойство формулы (4) состоит в том, что, в отличие от плоского случая, эта формула остается справедливой и в неевклидовой геометрии.

Упражнения

2. а) Найдите обобщенную сумму углов куба и додекаэдра. б) Для этих многогранников найдите сумму мер многогранных углов при вершинах.

3. Используя формулу (1): вычислите сумму избытков многогранных углов выпуклого многогранника, у которого P ребер и B вершин. (Ответ. $P-B$.)

4. Выведите из упражнения 3 и формулы (6) знаменитую формулу Эйлера, связывающую число граней Г, число вершин B и число ребер P выпуклого многогранника: $P-B=\Gamma-2$.

5. Приведите пример многогранника, для которого $B-P+\Gamma=0$.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М536—М544 и Ф533—Ф547 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Абдибеков (Аркальск) **6а**; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **6—8**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **7**; *З. Алавердян* (Иджеван) **3**; *Ф. Алиев* (Баку) **1, 3, 4**; *А. Андреасян* (Бюрегаван АрмССР) **3**; *Р. Ардин* (Львов) **6, 7, 1—3**; *К. Арстимян* (Кафан) **7**; *Н. Арутюнов* (Киев) **2—4**; *П. Ахметьев* (Москва) **2—4**; *А. Ахметхозин* (Андижан) **6а, 7**; *А. Бадиян* (пос. Берд АрмССР) **6—8**; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **6, 7**; *К. Бакланов* (Тула) **6а, 7**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **6—9, 1—4**; *А. Барг* (Николаев) **6, 7**; *А. Барышников* (Москва) **6**; *Б. Бегун* (Москва) **6, 2**; *А. Белюга* (Кривой Рог) **3**; *И. Березовский* (Черновцы) **2, 3**; *С. Берколайко* (с. Котово Белгородской обл.) **3**; *С. Беспамятных* (Артемовский) **6—9, 2**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **3**; *А. Боричев* (Ленинград) **6, 8, 0, 3,4**; *Е. Бравый* (Пермь) **6**; *А. Брагинский* (Волгодонск) **6, 0**; *Я. Бретман* (Киев) **3**; *А. Бурин* (Москва) **6, 1, 4**; *Ю. Бусин* (Черемхово) **7, 3**, *Э. Вайслер* (Киев) **3**; *В. Вардиков* (Таштагол) **6**; *С. Василовский* (Ашхабад) **1**; *И. Владимиров* (Москва) **2, 3**; *А. Влэдеску* (СРР) **7, 8, 0**; *Х. Воктор* (Днепродзержинск) **1, 3**; *А. Воронов* (Москва) **6**; *М. Гаврилов* (пос. Черноголовка Московской обл.) **6а, 7, 8, 1—4**; *Э. Гаджиев* (Тбилиси) **6а, 3**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **4**; *Н. Гасилов* (Баку) **7, 1, 3**; *А. Генин* (Москва) **3**; *А. Генязюк* (Киев) **3**; *А. Гильман* (Москва) **6, 7, 4**; *А. Гилюк* (Флорешты) **2**; *Л. Гитлин* (Витебск) **6—8**; *Ю. Глухов* (Щелково) **6, 7**; *С. Глушко* (Дрогобыч) **3**; *О. Горбачев* (Кустанай) **6, 3, 4**; *О. Гордиенко* (Павлодар) **7, 8**; *М. Горелов* (Белорецк) **6**; *Л. Гринаш* (г. п. Дятлово Гродненской обл.) **7**; *Н. Гринберг* (Киев) **6, 7, 1**; *В. Губа* (Вологда) **6—8, 1—4**; *С. Гузов* (Львов)

(Продолжение см. на с. 14)

И. Урусовский

Бег, ходьба и физика

Может ли человек, связанный по рукам и ногам, бегать быстрее «развязанного»? Может! Не верите? Давайте разберемся...

С точки зрения теории колебаний бег человека в системе координат, связанной с бегуном, есть просто болтание ногами. Таким образом, ноги при беге и ходьбе выступают в роли маятников, соединенных шарнирно с корпусом и колеблющихся в поле тяжести около своего положения равновесия — вертикального положения. Но нога — это не «груз на невесомой нити», не математический маятник, который изучают в школе: масса ноги не сосредоточена в одной точке, а распределена вдоль всей ноги. Нога — это физический маятник.

Важнейшая характеристика всякого маятника — частота его свободных колебаний. Для математического маятника, как известно, частота свободных колебаний равна $\nu_0 = \sqrt{g/l}$ и зависит только от длины l маятника. У физического маятника, в отличие от математического, частота свободных колебаний зависит не только от его длины, но и от распределения масс вдоль маятника: чем ближе расположены массы к оси колебаний маятника, тем выше частота его свободных колебаний. Однако и для физического маятника частоту тоже можно записать как $\nu_0 = \sqrt{g/L}$, где L — очень важная характеристика маятника — его приведенная длина. Это длина такого математического маятника, который имеет ту же частоту, что и данный физический.

Для пропорционально сложенных людей приведенная длина ноги-маятника пропорциональна росту. Поэтому частоты собственных колебаний ног людей разного роста относятся как корни квадратные из отношения (обратного) ростов. Это дает нам очень простой способ определения ν_0 для человека любого роста. Достаточно измерить собственную частоту колебаний вашей собственной ноги. А это несложно: стоя на одной ноге, покачайте, расслабив мышцы, другой и сосчитайте среднее число колебаний ноги за одну секунду. Например, для человека, имеющего рост 175 см, частота оказывается равной 0,8 Гц. Так что для человека роста h(см) $\nu_0 = 0{,}8\sqrt{175/h}$ (Гц).

Если ногу согнуть, как это бывает при беге, то приведенная длина ноги уменьшится и частота свободных колебаний возрастет примерно на одну четверть.

При ходьбе ноги совершают вынужденные колебания под действием мышц. Известно, что при вынужденных колебаниях их размах зависит не только от величины силы, но и от частоты ее действия. Частоту, при которой получается наибольший размах, называют резонансной частотой.

Резонанская частота ν_p почти совпадает с частотой ν_0 свободных колебаний маятника:

$$\nu_p = \nu_0\sqrt{1-\alpha^2},$$

где $\alpha = \frac{1}{2\pi}\ln n \approx 0{,}37\lg n$, n — число, показывающее, во сколько раз уменьшается амплитуда свободных колебаний за один период. Амплитуда свободных колебаний ноги человека уменьшается за один период приблизительно в два раза, так что в интересующем нас случае $n \approx 2$, $\alpha \approx 0{,}11$ и резонансная частота отличается от собственной всего на 0,6%.

Ясно, что с точки зрения экономии сил выгоднее всего ходить, переставляя ноги с резонансной частотой. При таком темпе ходьбы запасаемая при подъеме ноги потенциальная энергия наиболее полным образом переходит в кинетическую в момент прохождения ноги через положение равновесия, а через четверть периода (через полшага) кинетическая энергия колебательного движения наиболее полно переходит в потенциальную. Максимальные значения потенциальной и кинетической энергии в этом случае почти одинаковы, и дополнительная нагрузка на мышцы ног, связанная с необходимостью «болтать» ногами при ходьбе, минимальна.

Люди действительно ходят, переставляя ноги с резонансной частотой. Отклонения «рабочей» частоты от резонансной весьма невелики. И ясно почему: чем больше это отклонение, тем больше добавочная нагрузка на мышцы, связанная с преодолением инерции ног при слишком быстром темпе ходьбы или с преодолением действующей на ноги силы тяжести при слишком медленном темпе.

Ситуация совершенно аналогична знакомой всем практике раскачивания на качелях: сравнительно легко раскачать качели на их резонансной частоте, но если вы будете пытаться раскачать их с частотой, скажем, вдвое большей, то быстро устанете, а качели практически не сдвинутся с места.

Теперь понятно, почему человек, если требуется идти быстрее, прежде всего увеличивает ширину шага, а не темп ходьбы. Скорость движения при этом возрастает, а резонансная частота колебаний ноги изменяется очень мало: из физики известно, что резонансная частота почти не зависит от размаха колебаний.

Кроме увеличения ширины шага, есть еще один резерв убыстрения скорости хода: сгибание ноги в колене в то время, когда она оторвана от земли. На ширине шага это, конечно, не отражается, а резонансная частота при этом возрастает, и человек, «подстроив» таким образом резонансную частоту своих ног к более высокому темпу ходьбы, может идти быстрее.

Руки человека также приспособлены для ходьбы. Поскольку ноги движутся в двух разных параллельных плоскостях, находящихся на некотором расстоянии друг от друга, движение ног вызывает момент сил, стремящийся повернуть корпус человека вокруг вертикальной оси. Чтобы сохранить прямую походку, люди размахивают руками «навстречу» движению ног. При таком движении рук возникает момент сил, противоположный моменту сил, обусловленному движением ног, и компенсирующий его. Заодно уменьшаются смещения по вертикали центра тяжести тела и связанная с этим работа: ведь раздвигание ног при ходьбе смещает центр тяжести вниз, а раздвигание рук — вверх. Конечно, человек может сохранять прямую походку и не размахивая руками, но лишь ценой дополнительного напряжения мышц, а это невыгодно.

Размахивать руками при ходьбе легче всего, если резонансные частоты колебаний рук и ног одинаковы. Оказывается, эти частоты действительно совпадают. Более того, если человек «подстраивает» резонансную частоту колебаний ног под ускоренный темп движения, сгибая их, то при этом он соответственно сгибает и руки, поддерживая тем самым равенство резонансных частот колебаний рук и ног.

Чем больше скорость ходьбы, тем сильнее приходится сгибать ноги (и руки), чтобы «подстраивать» резонансную частоту под желаемый темп движения. При быстром беге ноги сгибаются под очень острым углом. Но как ни старайтесь, а сложить ногу более чем вдвое и тем самым более чем вдвое уменьшить приведенную длину ноги, вам не удастся (таково уж устройство ног). Значит, нельзя увеличить частоту резонансных колебаний ног более чем в $\sqrt{2}$ раз. (А если учесть, что во время отталкивания от земли нога должна быть прямой, то станет ясно, что «коэффициент увеличения» заведомо меньше $\sqrt{2}$.)

Итак, «подстройка» резонансной частоты под темп ходьбы или бега возможна лишь в довольно ограниченных пределах. И когда приходится бежать в быстром темпе, то запасаемой при каждом подъеме ноги потенциальной энергии не хватает для сообщения ноге во время отталкивания от земли нужной кинетической энергии колебательного движения. Восполнять ее недостачу приходится за счет работы мышц. А требуемая кинетическая энергия быстро растет с увеличением скорости: она пропорциональна квадрату скорости движения бегуна. Если же учесть, что при той же ширине шага скорость пропорциональна числу шагов в секунду, то выходит, что энергия, «попусту» затрачиваемая на «болтание» ногами при быстром темпе движения, пропорциональна третьей степени скорости. Это означает, что увеличение скорости бега всего на 10% требует увеличения затраты энергии на одну треть, а двукратное увеличение скорости потребовало бы восьмикратного увеличения затрачиваемой энергии. Что же касается требуемых сил, с которыми мышцы должны приводить в движение ноги при быстром беге, то они пропорциональны квадрату скорости.

Такая резкая нелинейная зависимость затрат энергии от скорости обуславливает сравнительно небольшой разрыв в скорости бега на короткие дистанции между рекордсменами и просто хорошими легкоатлетами. Вот почему так трудно «выжать» лишние доли секунды на стометровке. Кстати сказать, это также объясняет, почему при беге на длинные дистанции, когда особенно нужно беречь силы, люди предпочитают бежать, делая сравнительно большие прыжки, но переставляя ноги с частотой, близкой к резонансной. И это несмотря на то, что каждое подпрыгивание требует дополнительной затраты энергии.

Для нахождения количественной зависимости сил, которые должны развивать мышцы, от частоты перестановки ног нужно, кроме частоты свободных колебаний ноги, знать еще и степень затухания этих колебаний. У человека амплитуда колебаний ноги уменьшается примерно в два раза за один период. Сила мышц, движущая ногу вперед и назад, действует периодически, притом можно приближенно считать, что она меняется по синусоидальному закону. Этих данных достаточно, чтобы, пользуясь известными формулами теории колебаний, рассчитать силу, необходимую для любого темпа ходьбы.

Результаты расчета приведены на графике. Видно, что требуемая сила имеет минимум при частоте перестановки ног, равной резонансной, и резко возрастает при отклонении от этого значения. График наглядно показывает, насколько выгоднее ходить, переставляя ноги именно с резонанс-

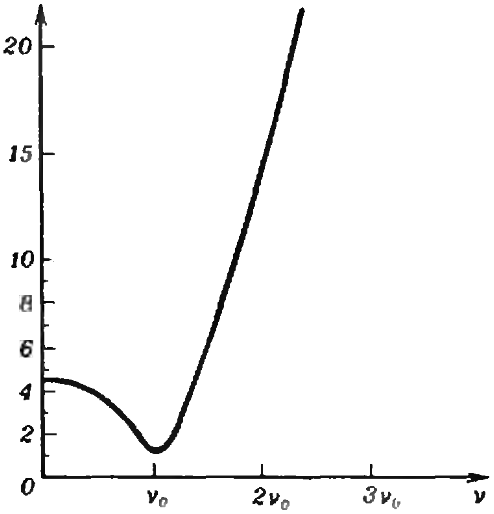


График зависимости сил, приводящих в движение ноги, от темпа ходьбы. Здесь ν — частота колебаний ног при ходьбе, то есть число шагов одной ноги за секунду, ν_0 — резонансная частота колебаний ноги. По вертикали отложена величина, показывающая, во сколько раз бо́льшие силы должны создавать мышцы по сравнению с ходьбой на резонансной частоте.

ной частотой, и как катастрофически возрастает требуемая сила с увеличением темпа ходьбы. Так, например, при увеличении частоты колебаний ног вдвое по сравнению с резонансной частотой, то есть при двукратном увеличении числа шагов в секунду, силовая нагрузка на мышцы ног при той же ширине шага возрастает в 14 раз! Уже при отклонении темпа ходьбы всего на 10% от резонансной частоты требуемая сила заметно возрастает. Отсюда ясно, почему люди идут, старательно придерживаясь своей резонансной частоты: так легче ходить. (Качественно приведенная зависимость сохраняется и в случае бега. Нужно только учитывать, что резонансная частота при беге из-за сгибания ног в коленях несколько выше, чем при ходьбе).

Чем меньше приведенная длина ног при той же их длине (практически — чем тоньше делаются ноги книзу и чем резче происходит уменьшение их толщины сверху вниз), тем больше резонансная частота колебаний ног и тем большую скорость при тех же усилиях может развивать их обладатель. С другой стороны, чем легче ноги, тем меньше усилий требуется от мышц ног для движения с той же скоростью (поскольку сила пропорциональна весу ноги). Именно поэтому все быстроногие животные (антилопы, гепарды, скаковые лошади, борзые собаки) имеют сильно утончающиеся книзу и сравнительно легкие ноги.

Правда, второе условие имеет меньшее значение по сравнению с первым, поскольку решающую роль в быстроте бега играет резонансная частота колебаний ног. Например, слоны с их массивными, но сравнительно стройными ногами бегают довольно резво, а в Индии выражение «походка, как у слона» — высшая похвала.

Да что там слоны и антилопы! Попробуйте-ка догнать обыкновенного поросенка, который задался целью убежать от вас. Форма ноги поросенка — того, что в обиходе называют окороком,— характеризуется очень резким уменьшением толщины ноги сверху вниз. Окорок нужен поросенку вовсе не для того, чтобы из него делали ветчину, а чтобы резонансная частота ноги была побольше. Короткие ноги поросенка имеют настолько высокую резонансную частоту, что позволяют ему конкурировать в скорости бега с человеком, ноги которого гораздо длиннее.

Итак, решающую роль в быстроте бега и ходьбы играет резонансная частота колебаний ног. Естественно, возникает вопрос: а нельзя ли ее увеличить? Сделать это было бы весьма заманчиво: увеличение резонансной частоты позволило бы людям ходить и бегать быстрее.

В принципе возможны по крайней мере два способа решения проблемы. Первый способ — увеличить силу земного тяготения. Резонансная частота колебаний маятника пропорциональна корню квадратному из ускорения силы тяжести. Поэтому, например, удвоение силы земного тяготения повлекло бы за собой увеличение резонансной частоты колебаний ног в $\sqrt{2}$ раз. Правда, увеличить силу земного тяготения, мягко говоря, не так просто, а главное, пожалуй, и не стоит. Но для космонавтов, которые когда-нибудь будут разгуливать по другим планетам, вопрос о зависимости резонансной частоты колебаний ног от ускорения силы тяжести носит далеко не академический характер: ведь на каждой планете свое ускорение силы тяжести.

Второй способ решения проблемы несравненно проще. Если запасаемой при каждом подъеме ноги потенциальной энергии не хватает для сообщения ноге требуемой скорости колебательного движения, то, связав ноги эластичным резиновым шнуром или присоединив к ногам каким-либо иным способом упругие элементы, стремящиеся возвратить в положение равновесия отклоненную от этого положения ногу, мы тем самым увеличим потенциальную энергию, накапливаемую (за счет кинетической) при подъеме ноги. В результате уменьшится бесполезная добавочная нагрузка на мышцы, связанная с необходимостью преодолевать инерцию ног при ходьбе и беге. Прикрепленные к ногам упругие элементы будут играть роль резервуаров потенциальной энергии, пополняемых и опустошаемых дважды за каждый период колебаний, и, как во всех колебательных системах, они будут повышать резонансную частоту колебаний. Чем больше упругость этих элементов (например, чем толще связывающий ноги резиновый шнур), тем выше резонансная частота. Значит, чтобы ходить и бегать быстрее, нужно... связать ноги (разумеется, упругой связью).

В одной старой немецкой сказке повествуется о человеке, который мог бегать на редкость быстро. Чтобы ходить с нормальной скоростью, он привязывал к ногам гири. Скороход знал, что делал. Ведь тем самым он увеличивал приведенную длину ног и, следовательно, уменьшал их резонансную частоту колебаний, а вместе с ней — и скорость хода. А вот если бы вместо гирь он прикреплял к ногам упругие элементы, то бегал бы еще быстрее. Впрочем, можно подозревать, что секрет быстрого бега скорохода как раз и состоял в том, что его ноги имели гораздо более высокую резонансную частоту колебаний, чем у других людей.

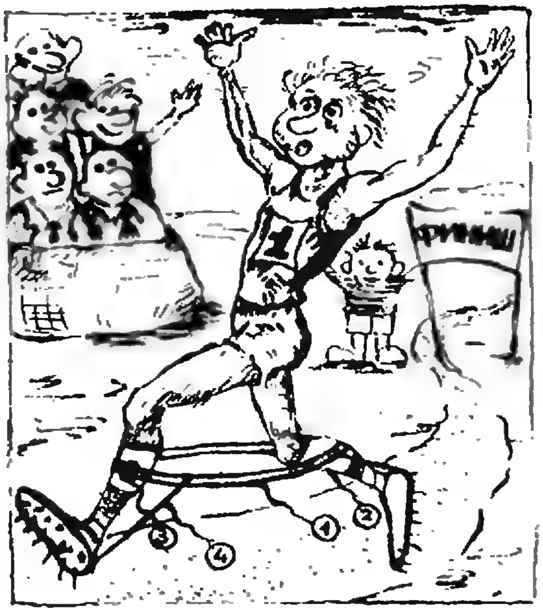
Любой здоровый человек тоже может стать скороходом, повысив с помощью упругих элементов резонансную частоту колебаний ног. Представим себе такого человека, принимающего участие в легкоатлетических состязаниях. Перед стартом он связывает себе ноги и, чтобы как-то объяснить свое странное поведение, скромно поясняет судьям, что он-де бегает очень быстро и, чтобы не убегать слишком далеко от своих соперников, имеет обыкновение слегка связывать ноги. Заняв свое место на старте, наш спортсмен с некоторым усилием отводит одну ногу назад, тем самым «заряжая» ее потенциальной энергией. Как только в момент старта он отрывает эту ногу от земли, нога «выстреливается» вперед, как из рогатки. Кстати, при этом сокращается и время разгона. Конечно, бегун со связанными ногами придет к финишу первым. Вот только остановиться ему будет труднее, и он пробежит несколько лишних шагов: ведь связанные эластичной резинкой ноги «бегут сами». Кстати, уж если быть последовательным до конца, то с целью облегчения бега следует прикреплять упругие элементы и к рукам, которые, как уже было отмечено, играют определенную роль при ходьбе и беге. Это можно сделать, например, привязав руки (повыше кисти) к поясу эластичными резинками. Общий вывод таков: если «связать» человека по рукам и ногам, он будет бегать быстрее.

Когда я изложил эти соображения своим товарищам по работе, они посмеялись, но согласились со мной, а самый решительный из них, заявив, что нечего тянуть резину, пошел к экспериментаторам и принес от них резиновый амортизационный канат. Такой канат состоит из множества тонких эластичных резинок. Нарезав эти тонкие резинки на куски длиной по 75 см, мы изготовили из них несколько жгутов-колец толщиной примерно в один сантиметр. Техника изготовления была простой: из каждого куска, связав его концы, сделали кольцо, а из семи-восьми десятков таких колец составили одно толстое кольцо-жгут. Дабы жгут не рассыпался, его пришлось перевязать в нескольких местах (точно так же, как перевязывают прутья при изготовлении веника).

Если такое кольцо надеть на обе ноги, то в положении, когда ноги составлены вместе, кольцо окажется нерастянутым, но будет плотно обхватывать ноги, не провисая. При ходьбе или беге оно будет периодически растягиваться. Возникающие при этом упругие силы будут стремиться возвратить ноги в положение равновесия, что и приведет к повышению резонансной частоты колебаний ног. Одно такое кольцо, обхватывающее ноги на уровне икр, повышает резонансную частоту в полтора раза.

Чтобы кольцо не перетягивало кровеносные сосуды, мы надевали его поверх жестких повязок, сделанных из картона или другого подходящего материала. Наконец, чтобы кольцо не съезжало с повязок (вверх по ноге), мы прикрепляли его к повязкам в двух точках, а другие две точки кольца соединяли бечевками с обувью. Бечевки препятствовали смещению точек кольца, к которым они были прикреплены, вверх по ноге, но не стесняли движения кольца в горизонтальной плоскости, поскольку угол между бечевкой и ногой всегда мал и бечевка остается практически параллельной ноге.

Резиновые кольца можно надевать на ноги как выше, так и ниже колен — в любом случае резонансная частота колебаний ног будет возрастать. Но поскольку кинетическая энергия колебательного движения нижней части ноги (считая от колена и ниже) гораздо больше (в пять-шесть раз) кинетической энергии колебаний верхней части ноги, то наиболее целесообразно надевать резиновые кольца ниже колен.



Способ крепления резинового кольца к ногам. 1 — эластичное резиновое кольцо, 2 — жесткая повязка, 3 — точка крепления резинового кольца к повязке, 4 — бечевка.

Я пробовал ходить в описанной выше амуниции. Скорость хода действительно возрастает. Ощущение такое, что кто-то помогает переставлять ноги, а когда нужно остановиться, ноги непроизвольно идут «сами» еще несколько лишних шагов.

Надетые на ноги резиновые кольца стремятся возвратить ноги в положение равновесия и при ходьбе или беге давят попеременно то на переднюю, то на заднюю сторону каждой ноги, осуществляя тем самым своего рода массаж мышц ног. Все же при длительной ходьбе или беге такой «массаж» может оказаться нежелательным. Поэтому при ходьбе и беге на большие расстояния представляется предпочтительным такой способ прикрепления упругих элементов к ногам, при котором упругие элементы вообще не касаются мышц, около которых много кровеносных сосудов. Пожалуй, самый простой способ такого крепления — это привязать концы эластичного резинового шнура к ремешкам, плотно обхватывающим ступни ног. Чтобы шнур не болтался под ногами, когда он оказывается в нерастянутом состоянии, к его середине прикрепляется тонкий резиновый шнурок, который в слегка растянутом состоянии привязывается другим своим концом к поясу. При этом середина шнура оказывается в приподнятом положении, и шнур не мешает движению. Заметим, однако, что при большом натяжении упругий элемент будет стремиться поворачивать ступни ног вокруг вертикальной оси, и возникающие при этом силы придется компенсировать напряжением мышц ног. Иначе характер движения будет напоминать бег полицейских псов из Страны Дураков, которые, как свидетельствует А. Н. Толстой в «Золотом ключике», бегали «особым хитрым галопом, занося задние ноги вбок». Можно устранить этот недостаток, заменив шнур, прикрепляемый в определенных точках к ступням ног, резиновым кольцом, обхватывающим ступни и обкатывающим их при движении.

Эту конструкцию можно применить и для лошадей, привязав эластичный шнур к их копытам (один шнур на передние копыта, другой — на задние).

Если когда-нибудь в технике станут применяться шагающие аппараты, экипажи и роботы, то следует иметь в виду, что, связав им «ноги» упругой связью, можно будет увеличить их скорость передвижения или сэкономить потребляемую на движение энергию.

Конечно, надо помнить, что для ускорения движения «связывать» ноги вовсе не обязательно. Конструкция упругих элементов и способы крепления их к ногам могут быть самыми разнообразными. Однако у всех подобных систем должно быть одно общее свойство: при отклонении ноги от положения равновесия упругие элементы должны создавать упругую реакцию, стремящуюся возвратить ногу в равновесное положение, повышать резонансную частоту колебаний ног как физического маятника.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 7)

2—4; *В. Дашевский* (Москва) **7**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **7, 8**; *Б. Добров* (Ангарск) **2**; *С. Довбыш* (Москва) **6—9, 1—3**; *А. Дороговцев* (Киев) **2**; *А. Дубинский* (Москва) **2**; *К. Дубровский* (Славянск) **3**; *Д. Дужуев* (с. Махмудавар АзССР) **2, 3**; *Д. Дуниев* (Масаллынский р-н АзССР) **7**; *И. Елишевич* (Чернигов) **6, 7**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **6—8, 1, 3, 4**; *А. Забаринов* (Заволжск) **3**; *И. Зверович* (Минск) **6, 7**; *М. Златоустовский* (с. Правая Хава Воронежской обл.) **3**; *Зозуля* (Баку) **6а**; *В. Золотаревский* (Киев) **1, 3, 4**; *К. Ильин* (Вильнюс) **7**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **6—8, 3**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **6, 7**; *П. Калугин* (Москва) **1—4**; *Р. Камалян* (Ереван) **7, 2, 3**; *А. Канель* (Москва) **6—8**; *А. Каплан* (Сумгаит) **6а, 7, 8, 1—4**; *А. Келарев* (Свердловск) **6, 7, 1—4**; *Е. Кнаус* (Павлодар) **6**; *А. Коган* (Москва) **6, 7, 9**; *Д. Коломийцев* (Сумгаит) **6а**; *А. Коломыцев* (Ангарск) **6, 7**; *И. Колпаков* (Сочи) **7, 3**; *Ю. Кондрахин* (Новосибирск) **7, 2**; *М. Концевич* (Химки) **6—9, 1, 3, 4**; *Д. Корнеев* (Саратов) **2**; *А. Король* (Ташкент) **6, 7**; *О. Кравец* (Воронеж) **6а, 7, 8, 2**; *И. Крочук* (Львов) **6**; *О. Крылов* (В. Устюг) **6, 7, 4**; *И. Кузь* (Львов) **6а, 1**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **6**; *А. Кулеско* (Донецк) **6, 8, 9**; *В. Кухарчук* (с. Малый Шпаков Ровенской обл.) **6, 3**; *А. Кушнеров* (Москва) **6, 7**; *А. Кущ* (Днепропетровск) **7**; *Б. Лапидус* (Москва) **6б**; *Ю. Лапуста* (Тернополь) **6а, 7**; *Б. Лейтес* (Москва) **6, 7, 3, 4**; *А. Липин* (Ленинград) **8, 1, 3**; *С. Логунов* (Москва) **7, 8**; *А. Лукашов* (Лебедин) **6**; *Ю. Макаров* (Ленинград) **1**; *Г. Маяхасян* (с. Цалка ГрССР) **7**; *Р. Мамедов* (Баку) **6, 7, 1, 3**; *М. Марьянович* (СФРЮ) **3**; *А. Мегрецкий* (Ленинград) **2—4**; *М. Меламед* (Запорожье) **2**; *В. Мельник* (Гайсин) **6а, 7, 3**; *Г. Мильников* (пос. Черноголовка Московской обл.) **1**; *А. Миндлин* (Саратов) **6, 8**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **4**; *Г. Молчанов* (Саратов) **2**; *С. Морейно* (Москва) **6, 7**; *П. Мулин* (Иркутск) **6а**; *Р. Набоков* (Саратов) **2, 3**; *Н. Нагнибида* (Черновцы) **3**; *О. Намазов* (с. Фахрало ГрССР) **6а, 7, 3**; *Н. Нижарадзе* (Тбилиси) **3**; *А. Николаев* (дер. Октябрь ТАССР) **7**; *А. Ничуговский* (Воронеж) **3**; *С. Новаковский* (Саратов) **2**; *С. Новиков* (Херсон) **6а, 9, 3**; *В. Ольхов* (Горький) **3**; *А. Опарин* (Горький) **6—8**; *А. Павлычев* (Рига) **6, 7, 2**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **3**; *М. Пантаев* (Москва) **1**; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) **7**; *А. Пашкевич* (ПНР) **2**; *В. Пащенко* (Киев) **6**; *К. Пелих* (Павловский Посад) **6, 7**; *Г. Пельц* (Ленинград) **7**; *Г. Перельман* (Ленинград) **8**;

(Продолжение см. на с. 25)

В. Лешковцев, М. Прошин

На пути к энергетике будущего

Развитие цивилизации неразрывно связано с увеличением производства энергии. Наиболее заманчивым путем является использование энергии синтеза ядер тяжелого водорода, запасы которого необычайно велики (см. «Физика-10», § 145). При этом происходят следующие ядерные реакции:

$${}_1\mathrm{H}^2 + {}_1\mathrm{H}^2 \rightarrow {}_2\mathrm{He}^3 + {}_0n^1, \qquad (1)$$

$${}_1\mathrm{H}^2 + {}_1\mathrm{H}^2 \rightarrow {}_1\mathrm{H}^3 + {}_1\mathrm{H}^1. \qquad (2)$$

В первой их них два ядра тяжелого водорода превращаются в ядро легкого гелия и нейтрон, во второй — в ядро сверхтяжелого водорода и протон. Одновременно освобождается большое количество энергии. Еще больше энергии можно получить за счет реакции между тяжелым водородом и искусственно созданным сверхтяжелым водородом:

$${}_1\mathrm{H}^2 + {}_1\mathrm{H}^3 \rightarrow {}_2\mathrm{He}^4 + {}_0n^1. \qquad (3)$$

Так как атомные ядра имеют положительные электрические заряды и отталкивают друг друга, реакции синтеза могут идти только в веществе, ядра которого обладают большой кинетической энергией, достаточной для совершения работы против сил отталкивания. А это значит, что указанные ядерные реакции могут реализоваться, когда вещество нагрето до очень высокой температуры. Поэтому такие реакции называются термоядерными. Для осуществления интенсивных термоядерных реакций (1—2) нужно нагревать тяжелый водород до нескольких сотен миллионов градусов и поддерживать такую температуру хотя бы в течение нескольких секунд. Реакцию (3) можно наблюдать при температуре около 100 миллионов градусов. При таких температурах вещество переходит в состояние плазмы — атомы водорода распадаются на составляющие их электроны и атомные ядра. Для того чтобы плазма мгновенно «не убежала» на холодные стенки окружающего ее сосуда, надо поместить ее в магнитное поле. При этом сила Лоренца, действующая на каждую заряженную частицу, заставит ее «навиваться» на линии магнитной индукции, препятствуя уходу частиц на стенки сосуда (см. «Физика-9», § 93).

Создание термоядерного реактора является чрезвычайно сложной научно-технической задачей. Ученые и инженеры уже почти тридцать лет занимаются поисками путей ее решения. Наиболее заметные успехи в исследованиях управляемого термоядерного синтеза достигнуты на установках типа «Токамак», впервые созданных в Советском Союзе под руководством академика Л. А. Арцимовича. Токамак по сути дела представляет собой трансформатор, у которого вторичная обмотка имеет всего лишь один виток. Этот виток образован замкнутой кольцевой камерой в форме тора (бублика). Камеру заполняют водородом при низком давлении. Пропуская ток большой силы по первичной обмотке такого трансформатора, вызывают электрический пробой в заполняющем камеру газе. Водород ионизуется, а текущий через него вторичный ток нагревает его до очень высокой температуры. Кольцевой ток под действием магнитных сил стягивается в тонкий плазменный шнур, так как параллельные одинаково направленные токи притягиваются (см. «Физика-9», § 88). Для усиления магнитной изоляции водородной плазмы используется дополнительное магнитное поле, создаваемое электромагнитом, катушки которого намотаны на внешнюю поверхность тора. Слово «токамак» образовано от первых слогов названий основных элементов установки (ТОроидальная КАмера в МАГнитном поле). Сейчас в различных странах работают более 50 токамаков.

Есть принципиально иной путь к управляемым термоядерным реакциям. Термоядерный синтез может быть осуществлен на основе периодических микровзрывов небольших порций твердого термоядерного топлива (водорода). Лучи мощного лазера или плотные пучки электронов, ускоренных до скоростей, близких к скорости света, в принципе, могут сжимать и нагревать твердую мишень с термоядерным топливом до таких высоких значений плотности и температуры, при которых термоядерная реакция успевает пройти в веществе мишени за доли наносекунды. Этот путь также исследуется советскими учеными.

В нашей стране работы по управляемым термоядерным реакциям ведутся широким фронтом. В этом фотоочерке рассказывается о некоторых термоядерных исследованиях, осуществляемых в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова. Фотографии выполнены В. Ободзинским.

Читателям, которые хотели бы детальнее познакомиться с рассматриваемыми здесь проблемами, рекомендуем статьи: Б. Кадомцев. Путь к термоядерной энергетике. «Наука и жизнь», 1976, № 1, с. 44; Б. Кадомцев. Физика токамаков. «Природа», 1979, № 2, с. 21.

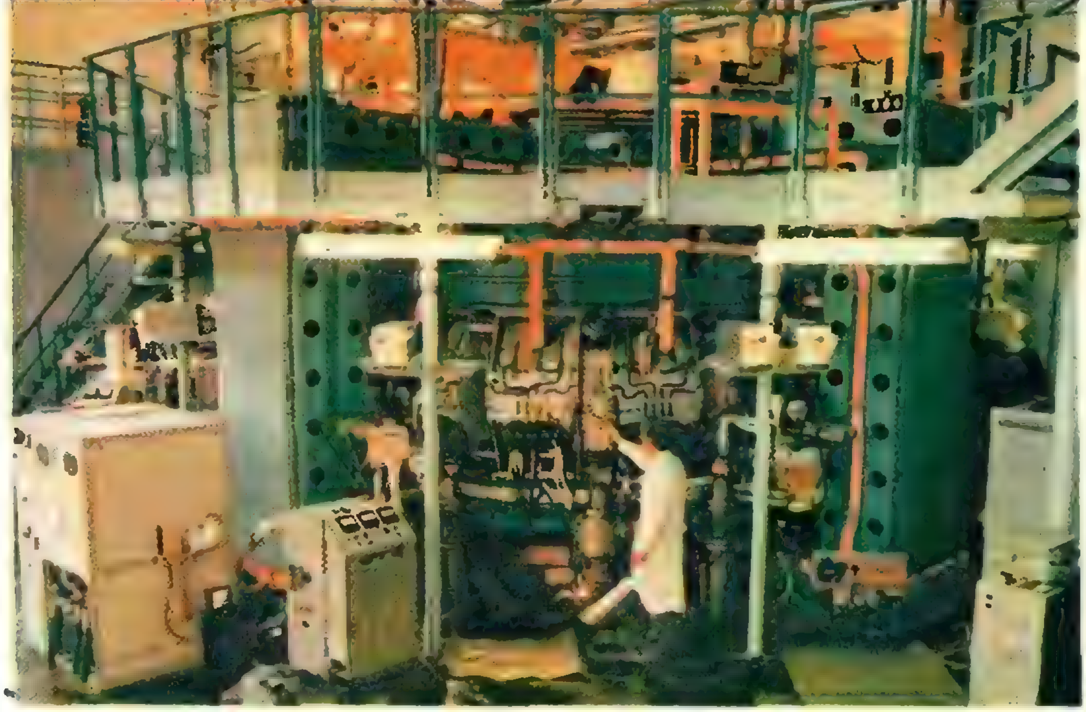


Рис. 1. Одной из крупнейших в мире термоядерных установок является «Токамак-10», вступивший в строй в 1975 году. Температура плазмы в нем достигает 13 миллионов градусов. Плотность плазмы близка к ее значению у будущих технических термоядерных реакторов. Для создания таких реакторов, в принципе, достаточно значительно увеличить размеры тороидальной камеры. Поэтому «Токамак-10» можно считать прообразом будущих термоядерных электростанций.

Рис. 2. В последнее время разрабатывается метод дополнительного нагрева плазмы с помощью «впрыскивания» в нее ядер водорода, разогнанных до высоких скоростей на специальных ускорительных устройствах. В высокотемпературной плазме такие частицы образуют еще более горячую компоненту. Сталкиваясь с частицами более холодной компоненты, они отдают им часть своей кинетической энергии, тем самым повышая температуру плазмы. Подобный способ нагрева плазмы изучается на изображенной здесь установке «Токамак-11» с двумя инжекторами (впрыскивателями) ускоренных ядер водорода.

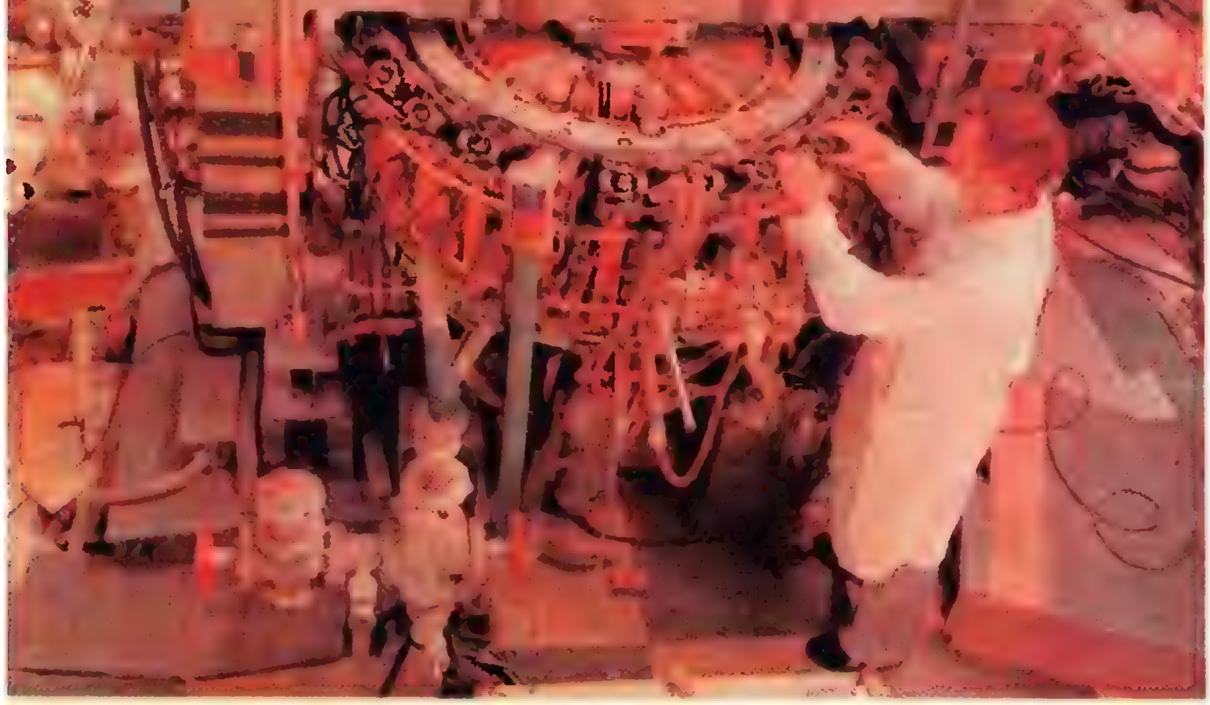
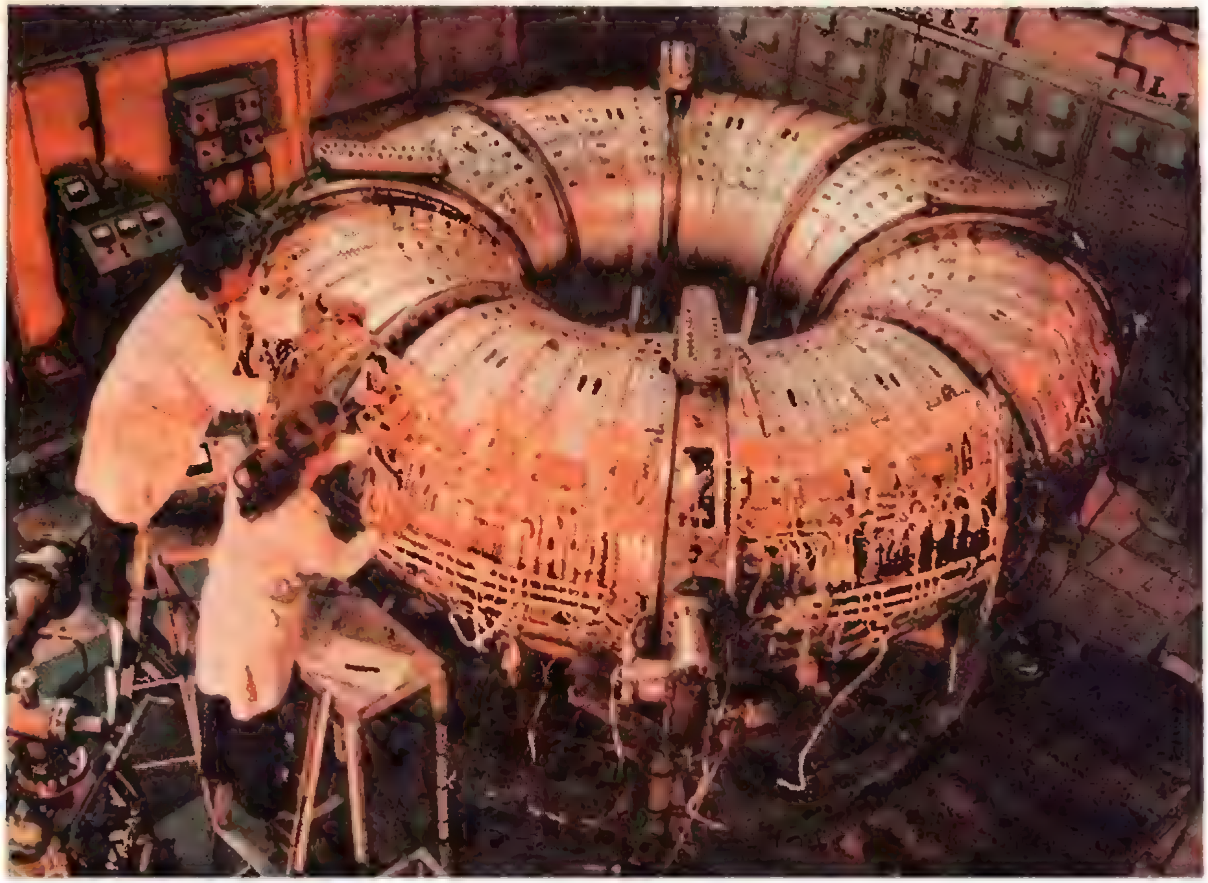


Рис. 3. На установке «Токамак-3» исследуется еще один способ дополнительного нагрева водородной плазмы — с помощью электромагнитных колебаний высокой частоты. Как показывают расчеты и эксперименты, энергия таких колебаний в конце концов переходит в кинетическую энергию частиц плазмы.

Рис. 4. В обмотках электромагнитов, создающих изолирующее магнитное поле, теряется много энергии, расходуемой на нагревание проводов. В установке «Токамак-7» испытываются обмотки из сверхпроводника, который охлажден до температуры жидкого гелия, равной 4, 2 К. В сверхпроводящих обмотках нет потерь энергии на нагревание проводов. Поэтому они будут использоваться и на будущих термоядерных электростанциях. По своим размерам «Токамак-7» близок к «Токамаку-10». На рисунке вопроизведена только главная его часть — тороидальная камера со сверхпроводящей обмоткой.



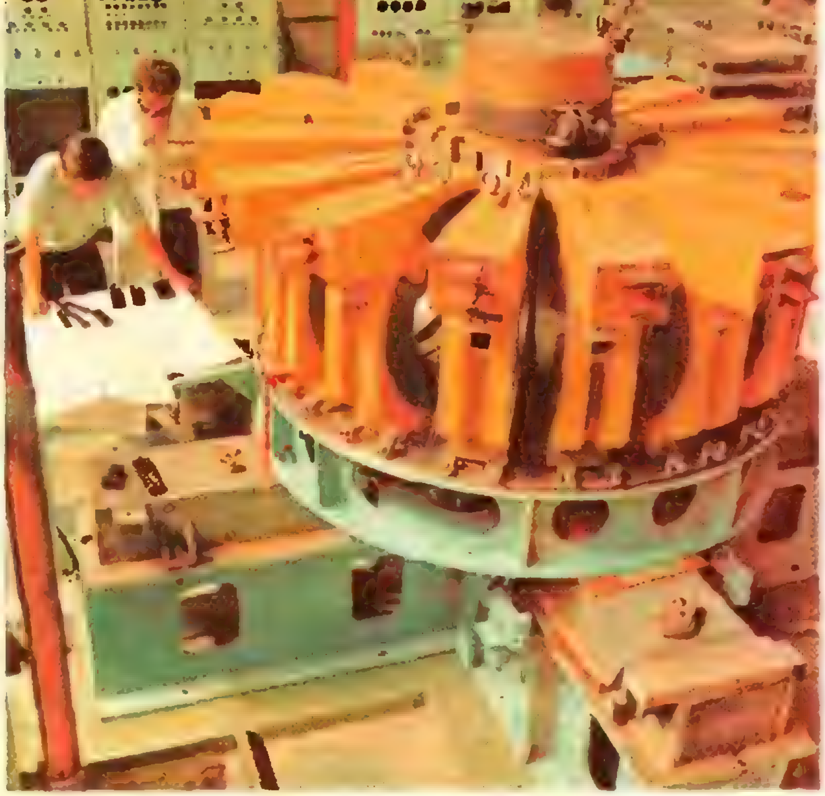


Рис. 5. Плазму можно нагревать до огромной температуры лишь при высокой степени ее чистоты. Даже десятые доли процента примесей тяжелых элементов (Mo, Cr, Fe), которые попадают в плазму со стенок камеры, не позволяют «зажечь» термоядерную реакцию. На установке «Токамак-4» ведутся исследования по предварительной очистке стенок камеры нагреванием ее до температуры 800—1000° С. На установке «Токамак-12» (см. рис. 6) создана специальная конфигурация магнитного поля, которая позволяет отводить загрязненную плазму с поверхности плазменного шнура в специальное устройство — дивертор, где она осаждается на стенки. Так защищают более глубокие слои плазмы от загрязнения. Траектории движения частиц плазмы в диверторе видны на рисунке, помещенном на первой странице обложки.

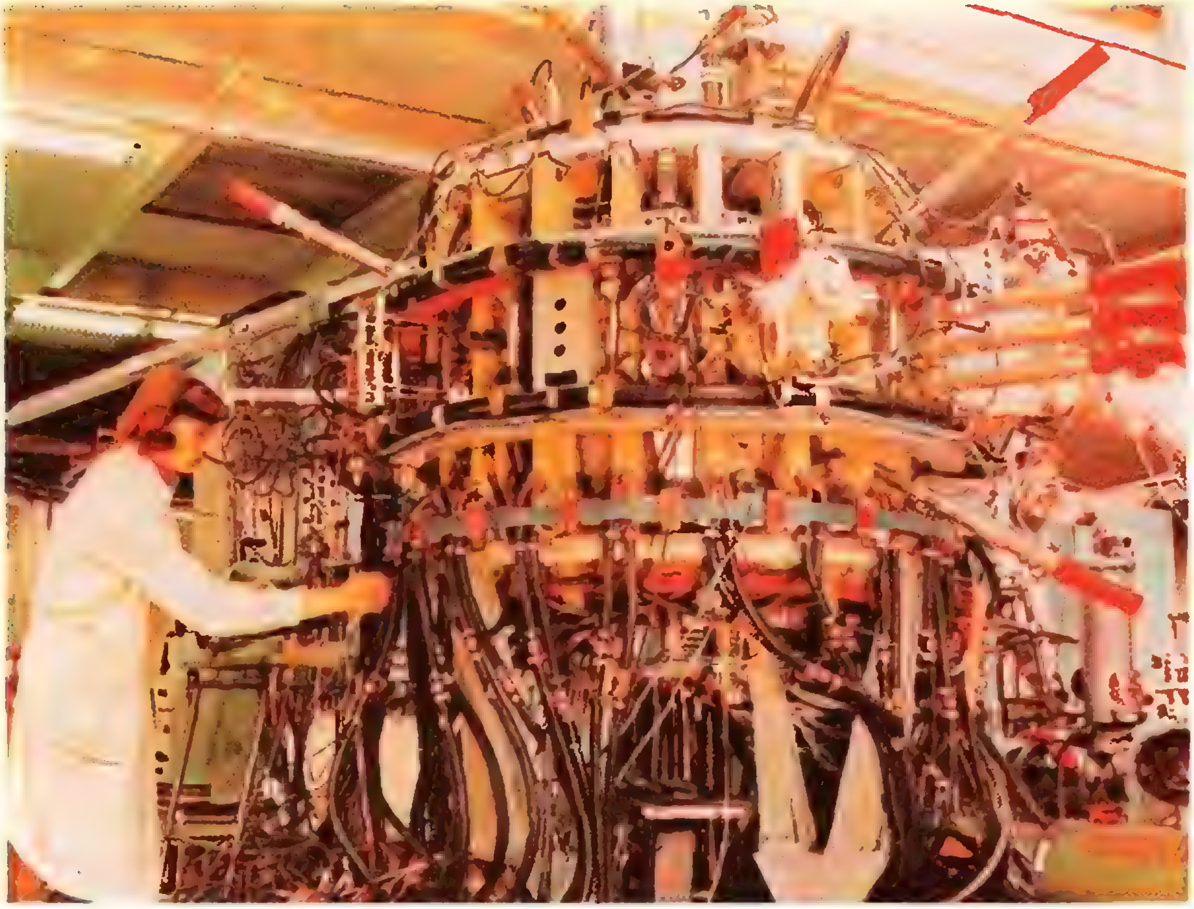


Рис. 6. Для того чтобы термоядерный реактор производил значительное количество энергии, необходимо не только нагреть плазму до гигантской температуры, но и сохранить такую температуру до тех пор, пока прореагирует заметная доля атомных ядер. Время жизни горячей плазмы зависит от геометрии камеры. Эта зависимость изучается на установке «Токамак-12», где плазменный шнур имеет в своем сечении форму овала.

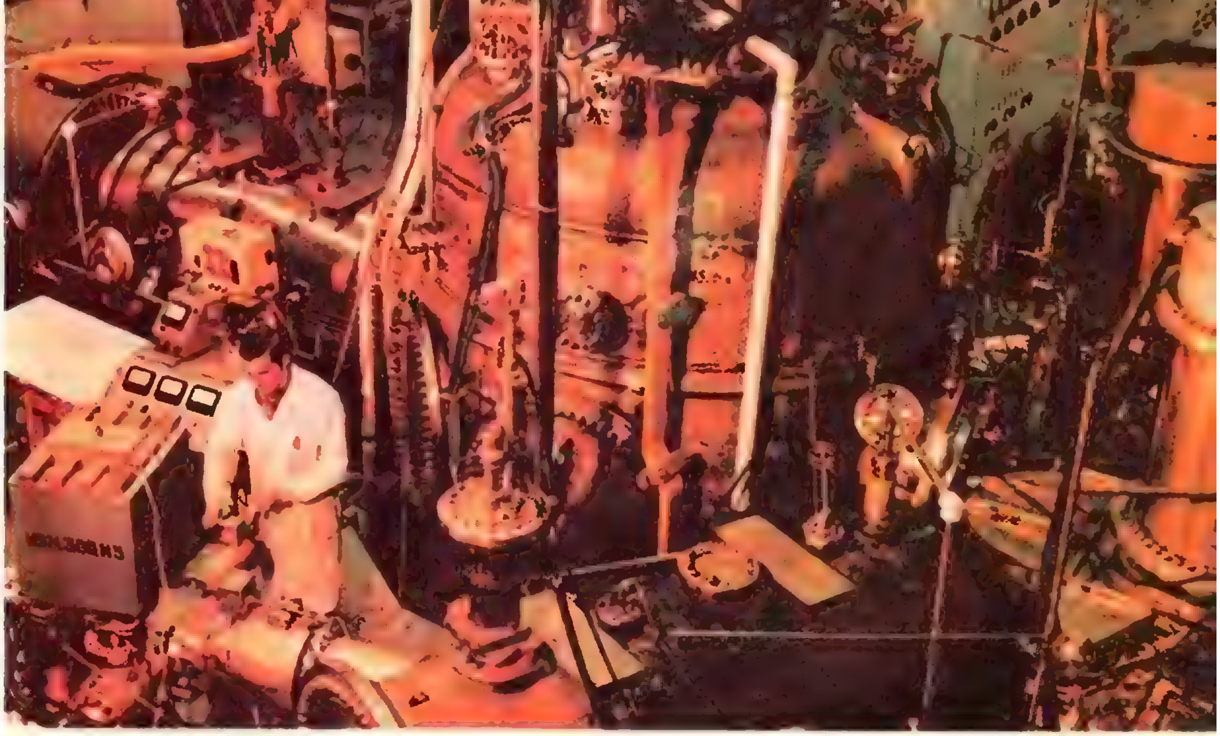
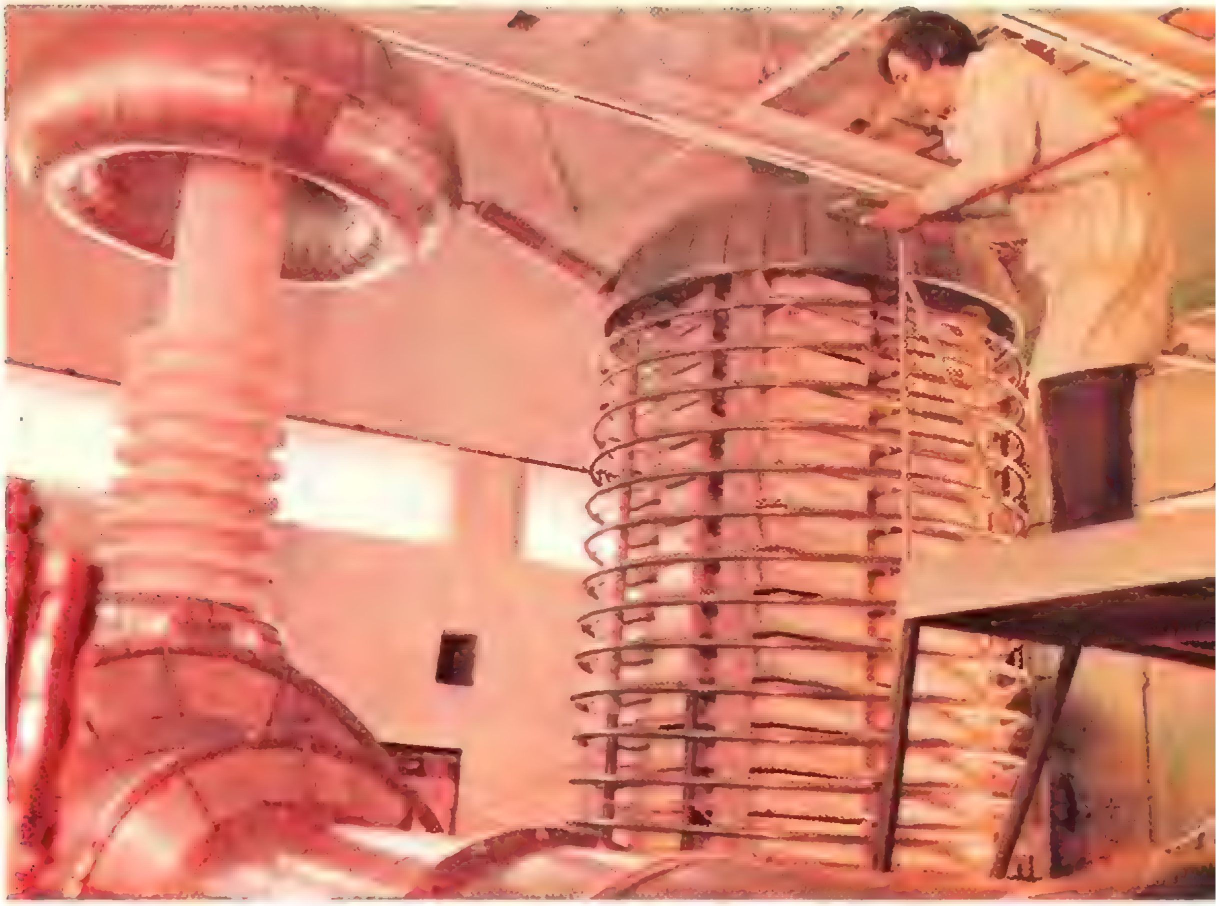


Рис. 7. Установки «Токамак» — не единственный тип устройств, на основе которых ученые надеются создать термоядерный реактор. Другой тип термоядерных установок — ловушки с магнитными пробками. Частицы плазмы удерживаются в них благодаря отражению от «магнитных зеркал» — областей с повышенной индукцией поля, в которых происходит сгущение силовых линий. На рисунке представлена одна из таких установок «Огра-3Б».

Рис. 8. Установка «Ангара-1» используется для нагрева плазмы пучком электронов, ускоренных до околосветовых скоростей. Она создает импульсы электронов с энергией порядка 2,5 Мэв при токе до 400 кА. Длительность импульса $6 \cdot 10^{-8}$ с. На рисунке показан высоковольтный генератор установки.



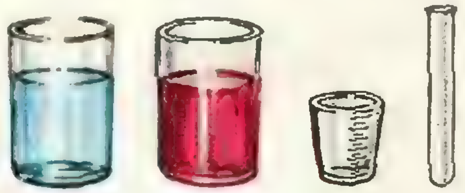
Олимпиада дома

Читатель, знакомый с нашим журналом, наверное, обратил внимание на одну характерную особенность Лаборатории «Кванта». Наблюдения, опыты, которые предлагает наша лаборатория, не требуют, как правило, никакой специальной сложной аппаратуры, их можно проводить, пользуясь «подручными» средствами. Но это совсем не означает, что опыты эти тривиальны. Зачастую они требуют изобретательности, настоящего экспериментаторского мастерства.

Материалы, которые мы помещаем в Лаборатории «Кванта», можно разделить на две категории. Первая — это опыты и наблюдения над окружающей нас природой. Они привлекают ваше внимание к привычным, на первый взгляд, простым явлениям, которые при внимательном изучении раскрывают удивительную гармонию, взаимосвязанность в природе. Вторая категория — это опыты, которые дают вам возможность упрочить знания, приобретаемые на уроках физики, почувствовать «своими руками», что стоит за тем или иным физическим законом. Именно с этой целью мы помещаем в этом номере три экспериментальные задачи, которые предлагались участникам Всероссийской олимпиады школьников по физике в 1979 году (об олимпиаде рассказывается в этом номере журнала на с. 58). Для их решения требуются и сообразительность, и умелые руки, и прочные знания школьного курса физики. Проверьте себя!

Задача 1

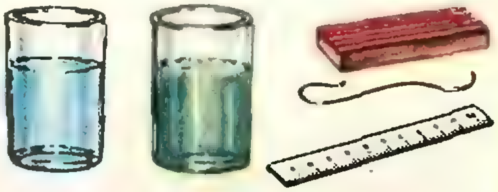
Определите плотность неизвестной жидкости.



Оборудование: сосуд с водой, сосуд с неизвестной жидкостью (с раствором соли), мензурка, пробирка.

Задача 2

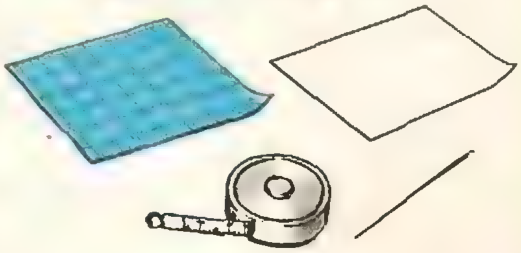
Сравните коэффициенты поверхностного натяжения воды и мыльного раствора.



Оборудование: стеклянная трубка, пластилин, кусок проволоки, сосуд с водой, сосуд с мыльным раствором, линейка.

Задача 3

Определите разрешающую способность глаза и исследуйте ее зависимость от диаметра отверстия в экране, помещенном перед ним.



Оборудование: лист миллиметровой бумаги, лист белой бумаги, игла, рулетка или метровая линейка.

Г. Шестопал

Как обнаружить фальшивую монету

Представьте себе, что на стол высыпана кучка совершенно одинаковых по виду монет, но вам сказали, что одна из этих монет — фальшивая. Она отличается от остальных монет по весу, но вам не сообщили, легче она или тяжелее. В вашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Как нужно действовать, чтобы выделить эту монету и выяснить ее тип (то есть узнать, легче она или тяжелее) за минимальное число взвешиваний?

Многие из вас, наверное, уже решали эту задачу для 12 монет. На рисунке приведено одно из решений этой задачи. Трем возможным исходам первого взвешивания соответствуют три различных варианта выбора монет для второго взвешивания: на рисунке левая стрелка соответствует случаю, когда перетянула левая чашка, средняя стрелка — равновесию, правая — случаю, когда перетянула правая чашка. Аналогичным образом изображены девять вариантов выбора монет для третьего взвешивания. (На рисунке монеты перенумерованы, буквы л и т означают соответственно, легкая и тяжелая.)

Характерной особенностью этого решения является зависимость выбора монет для очередного взвешивания от результата предыдущего.

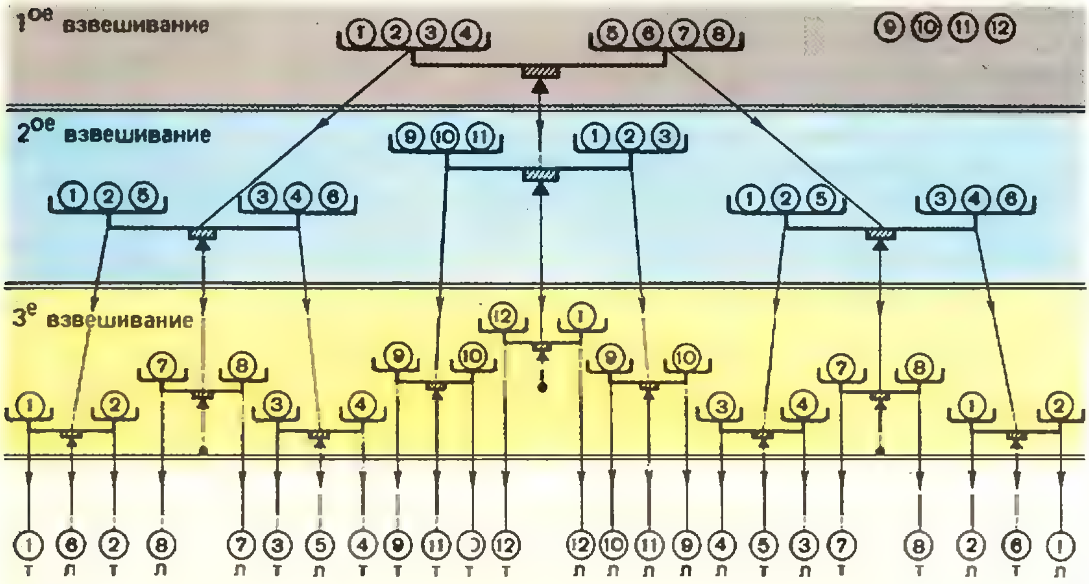
Поставим теперь задачу в общем виде.

Имеется $m \geqslant 3$ одинаковых по виду монет. Все монеты, кроме одной, имеют одинаковый вес, а одна отличается от них по весу, но неизвестно, в какую сторону. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти эту монету и выяснить ее тип? *)

Эта задача более тридцати лет назад привлекла к себе внимание многих математиков, главным обра-

---

*) Очевидно, для значений $m<3$ задачу не имеет смысла решать: при $m=1$ монета будет фальшивой, но неизвестного типа; при $m=2$ монеты будут иметь разный вес, и выбрать из них фальшивую невозможно.


1ое взвешивание
2ое взвешивание
3е взвешивание
1 т, 6 л, 2 т, 8 л, 7 л, 3 т, 5 л, 4 т, 9 т, 11 т, 10 т, 12 т, 12 л, 10 л, 11 л, 9 л, 4 л, 5 т, 3 л, 7 т, 8 т, 2 л, 6 т, 1 л

зом в Англии и США. В 1945 году в английском журнале «The Mathematical Gazette», похожем по своему направлению на «Квант», появилось решение этой задачи. Его автор Р. Л. Гудстейн впоследствии стал известным специалистом в области математической логики.

Гудстейн указал метод определения фальшивой монеты и ее типа за $n \geqslant 3$ взвешиваний, если число монет

$$m \leqslant \frac{1}{2}\left(3^n - 2n + 3\right)$$

(заметьте, что для $n = 3$ $m \leqslant 12$).

Однако оказалось, что для $n > 3$ его решение не является лучшим: за n взвешиваний можно выделить фальшивую монету и определить ее тип из большего числа монет:

$$m \leqslant \frac{1}{2}\left(3^n - 3\right).$$

Это обнаружили независимо друг от друга сразу несколько математиков, и в следующем 1946 году тот же журнал опубликовал довольно длинный перечень их имен и разных ступеней успеха, достигнутых на поприще розыска фальшивой монеты. В этом же номере журнала напечатано самое лучшее решение — решение Ф. Дж. Дайсона, будущего известного физика-теоретика.

Идея Дайсона основана на использовании троичной системы счисления: все монеты маркируются специально выбранными троичными числами — маркерами, позволяющими удобно отражать ход последовательных взвешиваний. Особенно привлекательным при этом методе решения оказывается независимость выбора монет для последующего взвешивания от результата предыдущих.

В последующие годы были напечатаны другие решения этой задачи *), а метод Дайсона был незаслуженно забыт.

Поэтому интересно рассказать о нем подробно.

Все решение Дайсона можно разбить на два этапа.

А. Если

$$m = \frac{1}{2}\left(3^n - 3\right),\ n = 2, 3, \ldots,$$

то для выделения одной фальшивой монеты из общего числа m монет и определения ее типа достаточно произвести n взвешиваний.

Б. Если число монет

$$m < \frac{1}{2}\left(3^n - 3\right),\ m \geqslant 3,$$

то для достижения той же цели n взвешиваний также будет достаточно.

Рассмотрим каждый этап в отдельности.

Первый этап

Пусть число монет $m = \frac{1}{2}\left(3^n - 3\right)$.

Рассмотрим все n-значные «троичные числа» (наборы из цифр 0, 1, 2) 00 ... 00, 00 ... 01, ..., 22 ... 22. Их 3^n. Используем их для маркировки монет следующим образом: в качестве маркеров возьмем все эти числа, за исключением трех, состоящих из одинаковых цифр: 0 ... 0, 1 ... 1, 2 ... 2.

«Построим» все маркеры в пары: в одну пару «поставим» два дополнительных маркера — таких, у которых цифры соответствующих разрядов в сумме составляют 2 (другими словами, дополнительными будут те маркеры, сумма которых равна 22 ... 22).

Назовем маркер *правым*, если в нем первая слева пара неравных цифр — 01, 12 или 20. В противном случае маркер будем называть *левым*. Очевидно, в каждой паре дополнительных маркеров один всегда будет правым, другой — левым.

Заметим, что число пар маркеров как раз равно общему числу монет m. Перенумеруем монеты номерами от 1 до m и произвольно сопоставим каждой монете одну пару маркеров. Например, 12 монет можно «замаркировать» так, как показано в таблице.

Обозначим соответственно через $M(i, 0)$, $M(i, 1)$ и $M(i, 2)$ множество монет, для которых i-й разряд соответствующего им правого маркера равен 0, 1 или 2.

---

*) Например, в книге А. Яглома, И. Яглома «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973).

Номер монеты	Левый маркер	Правый маркер
1	211	011
2	100	122
3	022	200
4	212	010
5	101	121
6	020	202
7	210	012
8	102	120
9	021	201
10	221	001
11	110	112
12	002	220

Легко видеть, что число монет в каждом из множеств $M(i, 0)$, $M(i, 1)$ и $M(i, 2)$ одинаково и что эти множества не имеют общих элементов (см., например, таблицу).

Метод взвешивания монет, придуманный Дайсоном, состоит в следующем:

Производится последовательно n взвешиваний монет.

При i-м взвешивании ($i = 1, 2, \ldots, n$) на левую чашку весов кладутся все монеты множества $M(i, 0)$, на правую чашку — все монеты множества $M(i, 2)$. Результат каждого взвешивания будем обозначать цифрой 0, если перевесила левая чашка весов, цифрой 1, если обе чашки имеют одинаковый вес, и цифрой 2, если перевесила правая чашка (см. рис.). Результат i-го взвешивания обозначим через l_i.

Из цифр $l_1, l_2, \ldots, l_n$ составим маркер

$$l = l_1 l_2 \ldots l_n\text{*)}.$$

Оказывается, l — маркер фальшивой монеты F и если l — правый маркер, то F тяжелее остальных монет, а если l — левый маркер, то F легче остальных монет.

Действительно, посмотрим, что происходит, когда производится i-е взвешивание. В результате этого взвешивания весы либо остались в равновесии, либо одна из чашек перевесила.

Если весы остались в равновесии, то фальшивой монеты на них нет, следовательно, она — в множестве $M(i, 1)$. Но это означает, что i-й разряд ее правого (и левого) маркера равен 1, на что и указывает результат взвешивания $l_i = 1$.

Если одна из чашек весов перевесила, то фальшивая монета лежит на весах. Пусть, например, перевесила правая чашка, т. е. $l_i = 2$. Этот результат возможен в двух случаях:

— фальшивая монета лежит на правой чашке (тогда она тяжелее остальных монет), значит, она находится во множестве $M(i, 2)$, i-й разряд ее правого маркера равен 2, следовательно, результат взвешивания совпадает с i-м разрядом ее правого маркера;

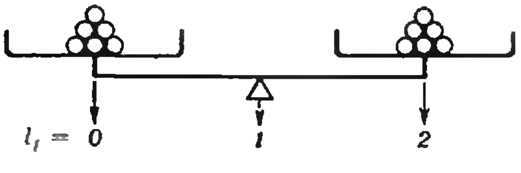
— фальшивая монета лежит на левой чашке (тогда она легче остальных монет), значит, она находится во множестве $M(i, 0)$, следовательно, i-й разряд ее правого маркера равен 0 и результат взвешивания совпадает с i-м разрядом ее левого маркера.

Совершенно аналогичен «симметричный» случай, когда перевесит левая чашка весов ($l_i = 0$).

Поэтому, действительно, сформированный в результате последовательных взвешиваний маркер $l = l_1 l_2 \ldots l_n$ есть маркер фальшивой монеты, притом правый в случае более тяжелой монеты и левый — в случае более легкой, что и требовалось доказать.

Интересно отметить, что тип монеты, как правило, определится раньше, чем произведены все взвешивания,— как только в процессе формирования маркера l появятся две различные цифры.

Существенной особенностью описанного метода, как уже было отмечено раньше, является то обстоятельство, что выбор монет для каждого взвешивания не зависит от результатов предыдущих взвешиваний.



---

*) Докажите, что это действительно маркер, т. е. что цифры $l_1, l_2, \ldots, l_n$ не могут быть одинаковыми.

Например, для 12 монет, замаркированных так, как показано в таблице, нужно проделать такие три взвешивания: (1,4,7,10), (3,6,9,12); (3,6,9,10), (2,5,8,12); (3,4,8,12), (2,6,7,11).

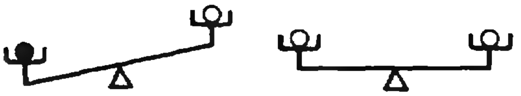
Второй этап

Коротко наметим метод Дайсона для случая $m<\frac{1}{2}\left(3^n-3\right)$. Если в этом случае монетам сопоставлять маркеры произвольно, то в множествах $M(i, 0)$ и $M(i, 2)$ может оказаться разное число монет. Поступим поэтому следующим образом. Разобьем все маркеры на группы по шесть: в одну группу отнесем правые маркеры, получающиеся друг из друга циклической заменой цифр $0 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 0$ и соответствующие им левые маркеры.

В каждой группе окажется по три правых маркера и три левых маркера. Группу, содержащую правые маркеры 00 ... 01, 11 ... 12, 22 ... 20, выделим особо. Разобьем монеты на группы по три, пока это возможно, и замаркируем их следующим образом. Монетам из одной группы сопоставим пары маркеров из одной группы, а для остатка, если он есть, используем пары маркеров из выделенной группы. Если останется одна монета, не вошедшая в тройки, то сопоставим ей правый маркер 11 ... 12, а если две, — то правые маркеры 00 ... 01 и 22 ... 20 (и соответствующие левые маркеры).

При такой маркировке первые $n-1$ взвешиваний производятся по старым правилам. Как производить последнее взвешивание, сообразите самостоятельно.

Метод Дайсона описан. Убедимся теперь, что он в определенном смысле является наилучшим. А именно, покажем, что если из m монет можно выделить n взвешиваниями фальшивую монету и определить ее тип, то $2m \leqslant 3^n-3$. Разумеется, мы не будем учитывать возможного «везения»: при нем для определения фальшивой монеты из любого числа монет может хватить и двух взвешиваний.



Итак, предположим, что n взвешиваний достаточно.

Занумеруем монеты числами 1,2,... ...m и приготовим $2m$ бумажек. Напишем на них все возможные варианты: первая монета легче, первая монета тяжелее, вторая монета легче и т. д. Ясно, что при этом все $2m$ бумажек окажутся использованными и ни один из возможных вариантов не будет упущен. Будем обозначать, как мы условились выше, результат взвешивания цифрами 0, 1 или 2. Каждое взвешивание показывает, что часть возможных ответов не подходит, а часть — остается под подозрением. Отберем монеты для первого взвешивания. Не производя его фактически, напишем на каждой из бумажек тот результат первого взвешивания, который оставляет ее под подозрением. Ясно, что на каждой бумажке будет написана одна из цифр 0, 1 или 2. Таким образом, все бумажки будут разбиты на три группы. Поэтому в наиболее многочисленной группе окажется не меньше $2m/3$ бумажек. Значит, как бы мы ни организовывали первое взвешивание, может оказаться, что после него под подозрением останутся не меньше $2m/3$ бумажек.

Аналогично, второе взвешивание рассортирует эту подозрительную группу на три подгруппы. Поэтому в наиболее многочисленной из них окажется не меньше $2m/9$ бумажек. Точно так же после n взвешиваний мы можем получить $2m/3^n$ подозрительных бумажек в одной группе. Следовательно, если $2m/3^n>1$, то фальшивая монета и ее тип, вообще говоря, за n взвешиваний определены быть не могут. Поэтому если n взвешиваний достаточно, то $2m \leqslant 3^n$.

Но это еще не все! Мы не разобрались еще со случаем $2m=3^n-1$ (четное число $2m$ не может равняться ни 3^n-2, ни 3^n). Для него изложенных выше соображений недостаточно.

Рассмотрим более внимательно первое взвешивание. Ясно, что число бумажек, на которых написана цифра 0, равно числу бумажек, на которых написана цифра 2. Пусть тех и других — по p штук, тогда на $2m-2p$ бумажках будет написана 1.

Заметим, что p — четное число. Действительно, если на левой и правой чашке весов лежит по k монет, то $p=2k$. Если p или $2m-2p$ больше 3^{n-1}, то по рассмотренному для определения нужной бумажки может не хватить оставшихся $n-1$ взвешиваний. Если же $p=2k\leqslant 3^{n-1}$ и $2m-2p\leqslant 3^{n}-1$, то, поскольку 3^{n-1} — число нечетное, $p\leqslant 3^{n-1}-1$, $2m-2p\leqslant$ $\leqslant 3^{n-1}-1$. Но тогда $2m=(2m-2p)+$ $+2p\leqslant 3^{n-1}-1+2(3^{n-1}-1)=$ $=3^{n}-3$. Итак, если n взвешиваний достаточно, то $2m\leqslant 3^{n}-3$.

В заключение — несколько задач, которые могут быть решены методом Дайсона.

Задачи

1. Имеются две группы из m_1 и m_2 монет, причем известно, что одна монета — фальшивая, она легче, если принадлежит первой группе, и тяжелее, если принадлежит второй группе. За какое минимальное число взвешиваний можно выделить фальшивую монету?

2. Пусть, кроме групп m_1 и m_2, имеется группа m_3 из эталонных (заведомо не фальшивых) монет. Сколько взвешиваний необходимо в этом случае?

3. Имеется m монет, среди которых заведомо есть фальшивая (неизвестно, более легкая или более тяжелая), и еще одна эталонная монета. Можно ли определить фальшивую монету и ее тип за n взвешиваний, если $m=(^1/_2)(3^n-1)$? Сколько взвешиваний необходимо для других m?

4. Дано m монет и известно, что фальшивых монет среди них — не больше одной. За какое число взвешиваний можно найти фальшивую монету и определить ее тип или убедиться, что фальшивой монеты нет?

5. В случае $2m<3^n-3$ последнее взвешивание зависело, вообще говоря, от результатов предыдущих взвешиваний. Постарайтесь добиться того, чтобы оно зависело от результатов возможно меньшего числа взвешиваний.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(*Начало* см. на с. 7, 14)

А. Петросян (Ереван) **6а**; *Л. Петрусевич* (дер. Козлы Минской обл.) **6**; *И. Пиковский* (Киев) **3**; *А. Подвязников* (Мосальск) **7**; *В. Подстригич* (Львов) **6, 8, 1**; *А. Попелюхин* (Киев) **6, 7**; *А. Попов* (Москва) **7**; *В. Потапов* (Новосибирск) **3**; *С. Пошехонов* (Энгельс) **7**; *Г. Пуричамиашвили* (Тбилиси) **6а**; *Б. Рабинович* (Тула) **6, 7, 1, 3, 4**; *В. Радченко* (Киев) **6а, 2—4**; *М. Рейтман* (Москва) **6а, 7, 2**; *С. Рехвиашвили* (Павлодар) **6**; *И. Ройзман* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **6—8**; *Н. Рубинштейн* (Ленинград) **6а**; *Б. Рублев* (Киев) **2, 3**; *И. Савенков* (р. п. Лысые горы Саратовской обл.) **6, 7**; *Г. Самельсон* (Ленинград) **3**; *М. Севрюк* (Москва) **6—9, 1—3**; *П. Селиванов* (Семипалатинск) **6а, 7, 2**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **6а, 7, 9, 0, 2, 3**; *А. Смирнов* (Курган) **6, 7**; *А. Смыслов* (Коньково) **6**; *А. Сромин* (Ленинград) **6, 7**; *С. Стадниченко* (Москва) **6—8, 3**; *Ф. Сукочев* (Ташкент) **6—9**; *Н. Сумовский* (Львов) **7, 8**; *О. Тавгень* (Минск) **6а, 7**; *К. Таталян* (Ереван) **6**; *Л. Тепер* (с. Ялтушков Винницкой обл.) **6, 7**; *К. Терехов* (Рязань) **6а**; *В. Титенко* (дер. Блужа Минской обл.) **7**; *А. Уливанов* (Горький) **9**; *В. Уманский* (Баку) **6, 7**; *Р. Ушаков* (Киев) **3**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **6, 7, 0**; *В. Фарбер* (Баку) **3**; *А. Фатуллаев* (Баку) **3**; *Н. Федин* (Омск) **2**; *А. Федоров* (Москва) **7, 3**; *О. Хоружий* (Черновцы) **7**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **6а, 7**; *З. Цихистави* (Телави) **3**; *И. Черная* (Ленинград) **3**; *О. Чечель* (Москва) **6—8, 1, 4**; *А. Шагинян* (Ереван) **7**; *П. Шаприн* (Киев) **7**; *Н. Шаромет* (Москва) **6, 7, 2, 4**; *Ю. Ширман* (Харьков) **6**; *Г. Штерн* (Орск) **6а**; *М. Яковлев* (Кемерово) **2**; *А. Ялышев* (Тула) **6, 7**; *Л. Яновская* (Харьков) **7**; *А. Яценко* (Тбилиси) **7**.

Физика

Почти все читатели справились с задачами **Ф 539** и **Ф 542**. Остальные задачи правильно решили:

В. Абиджаев (Львов) **33**; *Е. Александрова* (Глазов) **35, 40, 41**; *Ю. Анисимов* (Торопецкий р-н Калининской обл.) **35**; *А. Арбатский* (Благовещенск-на-Амуре) **40, 41**; *А. Багиров* (с. Кировка АзССР) **40**; *Л. Бараз* (Свердловск) **38—41**; *И. Баранец* (п. Дзержинский Московской обл.) **38—41**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **33, 35—41**; *А. Белоусов* (Калининград) **36**; *А. Васильев* (Выру) **40, 41**; *Д. Виноградов* (Дзержинск) **35**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **35, 38—44, 47**; *М. Гольцман* (Днепропетровск) **43, 44, 47**; *И. Гопич* (Новосибирск) **38, 41**; *В. Горпинченко* (Кольчугино) **40**; *И. Даниловский* (Горький) **33, 38**; *В. Дидух* (Львов) **35, 37, 38, 40—44, 47**; *С. Довбыш* (Москва) **33, 35, 38—41, 47**; *С. Довженко* (Донецк) **34—36, 38—41**; *Е. Емельянов* (Москва) **43, 47**; *А. Ермолин* (Петрозаводск) **36, 38**; *В. Жордочкин* (Орск) **38**; *А. Журавлев* (Ленинград) **38—41**; *Э. Зерныш* (п. Кузьмовка Ленинградской обл.) **40, 41**; *Е. Зудин* (Александров) **34, 35, 37, 40, 41—44, 46**; *С. Зуев* (п. Черноголовка Московской обл.) **40**; *А. Иовайта*

(Окончание см. на с. 38)

задачник Кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М586, М587» или «Ф598». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи этого номера предлагались на Всероссийской олимпиаде школьников этого года.

Числа в скобках обозначают класс, в котором предлагались эти задачи.

М586—М590; Ф598—Ф602

М586. В треугольнике ABC, у которого $\widehat{B}=60^\circ$, провели биссектрисы AD и CE, пересекающиеся в точке O. Докажите, что $|OD|=|OE|$. (8)

М587. Дана тройка чисел $2,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}$. Разрешается любые два из них заменить двумя такими: их суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и их разностью, также деленной на $\sqrt{2}$. Можно ли, проделав эту процедуру несколько раз, получить тройку чисел $1,\ \sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$? (9)

М588. а) Через точку, взятую внутри произвольного тетраэдра, параллельно его ребрам проведены отрезки с концами на гранях тетраэдра. Докажите, что сумма всех шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им ребер всегда равна трем.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольника (на плоскости). (9)

Э. Ясиновый

М589. На плоскости дан набор из n векторов, длина каждого из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор n векторов, сумма которых имеет длину

а) не превосходящую $\sqrt{n}$;

б) не превосходящую $\sqrt{2}$. (9)

П. Гусятников, А. Плоткин

М590. а) Найдите наименьшее значение выражения $|\cos x|+|\cos 2x|$. Докажите, что для любого числа x и любого натурального числа n сумма

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 4x|+\ldots+|\cos 2^n x|$$

б) не меньше $\frac{n}{4}$;

в) * не меньше $\frac{n}{2}$. (10)

П. Гусятников

Ф598. Сосуд глубины H заполнен жидкостью, плотность которой линейно меняется от ρ_0 на поверхности до ρ на дне сосуда. В сосуд погружают два маленьких шарика одинакового объема V, связанных тонкой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Плотность одного шарика ρ_1, плотность другого — ρ_2. Через некоторое время шарики устанавливаются так, как показано на рисунке 1. Найти силу натяжения нити. (8)

О. Овчинников

Ф599. Через блок, укрепленный в потолке, перекинута веревка, на которой груз массы M уравновешен лестницей с человеком массы m. По какому закону должен двигаться человек относительно лестницы, чтобы реакция блока на потолок равнялась нулю? Блок невесом, веревка абсолютно гибка, нерастяжима и невесома. (8)

А. Варгин

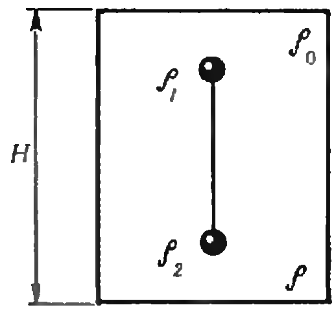


Рис. 1.

Ф600. В схеме, приведенной на рисунке 2, ключ попеременно замыкают и размыкают в те моменты, когда напряжение на первом конденсаторе равно нулю. Нарисовать график зависимости напряжения на катушке индуктивности от времени. (10)

Ф601. На Луне в вертикальном цилиндре, закрытом тяжелым поршнем, находится аргон при температуре T_1. Поршень может перемещаться в цилиндре без трения. На поршень кладут осторожно второй такой же поршень. Определите температуру T_2 газа при новом равновесном положении порошня. Теплоемкость поршня и цилиндра, а также теплоотдачу, не учитывать. Газ считается идеальным. (9)

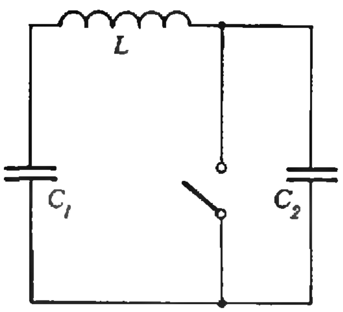


Рис. 2.

Ф602. К цепи, состоящей из резистора с сопротивлением R и источника с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $r=R/3$, присоединяют конденсаторы с емкостями C_1 и C_2, замыкая клеммы *1—2*, *3—4*, *5—6* (рис. 3). После замыкания напряжение на конденсаторе C_1 оказывается равным $\mathcal{E}/2$, причем потенциал клеммы *3* выше потенциала клеммы *2*. Определите, какой заряд p_0 был на конденсаторе C_2 до замыкания. (9).

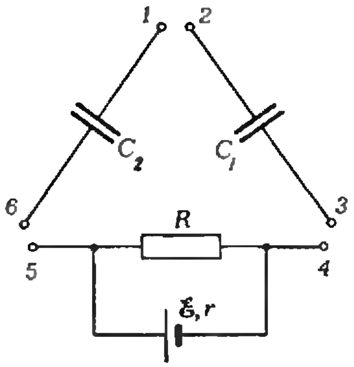


Рис. 3.

Решения задач

М530, М531, М533, М534, М536, М537; Ф537, Ф542—Ф545

М530. *На прямоугольном листе бумаги в клетку некоторые клетки закрашены в черный цвет. Затем происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: клетка, имевшая четное число черных соседей, становится белой, а имевшая нечетное число черных соседей — черной. (Соседями считаются клетки, имеющие общую сторону.)*

а) Докажите, что если множество B черных клеток при перекрашивании не изменяется (рис. 1, а), то в B — четное число клеток.

б) Пусть при перекрашивании множество B_1 черных клеток переходит в B_2, B_2 — в B_3, …, B_{r-1} — в B_r, а B_r — снова в B_1 (рис. 1, б). Докажите, что общее число черных клеток во множествах B_1, B_2, …, B_r четно.

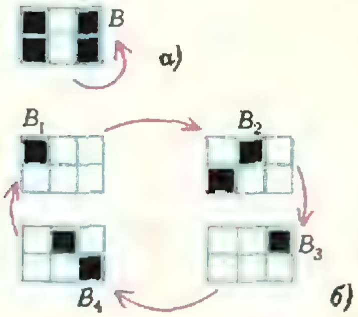
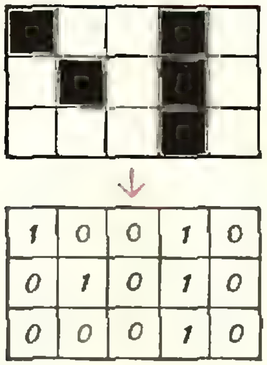


Рис 1.



1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	0	1	0

Рис 2.

Заменим наш лист бумаги таблицей из нулей и единиц: если клетка черная, напишем на ее месте единицу, а если белая — ноль (рис. 2). Определим для каждой клетки *сумму ее соседей* «по модулю 2», то есть по следующему правилу:

$$0+0=1+1=0;$$
$$1+0=0+1=1.$$

Сумму соседей данной клетки назовем ее *ореолом*, а вместо слов «черная клетка» будем писать «1-клетка».

Из условия задачи следует, что состояние клетки (т. е. записанное в ней число) в некоторый момент времени равно ее ореолу в предыдущий момент.

а) Если множество B «1-клеток» при перекрашивании не изменяется, то ореол любой «1-клетки» множества B равен 1. Сложим ореолы всех «1-клеток». Каждая сторона, общая для двух «1-клеток», вносит в эту сумму (всех ореолов) две единицы; поэтому сумма всех ореолов равна сумме четного числа единиц, то есть равна нулю. Но так как ореол каждой «1-клетки» равен 1, получаем, что клеток в B — четное число.

б) Будем писать $A\to B$, если при перекрашивании таблица A переходит в таблицу B. Назовем *суммой таблиц* A и B таблицу $A\dotplus B$, получающуюся поклеточным сложением чисел таблиц A и B (по указанным выше правилам; см. рис. 3).

Лемма. *Если* $A\to A_1$, $B\to B_1$, *то* $A\dotplus B\to A_1\dotplus B_1$.

Это следует из того, что при сложении ореолы клеток тоже складываются.

Приступим к решению задачи б). Пусть

$$B_1\to B_2\to\ldots\to B_r\to B_1.$$

Используя лемму, получаем:

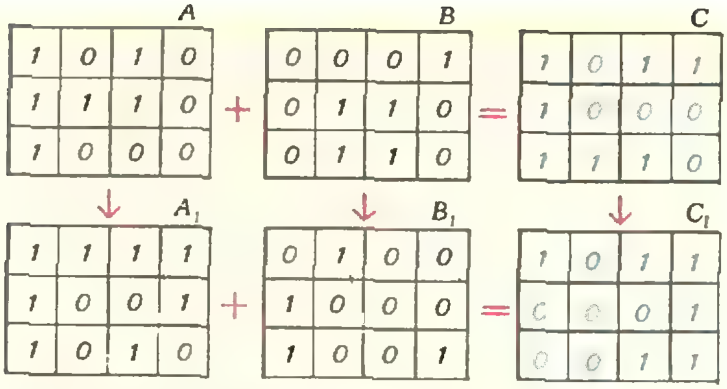
$$B_1\dotplus B_2\to B_2\dotplus B_3\to\ldots\to B_r\dotplus B_1\to B_1\dotplus B_2;$$
$$B_1\dotplus B_2\dotplus B_3\to B_2\dotplus B_3\dotplus B_1\to\ldots\to B_r\dotplus B_1\dotplus B_2\to B_1\dotplus B_2\dotplus B_3;$$

. . . .

$$B_1\dotplus B_2\dotplus B_3\dotplus\ldots\dotplus B_r\to B_1\dotplus B_2\dotplus B_3\dotplus\ldots\dotplus B_r.$$

Из последней строчки и задачи а) следует, что в таблице $B_1\dotplus B_2\dotplus\ldots\dotplus B_r$ — четное число «1-клеток». Заметим теперь, что число «1-клеток» в таблице $A\dotplus B$ равно сумме чисел «1-клеток» в таблицах A и B минус четное число (получающееся из-за того, что $1\dotplus 1=0$): поэтому четность числа «1-клеток» в таблице $A\dotplus B$ и суммарного числа «1-клеток» в таблицах A и B одинакова. Поскольку в таблице $B_1\dotplus B_2\dotplus\ldots\dotplus B_r$ — четное число «1-клеток», получаем, что и общее число «1-клеток» в множествах B_1, B_2, …, B_r четно.

Задача М530 решена. Но в связи с ней возникает много интересных вопросов. Например, чему может равняться r, то есть каким может быть период превращений множества «1-клеток» данной таблицы? Как будет происходить «эволюция» для таблиц «непрямоугольного» вида? Прямоугольные таблицы поддаются исследованиям с трудом. Это объясняется «неравноправностью» их клеток: разные клетки имеют разное число (от двух до четырех) соседей. Но если из прямоугольной таблицы склеить тор (бублик), то у каждой клетки будет уже по четыре соседа. Для тора уже удается кое-что доказать: например, установлено, что на торе, склеенном из квадрата $(2^n+1)\times\times(2^n+1)$, длина периода r обязательно равна делителю числа 2^n-1. Но возникают новые вопросы: возможны ли для данного тора все такие периоды r? Например, на торе, склеенном из квадрата 65×65, существуют периоды длины 1 и 63, но неизвестно, существуют ли перио-



$$\overset{A}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&0\\\hline 1&1&1&0\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}} + \overset{B}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&1\\\hline 0&1&1&0\\\hline 0&1&1&0\\\hline\end{array}} = \overset{C}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline 1&1&1&0\\\hline\end{array}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\overset{A_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1\\\hline 1&0&0&1\\\hline 1&0&1&0\\\hline\end{array}} + \overset{B_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&0\\\hline 1&0&0&0\\\hline 1&0&0&1\\\hline\end{array}} = \overset{C_1}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&1&1\\\hline 0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1\\\hline\end{array}}$$

Рис. 3.

ды длины 3, 7, 9 и 21. Продвинуться в решении задачи на торе помогает аналогичная задача на окружности из n клеток (похожая задача M19 была разобрана в «Кванте», 1970, № 4).

Р. Измайлов

◆

M531. *Из пунктов A и B не одновременно выехали навстречу друг другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно (с теми же скоростями). Доехав до своих пунктов A и B, они опять развернулись и второй раз встретились в точке D; здесь они вновь развернулись и т. д. В какой точке отрезка AB произошла их 1978-я встреча?*

Лучше всего решать эту задачу с помощью графиков движения. Постоянство скорости движущейся точки означает, что ее график движения образует один и тот же угол с осью времени t (рис. 4). Пусть моменты встреч — t_1, t_2, t_3, … Ясно, что оба графика движения на участках $t_1 < t \leqslant t_2$ и $t_2 \leqslant t < t_3$ идут симметрично относительно прямой $t = t_2$, поэтому третья встреча произойдет в той же точке C, где и первая. Точно так же прямая $t = t_3$ является осью симметрии графиков движения при $t \leqslant t_3$ и $t \geqslant t_3$; поэтому четвертая встреча произойдет в той же точке D, что и вторая, и т. д.: каждая нечетная встреча будет происходить в точке C, каждая четная, в том числе и 1978-я,— в точке D.

Из нашего решения ясно также, что числа t_1, t_2, t_3, … образуют арифметическую прогрессию: встречи происходят через равные промежутки времени $d = t_{n+1} - t_n$, и вся картина полностью повторяется с периодом $T = 2d$.

Это наблюдение — частный случай такого полезного факта: если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямых $x = a$ и $x = b$ (то есть $f(a+x) = f(a-x)$ и $f(b+x) = f(b-x)$), то функция f — периодическая с периодом $2|b-a|$ (в нашей задаче роль x играет время t)

Н. Васильев

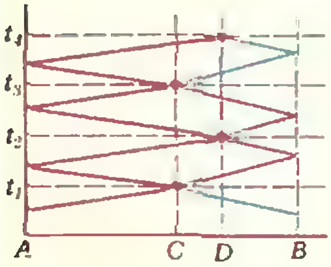


Рис. 4.

◆

M533. *Назовем выпуклый многоугольник особым, если некоторые три его диагонали пересекаются в одной внутренней точке. Докажите, что у каждого особого семиугольника найдется вершина A, обладающая таким свойством: для любого $\varepsilon > 0$ вершину A можно сдвинуть на расстояние, меньшее ε (не меняя остальных вершин), так, что полученный семиугольник будет неособым.*

Назовем диагональ выпуклого шестиугольника *главной*, если по обе стороны от прямой, на которой лежит эта диагональ, расположены по две вершины шестиугольника. Если MP — *побочная* (не главная) диагональ выпуклого шестиугольника и N — вершина, смежная с вершинами M и P (рис. 5), то во внутренних точках с диагональю MP пересекаются лишь диагонали, выходящие из N. Поэтому никакие другие две диагонали не пересекаются с $[MP]$ в общей внутренней точке. Иначе говоря, *единственной тройкой диагоналей выпуклого шестиугольника, которая может иметь общую точку внутри шестиугольника, является тройка его главных диагоналей.*

Пусть теперь $B_1B_2 \ldots B_7$ — произвольный выпуклый семиугольник. Рассмотрим выпуклые шестиугольники $B_1 \ldots B_5B_6$ и $B_1 \ldots B_5B_7$ (рис. 6). Диагонали $[B_1B_4]$ и $[B_2B_5]$ являются в них главными. Обозначим через P точ-

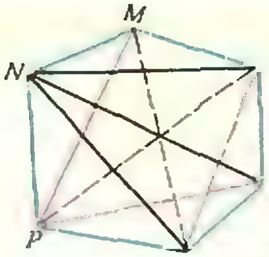


Рис. 5.

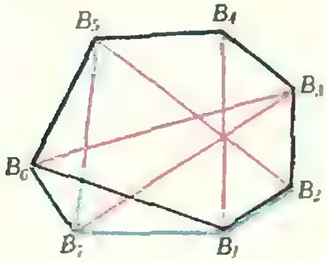


Рис. 6.

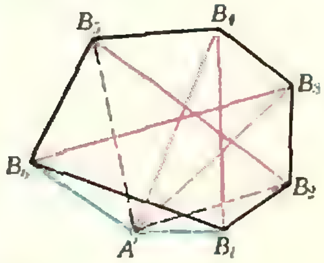


Рис. 7.

ку их пересечения. Хотя бы одна из прямых B_3B_6, B_3B_7 не проходит через точку P. Пусть, для определенности, $P \notin [B_3B_6]$. Это означает, что в выпуклом шестиугольнике $B_1B_2 \ldots B_6$ главные диагонали не пересекаются в одной точке. Итак, *в любом выпуклом семиугольнике можно выбрать такие шесть вершин $B_1, \ldots, B_6$, что образованный ими выпуклый шестиугольник $B_1 \ldots B_6$ будет неособым.* Выберем в нашем семиугольнике такой неособый шестиугольник $B_1 \ldots B_6$; седьмую вершину семиугольника обозначим через A и докажем, что она обладает требуемым свойством.

Пусть $Q_1, \ldots, Q_{15}$ — точки, в которых пересекаются какие-либо две из диагоналей выбранного шестиугольника. (Их действительно пятнадцать: каждые четыре вершины шестиугольника определяют одну точку пересечения пары диагоналей и никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, так что общее число точек пересечения $C_6^4 = 15$. На самом-то деле важно только то, что этих точек — конечное число.) Сдвинем теперь точку A в такое положение A' (рис. 7), чтобы было $|AA'| < \varepsilon$ и в выпуклом семиугольнике $B_1B_2 \ldots B_6A'$ диагонали B_3A' и B_4A' не проходили ни через одну из точек $Q_1, \ldots, Q_{15}$ (очевидно, что это всегда можно сделать). В этом семиугольнике уже никакие три диагонали не будут пересекаться в одной внутренней точке, поскольку две добавляющиеся диагонали B_2A' и B_5A' в любом из шестиугольников, содержащих вершину A', являясь побочными, не могут пересекаться в общей внутренней точке ни с какими двумя другими диагоналями нашего семиугольника. Таким образом, семиугольник $B_1B_2 \ldots B_6A'$ — неособый.

В заключение приведем задачу, решение которой (при $n > 7$) автору неизвестно: *найти наименьшее число $k = k(n)$, обладающее следующим свойством: в любом выпуклом n-угольнике можно так сдвинуть k вершин (на сколь угодно малые расстояния), чтобы в полученном после сдвига n-угольнике никакие три диагонали не пересекались в одной внутренней точке.*

В. Болтянский

◆

M534. *Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от $\triangle ABC$ трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники (рис. 8). Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилежащих к сторонам $\triangle ABC$, равна площади четвертого.*

Обозначим площади треугольников AEK, BDM и CFL, прилегающих к сторонам $\triangle ABC$, через S_1, S_2 и S_3 (рис. 8), а площадь центрального треугольника DEF, образованного диагоналями трапеций, — через S_0. Тогда

$$S_0 = (S_{ABC} - S_{BLC} - S_{AMB} - S_{AKC}) + S_1 + S_2 + S_3.$$

Пусть O — общая точка пересечения прямых, параллельных сторонам треугольника ABC. Ясно, что

$$S_{BLC} = S_{BOC},\ S_{AMB} = S_{AOB},\ S_{AKC} = S_{AOC}$$

(треугольники с общими основаниями и конгруэнтными высотами). Но $S_{BOC} + S_{AOB} + S_{AOC} = S_{ABC}$; поэтому выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Таким образом, мы получаем утверждение задачи:

$$S_0 = S_1 + S_2 + S_3.$$

Задачу M534 можно немного обобщить: не требовать,

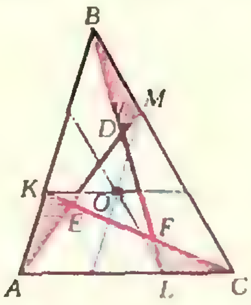


Рис. 8.

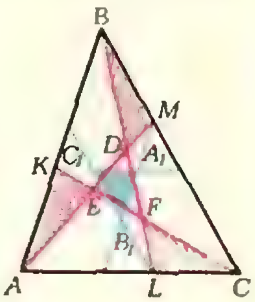


Рис. 9.

чтобы три прямые, о которых говорится в условии (параллельные сторонам треугольника ABC), проходили через одну точку. Пусть эти прямые образуют треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 9) и пусть k — коэффициент гомотетии треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC $\left(|k|=\frac{|A_1C_1|}{|AC|}\right)$. Выполнив построение, описанное в задаче M534, получим треугольники AEK, BDM, CFL, прилегающие к сторонам $\triangle ABC$, и центральный треугольник DEF. Пусть, как и выше, их площади равны S_1, S_2, S_3 и S_0 соответственно. Докажите самостоятельно, что

$$S_0-kS_{ABC}=S_1+S_2+S_3.$$

Подумайте, как можно сформулировать этот результат для случая любых гомотетичных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Ф. Вайнштейн

◆

M536. *а) Докажите, что любой прямоугольник размером $m\times 2n$ клеток ($m>1$) можно замостить двумя слоями костяшек домино (плиток 1×2 клетки) так, чтобы каждая плитка верхнего слоя опиралась на две разные плитки нижнего слоя.*

б) Прямоугольник размером $2k\times 2n$ клеток уже замощен одним слоем костяшек домино. Докажите, что его можно замостить вторым слоем так, чтобы выполнялось то же условие (т. е. чтобы плитки разных слоев не совпадали).

а) Разрежем прямоугольник размером $m\times 2n$ клеток на полосы размером $2\times m$ клеток. Если m — нечетное, то в каждой полосе устроим наши два покрытия так, как показано на рисунке 10; если же m четное, — так, как на рисунке 11.

б) Разрежем прямоугольник размером $2k\times 2n$ клеток на квадраты размером 2×2 клеток. Второе покрытие в каждом таком квадрате будем строить отдельно.

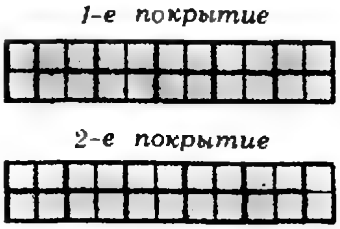


Рис. 10.

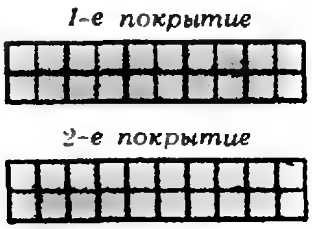


Рис. 11.

В квадрате 2×2 возможны три случая расположения костяшек первого покрытия: обе костяшки целиком лежат в квадрате, только одна костяшка целиком лежит в квадрате, ни одна из костяшек целиком не лежит в квадрате. В третьем случае две костяшки в квадрате во втором покрытии можно расположить произвольно, а в первых двух случаях костяшки второго слоя нужно расположить перпендикулярно к костяшке (или костяшкам), целиком лежащей в квадрате в первом слое.

В. Прасолов

◆

M537. *Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB и AC этого треугольника в точках P, Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.*

Отметим на оси симметрии треугольника BAC точки $H\in[BC]$, $K\in[PQ]$, центр O данной окружности и точку T ее касания с окружностью, описанной вокруг треугольника BAC (рис. 12). Поскольку отрезки TB и OP оба перпендикулярны к прямой BA (угол TBA опирается на диаметр $[AT]$, а $[OP]$ — радиус, идущий в точку касания), а отрезки BH и PK перпендикулярны к оси симметрии (AT), получаем

$$\frac{|AH|}{|AT|}=\frac{|AK|}{|AO|}=\cos^2\alpha, \qquad (*)$$

где $\alpha=\frac{\widehat{BAC}}{2}$.

Пусть B' и C' — точки пересечения сторон угла BAC с касательной, проведенной в точке T. При гомотетии с центром A и коэффициентом $k=\cos^2\alpha$ треугольник $B'AC'$ перейдет в треугольник BAC (при этом T перейдет в H), а центр O окружности, вписанной в $\triangle B'AC'$, перейдет согласно (*) в точку K. Таким образом, мы доказали, что центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, — точка K.

Н. Васильев

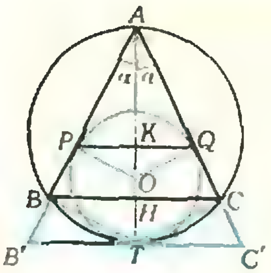


Рис. 12.

◆

Ф537. *Полировкой металлической пластины ее можно сделать зеркальной. Оценить, какова может быть максимальная высота шероховатостей, оставшихся после полировки, чтобы пластина зеркально отражала пучок света с длиной волны* $\lambda=5\cdot10^{-8}$ м, *падающий на нее под углом* $\alpha=45°$.

Для того чтобы шероховатая поверхность отражала свет зеркально, необходимо, чтобы не происходило уменьшения интенсивности отраженного света из-за интерференции волн, отраженных от разных точек поверхности. Для этого разность хода Δ лучей, отраженных под одним и тем же углом от разных точек поверхности, должна быть много меньше длины волны.

Очевидно, наибольшую разность хода имеют лучи, отраженные от впадины и от вершины шероховатости (точки A и B на рисунке 13). Обозначим α угол падения и β угол, под которым наблюдается отражение от поверхности. Проведя из точки A перпендикуляр AC к падающим лучам, найдем точку C на луче 2, в которой фаза волны совпадает с фазой в точке A (AC — фронт падающей волны). Проведя из точки B перпендикуляр к отраженным лучам, найдем точку D, в которой фаза отраженной волны совпадает с фазой в точке B (BD — фронт отраженной волны). Разность хода Δ лучей 1 и 2 равна $|AD|-|CB|$. Проведя вычисления, найдем (см. рис. 13):

$$\Delta=a(\sin\beta-\sin\alpha)+h(\cos\beta+\cos\alpha). \qquad (*)$$

Отражение будет зеркальным, если $\Delta\ll\lambda$. Так как расстояния a между впадинами и выступами на отражающей поверхности могут быть совершенно произвольными (как маленькими, так и большими), то для выполнения условия $\Delta\ll\lambda$ первое слагаемое в (*) должно быть равным нулю. Это значит, что зеркальное отражение возможно лишь в том случае, если $\alpha=\beta$, то есть угол падения равен углу отражения.

В этом случае $\Delta=2h\cos\alpha$, и отражение будет зеркальным, если $2h\cos\alpha\ll\lambda$, то есть $h\ll\dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$. (Примечание. Так как при $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ $\cos\alpha\to0$, при больших углах падения $\left(\text{близких к } \dfrac{\pi}{2}\right)$ зеркальной становится и грубая поверхность с большими шероховатостями.)

При $\lambda=5\cdot10^{-8}$ м и $\alpha=45°$ $h\ll3{,}6\cdot10^{-8}$ м.

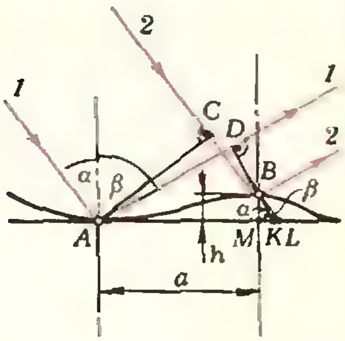


Рис. 13.

$\widehat{MBL}=\alpha,\ \widehat{MKB}=\beta.$
$\Delta=|AD|-|CB|$
$|AD|=|AK|\sin\beta=$
$=(a+h\operatorname{ctg}\beta)\sin\beta=$
$=a\sin\beta+h\cos\beta.$
$|CB|=|CL|-|BL|=$
$=|AL|\sin\alpha-\dfrac{h}{\cos\alpha}=$
$=(a+h\operatorname{tg}\alpha)\sin\alpha-$
$-\dfrac{h}{\cos\alpha}=a\sin\alpha+$
$+h\dfrac{\sin^2\alpha-1}{\cos\alpha}=a\sin\alpha-$
$-h\cos\alpha.$
$\Delta=a(\sin\beta-\sin\alpha)+$
$+h(\cos\beta+\cos\alpha).$

Ф542. *Как изменится скорость истечения газа из баллона через небольшое отверстие, если температуру газа увеличить в 4 раза, а давление — в 8 раз?*

Число Z молекул, вылетающих из сосуда за время t, равно

$$Z = \frac{1}{2} nS \overline{|v_x|}\, t,$$

где $\overline{|v_x|}$ — среднее значение модуля проекции скорости молекулы на ось X, перпендикулярную к стенке, в которой имеется отверстие, S — площадь отверстия и n — концентрация молекул газа в сосуде (число молекул в единице объема).

Величина $\overline{|v_x|}$ пропорциональна скорости v теплового движения молекул. Так как $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ (μ — молярная масса газа), $\overline{|v_x|} \sim \sqrt{T}$. Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории $p = nkT$ следует, что $n = \frac{p}{kT}$.

Таким образом,

$$Z = \frac{p}{T}\sqrt{T} = \frac{p}{\sqrt{T}}.$$

Это означает, что при увеличении температуры в 4 раза, а давления в 8 раз скорость истечения газа увеличивается в 4 раза.

◆

Ф543. *На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают под углом 45° световые лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной к оси полуцилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла n.*

Луч, падающий на плоскую грань полуцилиндра в точке A под углом $\alpha = 45°$, преломляется и идет далее в стекле под углом β (рис. 14) таким, что $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, то есть $\beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n} = \arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}}$. Этот луч попадает затем на цилиндрическую поверхность в точке B под углом γ, который зависит от угла φ, образуемого радиусом OB с плоской гранью полуцилиндра: $\gamma = \frac{\pi}{2} + \beta - \varphi$ (см. рис. 14). Затем этот луч выходит из полуцилиндра под углом δ таким, что $\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{1}{n}$, то есть $\sin\gamma = \frac{\sin\delta}{n}$.

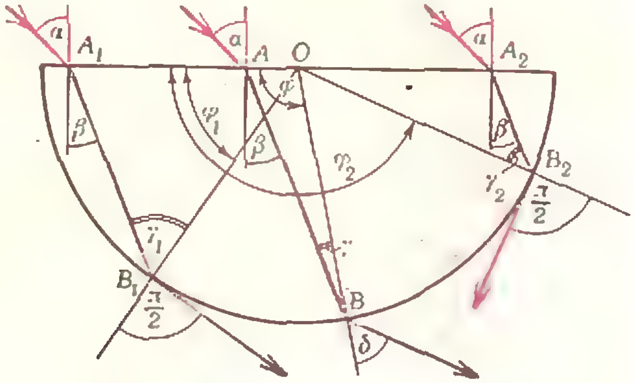


Рис. 14.

Из полуцилиндра выходят те лучи, для которых $\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 14) и, следовательно, $\sin\gamma \leqslant \frac{1}{n}$. Это означает, что из стекла выходят те лучи, которые попадают на цилиндрическую поверхность между точками B_1 и B_2 и для кото-

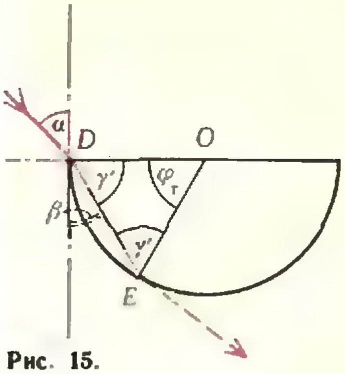


Рис. 15.

рых $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$. Поскольку

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 + \beta, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \gamma_2 + \beta \text{ и } \gamma_1 = \gamma_2 = \arcsin\frac{1}{n},$$

окончательно находим

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}} - \arcsin\frac{1}{n} \leqslant \varphi \leqslant \arcsin\frac{1}{n} + \arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2}.$$

Верхний предел, естественно, должен быть меньше π. Поэтому при таких n, при которых $\varphi_2 > \pi$, сверху φ ограничено значением π.

При некотором значении n может оказаться, что значение φ_1 (нижний предел φ) соответствует области тени, в которую лучи вообще не попадают. Границу тени нетрудно найти, рассмотрев ход луча, падающего на полуцилиндр в точке D (рис. 15). Область тени — это, очевидно, дуга DE.

Так как треугольник DEO — равнобедренный с углами при основании DE, равными $\gamma' = \frac{\pi - \varphi_T}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$,

$$\varphi_T = 2\beta = 2\arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

Нижняя граница «светящейся» области равна φ_T при $\varphi_T > \varphi_1$, то есть при

$$2\arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}} > \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}} - \arcsin\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arcsin\frac{1}{n\sqrt{2}} + \arcsin\frac{1}{n} > \frac{\pi}{2}.$$

◆

Ф544. *Оценить скорость ракеты с космонавтом при выходе из плотных слоев атмосферы.*

Для оценки можно воспользоваться различными данными. Известно, например, что максимальная перегрузка, испытываемая космонавтом, равна 7,7—7,8.

Перегрузка — это отношение веса человека, движущегося с ускорением, к весу того же человека, когда он находится в покое на Земле. На Земле вес равен силе тяжести: $|\vec{p}| = m|\vec{g}|$. Если перегрузка на корабле равна k, то вес космонавта, то есть сила, с которой он действует на сиденье корабля, равен $\vec{P}' = km\vec{g}$. Это означает, что на космонавта со стороны сиденья действует сила $\vec{N} = -km\vec{g}$ (рис. 16). Кроме того, на космонавта действует сила тяжести $m\vec{g}$. Под действием этих сил космонавт движется с ускорением

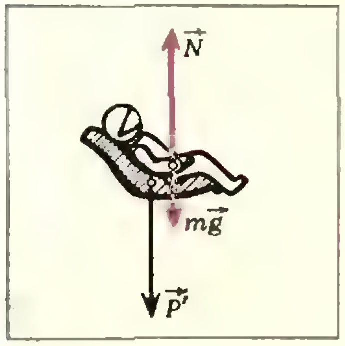


Рис. 16

$$\vec{a} = \frac{\vec{N} + m\vec{g}}{m} = -(k-1)\vec{g}.$$

При $k > 1$ ускорение направлено вверх. Считая, что $k = 7{,}7$, получаем $|\vec{a}| \approx 66$ м/с². Полагая для оценки толщину плотных слоев атмосферы равной $h = 15$ км, находим значение скорости ракеты при выходе из плотных слоев:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{a}|h} \approx 1{,}4\cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

◆

Ф545. *Два воздушных пузырька радиусов $r_1 = r_2 = 3$ мм в баке с водой сливаются в один. Найти радиус получившегося пузырь-*

Так как теплопроводность воды мала, можно считать, что процесс слияния пузырьков происходит адиабатно и, следовательно, изменение ΔU внутренней энергии системы равно работе A внешних сил давления. Если внешнее давление равно p_0, а изменение объема пузырьков — ΔV, *ки сразу же после его образования и через большое время после этого, если теплопроводность воды невелика, а ее теплоемкость очень большая. Считать, что пузырьки находятся вблизи поверхности воды.*

то $A = p_0\Delta V$.

Изменение внутренней энергии системы равно $\Delta U = \sigma\Delta s + \Delta u$. Здесь $\sigma\Delta s$ — изменение поверхностной энергии за счет изменения площади поверхности пузырьков на Δs (σ — поверхностное натяжение воды); Δu — изменение внутренней энергии воздуха.

Внутренняя энергия воздуха в результате слияния пузырьков изменилась на величину

$$\Delta u = \frac{5}{2}\,\frac{m}{\mu}\,R\Delta T,$$

где m — масса воздуха в пузырьках, ΔT — изменение температуры воздуха. (Воздух состоит в основном, из двухатомных молекул азота и кислорода, поэтому его можно считать двухатомным газом. Внутренняя энергия одного моля двухатомного газа равна $^5/_2\,RT$.)

Давление p воздуха в пузырьках в нашем случае остается практически постоянным. Действительно, давление p отличается от давления в воде на уровне пузырьков на величину $\dfrac{2\sigma}{r}$ $(r = r_1 = r_2)$ — в первоначальном пузырьке и на величину $\dfrac{2\sigma}{\rho}$ — в новом пузырьке радиуса ρ $(\rho > r)$. Поскольку слияние происходит у поверхности воды, можно считать, что давление в воде равно атмосферному, то есть равно $p_0 \approx 10^5$ Н/м². Так как $\dfrac{2\sigma}{r} = \dfrac{2\cdot 7{,}3\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^{-3}} \approx 49$ (Н/м²) $\ll p_0$, можно считать, что давление в пузырьках остается неизменным и равным p_0. Поэтому, согласно уравнению газового состояния, $p_0\,\Delta V = \dfrac{m}{\mu} R\Delta T$, откуда $\Delta T = p_0\,\Delta V \dfrac{\mu}{mR}$.

Таким образом,

$$A = p_0\,\Delta V = \sigma\Delta s + \frac{5}{2}\,p_0\,\Delta V, \quad \text{или } \sigma\Delta s = -\frac{3}{2}\,p_0\,\Delta V\ .$$

Подставляя в это выражение $\Delta V = \dfrac{4}{3}\pi(\rho^3 - 2r^3)$ и $\Delta s = 4\pi(\rho^2 - 2r^2)$, получим:

$$p_0\rho^3 + 2\sigma\rho^2 - 2p_0 r^3 - 4\sigma r^2 = 0,$$

или, с учетом численных данных,

$$10^5\,\rho^3 + 14{,}6\cdot 10^{-2}\,\rho^2 = 5{,}4\cdot 10^{-3}.$$

Поскольку заведомо $\rho > 3\cdot 10^{-3}$ м, второе слагаемое в левой части равенства мало́ по сравнению с первым и им можно пренебречь. Поэтому

$$\rho \approx \sqrt[3]{5{,}4\cdot 10^{-8}} \approx 3{,}8\cdot 10^{-3}\ (\text{м}),$$

то есть $\rho \approx 3{,}8$ мм.

И. Слободецкий

М. Балк, Ю. Ломакин

Доказательство неравенств с помощью производной

В этой статье, основанной на материалах занятий с учениками IX—X классов в летнем лагере школьников «Математик-79» (Вологодская область), показано, как простые сведения о производных могут быть использованы для проверки истинности неравенств.

Для доказательств неравенств особенно полезна следующая теорема («Алгебра и начала анализа 9», п. 54):

Теорема 1. *Если функция f имеет положительную производную в каждой точке интервала $]a;\ b[$, то эта функция возрастает на $]a;\ b[$. Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $]a;\ b[$, то f убывает на $]a;\ b[$. Если дополнительно известно, что f непрерывна в каждой точке полуинтервала $[a;\ b[$, то возрастание (или, соответственно, убывание) имеет место на всем этом полуинтервале* *).

Начнем с двух примеров на применение этой теоремы: первый — простой, второй — посложнее.

Пример 1. *Докажите, что при $x > 1$*

$$x^2 - 1 > 2\ln x.$$

Сохраняется ли то же неравенство при $0 < x < 1$?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$. Имеем

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2}{x}\left(x^2 - 1\right) > 0$$

при $x > 1$.

Поэтому f возрастает на $]1; +\infty[$. Если мы учтем еще, что функция f непрерывна на $[1;\ +\infty[$ (т. е. в каждой точке этого промежутка), то возрастание f имеет место на $[1;\ +\infty[$. Поэтому при $1 < x < +\infty$ будет $f(x) > f(1)$, т. е. $x^2 - 1 - 2\ln x > 0$, $x^2 - 1 > 2\ln x$.

Рассуждая аналогично, можно убедиться, что $f'(x) < 0$ на $]0;\ 1[$, так что f убывает на $]0;\ 1[$. Так как f непрерывна на $]0;\ 1]$, убывание имеет место на $]0;\ 1]$. Поэтому при $0 < x < 1$ имеем $f(x) > f(1)$, т. е. $x^2 - 1 - 2\ln x > 0$. Итак, $x^2 - 1 > 2\ln x$ при $0 < x < 1$.

Пример 2. *Выясните, что больше: $79^{3/5} + 1900^{3/5}$ или $1979^{3/5}$?*

Решение. Решим более общую задачу: *что больше $a^p + b^p$ или $(a + b)^p$, если $0 < a < b$ и $0 < p < 1$?* Рассмотрим на $]0;\ +\infty[$ функцию $f(x) = (a + x)^p - (a^p + x^p)$.

Имеем:

$$f'(x) = p(a + x)^{p-1} - px^{p-1} = p\left[\left(\frac{1}{a + x}\right)^{1-p} - \left(\frac{1}{x}\right)^{1-p}\right] < 0$$

при $0 < x < +\infty$. Значит, f на $]0;\ +\infty[$ убывает. Поэтому из $0 < a < b$ следует, что $f(b) < f(a)$, т. е. $(a + b)^p - (a^p + b^p) < (a + a)^p - (a^p + a^p) = a^p(2^p - 2) < 0$, $a^p + b^p > (a + b)^p$. В частности, $79^{3/5} + 1900^{3/5} > 1979^{3/5}$.

Для решения дальнейших примеров нам потребуется такое следствие из теоремы 1:

Теорема 2. *Пусть каждая из функций f и g непрерывна в каждой точке полуинтервала $[a;\ b[$ и имеет производную в каждой точке интервала $]a;\ b[$. Для того чтобы всюду на интервале $]a;\ b[$ было верно неравенство*

$$f(x) < g(x), \tag{1}$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись два условия:

1. $f'(x) < g'(x)$ *всюду на* $]a;\ b[$, (2)

---

*) Аналогичное утверждение остается верным, если вместо полуинтервала $[a;\ b[$ брать полуинтервал $]a;\ b]$ или отрезок $[a;\ b]$.

II. $f(a) \leqslant g(a)$. (3)

Доказательство. Функция $F(x) = g(x) - f(x)$ непрерывна на $[a; b[$, причем $F(a) \geqslant 0$ и $F'(x) > 0$ на $]a; b[$. По теореме 1 функция F возрастает на $[a; b[$, так что при $a < x < b$ имеем $F(x) > F(a) \geqslant 0$, т. е. $f(x) < g(x)$ всюду на $]a; b[$ *).

Применение теоремы 2 мы тоже проиллюстрируем на двух примерах.

Пример 3. *Докажите, что при* $x > 0$

$$\ln(1 + x) < x. \tag{4}$$

Решение. Дифференцируя (4), получим

$$\frac{1}{1 + x} < 1,$$

что, очевидно, верно на $]0; +\infty[$. Кроме того, $\ln(1 + 0) = 0$. Следовательно, согласно теореме 2 неравенство (4) верно при $0 < x < +\infty$.

Пример 4. *Проверьте, справедливо ли при* $x_1 > x_2 > 0$ *неравенство*

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln \frac{x_1}{x_2}} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2). \tag{5}$$

Решение. Мы можем перейти от неравенства с двумя переменными к неравенству с одним переменным, если положим $x = \frac{x_1}{x_2}$. Тогда (5) принимает вид

$$\frac{x - 1}{\ln x} < \frac{1}{2}(x + 1). \tag{6}$$

Из $x_1 > x_2 > 0$ вытекает $x > 1$. Дифференцировать дробь, у которой $\ln x$ в знаменателе, неудобно. Перепишем поэтому неравенство (6) в такой равносильной форме:

$$\frac{x - 1}{x + 1} < \frac{1}{2} \ln x. \tag{7}$$

Чтобы решить, верно ли это неравенство, выясним, верно ли неравенство, которое возникает при его почленном дифференцировании. Таким образом, мы должны рассмотреть неравенство

$$\frac{2}{(x + 1)^2} < \frac{1}{2x} \tag{8}$$

или равносильное ему неравенство

$$(x - 1)^2 > 0.$$

Последнее при $x > 1$ верно и, следовательно, при этих x верно (8). Далее, при $x = 1$ обе части неравенства (7) принимают равные (нулевые) значения. Видим, что условия теоремы 2 соблюдены, так что неравенство (7) верно, а вместе с ним верны (6) и (5).

Иногда при доказательстве неравенства полезно применить почленное дифференцирование не один, а несколько раз. Точнее говоря, иногда полезно воспользоваться следующим следствием из теоремы 2 *):

Теорема 3. *Пусть каждая из функций f и g непрерывна на полуинтервале $[a; b[$ и имеет в каждой точке интервала $]a; b[$ производную порядка n. Для того чтобы всюду было верно неравенство*

$$f(x) < g(x) \text{ на }]a; b[, \tag{9}$$

достаточно, чтобы одновременно выполнялись такие условия:

I. *Выполняется неравенство, получающееся из неравенства* [9] *путем n-кратного дифференцирования, т. к. всюду на* $]a; b[$

$$f^n(x) < g^n(x); \tag{10}$$

$$\text{II. } f(a) \leqslant g(a),$$
$$f'(a) \leqslant g'(a), \ldots$$
$$\ldots, f^{(n-2)}(a) \leqslant g^{(n-2)}(a);$$
$$f^{(n-1)}(a) \leqslant g^{(n-1)}(a).$$

Доказательство. Так как $[f^{(n-1)}(x)]' < [g^{(n-1)}(x)]'$ на $]a; b[$ (см. (10)) и $f^{(n-1)}(a) \leqslant g^{(n-1)}(a)$, согласно теореме 2: $f^{(n-1)}(x) < g^{(n-1)}(x)$ всюду на $]a; b[$. Но это значит, что $[f^{(n-2)}(x)]' < [g^{(n-2)}(x)]'$ всюду на $]a; b[$. Кроме того, по условию, $f^{(n-2)}(a) \leqslant g^{(n-2)}(a)$. Поэтому по теореме 2: $f^{(n-2)}(x) < g^{(n-2)}(x)$ всюду на $]a;\ b[$. Повторяя аналогичные рассуждения, мы после конечного числа шагов получим, что всюду на $]a;\ b[$ справедливы строгие неравенства $f^{(n-3)}(x) < g^{(n-3)}(x)$, …, $f''(x) < g''(x)$, $f'(x) < g(x)$ и, наконец, $f(x) < g(x)$, что и требуется доказать.

---

*) Если дополнительно потребовать еще непрерывность функций f и g в точке b, то (как ясно из доказательства) неравенство (1) будет верно в точке b. Можно доказать, что теорема 2 остается верной и в том случае, когда строгое неравенство (2) нарушается (заменяется равенством $f'(x) = g'(x)$) в конечном числе точек (или даже в бесконечном числе точек, если только такие точки не заполняют какой-либо промежуток вида $]a; c[$, где $a < c \leqslant b$).

*) Производная от производной функции f называется ее *второй производной* и обозначается через f''; аналогично определяется третья, четвертая производные и вообще производная любого порядка n (обозначение: $f^{(n)}$).

Пример 5. *Докажите, что при $x \neq 0$ справедливо неравенство*

$$e^x + e^{-x} > 2 + x^2. \qquad (11)$$

Решение. Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Будем дифференцировать (11) почленно несколько раз и посмотрим, не получим ли неравенство, справедливость которого не вызывает сомнения. Получаем последовательно:

$$e^x - e^{-x} > 2x;$$
$$e^x + e^{-x} > 2;$$
$$e^x - e^{-x} > 0.$$

Последнее неравенство при $x > 0$, очевидно, верно. Кроме того, при $x = 0$ верны равенства $e^0 + e^{-0} = 2 + 0^2$, $e^0 - e^{-0} = 2\cdot 0$, $e^0 + e^{-0} = 2$. В силу теоремы 3 неравенство (11) верно при $x > 0$. Так как при замене x на $-x$ обе части неравенства (11) не изменятся, то это неравенство верно и для всех $x < 0$.

Упражнения

Проверьте справедливость следующих неравенств:

1. $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;
2. $(p+q)^6 < 32(p^6 + q^6)$ при $p > 0$, $q > 0$, $p \neq q$;
3. $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ при $x > 0$;
4. $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ при $x > 1$;
5. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
6. $\sin x < \frac{1}{2} x(\pi - x)$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
7. $2ab \ln \frac{b}{a} < b^2 - a^2$ при $0 < a < b$;
8. $e^x > 1 + x + \frac{1}{2} x^2$ при $x > 0$;
9. $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ при $x > 0$.

10. В окружность радиуса R вписан правильный n-угольник с периметром p_n и около нее описан правильный n-угольник с периметром P_n. Докажите следующее неравенство (принадлежащее известному физику и математику Христиану Гюйгенсу): $2p_n + P_n > 6\pi R$.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Окончание. Начало см. на с. 7, 14, 25)

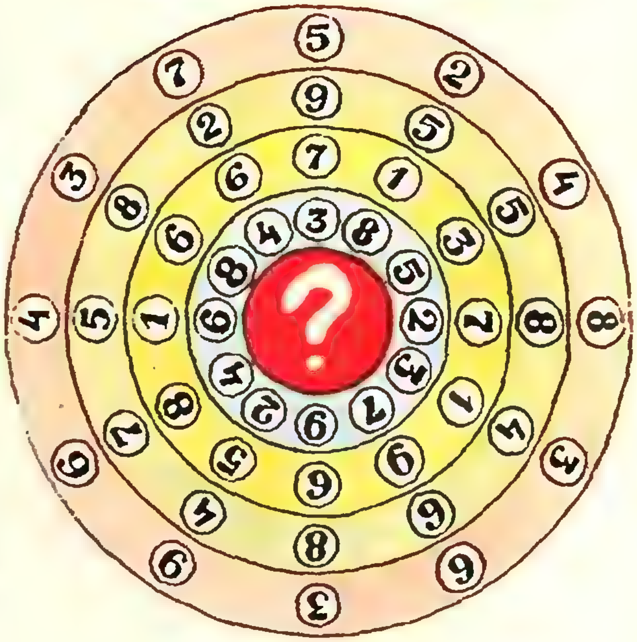
(Каунас) 38; *Г. Ирисов* (Донецк) 40; *А. Капралов* (Тбилиси) 38—41; *В. Кельман* (Москва) 38, 40; *Е. Коган* (Днепропетровск) 38; *А. Кожевников* (Днепропетровск) 34; *Г. Коломийцев* (Сумгаит) 36; *В. Комов* (Александров) 33—41, 43—46; *К. Кондратьев* (Москва) 38, 40, 45, 47; *Ю. Кордюков* (Серов) 38; *И. Коротков* (Волгоград) 43, 47; *А. Костерев* (Семилуки) 38—41; *О. Кравец* (Воронеж) 40, 41, 46; *А. Крейнес* (Кольчугино) 35; *А. Крупцов* (Курск) 33; *А. Куприн* (Москва) 38—41; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) 34, 38—41, 44; *А. Кучер* (Донецк) 35; *А. Кушнеров* (Москва) 38, 44; *А. Лазарян* (Лобня Московской обл.) 35, 37; *В. Лашкин* (Киев) 35—40; *А. Лебедев* (Горький) 40; *С. Логунов* (Москва) 40, 47; *Д. Людмирский* (Киев) 33, 34, 36, 37, 47; *С. Магарян* (Кострома) 38; *С. Маламанов* (Ленинград) 35, 38; *А. Масленников* (п. Н-Таръял Мар АССР) 46; *А. Минаев* (Саратов) 38; *А. Могильнер* (Свердловск) 35, 38, 40, 41, 44, 46, 47; *М. Морозов* (Ашхабад) 40; *И. Муромцев* (Москва) 33, 36, 38—41; *Д. Надеждин* (Курган) 38—41; *В. Наталич* (Ашхабад) 38, 47; *А. Оглоблин* (Иркутск) 38, 41; *И. Омелян* (Львов) 35, 37—44, 46, 47; *О. Оразмамедов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) 40, 41; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) 38, 40, 46, 47; *Т. Павелкина* (Киев) 38; *С. Пахарук* (Бобруйск) 36; *А. Перов* (Москва) 35, 37—43, 47; *И. Пинск* (Гродно) 36; *В. Попов* (Москва) 41; *С. Прядкин* (Киев) 34—38, 41, 43, 46, 47; *С. Пушкарев* (Курск) 34, 40; *В. Рогозин* (Щелково Московской обл.) 35; *И. Романовский* (Лида) 36—44, 46, 47; *И. Рузин* (Ленинград) 38, 41, 47; *И. Савенков* (р. п. Лысые Горы Саратовской обл.) 38; *А. Саломатин* (Москва) 34, 36; *С. Сафронюк* (Ровно) 35, 36, 38, 40, 43, 46, 47; *В. Сачков* (Чебоксары) 33, 38—41; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 38—47; *В. Симонов* (Оренбург) 38, 40; *А. Сромин* (Ленинград) 35, 38; *А. Степанович* (Никольский Карагандинской обл.) 37; *А. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 46; *С. Суров* (Оренбург) 36; *С. Трохов* (Оренбург) 38—41; *Т. Ульмасов* (Душанбе) 33 — 36; *Л. Уткин* (Вологда) 46; *Н. Федин* (Омск) 34—40, 43; *С. Хосид* (Алма-Ата) 38, 46; *В. Шарафян* (Ереван) 35, 38, 40; *В. Швейдель* (Великие Луки) 35; *А. Шершнев* (Краснодар) 38—41; *А. Ширяев* (с. Рождествено Морд АССР) 35, 38; *С. Шичаник* (Невинномысск) 35, 36, 38—41, 44, 47; *В. Шмидт* (Москва) 38; *М. Эфроимский* (Ленинград) 33—40, 44, 46, 47; *Г. Яковенко* (Кисловодск) 35; *М. Яковлев* (Кемерово) 37, 40; *В. Яровой* (Ленинград) 38—47.

КВАНТ для младших школьников

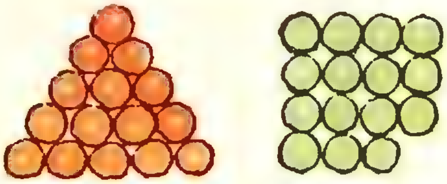
Задачи

1. Туристы купили в магазине сто предметов: спички (цена 1 копейка за коробку), пирожки (по 10 копеек) и консервы (цена — 50 копеек за банку). За все уплатили 5 рублей. Сколько предметов каждого товара куплено?

2. Попробуйте повернуть четыре кольца, изображенные на рисунке, так, чтобы сумма любых четырех чисел, расположенных на одном радиусе, равнялась одному и тому же числу. Какое это число?



3. 15 шариков можно сложить в виде треугольника, но нельзя сложить в виде квадрата — одного шарика не хватает (см. рисунок). Из какого количества шариков, не превосходящего 50, можно сложить как треугольник, так и квадрат?



4. Можно ли в квадрат со стороной длины 1 поместить несколько непересекающихся кругов, сумма радиусов которых равнялась бы 1979?

5. В ряд расположено пять монет. Средняя лежит вверх орлом, остальные — решкой. За один ход разрешается перевернуть любые три рядом лежащие монеты. Можно ли добиться, чтобы все монеты лежали вверх орлом? А если вверх орлом первоначально лежит только первая монета? А если только вторая?

А. Дозоров

Можно ли носить воду в решете?

> *Один раз мы взяли с собой керосинку, но больше — никогда! Целую неделю мы как будто жили в керосиновой лавке. Керосин просачивался всюду. Я никогда не видел, чтобы что-нибудь просачивалось, как керосин. Мы держали его на носу лодки, и оттуда он просочился до самого руля, пропитав лодку и все ее содержимое. Он растекся по всей реке, заполонил собой пейзаж и отравил воздух.*
>
> *Джером К. Джером. «Трое в одной лодке, не считая собаки»*

Вы помните историю про муравьишку, который очень торопился домой? Многие помогали ему. Например, через речку его перевез водомер. Это — насекомое, и вы, наверное, много раз видели его. Водомер совершенно спокойно стоит на воде и не тонет (рис. 1). Правда, если внимательно приглядеться, вода под ним немного прогибается.

Почему же это насекомое не тонет? И разве может вода прогибаться?

Оказывается, все дело в поверхностном слое жидкости. Он обладает целым рядом необычных свойств. Вы легко можете убедиться в этом, проделав несколько довольно простых опытов.

1. Налейте в тарелку немного воды. Возьмите иголку, лучше потоньше, и аккуратно положите ее на поверхность воды — иголка не тонет (рис. 2). Если опыт у вас не получился, не отчаивайтесь. Потрите иголку пальцами (или слегка смажьте ее маслом, или, еще лучше, потрите о свечку) и повторите опыт снова.

Посмотрите внимательно вдоль поверхности воды. Видите, что около иголки поверхность изогнута? Вне-

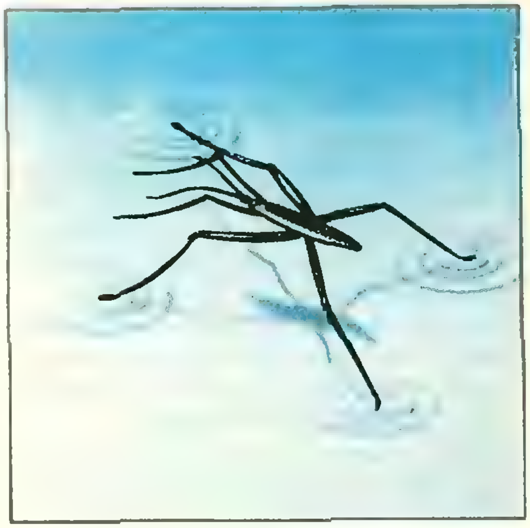


Рис. 1.

чатление такое, как будто иголка лежит на пленке.

Это сравнение довольно хорошее. Поверхностный слой жидкости, и вправду, чем-то похож на растянутую упругую пленку (хотя происхождение особых свойств поверхностного слоя совсем иное, чем у растянутой пленки). Попробуем это пояснить.

В глубине жидкости каждая молекула со всех сторон окружена соседями, которые тянут ее во все стороны одинаково. Молекулы же поверхностного слоя сверху соседей не имеют, поэтому они испытывают притяжение со стороны нижележащих молекул. Жидкость как бы стремится к тому, чтобы на ее поверхности было минимальное количество молекул. В результате поверхностный слой жидкости находится как бы в натянутом состоянии подобно упругой пленке. Иногда мы будем поверхность жидкости называть пленкой, но слово это будем заключать в кавычки.

Итак, не только водомер, но и более плотные тела, в нашем опыте — металлическая иголка, держатся на поверхности жидкости, причем они именно не «плавают» в обычном понимании этого слова, а удерживаются поверхностным натяжением жидкости.

Правда, если вы будете брать все более и более толстые иголки, то, начиная с некоторого момента, сила тяжести превысит силы поверхностного натяжения, и иголки будут тонуть. (Интересно, что длина иголки практически никакой роли не играет.)

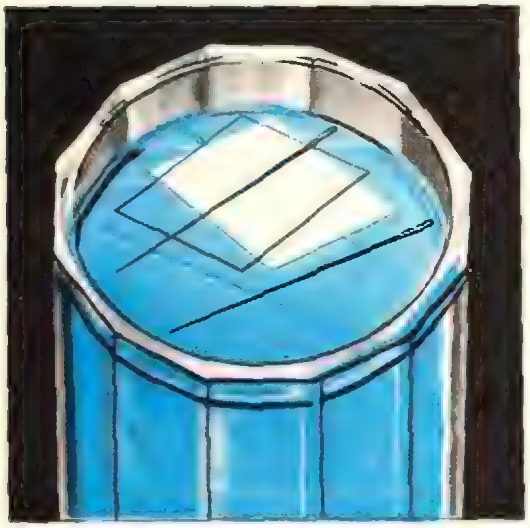


Рис. 2.

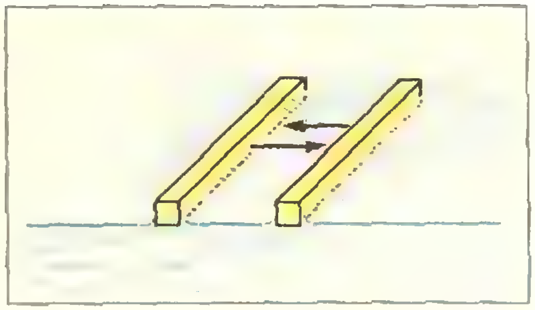


Рис. 3.

2. Оказывается, натяжение поверхностной «пленки» зависит от выбранной жидкости.

Положите иголку на поверхность воды. Возьмите спичку, отрежьте у нее головку (в основном — чтобы не перепачкаться), потрите кончик спички о мыло и коснитесь им воды сбоку от иголки, на расстоянии примерно 1 см от нее. Иголка немедленно отскочит от спички. Происходит это потому, что молекулы мыльного раствора слабее, чем молекулы чистой воды, притягивают к себе иголку. С разных сторон на иголку действуют разные силы, она движется в сторону действия большей силы. Принято говорить, что поверхностное натяжение чистой воды больше, чем мыльной.

Вы можете погонять иголку таким образом по всей тарелке. Обязательно подгоните ее к краю тарелки и повторите опыт. Как теперь ведет себя иголка?

Учтите, что мыло очень быстро распространяется по поверхности воды, так что почаще меняйте воду в тарелке.

Вместо иголки можно на поверхность воды положить спичку и проводить опыты с ней. (Иголка, то и дело тонущая от неосторожных движений, сильно усложняет эксперименты.)

Возьмите две спички и аккуратно положите их на воду параллельно друг другу. Спички будут сближаться (рис. 3). Снова раздвиньте их и кончиком третьей спички, предваритель-

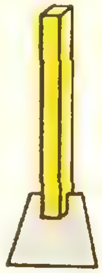


Рис. 4.

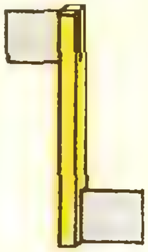


Рис. 5.

но потерев им о мыло, дотроньтесь до воды с разных сторон от плавающих спичек. Что с ними будет происходить?

По такому же принципу можно сделать несколько нехитрых игрушек и показать их действие малышам.

Расщепите немного конец спички и вставьте туда кусочек бумаги (рис. 4). В мыльнице приготовьте из мыла кашицу и аккуратно обмокните в нее торец бумажки. Осторожно положите спичку на воду — спичка поплывет. Вы заметили, в какую сторону плывет спичка?

Теперь в оба конца спички вставьте кусочки бумаги так, как показано на рисунке 5, и обмокните их в мыльную кашицу. Положите спичку на поверхность воды — спичка начнет вращаться.

На рисунке 6 показана модель пушки, которую вы можете вырезать из плотной бумаги. Чтобы эта пушка «выстрелила», достаточно мыльным концом спички коснуться поверхности воды в точке A.

Попробуйте вместо мыла брать другие вещества. Как-то в пионерском лагере можно было наблюдать такую картину. Группа ребят обступила небольшую лужу. У них в руках были маленькие щепки. Концы щепок ребята мазали еловой смолой и устраивали гонки — щепочки быстро и замысловато скользили по воде.

3. Поверхностное натяжение способно поднимать жидкость на сравнительно большую высоту.

Возьмите стеклянную трубочку с очень маленьким внутренним диаметром ($d \ll 1$ мм), так называемый *капилляр*. Опустите один из концов капилляра в сосуд с водой — вода поднимется выше уровня воды в сосуде. Чем тоньше капилляр, тем выше поднимается вода по его стенкам. Если у вас когда-нибудь брали кровь из пальца, вы это уже видели — медсестра в капилляр собирает капельку крови.

Капиллярные явления можно наблюдать повсюду. Это поднятие воды по мельчайшим отверстиям в куске сахара, поднятие керосина по фитилю в керосиновой лампе, всасывание влаги из почвы корнями различных растений и т. п.

Более скромный опыт можно проделать и с не очень тонкой трубочкой. Наберите в нее воду и пальцем закройте нижний конец трубки (рис. 7). Вы увидите, что уровень воды в трубке изогнут. Это результат того, что молекулы воды сильнее притягиваются к молекулам стенок сосуда, чем друг к другу. В таком случае говорят, что жидкость *смачивает* твердое тело.

Сделайте еще один опыт. Вылив чай, оставьте на дне чашки немного

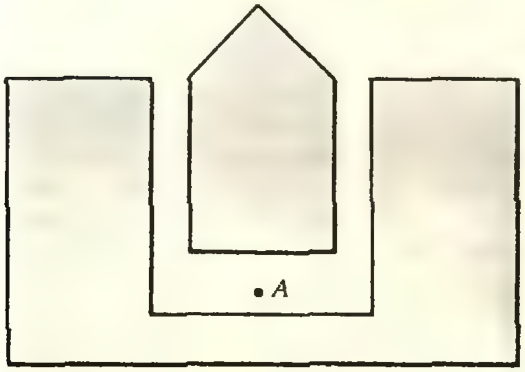


Рис. 6.

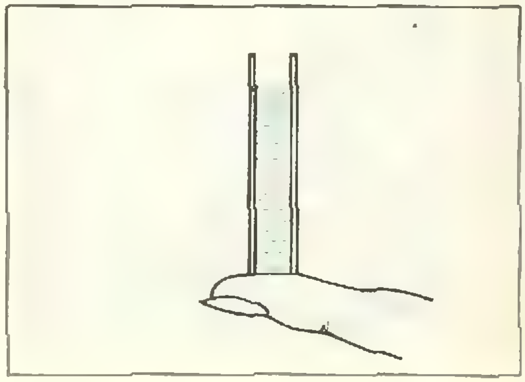


Рис. 7.

жидкости с чаинками. Чайной ложкой или спичкой осторожно коснитесь поверхности жидкости. Она тотчас же «поползет» вверх, увлекая за собой чаинки.

4. Не все жидкости и не во всяких трубках «цепляются» за стенки. Бывает и так, что жидкость в капилляре опускается ниже уровня в широком сосуде, при этом ее поверхность — выпуклая. Про такую жидкость говорят, что она *не смачивает* поверхность твердого тела. Притяжение молекул жидкости друг к другу сильнее, чем к молекулам стенок сосуда. Так ведет себя, например, ртуть в стеклянном капилляре (рис. 8).

Наберите в пипетку немного воды. Осторожно капните одну капельку на чистое стекло, а вторую — на хлеб, намазанный сливочным маслом. Первая капелька растечется по стеклу, а вторая (на сливочном масле) — нет. Вывод — вода смачивает стекло, но не смачивает масло.

Как вы ответите на известный вопрос: можно ли носить воду в решете? Возьмите решето, смажьте его маслом или лучше натрите свечкой. Влейте в решето немного воды — она не вытекает! Оказывается, воду держит поверхностная «пленка», образовавшаяся из-за несмачивания водой ячеек решета. Если у вас нет решета, вместо него можно взять, например, терку или консервную банку, в которой тонким гвоздиком пробиты маленькие дырочки.

Вы уже видели, что несмачивающая жидкость не растекается по поверхности, а собирается в каплю, причем чем меньше жидкости, тем форма капли ближе к сферической. Почему? Благодаря сильному притяжению молекул жидкости друг к другу жидкость принимает форму с наименьшей поверхностью. А это, как правило, сферическая поверхность.

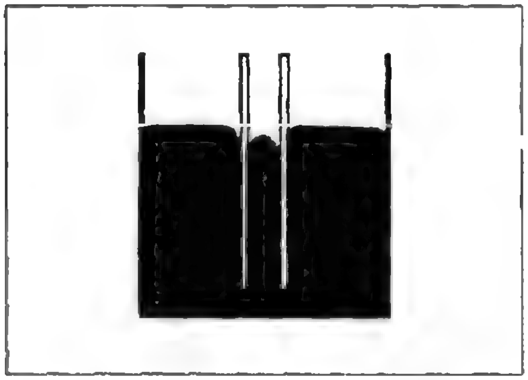


Рис. 8.

Последнее очень наглядно демонстрируется в состоянии невесомости. Если космонавт выпустит воду из сосуда (в невесомости нельзя сказать «выльет» в том смысле, как это понимается на Земле), она примет форму шара. Кратковременное пребывание расплавленного металла в состоянии невесомости во время падения с большой высоты издавна используется для производства дроби. Капли жидкого металла, падая, приобретают форму шарика и, остывая, сохраняют ее. Так получаются дробинки.

Аналогичный опыт вы можете провести и в домашних условиях. Покапайте стеарин с горящей свечки в таз с холодной водой — вы получите маленькие «дробинки». Свечку лучше держать как можно ближе к воде, тогда стеарин будет остывать именно на поверхности воды.

5. Поверхностное натяжение иногда оказывает столь сильное действие, что его можно ощутить (в буквальном смысле этого слова) руками.

Возьмите две одинаковые стеклянные пластинки. Протрите их хорошенько и приложите друг к другу. Они легко разъединяются. Теперь одну из пластинок смочите водой и сложите пластинки. Разъединить их очень трудно (если только не перемещать пластинки параллельно друг другу). Это результат действия поверхностного натяжения.

Итак, на простых опытах вы познакомились с особенностями поверхностного слоя жидкости. Подобных экспериментов можно провести очень много. Но имейте в виду, что всегда больше всего нравится тот опыт, который вы придумали сами.

С. Овчинников

Если промежуток не замкнут...

При решении геометрических задач на отыскание наибольшего (или наименьшего) значения иногда забывают, что искомые величины обычно удовлетворяют определенным ограничениям, обусловленным их геометрическим смыслом. Во многих таких задачах исследование рассматриваемой функции на границах ее области определения представляет собой существенную часть решения.

Ниже приводятся примеры такого исследования.

Задача 1. *Найти наибольшее значение величины периметра прямоугольника, вписанного в данный круговой сегмент так, что две его вершины лежат на хорде данного сегмента.*

Решение. Пусть $2a$ — длина хорды сегмента, а h — его высота (рис. 1). Легко видеть, что величина радиуса круга есть $R=\frac{a^2+h^2}{2h}$. Обозначив через x половину длины основания вписанного прямоугольника, находим длину второй стороны:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}-R+h.$$

Отсюда находим величину периметра P прямоугольника как функцию переменной x:

$$P(x)=4x+2\sqrt{R^2-x^2}-2R+2h.$$

При этом $x\in\,]0;\ a[$, если $h\leqslant R$, и $x\in\,]0;\ a]$, если $h>R$ (проверьте!).

Найдем критические точки функции P и исследуем их. Имеем

$$P'(x)=4-\frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Отсюда

$$P'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{R^2-x^2}=x.$$

Решая последнее уравнение, находим критическую точку $x_0=\frac{2\sqrt{5}}{5}R$.

Функция $\frac{2x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ является возрастающей. Поэтому производная $P'(x)$ положительна при $x<x_0$ и отрицательна при $x>x_0$. Таким образом, точка x_0 является точкой максимума функции P. Осталось исследовать вопрос, когда эта точка дает наибольшее значение периметра и что происходит, когда наибольшее значение в этой точке не достигается. В этом исследовании существенную роль играет интервал, на котором определена функция P. Напомним, что для $h\leqslant R$ это есть интервал $]0;\ a[$, а для $h>R$ — полуоткрытый промежуток $]0;\ a]$. И в том, и в другом случае, если критическая точка x_0 принадлежит интервалу $]0;\ a[$, то функция P принимает в ней свое наибольшее значение. Имеем

$$x_0\in\,]0;\ a[\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{5}}{5}R<a\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{a^2+h^2}{h}<a.$$

Решая последнее неравенство, находим $\frac{h}{a}\in\left]\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right[$.

Для всех таких значений a и h наибольшее значение периметра равно

$$P(x_0)=\frac{(\sqrt{5}-1)\,a^2+(\sqrt{5}+1)\,h^2}{h}.$$

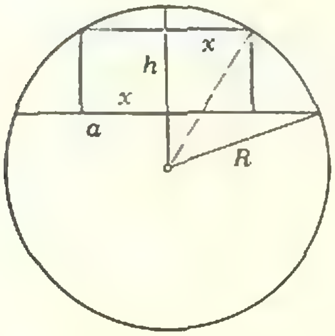


Рис. 1.

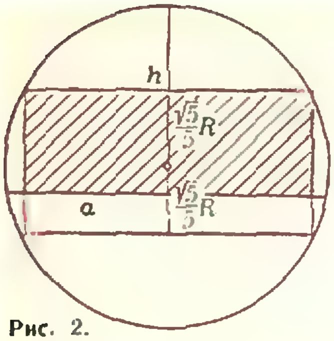


Рис. 2.

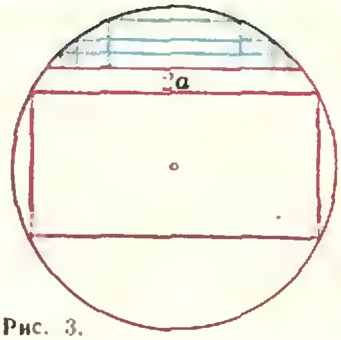


Рис. 3.

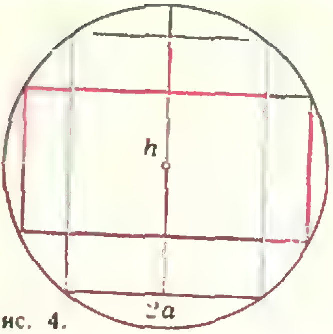


Рис. 4.

Пусть теперь критическая точка x_0 не принадлежит интервалу $]0; a[$, т. е. $x_0 \geqslant a$. В этом случае производная $P'(x)$ положительна для всех x из $]0; a[$ и функция P возрастает на интервале $]0; a[$.

Пусть $h \leqslant R$. Совместно с условием $x_0 \geqslant a$ это дает нам $\frac{h}{a} \leqslant \frac{\sqrt5-1}{2}$. Так как при $h \leqslant R$ функция P определена на интервале $]0; a[$, мы делаем вывод, что она не достигает своего наибольшего значения.

Если же $h > R$, то совместно с условием $x_0 \geqslant a$ получаем $\frac{h}{a} \geqslant \frac{\sqrt5+1}{2}$. Так как в этом случае функция P определена на полуоткрытом промежутке $]0; a]$, она достигает своего наибольшего значения при $x = a$. Это значение есть $P(a) = 4a + 2 \cdot \frac{h^2-a^2}{h}$.

Дадим наглядную геометрическую иллюстрацию полученным результатам. Выделим в круге радиуса R две параллельные «критические» хорды, находящиеся на расстоянии $\frac{\sqrt5}{5}R$ от центра круга (рис. 2), и достроим их до прямоугольника. Мы будем рассматривать лишь «верхние» сегменты с хордами, параллельными выделенным.

Если хорда данного сегмента находится между выделенными хордами, то $a > \frac{2\sqrt5}{5}R$ и вписанный в наш сегмент прямоугольник наибольшего периметра есть пересечение данного сегмента с прямоугольником, построенным на выделенных хордах (см. рис. 2).

Если хорда данного сегмента находится выше обеих выделенных хорд, то $h < R$ и $a \leqslant \frac{2\sqrt5}{5}R$; в этом случае периметры вписанных прямоугольников не достигают наибольшего значения (рис. 3).

Наконец, если хорда данного сегмента находится ниже обеих выделенных хорд, то $h > R$ и $a \leqslant \frac{2\sqrt5}{5}R$; в этом случае вписанный прямоугольник наибольшего периметра имеет своим основанием эту хорду (рис. 4).

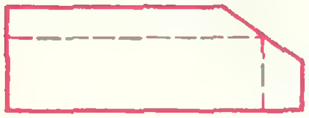


Рис. 5.

Задача 2. *Из прямоугольника с отрезанным «уголком» (рис. 5) требуется вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными сторонам данного прямоугольника.*

Решение. Введем систему координат, как это показано на рисунке 6, и продолжим линию «среза» до пересечения с осями координат. Пусть

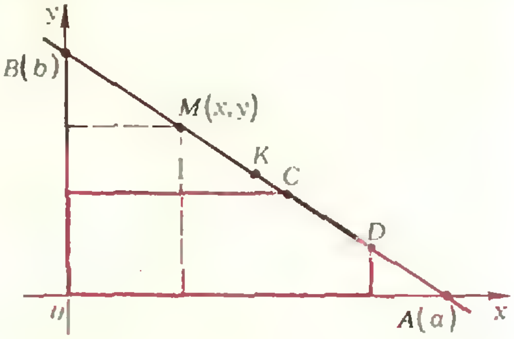


Рис. 6.

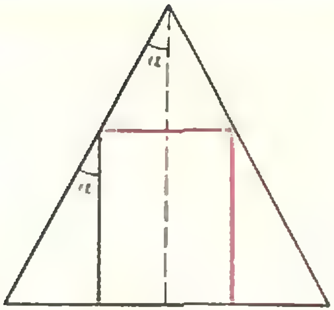


Рис. 7.

точки пересечения ее с осями координат есть A $(a,\ 0)$ и B $(0,\ b)$. Решим сначала следующую вспомогательную задачу: *вписать в треугольник AOB прямоугольник наибольшей площади, одна из вершин которого есть O.* Пусть величина основания прямоугольника есть x. Тогда его высота равна $b-\frac{b}{a}x$. Отсюда площадь прямоугольника, рассматриваемая как функция от x, есть

$$S(x)=x\left(b-\frac{b}{a}x\right).$$

Очевидно, $S(x)$ принимает наибольшее значение при $x_0=\frac{a}{2}$. При этом функция S возрастает на полуоткрытом промежутке $\left]0;\ \frac{a}{2}\right]$ и убывает на полуоткрытом промежутке $\left[\frac{a}{2};\ a\right[$.

Проведенное исследование функции S позволяет дать следующее наглядное решение исходной задачи. Если середина K отрезка $[AB]$ принадлежит «срезу» $[CD]$, то ее следует принять за вершину искомого прямоугольника. Если точка K находится «выше» среза $[CD]$, то за вершину искомого прямоугольника следует принять точку C. Если же она находится «ниже» среза $[CD]$, то за вершину искомого прямоугольника принимается точка D.

Задача 3. *В конус с углом 2α при вершине осевого сечения и величиной радиуса основания R вписать цилиндр с наибольшей площадью полной поверхности.*

Решение. На рисунке 7 изображено осевое сечение данного конуса. Обозначая через x величину радиуса основания вписанного цилиндра, легко находим, что его высота равна $(R-x)\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда полная поверхность, как функция переменной x, есть

$$S(x)=2\pi\cdot\operatorname{ctg}\alpha\,[(\operatorname{tg}\alpha-1)x^2+Rx].$$

Эта функция условиями задачи определена на интервале $]0;\ R[$. При $\operatorname{tg}\alpha\neq1$ легко находим критическую точку $x_0=\frac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$ функции S. В зависимости от расположения критической точки относительно интервала $]0;\ R[$ возможны три случая:

1) $x_0<0\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha>1$.

В этом случае, очевидно, функция S является возрастающей на интервале $]0;\ R[$. Своего наибольшего значения функция S в этом случае не достигает.

$$2)\ x_0\in\,]0;\ R[\ \Leftrightarrow 0<\frac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}<R\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{2}.$$

В этом случае критическая точка x_0 является, очевидно, точкой максимума функции S, причем на промежутке $]0;\ x_0]$ функция S возрастает, на промежутке $[x_0;\ R[$ убывает; следовательно, наибольшее значение этой функции есть $S(x_0)=\frac{\pi R^2\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$.

$$3)\ x_0\geqslant R\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant\operatorname{tg}\alpha<1.$$

В этом случае функция S опять является возрастающей на интервале $]0;\ R[$ и наибольшего значения не достигает.

Наконец, при $\operatorname{tg}\alpha=1$ функция S является возрастающей на интервале $]0;\ R[$.

Подводя итог исследованию функции S, можно сказать, что для $\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{2}$ в конус можно вписать цилиндр с наибольшей площадью полной поверхности. Если же $\operatorname{tg}\alpha\geqslant\frac{1}{2}$, то множество значений функции S есть открытый промежуток $]0;\ 2\pi R^2[$ («Алгебра и начала анализа 10», п. 84) и функция S наибольшего значения не достигает.

Задача 4. *Один из углов треугольника, вписанного в окружность радиуса R, равен α. Найти наиболь-*

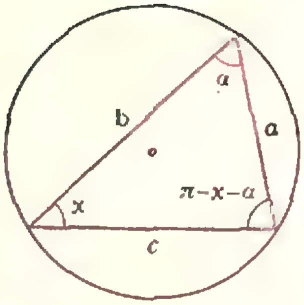


Рис. 8.

шее значение длины высоты треугольника.

Решение. Обозначим длины сторон треугольника через a, b и c (рис. 8) и пусть угол, лежащий против стороны a, равен x.

Очевидно, $x \in\,]0;\ \pi-\alpha[$. Заметим, что в условии не указано, о какой из трех высот треугольника идет речь. Поэтому при решении «в лоб» необходимо найти наибольшее значение длины каждой высоты, а затем уже из найденных значений определить наибольшее.

Обозначив длины высот треугольника, опущенных на стороны a, b и c, соответственно, через h_a, h_b и h_c, вычислим их как функции угла x. Используя теорему синусов и формулу для площади треугольника, находим

$$h_a(x)=\frac{bc}{a}\sin x=2R\cdot\sin\alpha\cdot\sin(x+\alpha),$$

$$h_b(x)=\frac{ac}{b}\sin(x+\alpha)=2R\cdot\sin\alpha\cdot\sin x,$$

$$h_c(x)=\frac{ab}{c}\sin\alpha=2R\cdot\sin x\cdot\sin(x+\alpha).$$

Рассмотрим функцию h_a при $x\in\,]0;\ \pi-\alpha[$. Очевидно, при $\alpha<\frac{\pi}{2}$ эта функция достигает наибольшего значения $2R\sin\alpha$ при $x_0=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Если же $\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}$, то функция h_a убывает на интервале $]0;\ \pi-\alpha[$ и наибольшего значения не имеет. Аналогично находим, что функция h_b для $\alpha<\frac{\pi}{2}$ достигает наибольшего значения $2R\sin\alpha$ при $x_1=\frac{\pi}{2}$, а для $\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}$ наибольшего значения не имеет.

Рассмотрим, наконец, функцию h_c.

$$h'_c(x)=2R\,[\cos x\cdot\sin(x+\alpha)+\sin x\cdot\cos(x+\alpha)]=2R\cdot\sin(2x+\alpha).$$

Очевидно, на интервале $]0;\ \pi-\alpha[$

$$h'_c(x)=0\Leftrightarrow\sin(2x+\alpha)=0\Leftrightarrow 2x+\alpha=\pi.$$

Критическая точка есть $x_2=\frac{\pi-\alpha}{2}$.

На этот раз $\alpha\in\,]0;\ \pi-\alpha[$ при любом допустимом α. На интервале $]0;\ \pi-\alpha[$ слева от точки x_2 производная положительна, а справа — отрицательна. Поэтому в точке x_2 функция h_c достигает своего наибольшего значения, равного $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Итак, нам осталось для каждого значения угла α найти наибольшее значение из найденных наибольших значений высот.

Рассмотрим сначала случай $\alpha<\frac{\pi}{2}$.

При таких α наибольшие значения высот достигаются и принимают два значения: $2R\sin\alpha$ и $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Преобразуем разность

$$2R\sin\alpha-2R\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2R\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1\right).$$

Отсюда можно сделать вывод:

а) при $\alpha<2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ максимальная высота равна $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

б) при $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ максимальная высота равна $2R\sin\alpha$.

Пусть теперь $\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}$. Выше мы отметили, что наибольшее значение высоты h_c равно $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Легко

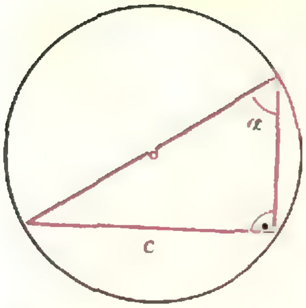


Рис. 9.

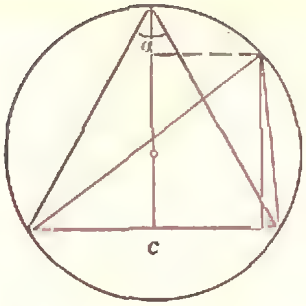


Рис. 10.

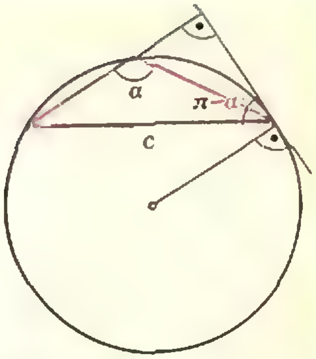


Рис. 11.

видеть, что значения функций h_a и h_b заполняют интервал $]0;\ 2R\sin^2\alpha[$. В рассматриваемом случае $2R\sin^2\alpha > 2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Значит, при $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$ наибольшее значение высоты не достигается.

Эту задачу можно решить изящнее, если привлечь геометрические соображения. Очевидно, $h_a \leqslant c$ и $h_b \leqslant c$. Поэтому при $\alpha < \frac{\pi}{2}$ наибольшие значения h_a и h_b равны c (рис. 9). Значит, в этом случае нам нужно выбрать большее из чисел h_c и c. При фиксированном α фиксировано также и $c = 2R\sin\alpha$. Наибольшее значение h_c имеет, очевидно, в равнобедренном треугольнике (рис. 10). Таким образом, в рассматриваемом случае нам, как и выше, нужно выбрать большее из чисел $2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$ и $2R\sin\alpha$. Если же $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$, то $h_a \geqslant h_c$ и $h_b \geqslant h_c$, причем h_a и h_b не достигают наибольшего значения, равного $c\sin(\pi - \alpha) = 2R\sin^2\alpha$ (рис. 11).

Внимательный читатель, конечно, заметил, что во всех разобранных задачах мы не следовали правилу из п. 59 пособия «Алгебра и начала анализа 9». По существу, это правило применимо лишь к случаю замкнутого промежутка. Если же промежуток открытый или полуоткрытый, как это и было почти во всех наших задачах, поведение функции на этом промежутке требует специального анализа!

Такая же проблема возникает в случае бесконечных промежутков.

Упражнения

1. В параболический сегмент, хорда которого перпендикулярна к оси симметрии параболы (рис. 12), вписать прямоугольник наибольшего периметра. (Длина хорды — $2a$, высота — h.)

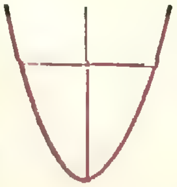


Рис. 12.

2. В треугольник с основанием a и высотой h вписать прямоугольник наибольшего периметра, две вершины которого лежат на основании треугольника.

3. Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходящую через $B\ (0;\ -b)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее расстояния от точки, лежащей на диаметре полукруга, до точек полуокружности, ограничивающей его. Тот же вопрос для кругового сегмента.

5 (ДГУ, биофак, 1978). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin 2x - x$ на $[0;\ \pi]$.

6 (ЛГУ, ф-т прикладной математики — процессов управления, 1977). Для каких значений параметра p наименьшее на промежутке $[0;\ 1]$ значение кубического трехчлена $x^3 - 2px^2 + 1$ достигается на правом конце промежутка?

7 (ХГУ, физфак, 1978). Найти наименьшее значение функции $y = \frac{1}{x} + \frac{q^2}{6 - x}$ на отрезке $[2;\ 3]$ в зависимости от параметра q.

Л. Асламазов

Закон сохранения импульса. Реактивная сила

Одна из возможных формулировок второго закона Ньютона утверждает, что изменение импульса (количества движения) механической системы равно импульсу внешних сил:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}_{\text{внеш}}\,\Delta t, \qquad (1)$$

где $\vec{P} = \Sigma m_i \vec{v}_i$ — полный импульс системы, $\vec{F}_{\text{внеш}} = \Sigma \vec{F}_{j\,\text{внеш}}$ — векторная сумма внешних сил, действующих на систему.

Для замкнутой (изолированной) системы $\vec{F}_{\text{внеш}} = 0$ и, следовательно,

$$\vec{P} = \text{const} \qquad (2)$$

— суммарный импульс системы есть величина постоянная. Это — закон сохранения импульса. Он позволяет найти конечные скорости взаимодействующих тел, образующих изолированную систему, не вдаваясь в детали взаимодействия.

Следует помнить, что уравнение (2) — векторное, и ответ может существенно зависеть от направления начальных скоростей тел.

Задача 1. *По гладкой горизонтальной поверхности движется тележка массой M со скоростью* $\vec{v}$ *(рис. 1). В нее стреляют из ружья, причем пуля массой m, летящая со скоростью* $\vec{V}$*, застревает в тележке. Какой станет скорость тележки после попадания в нее пули в случае: а) когда скорость пули направлена горизонтально, так же как скорость тележки, б) когда скорость пули направлена вертикально вниз?*

Воспользуемся законом сохранения импульса в проекции на направление первоначального движения тележки.

В случае а) получим:

$$mV + Mv = (m+M)\,v_{\text{к}},$$

откуда конечная скорость тележки

$$v_{\text{к}} = \frac{mV + Mv}{m+M}.$$

Как видно, после попадания пули скорость тележки увеличилась.

В случае б) начальный импульс пули не дает проекции на горизонтальное направление, следовательно,

$$Mv = (m+M)\,v_{\text{к}}.$$

Отсюда

$$v_{\text{к}} = \frac{Mv}{m+M}$$

— конечная скорость тележки уменьшилась.

Векторный характер закона сохранения импульса в ряде случаев приводит к неожиданным результатам.

Задача 2. *Две одинаковые лодки, в которых находятся два одинаковых спортсмена, движутся по инерции (почти без трения) с одинаковыми скоростями параллельно друг другу по поверхности озера (рис. 2). Начинается идти дождь. Спортсмен, сидящий в первой лодке, вычерпывает воду из*

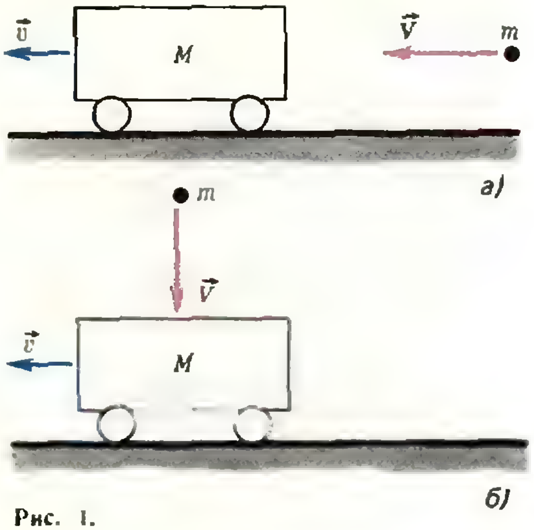


Рис. 1.

лодки и выливает ее в сторону, а спортсмен во второй лодке спит. Какая из лодок быстрее пройдет одно и то же расстояние? В направлении, перпендикулярном к килю, лодки двигаться не могут.

Как следует из решения задачи 1, при попадании в лодку воды массой m, начальная скорость которой направлена вертикально (дождь!), скорость лодки уменьшается и становится равной по модулю

$$v_к = \frac{M}{M+m}\, v\,,$$

где M — масса лодки, v — модуль ее начальной скорости. Отсюда видно, что изменение скорости лодки

$$\Delta v = v - v_к = \frac{v}{1 + M/m}$$

тем меньше, чем больше отношение M/m. Поскольку масса дождя, попавшего в лодки, одна и та же, уменьшение скорости будет бо́льшим у той лодки, из которой спортсмен вычерпывает воду. Заметим также, что при выбросе воды в сторону скорость лодки не меняется, так как киль не дает ей двигаться в перпендикулярном направлении.

Таким образом, вторая лодка, в которой спортсмен спит, быстрее пройдет заданное расстояние и первой окажется у финиша.

Если система незамкнутая, изменение ее импульса всегда связано с действием внешних сил.

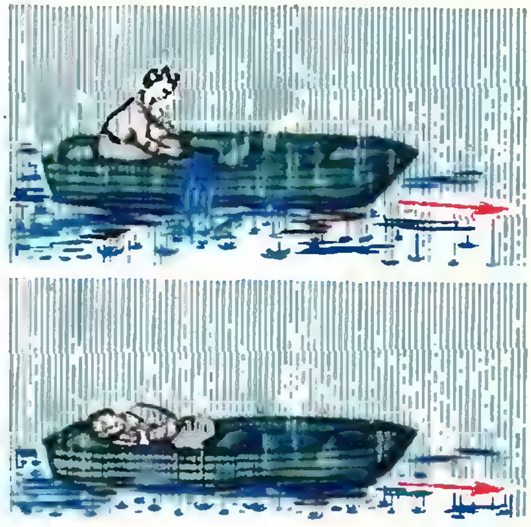


Рис. 2.

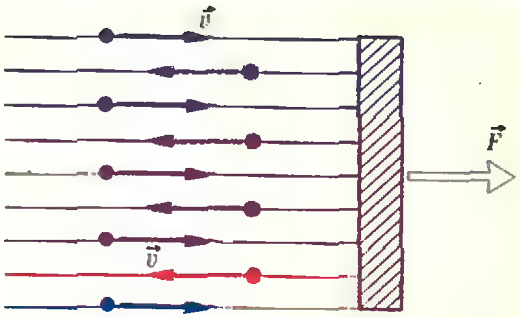


Рис. 3.

Задача 3. *Пучок частиц, имеющих скорость $\vec v$ и массу m, падает на пластину площадью S; при этом он частично поглощается, а частично упруго отражается (рис. 3). Какая сила действует на пластину, если концентрация частиц в пучке равна n, а доля поглощенных частиц α? Рассмотреть также случай, когда пластина сама движется со скоростью $\vec u$: а) навстречу пучку, б) в том же направлении, что и налетающие частицы.*

Вначале рассмотрим случай неподвижной пластины. Каждая частица, поглощаемая пластиной, передает ей импульс $m\vec v$. За время Δt до пластины долетают те частицы, которые находятся в объеме $V = vS\,\Delta t$ (v — модуль скорости частиц), то есть

$$N = nvS\,\Delta t \text{ частиц.}$$

Из них поглощается

$$N_{погл} = \alpha N = \alpha nvS\,\Delta t \text{ частиц,}$$

и, следовательно, пластине передается импульс

$$\vec P_{погл} = N_{погл}\cdot m\vec v = \alpha nvS\Delta t m\vec v.$$

В соответствии с формулой (1) на пластину действует сила $\vec F_1$, модуль которой равен

$$F_1 = |\vec P_{погл}|/\Delta t = \alpha nSmv^2.$$

При упругом отражении частицы модуль ее скорости, а значит, и модуль импульса частицы не меняются, однако направление вектора импульса меняется на противоположное. Поэтому изменение импульса частицы

$$\Delta\vec P = m\vec v - (-m\vec v) = 2\,m\vec v.$$

Число частиц, отраженных от пластины за время Δt, равно

$$N_{\text{отр}}=(1-\alpha)\,N=(1-\alpha)\,nvS\,\Delta t.$$

Следовательно, при отражении частиц пластине передается импульс

$$\vec{P}_{\text{отр}}=N_{\text{отр}}\cdot 2\,m\vec{v}=$$

$$=2\,(1-\alpha)\,nv\,S\,\Delta t\;m\vec{v},$$

что приводит к появлению силы $\vec{F}_2$, действующей на пластину. Ее модуль

$$F_2=|\vec{P}_{\text{отр}}|/\Delta t=2\,(1-\alpha)\,nSmv^2.$$

Полная сила, действующая на пластину, равна по модулю

$$F=F_1+F_2=(2-\alpha)\,nSmv^2. \qquad (3)$$

Для того чтобы найти силу, действующую на движущуюся пластину, перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью $\vec{u}$. В этой системе скорость частиц увеличивается при движении пластины навстречу пучку: $v_1=v+u$ и уменьшается при движении пластины в обратном направлении: $v_2=v-u$ (здесь v, u, v_1 и v_2 — модули соответствующих скоростей). В остальном все остается таким же, как в случае неподвижной пластины. Следовательно, сила, действующая на пластину, находится по формуле (3), в которой следует v заменить на v_1 или v_2:

$$F_a=(2-\alpha)\,nSm\,(v+u)^2,$$

$$F_б=(2-\alpha)\,nSm\,(v-u)^2.$$

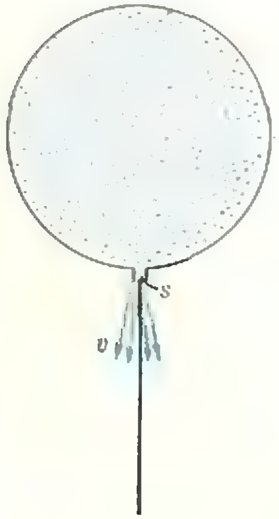


Рис. 4.

В первом случае сила возрастает, во втором — уменьшается.

Особый интерес представляет случай возникновения так называемой реактивной силы $\vec{F}_{\text{р}}$, когда из системы с некоторой скоростью $\vec{u}$ выбрасывается часть Δm ее массы. В соответствии с формулой (2)

$$\vec{F}_{\text{р}}=-\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{u}.$$

Величину $\mu=\Delta m/\Delta t$, равную массе вещества, выбрасываемого за единицу времени, называют обычно *расходом вещества*.

Задача 4. *В воздушном шарике, удерживаемом нитью, в том месте, где крепится нить, появилось отверстие сечением* s *(рис. 4). Как изменилось натяжение нити, если скорость истечения газа из шарика равна* v*? Плотность газа* ρ.

Изменение $\Delta\vec{T}$ натяжения нити равно по модулю реактивной силе, возникающей при вытекании газа из шарика (изменением выталкивающей силы и веса шарика в начальный момент, пока изменение объема шарика мало̀, можно пренебречь). За время Δt вытекает объем газа $V=sv\Delta t$, его масса $m=\rho sv\Delta t$. Следовательно, расход газа $\mu=m/\Delta t=\rho sv$ и реактивная сила

$$F_{\text{р}}=\Delta T=\rho sv^2.$$

Задача 5. *Закрепленный воздушный вентилятор потребляет мощность* N*, его КПД равен* η*. Какая реактивная сила действует на вентилятор во время его работы? Диаметр лопастей вентилятора* D*, плотность воздуха* ρ.

Обозначим через v модуль скорости воздушного потока, создаваемого вентилятором. Тогда масса воздуха, приводимого в движение за время Δt, равна $m=\rho vS\Delta t$, где $S=\pi D^2/4$ — площадь сечения воздушного потока (рис. 5), а его кинетическая энергия —

$$E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{\rho v^3\,S\Delta t}{2}.$$

Следовательно, мощность вентилятора

$$N=\frac{E_{\text{кин}}}{\eta t}=\frac{\rho v^3\,S}{2\eta}.$$

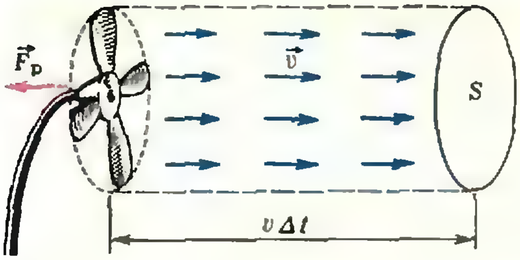


Рис. 5.

Отсюда можно найти скорость потока воздуха:

$$v = \left(\frac{2\eta N}{\rho S}\right)^{1/3}$$

и реактивную силу, действующую на вентилятор:

$$F_\text{р} = \rho S v^2 = (\rho S)^{1/3}\,(2\eta N)^{2/3} = \\ = (\pi\rho)^{1/3}\,(\eta D N)^{2/3}.$$

Если механическая система движется с постоянной скоростью, так что изменение ее импульса происходит только вследствие выброса массы, для нахождения реактивной силы удобнее перейти в систему отсчета, связанную с движущимся телом.

Задача 6. *На горизонтальной поверхности стоит сосуд с водой, закрытый легким подвижным поршнем, на котором лежит тяжелый груз массой M (рис. 6). У дна сосуда имеется отверстие сечением s, через которое вытекает вода. Какова установившаяся скорость движения сосуда, если сила трения между сосудом и поверхностью пропорциональна скорости сосуда, причем коэффициент пропорциональности равен k. Площадь сечения сосуда S.*

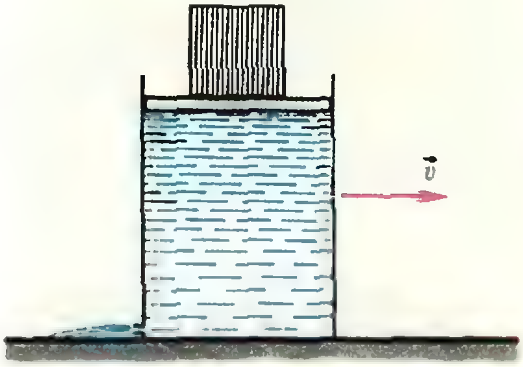


Рис. 6.

Искомая скорость (точнее, ее модуль v) определяется из условия равенства модулей силы трения и реактивной силы, действующей на сосуд:

$$F_\text{тр} = kv = F_\text{р}.$$

Чтобы найти реактивную силу, перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{v}$. В этом системе сосуд неподвижен. Для определения модуля u скорости истечения воды воспользуемся законом сохранения энергии.

При вытекании небольшого количества воды массой Δm изменение кинетической энергии воды $\Delta m u^2/2$ равно изменению потенциальной энергии воды $\Delta m g h$ (h — высота уровня воды в сосуде) и груза $Mg\Delta h$ (Δh — перемещение груза, равное изменению уровня воды):

$$\frac{\Delta m u^2}{2} = \Delta m g h + M g \Delta h.$$

Изменение уровня воды в сосуде Δh выражается через массу Δm вытекающей воды: $\Delta h = \Delta m/\rho S$. Подставляя это выражение в закон сохранения энергии и сокращая на Δm, для скорости u истечения воды получим

$$u = \sqrt{2gh + 2Mg/\rho S}.$$

Если груз достаточно тяжелый (то есть его масса много больше массы воды в сосуде: $M \gg \rho S h$), первым слагаемым под корнем можно пренебречь. В таком случае скорость истечения воды практически постоянна и равна

$$u = \sqrt{2Mg/\rho S}.$$

Теперь можно найти реактивную силу, действующую на сосуд:

$$F_\text{р} = u\frac{\Delta m}{\Delta t} = u\frac{\rho s u\,\Delta t}{\Delta t} = \rho s u^2 = \frac{2Mgs}{S},$$

и скорость движения сосуда:

$$v = \frac{F_\text{р}}{k} = \frac{2Mgs}{kS}.$$

Задача 7. *Из ракеты массой M, движущейся со скоростью $\vec{v}$, выбрасывается порция топлива m со скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Какой станет скорость ракеты? Какую скорость будет иметь ракета после выброса двух таких порций, трех порций, k порций (рис. 7)?*

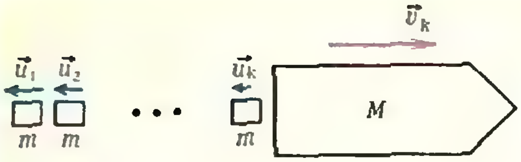


Рис. 7.

Воспользуемся законом сохранения импульса. Удобнее написать его в системе отсчета, движущейся с первоначальной скоростью ракеты $\vec{v}$ (так как скорость выброса топлива $\vec{u}$ задана относительно ракеты). В проекции на направление движения ракеты получим

$$0=(M-m)v_{1p}-mu,$$

откуда скорость ракеты

$$v_{1p}=\frac{mu}{M-m}.$$

В неподвижной системе отсчета скорость ракеты после выброса первой порции топлива равна по модулю

$$v_1=v+v_{1p}=v+\frac{mu}{M-m}.$$

Выброс второй порции топлива будем рассматривать в системе, движущейся со скоростью $\vec{v}_1$ (на рисунке 7 выброс топлива показан в неподвижной системе отсчета). Из закона сохранения импульса имеем

$$v_{2p}=\frac{mu}{M-2m},$$

а в неподвижной системе

$$v_2=v_1+v_{2p}=v+v_{1p}+v_{2p}=v+\frac{mu}{M-m}+\frac{mu}{M-2m}.$$

Легко видеть, что после k выбросов скорость ракеты будет равна

$$v_k=v+\frac{mu}{M-m}+\frac{mu}{M-2m}+\ldots+\frac{mu}{M-km}=v+\sum_{l=1}^{k}\frac{mu}{M-lm}.$$

Для сравнения найдем также скорость ракеты v_k' при одноразовом выбросе топлива массой km с той же скоростью $\vec{u}$ относительно ракеты. Для этого опять воспользуемся законом сохранения импульса, только запишем его сразу относительно неподвижной системы отсчета:

$$Mv=(M-km)v_k'+km(v-u),$$

откуда

$$v_k'=v+\frac{kmu}{M-km}.$$

Легко видеть, что $v_k'>v_k$. Такой результат связан с предположением, что скорость выброса топлива из ракеты в неподвижной системе отсчета постоянна и равна $v-u$. В действительности по мере ускорения ракеты скорость выброса топлива уменьшается (постоянна скорость выброса относительно ракеты). Поэтому первая формула для v_k более точно описывает реальную ситуацию.

Упражнения

1. Нейтрон массой m_0 поглощается ядром неподвижного атома массой m. Известно, что энергия возбужденного атома может отличаться от энергии основного состояния только на определенное значение E_0. С какой скоростью двигался нейтрон?

2. Ракета, запущенная вертикально вверх, взрывается в высшей точке своего подъема. При взрыве образуются три осколка равной массой. Один осколок падает в месте старта ракеты. Два других падают на Землю в один и тот же момент. Показать, что эти осколки приземляются на одном и том же расстоянии от места старта ракеты.

3. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально со скоростью $\vec{v}$? Масса змеи M, ее длина L.

4. Лестница, на которой находится человек, уравновешена противовесом на веревке, перекинутой через блок. Масса человека равна массе лестницы, а масса блока и трение пренебрежимо малы. Человек, находящийся вначале на высоте h от пола, поднимается по лестнице на n ступенек. На какой высоте от пола он окажется после этого, если расстояние между ступеньками равно l?

5. На конце соломинки, лежащей на гладком столе, сидит кузнечик. С какой наименьшей скоростью он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец соломинки? Трение между столом и соломинкой отсутствует. Масса соломинки M, ее длина l. Масса кузнечика m.

6. Скорость истечения газов из сопла ракеты равна 300 м/с относительно ракеты. Может ли такой двигатель разогнать ракету до скорости 600 м/с?

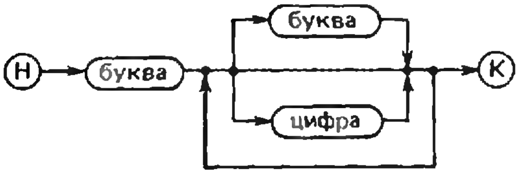
7. При испытании реактивного снаряда, установленного в хвосте самолета для защиты его от нападения сзади, был обнаружен удивительный факт: при пуске снаряд разворачивался и догонял самолет. Как можно объяснить это явление?

Заочная школа программирования

Урок 3: Работа с памятью. Имена и их значения.

Процедуры

При составлении программ на большинстве языков программирования, в том числе на Робике, память вычислительной машины или робота удобно представлять себе как набор отдельных блоков (рис. 1), в каждом из которых можно хранить отдельную программу (или ее часть), число, строку текста (вспомните задание 2.4 из предыдущего урока — «Квант», 1979, № 9, с. 57) или что-нибудь еще. *Имя блока памяти* (для краткости его называют просто *имя*, при описании некоторых языков в этом же смысле употребляют другое слово: *идентификатор*) можно описать следующей синтактической диаграммой:



Расшифруем эту диаграмму:

Имя начинается с буквы, за которой следует произвольное количество букв и цифр, стоящих в произвольном порядке. Множество значений переменного поля Цифра описано в уроке 2; для поля Буква мы дадим словесное определение: значением этого поля может быть любая буква русского или латинского алфавита.

Примеры имен:
А15, КРОКОДИЛ, СКОРОСТЬ,
В, L1, Q06П7, АЛЬФА

Несколько примеров типичных ошибок при попытке написать имена:
6А12Б (начинается не с буквы).
АВ-1 (дефис «-»— это не буква и не цифра).
ИМЯ БЛОКА (это не одно имя, а два)
'А5' (апостроф — это не буква).

Если в блоке памяти с именем А размещено, например, число 15, то говорят, что имени А *присвоено значение* 15.

Читать значение какого-либо имени можно сколько угодно раз, но если мы присвоили этому имени новое значение, то старое теряется безвозвратно. В языке Робик существует несколько предписаний, позволяющих присваивать именам значения. Самое простое из них — *предписание присваивания*. Синтаксическая диаграмма для этого предписания изображена в сводной таблице на с. 56 этого номера журнала. В переменном поле «выражение» может стоять либо число, либо текст, либо имя, как указано в той же сводной таблице.

Рассмотрим несколько примеров предписания присваивания:

```
ЗНАЧЕНИЕ 5 ПРИСВОИТЬ
ИМЕНИ А;
```

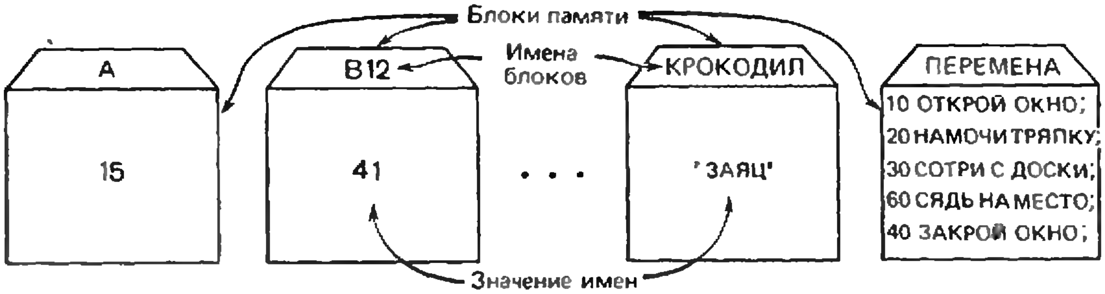


Рис. 1

```
ЗНАЧЕНИЕ СТРОКА ПРИСВОИТЬ
      ИМЕНИ  А;
ЗНАЧЕНИЕ  9.81  ПРИСВОИТЬ
      ИМЕНИ  УСКОРЕНИЕ;
8 ПРИСВОИТЬ ИМЕНИ А5;
А  ПРИСВОИТЬ  А5;
ЗНАЧЕНИЕ А ПРИСВОИТЬ А5;
```

Проверьте, что все эти примеры охватываются диаграммой!

Сокращенная запись, использованная в трех последних примерах, удобнее и компактнее, чем полная, но первое время мы рекомендовали бы пользоваться полной записью, чтобы запомнить смысл предписания.

Если в качестве значения переменного поля «выражение» в левой части предписания присваивания, т. е. левее слова ПРИСВОИТЬ, стоит число или текст, то именно это число или этот текст будут присвоены имени, указанному справа. Если же в качестве выражения используется имя, то присваиваться будет значение этого имени.

Попробуем проследить, как изменяется содержимое блоков памяти при последовательном выполнении перечисленных выше предписаний. Для этого нам целесообразно нарисовать *таблицу значений* имен. После выполнения первого присваивания эта таблица будет выглядеть так:

имя	значение
А	5

Иначе говоря, имя А имеет в этот момент значение 5. После второго присваивания имя А получит новое значение. Старое при этом будет безвозвратно потеряно. В таблице мы изобразим это так:

имя	значение
А	~~5~~'СТРОКА'

Такие таблицы удобнее всего рисовать мелом на доске, стирать старые значения и вписывать новые. Выражения «стереть из памяти» и «записать в память» весьма наглядно передают суть происходящего.

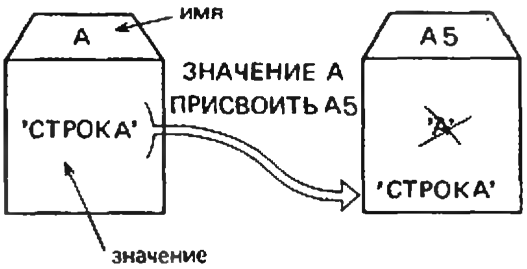
После выполнения следующих трех предписаний таблица станет такой:

имя	значение
А	~~5~~ 'СТРОКА'
ускорение	9.81
А5	~~8~~ 'А'

Проследим теперь за выполнением последнего предписания:

ЗНАЧЕНИЕ А ПРИСВОИТЬ А5;

В левой части предписания стоит имя, значит, нам нужно использовать его значение



Это значение будет присвоено имени А5 вместо старого текста 'А'.

После этого присваивания таблица приобретает такой вид:

имя	значение
А	~~5~~ 'СТРОКА'
ускорение	9.81
А5	~~8~~ ~~'А'~~ 'СТРОКА'

Точно так же «работает» значение поля «выражение» в предписании ОТПЕЧАТАТЬ, синтаксическая диаграмма которого приведена в сводной таблице: если в качестве выражения стоит имя, то будет отпечатано значение этого имени. (Напомним, что имя, в отличие от текста, не может начинаться с апострофа.) Например, выполняя предписание

ОТПЕЧАТАТЬ 5, А, А, А, 'А', '' , '   А5', '-', А5, 'ВСЕ',

на терминале появится строка:

```
5СТРОКАСТРОКАСТРОКАА     А5-
СТРОКАВСЕ
```

Обратите внимание, что текст печатается без апострофов!

Задание 3.1. *Найдите, что отпечатает ЭВМ по программе:*

```
5 ПРИСВОИТЬ А;
'А' ПРИСВОИТЬ В;
А ПРИСВОИТЬ С;
ОТПЕЧАТАТЬ 'В = ', В, 'С = ', С;
```

* * *

Теперь настало время разобраться, как можно было бы запомнить в памяти ЭВМ программу или ее часть, чтобы не набирать каждый раз все предписания заново.

Программа или часть программы, которая имеет имя, называется *процедурой;* процедуры предназначены для хранения в памяти ЭВМ.

Чтобы ЭВМ запомнила процедуру (поместила ее в память), нужно:

1. Набрать предписание ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ и указать имя этой процедуры.
2. Перечислить все предписания, входящие в состав процедуры, указывая перед каждым из них порядковый номер (натуральное число).
3. Набрать предписание ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ.

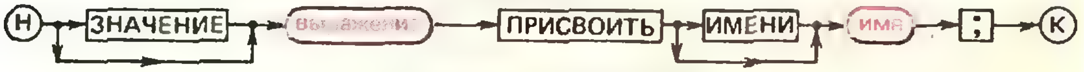
Синтаксическая диаграмма «Запоминание процедуры» изображена в сводной таблице (на участок этой диаграммы, выделенный синим цветом, пока не обращайте внимания).

Например, составленную на первом уроке программу для робота-дежурного РД-1 можно запомнить под именем ПЕРЕМЕНА при помощи такой последовательности предписаний:

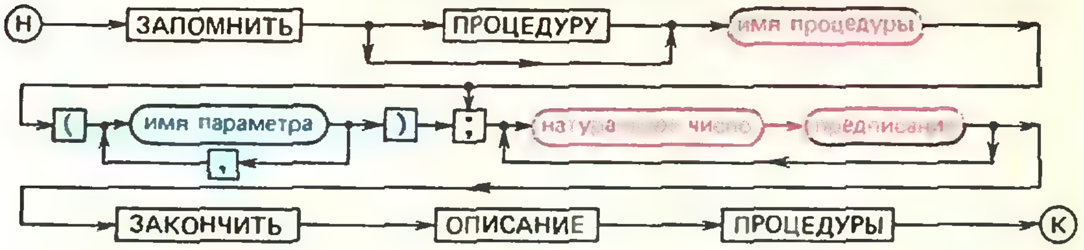
```
ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ ПЕРЕ-
      МЕНА;
10 ОТКРОЙ ОКНО;
20 НАМОЧИ ТРЯПКУ;
30 СОТРИ С ДОСКИ;
60 СЯДЬ НА МЕСТО;
40 ЗАКРОЙ ОКНО;
ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРО-
      ЦЕДУРЫ;
```

Для того чтобы хранящаяся в памяти процедура начала исполняться, ее нужно вызвать при помощи предписания ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ, структура которого изображена в сводной таблице.

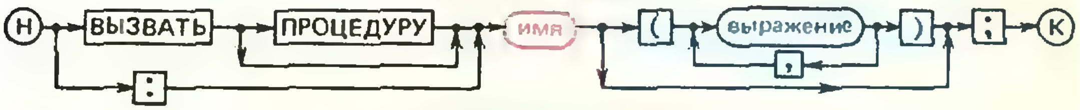
Присваивание:


Н
ЗНАЧЕНИЕ
выражение
ПРИСВОИТЬ
ИМЕНИ
имя
;
К

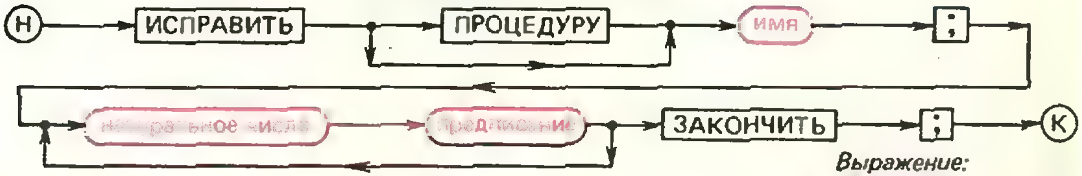
Запоминание процедуры:


Н
ЗАПОМНИТЬ
ПРОЦЕДУРУ
имя процедуры
(
имя параметра
)
,
;
натуральное число
предписание
ЗАКОНЧИТЬ
ОПИСАНИЕ
ПРОЦЕДУРЫ
К

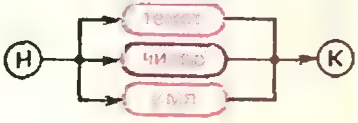
Вызов процедуры:


Н
ВЫЗВАТЬ
ПРОЦЕДУРУ
:
имя
(
выражение
,
)
;
К

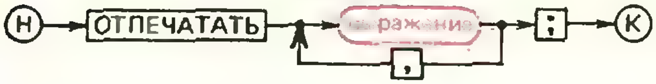
Исправление процедуры:


Н
ИСПРАВИТЬ
ПРОЦЕДУРУ
имя
;
натуральное число
предписание
ЗАКОНЧИТЬ
;
К

Выражение:


Н
текст
число
имя
К

Отпечатать:


Н
ОТПЕЧАТАТЬ
выражение
,
;
К

Например, если набрать на терминале робота РД-1 предписание
ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ
ПЕРЕМЕНА;
то робот начнет исполнять в порядке номеров все предписания, входящие в состав процедуры: откроет окно, увлажнит тряпку и так далее.

Процедуру ПЕРЕМЕНА можно вызвать и короче:
ВЫЗВАТЬ ПЕРЕМЕНА;
или просто:
:ПЕРЕМЕНА;

Механизм работы с номерами, указанными перед каждым предписанием при описании процедур, позволяет исправлять ошибки и вставлять пропущенные части программы.

Если вы заметили ошибку до того, как набрали слово ЗАКОНЧИТЬ, то для ее исправления достаточно заново набрать предписание, которое нужно исправить (вместе со старым номером). Номера рекомендуется проставлять не подряд, а, например, через 10, чтобы оставалось место для вставки пропущенных предписаний.

Если ошибка замечена тогда, когда описание процедуры уже закончено, необходимо набрать предписание ИСПРАВИТЬ ПРОЦЕДУРУ, синтаксическая диаграмма которого приведена в сводной таблице. После этого можно вновь набирать исправления так, словно описание процедуры еще продолжается. Окончив работу с процедурой, нужно вновь набрать слово ЗАКОНЧИТЬ.

Подробнее об исправлении текстов процедур мы поговорим на следующих уроках нашей школы.

Предписания, входящие в состав процедур, называют *операторами*. В отличие от *директив*, которые исполняются сразу после набора на терминале, операторы не исполняются, а запоминаются после набора. ЭВМ или робот начнут их исполнять только после того, как будет вызвана соответствующая процедура.

Почти все предписания, в том числе вызовы процедур, можно использовать и как операторы, и как директивы. Однако есть и исключения: директивы ЗАКОНЧИТЬ, ЗАПОМНИТЬ, ИСПРАВИТЬ нельзя употреблять в качестве операторов.

Задание 3.2. ***Придумайте системы предписаний для роботов «повара» и «шофера», и напишите для них две—три программы с использованием процедур.***

Г. Звенигородский

Задачи нашнх читателей

1. Найдите наименьшее значение суммы $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2$, если известно, что $\sum_{i=1}^{n} a_i=S$ и $a_i>0$. При каких a_i оно достигается?

В. Любимов
(Москва)

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные числа одного знака, среди которых есть различные. Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}>n^3.$$

Т. Райков
(Болгария)

3. Докажите следующие оценки:

а) $1+\frac{a}{2+0,5a}<\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2+0,4a}$, где $0<a<1$;

б) $1+\frac{a}{3+a}<\sqrt[3]{1+a}<1+\frac{a}{3+0,9a}$, где $0<a<\frac{1}{2}$.

Пользуясь оценкой б), вычислите приближенно $\sqrt[3]{2}$.

С. Берколайко
(с. Котово Белгородской обл.)

4. Докажите, что при $0<x<\frac{\pi}{2}$

$$\sin^m x\cdot\cos^n x\leqslant\sqrt{\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}}.$$

Я. Суконник
(Киев)

Всероссийская олимпиада школьников

С 24 по 28 марта 1979 года в городах Орле, Туле, Томске и Саратове проходил заключительный этап V Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике. В нем приняли участие школьники 8, 9, 10 классов; 245 школьников — по физике и 240 — по математике.

Для проведения Всероссийской олимпиады был создан Оргкомитет, работой которого руководил академик В. С. Владимиров. В состав Оргкомитета вошли видные ученые, работники Министерства просвещения РСФСР и представители общественных организаций. В составе Оргкомитета были и представители нашего журнала.

Всероссийская олимпиада проходит в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады, второй — районные (городские), третий — республиканские (АССР), краевые, областные, четвертый — зональные олимпиады.

В четвертом этапе принимают участие по одной команде от АССР, края, области, специализированных школ-интернатов при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах. (Команды Москвы и Ленинграда в четвертом этапе участия не принимают.)

Кроме победителей третьего этапа, в зональных олимпиадах участвуют победители заключительных этапов предыдущих Всесоюзной и Всероссийской олимпиад, получившие дипломы I и II степени, победители конкурса журнала «Квант» и команды городов, проводивших олимпиады.

На четвертом этапе по математике предлагалось 5 задач, по физике — 4 задачи на теоретическом туре и 2 задачи на экспериментальном туре.

Ниже приводятся задачи четвертого этапа и фамилии призеров. Часть задач была помещена в Задачнике «Кванта»*). Некоторые задачи экспериментального тура представлены в этом номере журнала в Лаборатории «Кванта» (см. с. 20).

Математика

8 класс

1. Доказать, что в последовательности

а) $2^2+1, 4^2+1, 6^2+1, 8^2+1, \ldots$;

б) $4^2+1,\ 14^2+1,\ 24^2+1,\ 34^2+1, \ldots$

бесконечно много составных чисел.

2. Разложить на множители многочлен x^4+ax^2+b, где $a, b, \in R$.

3. На сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S выбраны соответственно точки M, N, P, Q так, что $|AM|:|AB|=|BN|:|BC|=|CP|:|CD|=|DQ|:|DA|$. Найти сумму площадей треугольников APB, BQC, CMD, DNA.

4. См. задачу М586.

5. На плоскости расположено 2 000 000 точек. Существует ли окружность, внутри которой расположено ровно 1 000 000 точек?

9 класс

1. Найти все значения a и b такие, что для любого x из отрезка $[-1; 1]$ будет выполняться неравенство

$$|2x^2+ax+b| \leqslant 1.$$

2. Дан треугольник ABC площади S. Точки M, N — середины его сторон AC и AB соответственно. Точки P и Q делят сторону BC на три равные отрезка так, что $BP=PQ=QC$. Найти площадь общей части четырехугольника $ANPQ$ и треугольника BMC.

3. См. задачу М587.

4. См. задачу М588.

5. См. задачу М589.

10 класс

1. Используя неравенства $80<81$, $96<100$, $1000<1024$, найти первые два знака после запятой в десятичном разложении числа $\lg 2$.

2. Натуральные числа от 1 до 1979 в порядке возрастания записаны по кругу в направлении обхода часовой стрелки. Отправляясь от 1, будем двигаться по часовой стрелке, зачеркивая каждое второе из чисел, не зачеркнутых ранее. Процесс вычеркивания будем продолжать до тех пор, пока не останется одно число. Каков число останется?

3. Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен V. На отрезках BD и A_1C расположены пары точек M, N и P, Q соответственно. При этом $|BD|:|MN|=3$, $|A_1C|:|PQ|=4$. Найти объем тетраэдра $MNPQ$.

4. См. задачу М590.

5. Найти все числа a, b, c, d такие, что:

а) функция $f(x)=4x^3-dx$ при всех x из отрезка $[-1; 1]$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant 1$;

б) функция $g(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ при всех x из отрезка $[-1; 1]$ удовлетворяет неравенству $|g(x)| \leqslant 1$.

---

*) Решения задач по математике, не вошедших в Задачник «Кванта», будут опубликованы в журнале «Математика в школе», 1979, № 6

Физика

Теоретический тур

8 класс

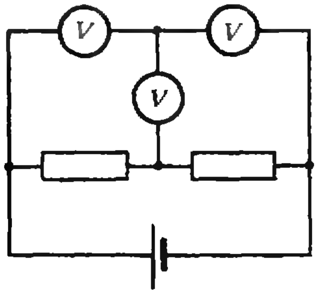
1. См. задачу Ф598.

2. Коза может бежать по дороге со скоростью не больше v, а по полю — со скоростью не больше u, причем $u < v$. Определить область точек, в которые коза может добежать за время t, если дорога прямая.

С. Кротов

3. См. задачу Ф599.

4. В схеме, приведенной на рисунке, все вольтметры одинаковые. На клеммы подается постоянное напряжение $U = 9$В.



Левый вольтметр показывает напряжение $U_1 = 2$В. Что показывают остальные вольтметры? *)

9 класс

1. На блок радиуса R надето кольцо из гибкой невесомой нерастяжимой нити. По нити скользит без трения маленькая бусинка массы m. Размер бусинки много меньше размера блока. Нить разрывается при натяжении, превышающем T. Определить наибольшую угловую скорость, которую может иметь бусинка и при которой нить не разрывается. При какой длине нити возможна наибольшая угловая скорость? Ускорение свободного падения не учитывать.

Д. Кузнецов

2. См. задачу Ф602.

3. Металлическая гайка удерживается на гладком хрупком куполе, имеющем форму полусферы радиуса R, в вершине которой сделано небольшое отверстие, в которое гайка свободно проходит. Какую минимальную скорость, направленную по касательной к куполу, нужно сообщить гайке, чтобы она попала в отверстие? Радиус, проведенный в точку нахождения гайки, составляет с вертикалью угол α.

С. Кротов

4. См. задачу Ф601.

10 класс

1. См. задачу Ф600.

2. См. задачу Ф574 («Квант», 1979, № 5).

3. См. задачу Ф576 («Квант», 1979, № 5).

4. Человек массы m разбегается равноускоренно от одного края плиты длины l и массы M, резко останавливаясь на другом краю. Коэффициент трения между плитой и горизонтальной поверхностью μ, а между человеком и плитой μ', причем $\mu' \gg \mu$. На какое минимальное расстояние L в направлении разбега может человек таким образом передвинуть плиту?

А. Варгин

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность воздуха при атмосферном давлении.

Оборудование: шар для взвешивания воздуха, весы и разновесы, насос Шинца или Комовского, сосуд емкостью 1—1,5 л, измерительный цилиндр емкостью 1 л.

2. См. Лабораторию «Кванта» (с. 20, задача 1).

9 класс

1. Определите ЭДС неизвестного источника тока.

Оборудование: источник тока с неизвестной ЭДС, источник тока с известной ЭДС, два конденсатора одинаковой емкости, миллиамперметр.

2. См. Лабораторию «Кванта» (с. 20, задача 2).

10 класс

1. См. Лабораторию «Кванта» (с. 20, задача 3).

2. Определите экспериментальную зависимость индукции магнитного поля вокруг прямолинейного проводника с током от силы тока и расстояния от проводника.

Оборудование: ВС-24, проволочная рамка, амперметр, магнитная стрелка, линейка измерительная.

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Бургай Д. (Ленинград, ФМШ № 45),
Евсиков М. (Брянск, с. ш. № 11),
Пименов А. (Казань, с. ш. № 123),
Табак А. (Каменск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

Беспамятных С. (Артемовский Свердловской обл., с. ш. № 12),
Ижболдин О. (Ленинград, ФМШ № 45),
Кузьмин Ю. (Москва, ФМШ № 18);

---

*) При таких числовых данных сопротивление в цепи оказывается отрицательным

по 10 классам—
Кожухин К. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Лазарев Ю. (Дзержинск Горьковской обл., с. ш. № 2),
Надеждин Б. (Москва, ФМШ № 18),
Фесенко И. (Ленинград, ФМШ № 45).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Иванцов Р. (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2),
Коротков А. (Горький, с. ш. № 44),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Унежев А. (Нальчик, с. ш. № 19);

по 9 классам—
Зайцев Ю. (Видное, с. ш. № 9),
Келарев А. (Свердловск, с. ш. № 141),
Павлющик С. (Москва, ФМШ № 18),
Трушин В. (Бийск, с. ш. № 18);

по 10 классам—
Забелин В. (Москва, ФМШ № 18),
Кузнецов С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Пикусов С. (Новочебоксарск, с. ш. № 2),
Облаков И. (Ленинград, ФМШ № 45).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Баков П. (Балашиха, с. ш. № 10),
Гутин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Матвеев А. (Ульяновск, с. ш. № 5),
Осадаев А. (Иркутск, с. ш. № 34);

по 9 классам—
Барков С. (Новомосковск, с. ш. № 2),
Криско А. (Владивосток, с. ш. № 61),
Павлов А. (Москва, ФМШ № 18),
Сивинцев (Свердловск, с. ш. № 141);

по 10 классам —
Гречко В. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Зудин Е. (Александров, с. ш. № 4),
Надежин Д. (Курган, с. ш. № 47),
Омельянчук А. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Беспалов А. (Горький, с. ш. № 40),
Воробьев А. (Тихвин, с. ш. № 8),
Кудрявцев С. (Магадан, с. ш. № 1),
Сафаралиев Р. (Астрахань, с. ш. № 32);

по 9 классам—
Иванов В. (Москва, ФМШ № 18),
Ратников Ф. (Ленинград, ФМШ № 45),
Светлов М. (Пермь, с. ш. № 9),
Яшин А. (Братск, с. ш. № 26);

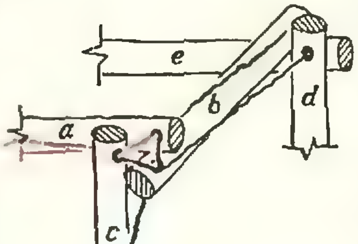
по 10 классам—
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),
Плотницын А. (Архангельск, с. ш. № 4),
Глушков А. (Йошкар-Ола, с. ш. № 8),
Шелепов Ю. (Барнаул, с. ш. № 42).

О. Овчинников, К. Шимбирева,
Ю. Широков, Г. Яковлев

Наша обложка

Трансформируемый куб

На второй странице обложки вы видите каркас куба составленный из стержней, скрепленных нитками, и еще три фигуры, полученные «трансформацией» этого куба. Для того чтобы изготовить такой куб, нужно взять 12 деревянных стержней и прочную нить (вместо нее можно использовать тонкую леску). На концах стержней следует просверлить отверстия диаметром один миллиметр. Затем эти стержни нужно связать так, как показано на рисунке. В конце стержня *a* завязывается нить. Затем она пропускается сквозь отверстие в стержне *c* и завязывается на другом конце стержня *a*. Следующая нить пропускается через отверстие в стержне *a* и завязывается на концах стержня *b*. Третья нить пропускается через отверстие в стержне *b* и завязывается на концах стержня *c*. Завязывать нити удобно так: пропустить их в отверстия на концах стержня и завязать на них узлы. Точно также следует связать и остальные вершины куба. При этом нужно проследить за тем, чтобы все вершины были связаны одинаково (по часовой или против часовой стрелки), то есть чтобы при перемещениях куба между ними не было разницы. Поскольку у каждого стержня два конца — вдоль его «вытянутся» две нити. Модель изготовлена!



В. Колейчук

Н. Васильев

Задачи республиканских олимпиад

Ряд задач, предлагавшихся в этом году на республиканских олимпиадах по математике, включен в Задачник «Кванта» (М556—М563, М587—М590). Задачи, предлагавшиеся на олимпиаде РСФСР, помещены на с. 58. Предлагаем читателям подумать также над следующими задачами, предлагавшимися в других республиках (указания и ответы к ним мы опубликуем в одном из следующих номеров).

После задачи указываются фамилии математиков, предложивших эти задачи редакции «Кванта» или Методической комиссии Всесоюзной олимпиады.

1. (8) Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 4, 5, 9 и 11 дает остатки соответственно 3, 4, 8 и 10.

Б. Агафонов

2. (8) Доказать, что всякое число вида 101010...101 (n нулей $n+1$ единиц, причем $n>1$) является составным.

Б. Агафонов

3. (8—9) a_1, a_2, ..., a_{10} — натуральные числа, сумма которых равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их НОД (наибольший общий делитель)?

А. Толпыго

4. (8—9) Пусть p — простое k-значное число, в записи которого нет нулей. Доказать, что все k чисел, полученных из p циклическими перестановками цифр, различны. (Пояснение: например, из числа 2317 циклическими перестановками цифр получаются еще три числа 3172, 1723, 7231.)

А. Слинько

5. (8—10) Множество M состоит из всех чисел вида x^2+x, где x — всевозможное натуральное число. Доказать, что для любого $k\geqslant 2$ в множестве M найдутся k различных чисел, сумма которых также принадлежит M.

В. Батырев

6. (8—9) Выпуклый четырехугольник разрезан на пять треугольников. Докажите, что один из треугольников содержит целиком некоторую сторону четырехугольника.

7. (8—9) Построенная по данной последовательности a_n последовательность $b_n = a_{n+1} - a_y$ является убывающей, причем b_1 меньше a_1. Доказать, что тогда и последовательность $c_n = a_n/n$ является убывающей.

З. Чантурия

8. (8—10) Отрезки AE и CD — биссектрисы углов треугольника ABC. Докажите, что если $\widehat{BDE}/\widehat{EDC} = \widehat{BED}/\widehat{DEC}$, то треугольник ABC — равнобедренный.

А. Савин

9. а) (8) Диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что четыре проекции точки их пересечения на стороны четырехугольника лежат на одной окружности.

б) (9—10) Дана четырехугольная пирамида, у которой диагонали AC и BD основания перпендикулярны, а основание H высоты совпадает с точкой пересечения диагоналей. Доказать, что четыре проекции точки H на боковые грани лежат на одной окружности.

В. Михайловский

10. (9—10) Рассматриваются все попарно неконгруэнтные треугольники с вершинами в точках, делящих окружность на N равных дуг ($N\geqslant 3$). При каких N: а) больше половины, б) ровно половина этих треугольников — равнобедренные?

Н. Васильев

11. (8—10) Во всех клетках прямоугольной таблицы $m\times n$ записаны числа $+1$ ($m > n \geqslant 2$). За один шаг разрешается одновременно сменить знак у четырех чисел любого квадрата 2×2. При каких m и n из первоначальной таблицы за несколько шагов можно получить таблицу:

а) с суммой всех чисел 0?

б) с расположением $+1$ и -1 в шахматном порядке?

А. Егоров

12. (8—10) Точка B лежит между точками A и C. В полуплоскости с границей AC взяты такие точки K и H, что $|AK| = |KB|$, $|BH| = |HC|$, $\widehat{AKB} = \alpha$, $\widehat{BHC} = 180^\circ - \alpha$. Найдите углы треугольника KHM, где M — середина отрезка AC.

Л. Купцов

13. (10) Доказать, что при $x \in [0; \pi/4]$ выполнено неравенство $x \cos x < 0.71$.

Л. Гоголадзе

Если промежуток не замкнут

1. При $\frac{a}{h} < 1$ стороны искомого прямоугольника $\frac{2a^2}{h}$ и $\frac{h^2-a^2}{h}$; при $\frac{a}{h} \geqslant 1$ наибольшее значение не достигается.
2. При $h = a$ периметр постоянен, при $h \neq a$ наибольшее значение не достигается.
3. При $b \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}$ наибольшая хорда равна $\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$, при $b > \frac{a\sqrt{2}}{2}$ наибольшая хорда равна $2b$.
4. Для полукруга это — расстояния до концов диаметра. Пусть теперь хорда сегмента длины $2a$ делится данной точкой на отрезки $a+\lambda$ и $a-\lambda$ $(\lambda > 0)$. Если сегмент не содержит центра круга, то наибольшее расстояние равно $a+\lambda$, а наименьшее $R-\sqrt{R^2+\lambda^2-a^2}$. Если сегмент содержит центр круга, то наибольшее расстояние равно $R+\sqrt{R^2+\lambda^2-a^2}$, а наименьшее $a-\lambda$.
5. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$.
6. $p \in \left[\frac{3}{4};\ +\infty\right[$.
7. $\frac{1+q^2}{3}$ для $|q| \in [0;\ 1[$, $\frac{(1+q)^2}{6}$ для $|q| \in [1;\ 2[$ и $\frac{2+q^2}{4}$ для $|q| \in [2;\ +\infty[$.

Закон сохранения импульса. Реактивная сила

1. $|\vec{v}| = \sqrt{2E_0(1/m_0+1/m)}$.
2. **Указание.** Воспользуйтесь законом сохранения импульса.
3. $|\vec{F}_д| = M|\vec{v}|^2/L$.
4. $H = h + 3/4\ nl$.
5. $|\vec{v}_{min}| = \sqrt{Mgl/(M+m)}$.
6. Может (реактивная сила определяется значением скорости истечения газов относительно ракеты)
7. Непосредственно после вылета из ракеты снаряд движется в ту же сторону, что и ракета, то есть вперед. Через некоторое время стабилизаторы разворачивают снаряд, затем под действием реактивной силы он разгоняется и может догнать самолет.

Заочная школа программирования (уроки 1 и 2)

(см. «Квант», № 9)

К заданию 1.1.

Программы В и Д формально правильны.

В программе А перед предписаниями поставлены номера, хотя это не предусмотрено системой предписаний, поэтому робот не сможет исполнить эту программу. Если номера убрать, то исполнить программу робот сможет, но поведет себя при этом как очень глупый дежурный: сначала вытрет доску сухой тряпкой, а потом побежит ее мочить, откроет окно и сразу же его закроет.

В программе Стрижды нарушен второй закон программирования: предписаний ПОДМЕТИ ПОЛ, ВЫТРИ С ДОСКИ, СЯДЬ ЗА ПАРТУ нет в СПР. Хотя программа Д формально правильна, то есть робот может ее исполнить, но после этого доска останется грязной, а окно — незакрытым.

В программе Е после предписаний поставлены точки вместо точек с запятыми. Если исправить эту ошибку, получится правильная программа.

К заданию 1.2. См. рис. 1.

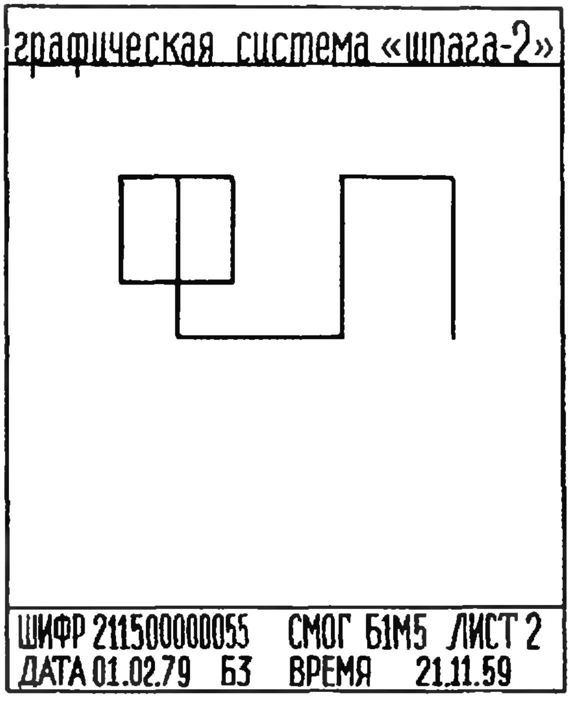

графическая система «шпага-2»
ШИФР 21150000055 СМОГ Б1М5 ЛИСТ 2
ДАТА 01.02.79 Б3 ВРЕМЯ 21.11.59

Рис. 1.

К заданию 1.3. Например: 11313112 12113131131221213121221121211221121211 2 211212110.

К заданию 2.1. В тексте справки шесть переменных полей. Соответствующая синтаксическая диаграмма могла бы выглядеть так:

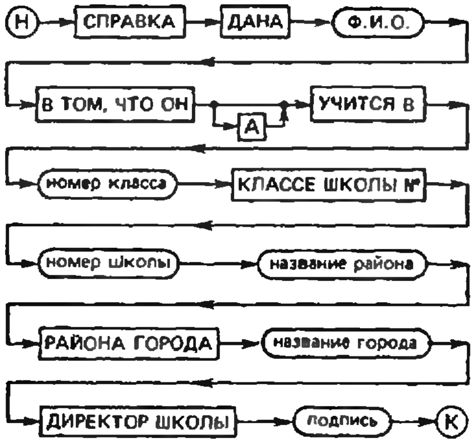

Н
СПРАВКА
ДАНА
Ф.И.О.
В ТОМ, ЧТО ОН
А
УЧИТСЯ В
номер класса
КЛАССЕ ШКОЛЫ №
номер школы
название района
РАЙОНА ГОРОДА
название города
ДИРЕКТОР ШКОЛЫ
подпись
К

Рис. 2.

После подстановки значений переменных полей это предложение превратится в **утверждение**.

К заданию 2.2. См. рис. 3.

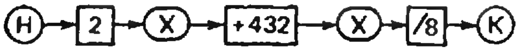


Рис. 3.

К заданию 2.3. Натуральное число не принято начинать с нуля.

К заданию 2.5. 5.3. —52.01 0.00000

К заданию 2.6. См. рис. 4.

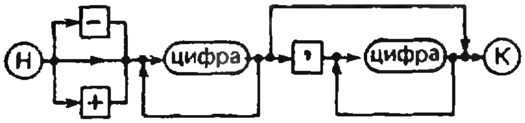

Н
−
+
цифра
,
цифра
К

Рис. 4.

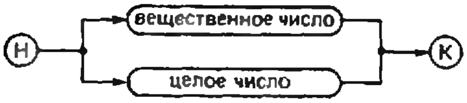

Н
вещественное число
целое число
К

Рис. 5.

К заданию 2.7. См. рис. 5.

К заданию 2.8. Один из возможных вариантов программы:

```
ПРОЕХАТЬ 300 М;
ОТПЕЧАТАТЬ 'Я ПРИБЫЛ
В ТОЧКУ В';
ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;
ПРОЕХАТЬ 500 М;
ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;
ПРОЕХАТЬ 600 М;
ОТПЕЧАТАТЬ 'Я В ТОЧКЕ С';
ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;
ПРОЕХАТЬ 625 М;
ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;
ПРОЕХАТЬ 731 М;
ОТПЕЧАТАТЬ 'Я В ТОЧКЕ Д';
ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;
ПОВЕРНУТЬ ВЛЕВО;
ПРОЕХАТЬ 431 М;
ПОВЕРНУТЬ ВПРАВО;
ПРОЕХАТЬ 125 М;
ОТПЕЧАТАТЬ 'Я ПРИБЫЛ
В ТОЧКУ А';
```

Всероссийская олимпиада школьников Физика

8 класс

2. См. рисунок 6.

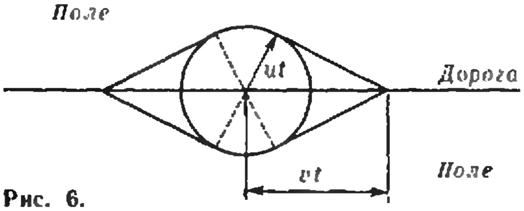

Поле
ut
Дорога
vt
Поле

Рис. 6.

9 класс

1. $\omega_{\max}=\sqrt{\dfrac{T}{mR}}$; $l=\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\right)R$.

3. При $\cos\alpha\geqslant {}^2/_3$ гайка может попасть в отверстие, двигаясь по поверхности купола; при этом

$$v_{\min}=\sqrt{2gR(1-\cos\alpha)}.$$

При $\cos\alpha<{}^2/_3$ гайка попадает в отверстие, летя по параболе; при этом

$$v_{\min}=\sqrt{gR\,\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\alpha}}.$$

10 класс

4. $L=\dfrac{m}{m+M}\,l$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. 2 часа 30 минут.

2. Сумма $1+2+3+\ldots+p$ равна $\dfrac{p(p+1)}{2}$.

Если она оканчивается на 1979, то, в частности, $p(p+1)$ оканчивается на 8. Последняя цифра произведения определяется последними цифрами сомножителей, поэтому, проверив, что произведения $1\cdot2$, $2\cdot3$, …, $8\cdot9$ не оканчиваются на 8, заключаем, что рассматриваемая сумма не может оканчиваться на 1979.

3. 10 ворон и 25 ворон.

4. $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{2^2-1}{2^2}=\dfrac{2-1}{2}\cdot\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}$;

$$1-\frac{1}{9}=\frac{3^2-1}{3^2}=\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\ \text{и т. д.}$$

Поэтому

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{125}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\times\ldots$$

$$\ldots\times\left(\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\right)=\frac{8}{15}.$$

5. Пусть $\overline{abc}$ — задуманное число. Тогда

$$|\overline{abc}-\overline{cba}|=|a\cdot 10^2+b\cdot 10+c-c\cdot 10^2-$$
$$-b\cdot 10-a|=99\,|a-c|.$$

Поэтому если $a=c$, то есть последняя цифра разности равна нулю, то и в ответе будет нуль.

При $a\neq c$ $(0<a\leqslant 9,\ 0<c\leqslant 9)$ получаем, что у ответа цифра, стоящая в разряде десятков, и сумма цифр, стоящих в разрядах сотен и единиц, всегда равна девяти. Поэтому, узнав, что последняя цифра ответа есть x, мы можем сразу назвать ответ: $\overline{(9-x)9x}$ (скажем, если $x=5$, то ответ будет 495).

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 14)

Задача 1

$$S=\frac{b}{(1-q)^2}\left[(a+(n-1)\,d)\,q^{n+1}-\right.$$
$$\left.-(a+nd)\,q^n-(a-d)\,q+a\right],$$

если $q\neq 1$;

$$S=bn\,\frac{2a+(n-1)\,d}{2},$$

если $q=1$.

Задача 2

$$\Sigma=nab+\frac{n(n-1)}{2}(d_1b+d_2a)+$$
$$+d_1d_2\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

1. $\frac{1}{99^2}\left[(2n-1)\,100^{n+1}-2n\,100^n-\right.$ $\left.-(n-1)\,100+n\right].$

2. $\frac{3}{999^2}\left[(2n-1)\,10^{3(n+1)}-2n\,10^{3n}-\right.$ $\left.-(n-1)\,10^3+n\right].$

3. $\frac{1}{3}\,n\,(n+1)\,(n+2).$

4. $\frac{1}{3}\,n\,(4n^2+12n-1).$

5. $143n+24n(n-1)+\frac{2n(n-1)(2n-1)}{3}.$

6. $3n+\frac{13}{2}\,n\,(n-1)+\frac{5}{3}\,n\,(n-1)\,(2n-1).$

7. $399n+182n\,(n-1)+$ $+\frac{77}{6}\,n\,(n-1)\,(2n-1).$

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили
Г. Красиков, Э. Назаров, П. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 1/VIII-79
Подписано в печать 12/IX-79
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,05 Т-16168
Цена 30 коп. Заказ 1718
Тираж 279160 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ЮБИЛЕЙ АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКИ

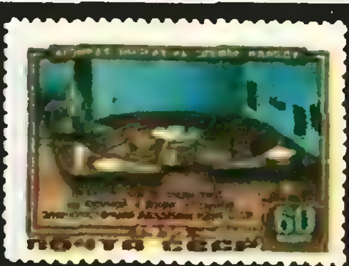
Исполнилось 25 лет со дня пуска первой в мире атомной электростанции. Это выдающееся событие в истории человечества произошло 27 июня 1954 года в городе Обнинске Калужской области.

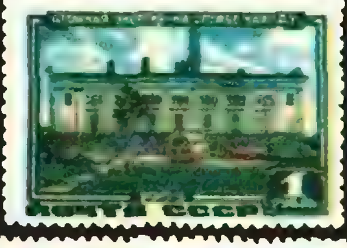
Советский Союз осуществляет грандиозную программу строительства мощных атомных электростанций с различными атомными реакторами. Наша страна оказывает огромную помощь другим социалистическим государствам в развитии атомной энергетики. Одновременно ведется большая работа по созданию атомных транспортных средств. Уже вступили в строй три мощных атомных ледокола — «Ленин», «Сибирь» и «Арктика». Они коренным образом изменили условия навигации в Северном Ледовитом океане. 17 августа 1977 года ледокол «Арктика» впервые в истории мореплавания достиг Северного полюса Земли.

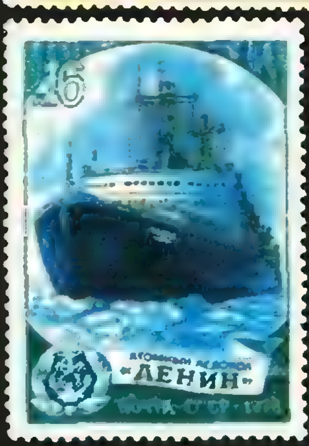
Успехи нашей страны в области мирного использования атомной энергии нашли свое отражение в отечественной филателии. В январе 1956 года была выпущена серия из трех марок, посвященных первой атомной электростанции. Две из них воспроизведены в верхней части нашей подборки. В 1958 и 1978 годах выпускались марки с изображением атомных ледоколов. Ледокол «Ленин» мы видим и на воспроизведенной здесь кубинской марке. Любопытно, что рядом с ним изображены пингвины, которых нет в северном полушарии.

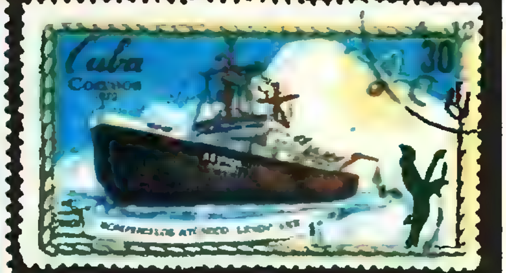
В 1958, 1962 и 1963 годах в почтовое обращение поступили марки, посвященные борьбе народов за запрещение атомного оружия и использование атомной энергии только в мирных целях. Три из них приведены в нашей подборке вместе с номерным почтовым блоком, выпущенным в честь рейда «Арктики» к Северному полюсу.

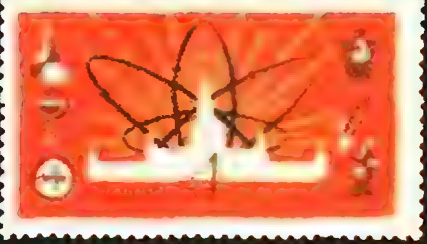
В. Рудов

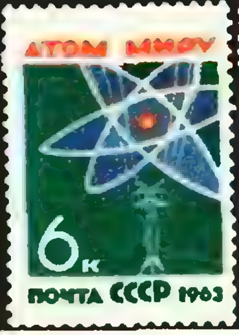

60
ПОЧТА СССР

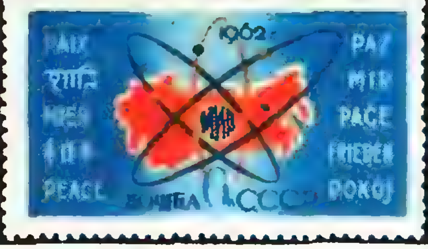

1
ПОЧТА СССР

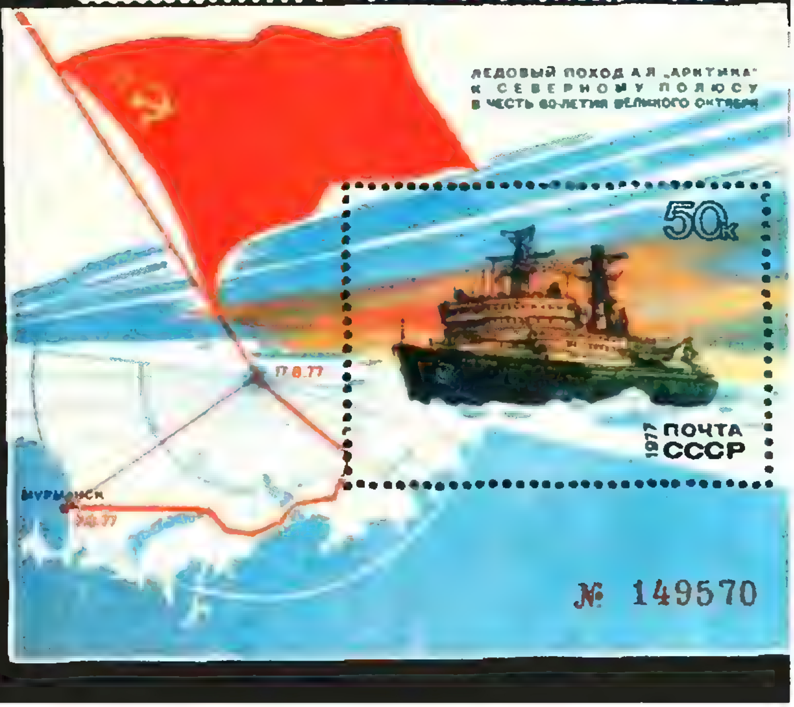

6
АТОМНЫЙ ЛЕДОКОЛ
«ЛЕНИН»
ПОЧТА СССР 1978

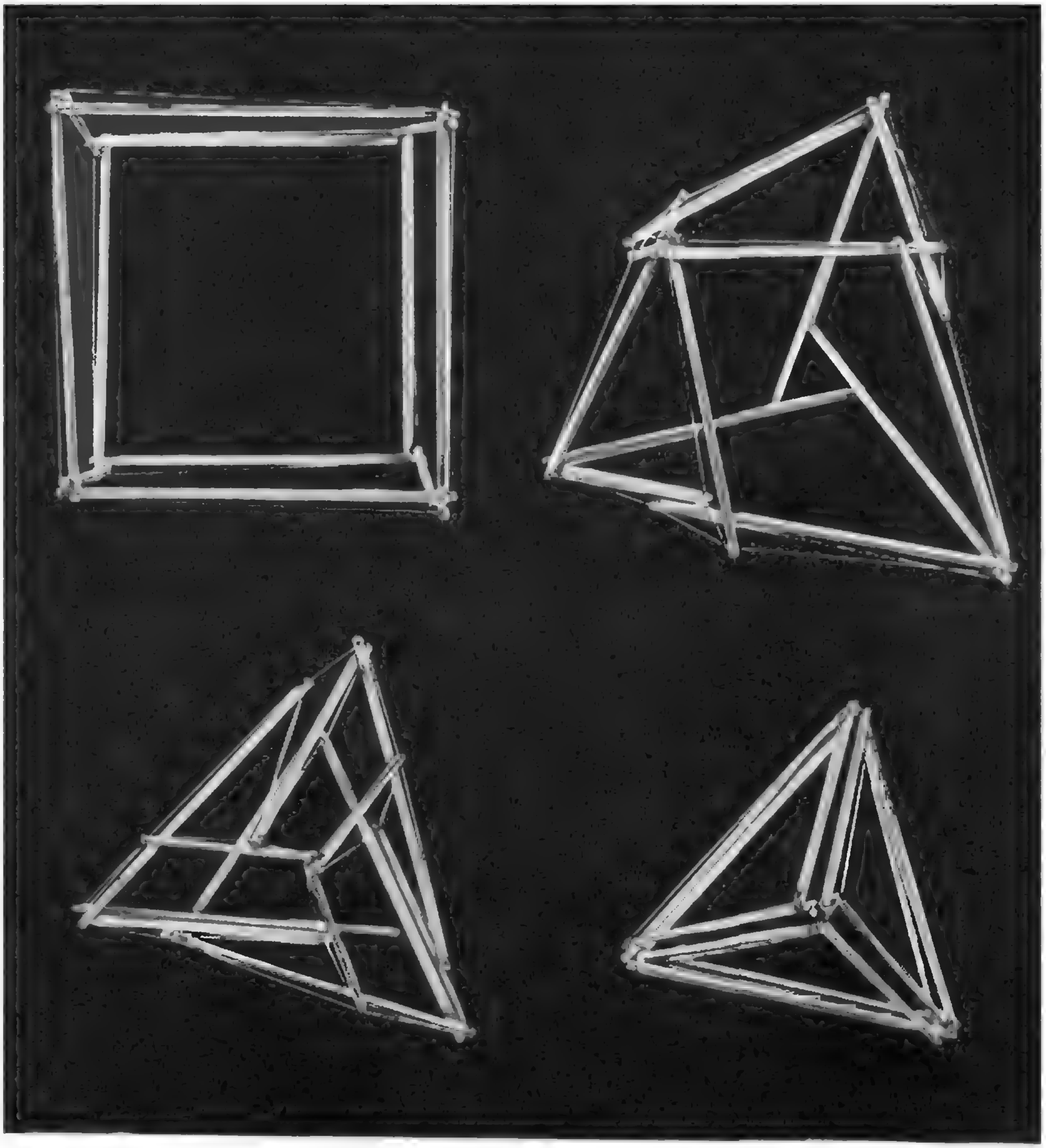

Cuba
Correos
30




АТОМ МИРУ
6к
ПОЧТА СССР 1963


1962
PAIX
MIR
PACE
FRIEDEN
PEACE
POKOJ
СССР

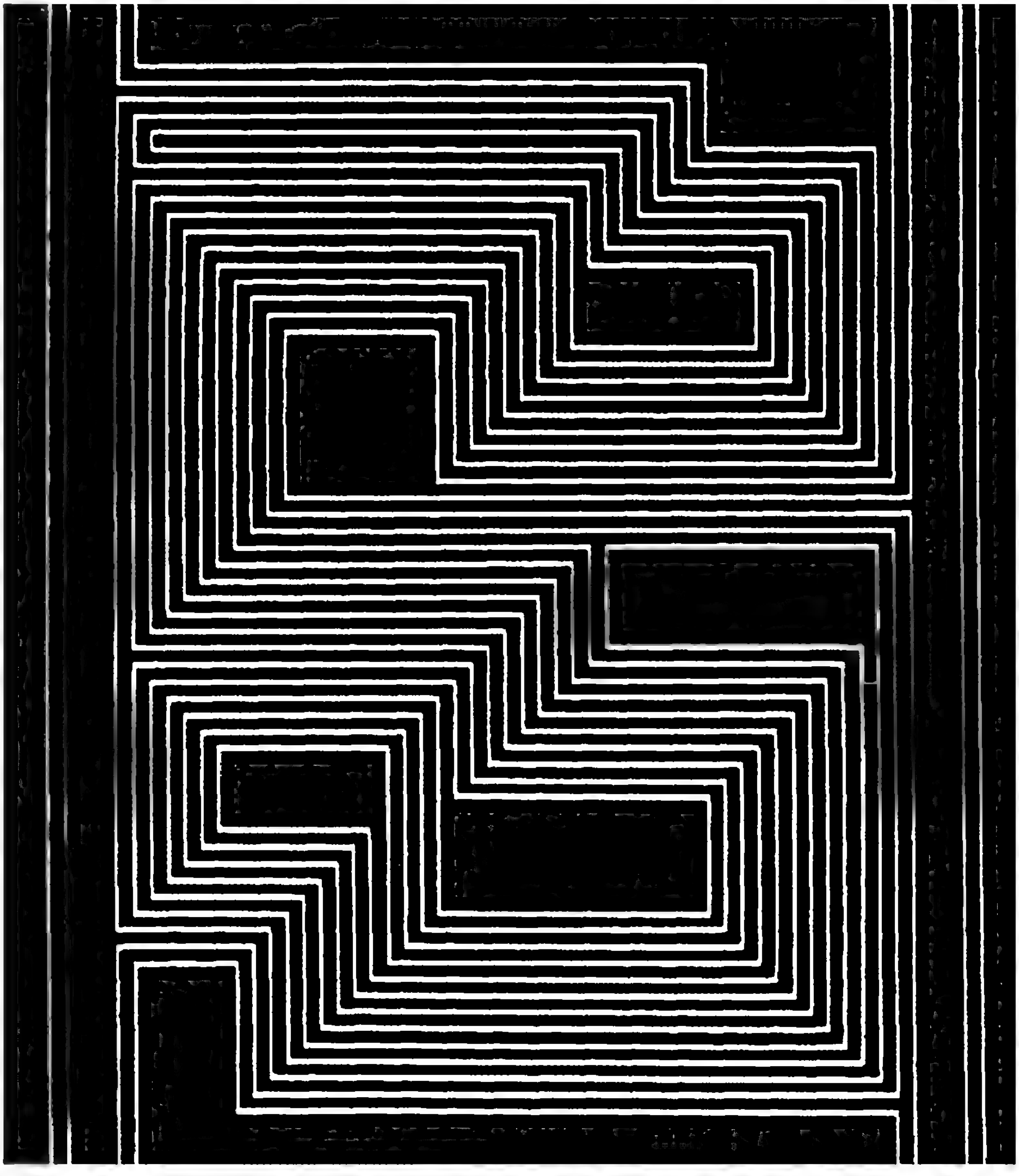

ЛЕДОВЫЙ ПОХОД А/Л «АРКТИКА» К СЕВЕРНОМУ ПОЛЮСУ В ЧЕСТЬ 60-ЛЕТИЯ ВЕЛИКОГО ОКТЯБРЯ
50к
1977 ПОЧТА СССР
17.8.77
МУРМАНСК
9.8.77
№ 149570



Все эти фигуры получены преобразованием одной и той же модели, составленной из двенадцати стержней, скрепленных нитками. Автор этой модели В. Колейчук назвал ее трансформируемым кубом. О том, как изготовить такой куб, рассказано на с. 58.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Можете ли вы выяснить, как расположены «черные дыры»: какие из них ближе к наблюдателю, а какие — дальше? Может ли этот рисунок служить изображением пространственного объекта, или на нем изображен невозможный объект? И, наконец, если это плоский лабиринт, то сколько у него входов?



НОМЕР
11

Основан в 1970 году

Квант

11
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Кириллов, И. Клумова, А. Сосинский.* Сюрреальные числа
10 *Б. Новожилов.* Тепловой взрыв

Лаборатория «Кванта»

17 *С. Шабанов, В. Шубин.* О вихревых кольцах

Математический кружок

22 *С. Агеев.* Регулярное полимино

Задачник «Кванта»

25 Задачи М591—М595; Ф603—Ф607
27 Решения задач М538, М539; Ф547—Ф552

«Квант» для младших школьников

36 Задачи
37 *П. Киноев.* Опыты с водой на морозе

Практикум абитуриента

41 *Г. Бевз.* Задачи можно решать проще

Искусство программирования

44 Заочная школа программирования. Урок 4

XIII Всесоюзная олимпиада школьников

48 *Н. Розов, М. Смолянский.* Олимпиада по математике
54 *Т. Петрова, Л. Чернова.* Олимпиада по физике
59 Призеры XIII Всесоюзной олимпиады школьников

Информация

61 *С. Вашакмадзе.* У истоков олимпиадного движения
63 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 21, 40)*

Вихри, которые вы видите на первой странице обложки, «нарисованы» каплей чернил, упавшей в воду. Подробнее о водяных вихрях можно прочитать в статье С. Шабанова и В. Шубина «О вихревых кольцах». *Фото А. Ульянина.*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

А. Кириллов, И. Клумова, А. Сосинский

Сюрреальные числа

Понятие действительного числа — одно из основных в математике. Не удивительно поэтому, что в настоящее время известно много способов построения строгой теории действительных чисел. Среди них выделяется простотой и естественностью аксиоматический метод. Он состоит в том, что мы отказываемся отвечать на вопрос «что такое число?», а определяем сразу все числа, описывая, какими свойствами они обладают. Свойства эти формулируются в виде аксиом. Оказывается, для аксиоматического задания действительных чисел достаточно 12 аксиом, приведенных на с. 9.

Конечно, нет никакой гарантии, что найдутся объекты, удовлетворяющие этому набору требований. Поэтому в дополнение к аксиомам желательно иметь еще и *модель* — набор объектов, удовлетворяющих этим аксиомам. Одну такую модель действительных чисел вы хорошо знаете — это бесконечные десятичные дроби.

Сравнительно недавно английскому математику Джону Конвею удалось «соорудить» очень интересную модель, которая содержит не только все действительные числа, но еще и многие другие — с интересными и необычными свойствами. Эти числа — мы будем называть их *К-числами*, а Конвей называет их *сюрреальными* (сверхвещественными) — удовлетворяют 11 из 12 упомянутых аксиом.

Кое-что об этих числах мы и расскажем в нашей статье. К сожалению, для построения всех *К*-чисел необходимо понятие *трансфинитного числа*, которое не изучается в школе. Но заглянуть в их арифметику можно уже на школьном уровне.

Описание *К*-чисел

В арифметике Конвея вместо привычных нам цифр 0, 1, 2, ..., 9 используются всего два знака: ↑ — up (*вверх* — англ.) и ↓ — down (*вниз* — англ.). Наборы из этих символов и являются *К*-числами.

Набор может вообще не содержать символов. Ниже мы увидим, что этот набор играет роль нуля, поэтому мы заранее обозначим его через 0. Набор может быть любым конечным, например: ↓; ↑↑↓; ↓↑↑↓↑↓; может быть любым бесконечным: ↑↓↑↓↑↓ ..., а может быть даже «более чем бесконечным» (см. последний раздел). Мы в основном будем оперировать с конечными наборами.

Если символы ↑ и ↓ рассматривать как указатели направления движения, то каждый набор «up» и «down» можно воспринимать как «протокол поиска» соответствующего *К*-числа.

А именно, среди всех *К*-чисел есть простейшие — 0. Если интересующее нас *К*-число x больше *), чем 0, мы делаем шаг вверх и записываем знак ↑. Если $x > \uparrow$, делаем еще один шаг вверх и пишем ↑↑; если $x < \uparrow\uparrow$, то следующий шаг делается вниз, и получается запись ↑↑↓. Этот процесс может быть конечным или бесконечным. Любой «протокол поиска» соответствует некоторому *К*-числу, причем разные «протоколы» соответствуют разным *К*-числам.

Сравним это с записью действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби. Здесь тоже искомое число x строится путем последовательных приближений. Но при обычных последовательных десятичных приближениях числа мы подбираемся к нему снизу, а не с двух сторон, как у *К*-чисел (рис. 1). Кроме того, десятичная запись (в отличие от записи *К*-чисел) неоднозначна: 0,99999... означает то же, что 1,0000...

Объясним теперь, как сравнивать *К*-числа по величине.

Отношение порядка

Чтобы сравнить два *К*-числа, нужно написать их одно под другим и по очереди сравнивать символы, входящие в их запись (как при установлении порядка слов в словаре по алфавиту; такой порядок математики называют *лексикографическим*). Если первым из неодинаковых символов у числа x будет символ ↑, а у числа y — символ ↓, то $x > y$. Возможен еще случай, когда число x короче числа y и составляет его начало. Тогда мы пишем $x > y$, если первым «лишним» символом у y будет символ ↓, и $x < y$, если этим символом будет ↑ *). Например, справедливы неравенства

$$\downarrow\uparrow < 0 < \uparrow\downarrow < \uparrow < \uparrow\uparrow\downarrow.$$

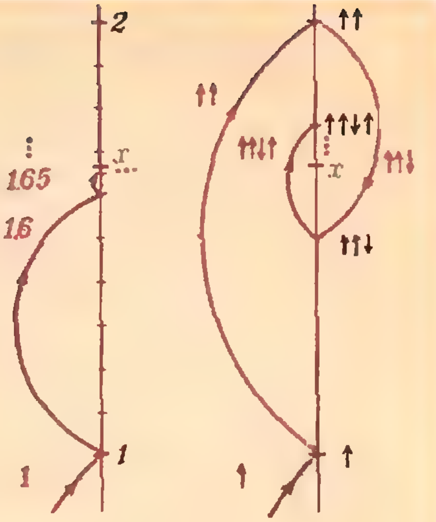


Рис. 1.

Забегая вперед, скажем, что положительными (то есть >0) в *К*-арифметике будут все числа, начинающиеся с ↑, а отрицательными — все, начинающиеся с ↓.

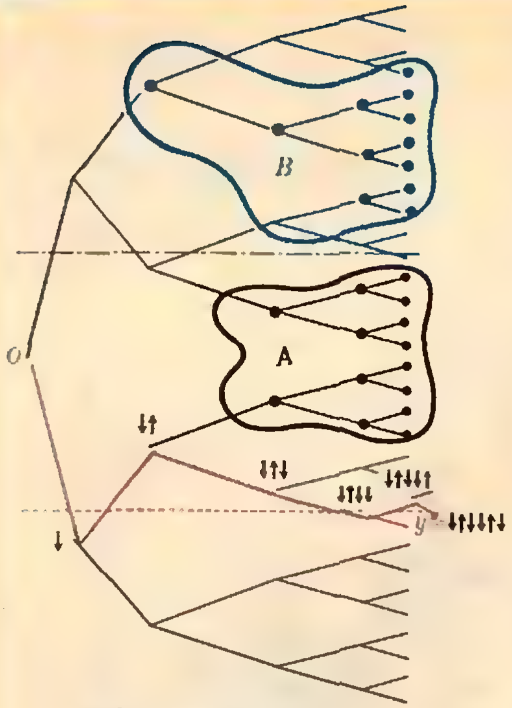
Для *К*-чисел, кроме отношения порядка (>, =, <), имеется еще одно важное отношение; Конвей называет это отношение *«раньше»* и обозначает значком ←. Будем говорить, что *К*-число *a* *раньше* *К*-числа *b*, если *a* встречается на пути к *b* из числа 0 (см. рис. 1). Иными словами, $a \leftarrow b$, если *a* можно получить из *b* «отрубанием хвоста» — части (с конца) стрелочек ↑ и ↓. Например, ↑ раньше, чем ↑↓ или ↑↑, а 0 по определению считается самым ранним числом.

Заметим, что свойство «быть раньше» не совпадает со свойством «быть короче»: например, число ↑↑↑ не раньше числа ↑↓↑↑↓. Точно так же свойство «быть раньше» не совпадает и со свойствами «быть больше» или «быть меньше»: например, оба числа ↑ и ↑↓ раньше числа ↑↓↑, но первое из них больше ↑↓↑, а второе — меньше.

---

*) Что такое «больше — меньше» для *К*-чисел и почему 0 — простейшее *К*-число, мы объясним в следующем разделе.

*) В частности, «пустой набор» 0 является началом любого *К*-числа.



$$y] = \{0, \downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\}$$

$$y\rfloor = \{\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\}; \quad y\rceil = \{0, \downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\}$$

Рис. 2. Здесь $\{A : B\} = \uparrow\downarrow$

Основная лемма

Пусть у нас есть два множества K-чисел: A и B. Будем говорить, что множество B лежит выше множества A, если каждое число из множества A меньше каждого числа из множества B; обозначим это так: $A<B$. Скажем, что *число c разделяет множества A и B*, если $a<c<b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Основная лемма. *Если $A<B$, то существует K-число c, разделяющее множества A и B. Среди всех таких разделяющих чисел есть самое раннее. (В дальнейшем самое раннее число, разделяющее множества A и B, будет обозначаться так: $\{A:B\}$.)*

Эту лемму мы назвали основной потому, что она сыграет главную роль при определении правил действий на множестве K-чисел. Она верна для любых множеств K-чисел A и B. Но мы докажем ее только в предположении, что A и B — конечные множества конечных K-чисел.

Будем искать элемент, разделяющий множества A и B, последовательно. Поскольку 0 — самое раннее число, начнем с него.

Если 0 разделяет множества A и B, то все доказано. Если же нет, то по обе стороны (в смысле «больше — меньше») от 0 найдутся либо элементы из A, либо элементы из B. Пусть это — элементы из A. Тогда разделяющий элемент не может быть меньше 0, т. е. он не может начинаться с ↓; значит, он начинается с ↑. Самое раннее число, начинающееся с ↑, — это ↑. Рассуждаем, как выше: если ↑ разделяет A и B, то все доказано. Если же нет, то снова по обе стороны от него найдутся элементы из A или из B; допустим теперь, что это — элементы из B. Тогда разделяющий элемент не может быть больше ↑; значит, он начинается с ↑↓. Берем ↑↓ и проделываем с ним ту же процедуру и т. д. (рис. 2).

Мы предоставляем вам возможность убедиться в том, что этот процесс (в случае конечных множеств A и B, состоящих из конечных K-чисел) не может продолжаться бесконечно и, значит, приводит к разделяющему числу c.

Для доказательства можно, например, выделить наименьшее число из B и наибольшее число из A — тем самым доказательство теоремы сводится к частному случаю, когда каждое из множеств A и B состоит из одного числа.

Из самого способа построения видно, что c раньше любого из разделяющих чисел.

Этот же способ доказательства можно применить и в общем случае, но он приводит, вообще говоря, к бесконечному разделяющему K-числу, и строгое доказательство того, что процесс «закончится» (что это такое для бесконечных процессов — еще надо определить!), требует сведений из теории трансфинитных чисел.

Определение сложения

Конвей задает операции над K-числами, руководствуясь *принципом очередности и простоты*. Он состоит в том, что правила действий определяются не сразу для всех чисел, а постепенно: сначала для более ранних, а потом для более «поздних»; при этом в качестве результата выбирается самое раннее возможное число.

Определяя, например, сумму двух каких-нибудь *К*-чисел, мы считаем, что для всех более ранних слагаемых суммы уже определены. После этого вступает в силу вторая половина принципа. Чтобы показать, как этот принцип «работает», вычислим с его помощью несколько сумм. Разумеется, до тех пор, пока мы не придадим принципу четкой математической формы, эти вычисления будут носить несколько нестрогий характер.

Поскольку 0 — самое раннее число, «вычислим» первым делом сумму $0+0$. Так как никаких результатов пока еще нет, ответом может быть любое *К*-число. Но из всех возможных ответов следует выбрать самый ранний. Это — 0. Итак, мы «доказали» равенство

$$0+0=0. \qquad (1)$$

Попробуем теперь проверить, что 0 действительно имеет свойства нуля, указанные в аксиоме С3 (см. с. 9), то есть что

$$0+x=x \qquad (2)$$

для любого *К*-числа x.

Введем для этого некоторые обозначения. Пусть x — некоторое *К*-число. Назовем *срезом* x (обозначение: $x]$) множество всех *К*-чисел y более ранних, чем x, то есть

$$\overline{\underline{x}}] = \{y \mid y \leftarrow x\}.$$

Срез x делится на *нижний срез* x и *верхний срез* x (обозначения: $\underline{x}|$ и $\overline{x}|$ соответственно). *Нижний срез* x — это множество всех y более ранних, чем x, и меньших x:

$$\underline{x}| = \{y \mid y \in \overline{\underline{x}}|, \quad y<x\},$$

а *верхний срез* — это множество всех y более ранних, чем x, но бо̀льших x (см. рис. 2):

$$\overline{x}| = \{y \mid y \in \overline{\underline{x}}], \quad y>x\}.$$

Например, срез $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$ состоит из четырех чисел:

$$\uparrow\downarrow\overline{\underline{\uparrow\uparrow}}| = \{0, \uparrow, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow\},$$

причем нижний срез $\underline{\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow}| = \{0, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow\}$, а верхний срез $\overline{\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow}| = \{\uparrow\}$. А вот $\overline{\uparrow}|$ и $\underline{\downarrow}|$ — это пустые множества; при этом $\underline{\uparrow}| = \overline{\downarrow}| = \{0\}$.

Воспользуемся теперь очередностью: будем считать, что для *К*-чисел более ранних, чем x, равенство (2) верно (очевидно, любое число, которое раньше x, принадлежит либо $\underline{x}|$, либо $\overline{x}|$). Тогда сумма $0+x$ больше любого числа из $\underline{x}|$. С другой стороны, она меньше любого числа из $\overline{x}|$. Таким образом, число $0+x$ разделяет множества $\underline{x}|$ и $\overline{x}|$ (нижний и верхний срезы x). Поскольку по принципу Конвея нужно выбрать самое раннее такое число, $0+x = \{\underline{x}| : \overline{x}|\}$. Но $\{\underline{x}| : \overline{x}|\}=x$ (подумайте, почему), то есть $0+x=x$.

Итак, мы почти обосновали обозначение 0 для пустого набора. Теперь оправдано сделанное выше утверждение о том, что в *К*-арифметике числа, начинающиеся с ↑, играют роль положительных, а числа, начинающиеся с ↓, — роль отрицательных.

Найдем теперь сумму $\uparrow+\uparrow$. Поскольку $\underline{\uparrow}|=\{0\}$, $\uparrow+\uparrow$ больше ↑. Самое раннее число, большее ↑, — это ↑↑. Поэтому

$$\uparrow+\uparrow=\uparrow\uparrow. \qquad (3)$$

У нас есть теперь опыт решения примеров на сложение: мы понимаем, что суммой $x+y$ должно быть самое раннее число, которое разделяет суммы с недостатком (то есть объединение множеств $\underline{x}|+y$ и $x+\underline{y}|$) и суммы с избытком (объединение множеств $\overline{x}|+y$ и $x+\overline{y}|$). (Относительно сумм с недостатком и сумм с избытком мы считаем, что уже умеем их определять.) Таким образом, принцип очередности и простоты приводит нас к такому определению суммы двух чисел:

$$x+y=\{(\underline{x}|+y)\cup(x+\underline{y}|):(\overline{x}|+y)\cup(x+\overline{y}|)\} \qquad (4)$$

(напомним, что элемент $\{A:B\}$, где $A<B$, существует и определяется однозначно).

Формула (4) является строгим выражением принципа Конвея для суммы чисел. Для определения сложения к ней нужно еще присоединить *начальные условия* — формулу (1). На самом деле доказать ее нельзя — она является частью определения. С помощью формул (4) и (1) можно вычислить сумму любых *К*-чисел.

Теперь мы можем проверить, что в нашей модели выполняются аксиомы сложения (см. с. 9).

Проверим, например, что сложение, определенное формулой (4), коммутативно.

В самом деле, возьмем первые два числа, для которых сложение некоммутативно *). Их сумма — это самое раннее число, отделяющее суммы с недостатком от сумм с избытком. Суммы с недостатком и суммы с избытком были коммутативными (по предположению). Значит, и самое раннее число, которое их разделяет, тоже не зависит от порядка слагаемых — мы разделяем один и тот же набор множеств и в обоих случаях берем самое раннее число из разделяющих (а оно определяется единственным образом — см. основную лемму). Значит, и сумма наших двух чисел не зависит от их порядка, вопреки предположению. Значит, сложение коммутативно.

В выполнении аксиомы С3 мы фактически убедились раньше. Аксиома С1 проверяется сложнее, чем аксиома С2; подумайте, как.

Найдем теперь сумму $\uparrow+\downarrow$. Заметим, что $\overline{\uparrow}|$ и $\underline{\downarrow}|$ — пустые множества. Поэтому ответом должно быть самое раннее число, большее $\downarrow$ (поскольку $\underline{\uparrow}|=\{0\}$) и меньшее $\uparrow$ (поскольку $\overline{\downarrow}|=\{0\}$). Таким числом является 0.

Итак, $\uparrow+\downarrow=0$ и $\downarrow$ является противоположным (в смысле аксиомы С4) элементом для $\uparrow$.

Обозначим через $\uparrow^n$ и через $\downarrow^n$ *К*-числа, состоящие из n подряд идущих соответствующих символов.

Задачи

1. Докажите, что $\uparrow^n+\uparrow^m=\uparrow^{n+m}$, $\downarrow^n+\downarrow^m=\downarrow^{n+m}$.

2. Докажите, что

$$\uparrow^n+\downarrow^m=\begin{cases}\uparrow^{n-m}, & \text{если } n>m;\\ 0, & \text{если } n=m;\\ \downarrow^{m-n}, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Из этих задач следует, что число $\uparrow^n$ можно отождествить с обычным натуральным числом n **), а число $\downarrow^n$ — с противоположным ему числом $(-n)$. Таким образом, *числа Конвея содержат все обычные целые числа!*

Задача 3. Докажите, что если у данного *К*-числа все $\uparrow$ заменить на $\downarrow$, а все $\downarrow$ — на $\uparrow$, то получится число, ему противоположное. (Например, $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow+\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow=0$.)

Из задачи 3 вытекает, что в модели Конвея выполняется аксиома С4.

Есть ли дроби?

Возьмем число $\uparrow\downarrow$. Попробуем сложить его с самим собой. Что можно сказать о сумме $\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow$? Она должна быть меньше, чем сумма $\uparrow\downarrow+\uparrow$, и больше, чем число $\uparrow\downarrow$. Но чему равна сумма $\uparrow\downarrow+\uparrow$, мы не знаем. Мы нарушили наш главный принцип: двигаться от более ранних чисел к более «поздним». Придется (никуда не денешься!) сосчитать сначала сумму $\uparrow\downarrow+\uparrow$.

Это число меньше, чем число $\uparrow+\uparrow=\uparrow\uparrow$ (поскольку $\overline{\uparrow\downarrow}|=\{\uparrow\}$), и больше, чем число $\uparrow+0=\uparrow$ (поскольку $\underline{\uparrow}|=\{0\}$), причем оно — самое раннее такое число. Самое раннее число, заключенное между $\uparrow$ и $\uparrow\uparrow$, — это число $\uparrow\uparrow\downarrow$; поэтому

$$\uparrow\downarrow+\uparrow=\uparrow\uparrow\downarrow.$$

Вернемся к сумме $\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow$. Теперь мы знаем, что она заключена между числами $\uparrow\downarrow$ и $\uparrow\uparrow\downarrow$. Самое раннее такое число — это $\uparrow$ (убедитесь в этом!).

Итак, в *К*-арифметике число $\uparrow\downarrow$ играет роль «половинки». Аналогично устанавливается, что $\uparrow\uparrow\downarrow$ среди *К*-чисел — то же самое, что обычное число $\frac{3}{2}$ среди действительных чисел.

Задачи

4. Найдите суммы $\uparrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow$; $\uparrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow$; $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow$; $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$.

5. Каким обычным числам соответствуют такие *К*-числа:

а) $\uparrow\downarrow\downarrow$, $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$;

б) $\downarrow\uparrow$, $\downarrow\uparrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow\uparrow$;

в) вообще числа вида

$$\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n\text{ «up»}}\ \underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m\text{ «down»}},$$

$$\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n_1}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m_1}\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n_2}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m_2}\ldots\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n_l}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m_l},$$

---

*) Напомним, что мы пока рассматриваем конечные *К*-числа. Для бесконечных *К*-чисел рассуждение более сложно.

**) Если принять $\uparrow$ за единицу; $\uparrow$ действительно выполняет роль единицы в арифметике Конвея, однако мы не сможем в этом убедиться, поскольку не даем в этой статье определения умножения.

$$\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n\text{ «down»}}\ \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m\text{ «up»}},$$

$$\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n_1}\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m_1}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n_2}\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m_2}\cdots\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n_i}\ \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m_i}?$$

Мы подскажем ответ в задаче 5: *К*-число $\uparrow\downarrow\downarrow$ — это то же самое, что $\frac{1}{4}$ в **R**, *К*-число $\uparrow\downarrow\uparrow$ — то же, что $\frac{3}{4}$, $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$ — это $\frac{1}{8}$, $\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow$ — это $\frac{3}{8}$, и т. д.

Задачи 4 и 5 позволяют догадаться, каким обычным действительным числам соответствуют все вообще конечные наборы $\uparrow$ и $\downarrow$. Это — так называемые *двоично-рациональные числа* (то есть рациональные числа, знаменателем которых является степень двойки). Попробуйте доказать это утверждение.

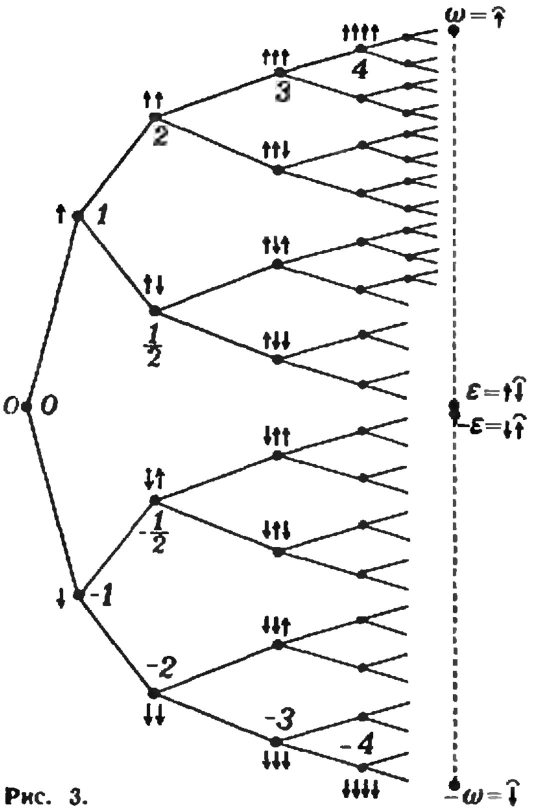

$\omega=\widehat{\uparrow}$
$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$
4
$\uparrow\uparrow\uparrow$
3
$\uparrow\uparrow$
2
$\uparrow\uparrow\downarrow$
$\uparrow$
1
$\uparrow\downarrow\uparrow$
$\uparrow\downarrow$
$\frac{1}{2}$
$\uparrow\downarrow\downarrow$
$\varepsilon=\uparrow\widehat{\downarrow}$
0
0
$-\varepsilon=\downarrow\widehat{\uparrow}$
$\downarrow\uparrow\uparrow$
$\downarrow\uparrow$
$-\frac{1}{2}$
$\downarrow\uparrow\downarrow$
$\downarrow$
-1
$\downarrow\downarrow\uparrow$
-2
$\downarrow\downarrow$
-3
$\downarrow\downarrow\downarrow$
-4
$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$
$-\omega=\widehat{\downarrow}$

Рис. 3.

Что же дальше?

Итак, мы выяснили, что среди *К*-чисел есть все обычные целые числа (это — либо конечные наборы одних только $\uparrow$, либо одних только $\downarrow$), а также все другие двоично-рациональные числа (им соответствуют всевозможные конечные наборы, среди которых имеются комбинации $\uparrow\downarrow$ или $\downarrow\uparrow$).

Если *К*-числа изобразить в виде «дерева» так, как на рисунке 3, то целые *К*-числа окажутся «по краям» этого дерева, а двоично-рациональные — внутри него.

А как же быть с остальными числами? Ведь мы обещали, что среди *К*-чисел окажутся все действительные числа, а пока неясно даже, как быть с рациональными числами, знаменатели которых не есть степени двойки. Все дело здесь в том, что мы пока не видим множества *К*-чисел целиком: мы ведь ограничились рассмотрением лишь конечных наборов «up» — «down», определили для них сложение и научились решать простые задачи (на уровне 2—3 класса школы). А надо бы еще определить умножение, а вместе с тем и выяснить вопрос о существовании обратного элемента для любого отличного от нуля *К*-числа (см. аксиому У4). И вот оказывается, что уже для определения a^{-1} (если a не нуль и не степень двойки) конечных *К*-чисел не хватает. Например,

$$\frac{1}{3}=\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\ldots,$$

$$\frac{1}{5}=\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\ldots$$

Поэтому нам придется научиться работать и с бесконечными *К*-числами.

Из бесконечных *К*-чисел самые простые — *периодические*. Для их записи удобно ввести символ ⌒, означающий бесконечное повторение. Например, $\widehat{\uparrow}$ означает $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\ldots$, а $\widehat{\uparrow\downarrow}$ — это $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\ldots$ и т. д. Числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ с помощью дужек записываются так:

$$\frac{1}{3}=\uparrow\downarrow\widehat{\downarrow\uparrow},$$

$$\frac{1}{5}=\uparrow\downarrow\widehat{\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow}.$$

Найдем, например, какому обычному числу соответствует *К*-число $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow}$. Мы уже знаем, что $\uparrow$ — это обычное число 1, $\uparrow\downarrow$ — это $\frac{1}{2}$, $\uparrow\downarrow\downarrow$ — это $\frac{1}{4}$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что числу $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow}$ соответствует такой бесконечный ряд:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\ldots$$

Сокращенно его можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{3k}}-\frac{1}{2^{3k+1}}-\frac{1}{2^{3k+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}},$$

а $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}$ — это убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2^3}$; сумма ее равна $\frac{1}{1-1/2^3}=\frac{8}{7}$.

Поэтому K-число $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow}$ соответствует обычному числу $\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7}$, то есть $\frac{2}{7}$.

Задача 6. а) Запишите в виде K-чисел дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{3}$.

б) Каким обычным числам соответствуют K-числа $\uparrow\uparrow\uparrow\widehat{\downarrow\uparrow}$? $\downarrow\downarrow\downarrow\widehat{\uparrow\downarrow}$?

Теперь мы можем сделать такой вывод: *бесконечным периодическим K-числам* (за исключением тех случаев, когда период состоит чисто из ↑ или чисто из ↓, — эти случаи мы обсудим отдельно) *соответствуют обычные рациональные числа.*

А если рассмотреть бесконечные *непериодические* наборы ↑ и ↓, то получатся уже *иррациональные* числа.

Эти свойства K-чисел аналогичны известным свойствам бесконечных десятичных дробей.

Например,

$\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{1}{8}=0{,}125$ — конечные десятичные дроби;

$\frac{1}{3}=0{,}(3)$; $\frac{1}{7}=0{,}(142857)$ — бесконечные периодические десятичные дроби;

а иррациональные числа, например $\sqrt{2}$ и π, — это уже бесконечные непериодические десятичные дроби:

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ldots;$$

$$\pi=3{,}14159268979323648\ldots$$

Правда, есть существенные отличия K-арифметики от обычной. Числа вида $\frac{m}{2^k\cdot5^l}$, где $l\neq0$, переводятся в конечные десятичные дроби, а соответствующие им K-числа оказываются бесконечными периодическими наборами.

Задача 7*. Воспользовавшись двоичной системой счисления, придумайте алгоритм «перевода» обычных рациональных чисел в K-числа.

При определении действий над бесконечными K-числами главным остается все тот же принцип очередности и простоты. Имеет место и аналог основной леммы — принцип разделения множеств, одно из которых выше другого (при этом «самый ранний» разделяющий элемент оказывается, вообще говоря, уже бесконечным набором).

Задача 8. Вычислите $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow}+\uparrow$; $\widehat{\uparrow\downarrow}+\widehat{\downarrow\uparrow}$.

Всевозможные конечные и бесконечные наборы ↑ и ↓ дают нам уже все обычные действительные числа. Но (и это самое замечательное!) оказывается, что они дают не только действительные числа.

Рассмотрим, например, такое K-число: $\omega=\widehat{\uparrow}$ — и еще более интересное число $\varepsilon=\uparrow\widehat{\downarrow}$.

Очевидно, что число ω больше любого «натурального» K-числа $\uparrow^n$, а число ε положительно, но меньше любого «рационального» положительного K-числа $\uparrow\downarrow^n$ (то есть $\omega>n$, а $0<\varepsilon<\frac{1}{2^n}$ для любого натурального n).

Действительных же чисел с такими свойствами нет!

Дальше бесконечности

В заключение поговорим о «более чем бесконечных» K-числах.

Прежде всего заметим, что среди наших K-чисел (в том числе и бесконечных) нет, например, числа $\omega+\uparrow$. Подумав, можно сообразить, что эта сумма должна записываться в виде $\widehat{\uparrow}\uparrow$: бесконечное число символов ↑ и еще один такой символ! Казалось бы, от того, что к бесконечному числу символов добавили еще один, ничего

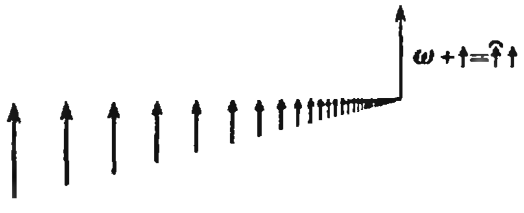


Рис. 4.

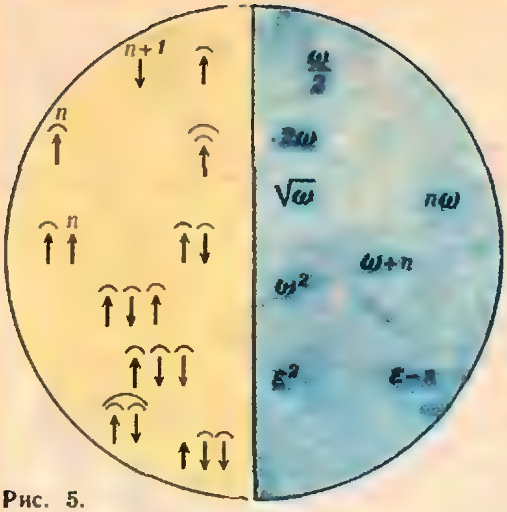


Рис. 5.

не изменилось. Однако это не так: новый символ ↑ следует за всем и предыдущими (рис. 4)! Поэтому $\widehat{\uparrow}$ и $\widehat{\uparrow}\uparrow$ — разные *K*-числа.

Задача 9. Что изображает запись $\widehat{\uparrow\downarrow}$?

Ответ: $\omega-\uparrow$. Указание: вычислите сумму $\widehat{\uparrow\downarrow}+\uparrow$.

Среди чисел «более длинных, чем бесконечные», встречаются довольно замысловатые. Попробуйте, например, угадать, какая из записей в правой половине круга на рисунке 5 соответствует *K*-числам, стоящим в левой половине.

Если вас заинтересовала арифметика *K*-чисел и вы хотели бы узнать о ней побольше, напишите нам.

Приложение

I. Аксиомы сложения. *Для любых двух элементов* $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ *определена сумма* $a+b\in\mathbf{R}$, *причем:*

С1. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность*).

С2. $a+b=b+a$ (*коммутативность*).

С3. *Существует такой элемент* 0, *что для любых* $a\in\mathbf{R}$ *выполняется соотношение* $a+0=a$ (*существование нуля*).

С4. *Для каждого элемента* $a\in\mathbf{R}$ *существует такой элемент* $(-a)\in\mathbf{R}$, *что* $a+(-a)=0$ (*существование противоположного элемента*).

II. Аксиомы умножения. *Для любых двух элементов* $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ *определено произведение* $a\cdot b\in\mathbf{R}$, *так что:*

У1. $(ab)c=a(bc)$ (*ассоциативность*).

У2. $ab=ba$ (*коммутативность*).

У3. *Существует такой элемент* 1, *что для любых* $a\in\mathbf{R}$ *имеет место равенство* $a\cdot 1=a$ (*существование единицы*).

У4. *Для каждого элемента* $a\in\mathbf{R}$, *отличного от нуля, существует такой элемент* $a^{-1}\in\mathbf{R}$, *что* $a\cdot a^{-1}=1$ (*существование обратного элемента*).

III. Аксиома, устанавливающая связь сложения с умножением.

С—У. $a(b+c)=ab+ac$ (*дистрибутивность*).

Множество с определенными на нем операциями сложения и умножения, обладающими перечисленными свойствами, математики называют *полем* (см. «Квант», 1977, № 5, с. 45).

IV. Аксиомы порядка.

П1. *Для каждого элемента* $a\in\mathbf{R}$ *имеет место ровно одно из соотношений*

$$a>0,\ a=0,\ 0>a.$$

П2. *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то* $a+b>0$ *и* $ab>0$.

По определению полагают, что $a>b$ тогда и только тогда, когда $a-b>0$.

Поле, в котором выполнены аксиомы П1 и П2 и отношение порядка $>$ определено формулой $a>b\Leftrightarrow a-b>0$, называется *упорядоченным полем*.

Последняя группа аксиом, определяющих действительные числа, состоит всего из одной аксиомы совсем иной природы.

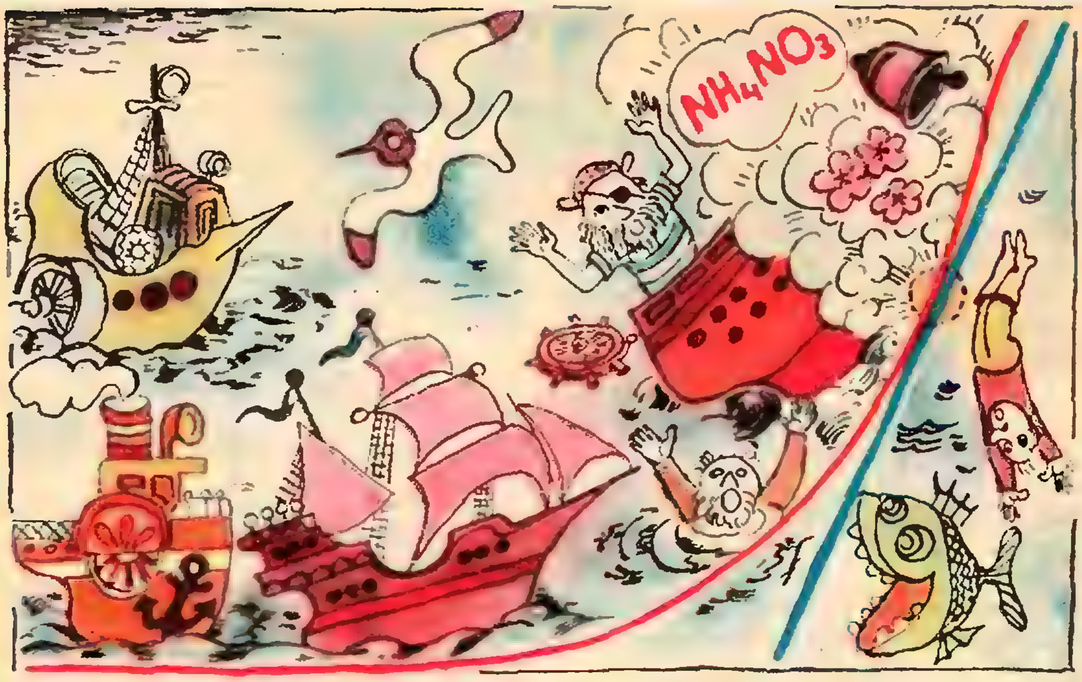
V. Аксиома полноты.

Непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет наименьшую верхнюю грань.

Это означает, что если для непустого множества $A\subset\mathbf{R}$ существует элемент, который больше (или равен) всех элементов этого множества, то среди таких элементов есть наименьший.

Упорядоченное поле, для которого выполняется аксиома полноты, называется *полным упорядоченным полем*.

Доказано, что перечисленные 12 аксиом определяют множество действительных чисел однозначно. Таким образом, *действительные числа — это единственное полное упорядоченное поле*. *K*-числа не удовлетворяют последней аксиоме.



Б. Новожилов

Тепловой взрыв

В январе 1953 года в Красном море взорвался и затонул винтовой пароход «Тиррения» водоизмещением четыре тысячи тонн. В истории морского судоходства известны и более крупные катастрофы — взрывы и пожары на танкерах и судах, перевозящих боеприпасы. Но «Тиррения» шла, на первый взгляд, с безобидным во взрывоопасном отношении грузом — аммиачной селитрой. Если бы это был единичный факт, то причину взрыва можно было бы искать среди случайных обстоятельств. Однако в Регистре судоходства Ллойда, фиксирующем все достаточно крупные морские катастрофы, отмечено несколько десятков пожаров и взрывов, связанных с аммиачной селитрой. Участились они в сороковые — пятидесятые годы, когда темпы промышленного производства этого вещества резко возросли. Рекордным оказался 1947 год — в процессе погрузки судов в различных портах произошло три мощных взрыва, что привело к большому числу человеческих жертв.

Между тем аммиачная селитра (азотнокислый аммоний, или нитрат аммония, NH_4NO_3) уже давно используется в больших количествах в технике и сельском хозяйстве. Ежегодное производство ее составляет десятки миллионов тонн. Достаточно посмотреть на химическую формулу этого соединения, чтобы сообразить, где оно может применяться. Нитрат аммония содержит много азота, причем связанного в два наиболее хорошо усваиваемых растениями иона — аммиачный и нитратный. Поэтому аммиачная селитра — одно из наиболее ценных минеральных удобрений. А наличие большого количества кислорода обусловливает второе, не всегда мирное применение нитрата аммония в качестве окислителя при производстве порохов и взрывчатых веществ. Без примесей органики, металлов нитрат аммония не взрывается. Он часто используется в демонстрационных химических опытах. Смесь же NH_4NO_3 с тротилом или алюминием — сильное взрывчатое вещество.

Попробуем разобраться, почему совершенно безопасное минеральное удобрение — аммиачная селитра, которое годами в больших количествах может храниться на складах или под открытым небом, послужило причиной трагедий на море.

Взрывной процесс характеризуется очень быстрым выделением большого количества энергии, что сопровождается резким изменением состояния вещества. Образовавшиеся при взрыве газы могут при своем расширении совершить значительную механическую работу.

Такие понятия, как «быстрый» и «большой», конечно, относительны. При сгорании килограмма угля в воздухе выделяется около тридцати миллионов джоулей. Этого тепла достаточно для нагрева продуктов горения до температуры во много тысяч градусов. Таким температурам при обычной плотности газа соответствуют давления в сотни атмосфер. Таким образом, с энергетической точки зрения система уголь — кислород обладает достаточным запасом энергии для возникновения взрыва. Однако уголь не взрывается, а спокойно горит.

Дело в том, что в этом случае не выполняется второе условие взрыва — быстрота выделения энергии. Действительно, горение угля начинается с поверхности, слои, лежащие глубже, начинают гореть лишь после того, как они прогреются за счет тепла, выделившегося при реакции в поверхностном слое. Прогрев, а также подвод кислорода происходят настолько медленно, что продукты горения успевают расшириться, и существенного увеличения давления не возникает.

Однако есть такие вещества, химическое превращение которых возможно и без подвода окислителя извне. Примерами могут служить твердые ракетные топлива, динамит и т. п. Одно из таких веществ — тринитротолуол — $C_7H_5(NO_2)_3$. Специалисты называют его обычно тротилом или толом. Если тротил поджечь с поверхности, он легко воспламеняется и горит. При этом внутренность вещества медленно прогревается. И несмотря на то, что теплота сгорания этого вещества намного меньше, чем у обычных топлив (всего 4 МДж/кг), тротил может взорваться. Для этого нужно увеличить температуру во всем объеме вещества. Сделать это можно разными способами, например, сжатием. При этом реакция идет во всем объеме и так быстро, что образующиеся газообразные продукты за время протекания реакции не успевают существенно расшириться. Занимая объем, примерно равный объему исходного заряда, и будучи нагретыми до высокой температуры, эти газообразные продукты создают давление в десятки и сотни тысяч атмосфер. Последующее быстрое расширение газов приводит к разрушению окружающей среды — происходит взрыв.

В этой статье мы хотим познакомить читателя с тепловым взрывом — самопроизвольным взрывным процессом, связанным с освобождением химической энергии.

Прежде всего нужно напомнить основные факты из учения о скоростях химических реакций.

Первое, что бросается в глаза при исследовании химического превращения, — его малая скорость. Действительно, в газе, например, при нормальных условиях каждая молекула испытывает в среднем 10^{10} столкновений в секунду. Если бы каждое столкновение приводило к реакции, то она произошла бы мгновенно. Опыт не подтверждает этого. Например, смесь водорода и кислорода (гремучий газ) при комнатной температуре можно хранить совершенно спокойно. Все дело в том, что лишь очень малая доля столкновений оказывается эффективной, то есть приводит к реакции.

Химический акт — превращение одних молекул в другие. При этом разрушаются одни связи между атомами и возникают новые. Если новые связи прочнее старых, то реакция идет с выделением тепла (экзотермический процесс). Это, однако, не означает, что реакция должна пойти быстро. Ведь прежде чем образовать новые связи (пусть даже и более прочные), нужно разрушить старые, то есть затратить энергию. Прочность любой составной системы (атома, молекулы, ядра) характеризуется энергией связи. Она равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разложить систему на составляющие ее части. Например, энергия связи молекулы водорода составляет $7{,}2 \times 10^{-19}$ Дж. Такую энергию нужно затратить, чтобы получить два атома водорода, и, наоборот, ровно столько

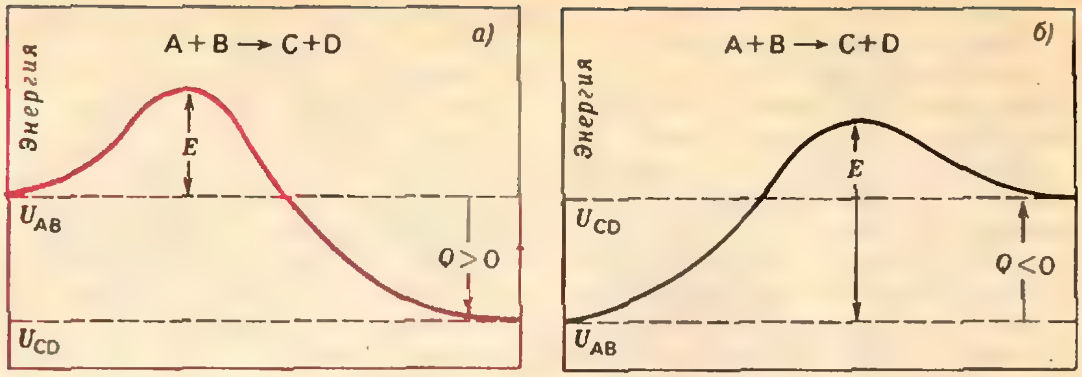


Рис. 1. Энергия активации E и тепловой эффект Q реакции $A+B \to C+D$ для экзотермической (a) и эндотермической (b) реакций.

энергии выделится при образовании молекулы водорода из атомов. Разность между энергиями связей продуктов и исходных веществ называется тепловым эффектом реакции (чаще всего внутренняя энергия молекул в результате реакции переходит в тепло). Пересчитанный на единицу массы или объема вещества тепловой эффект представляет собой теплоту сгорания.

Если реакция сопровождается выделением тепла, это совсем не означает, что она должна идти быстро. Это иллюстрирует рисунок 1. В процессе реакции $A+B \to C+D$ связи в молекулах A и B должны быть разрушены или по крайней мере существенно ослаблены. Для этого необходима некоторая (вполне определенная для каждой реакции) энергия E. Она называется энергией активации реакции. Ясно, что по порядку величины энергия активации должна быть близка к сумме U_{AB} энергий связей молекул A и B. Таким образом, ход химического процесса в начальной стадии энергетически затруднен. Вступающие в реакцию молекулы должны обладать достаточной тепловой энергией, чтобы преодолеть барьер величиной E.

Разрушение или ослабление химических связей может произойти под действием теплового (поступательного или колебательного) движения атомов и молекул. Природа устроена так, что энергия теплового движения при умеренных температурах обычно много меньше энергии активации. Средняя энергия теплового движения порядка kT, то есть $\sim 4 \cdot 10^{-21}$ Дж, в то время как энергия активации в сотни раз больше. В этом причина столь ничтожного числа эффективных соударений. Химическая реакция идет лишь между теми молекулами, тепловая энергия которых намного превышает среднюю. А их очень мало.

Число молекул, обладающих энергией теплового движения E при температуре T, выражается простой формулой:

$$y = e^{-E/kT}.$$

(Читателям придется принять эту формулу на веру — более или менее последовательный вывод ее увел бы нас далеко в сторону.) Качественный вид зависимости величины y от температуры T для различных значений

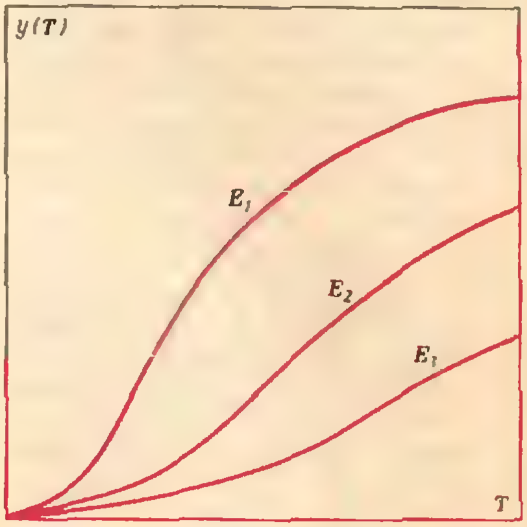


Рис. 2. Доля активных молекул при разных энергиях активации ($E_1<E_2<E_3$) в зависимости от температуры.

энергии активации E приведен на рисунке 2.

Таким образом, скорость химической реакции, то есть количество вещества (в килограммах, молях, числе частиц), прореагировавшего за единицу времени в единице объема, может быть записана в таком виде:

$$w = ze^{-E/kT},$$

где величина z определяется либо числом столкновений (в газах), либо количеством молекулярных связей, разрыв которых приводит к химическому превращению (в конденсированных телах). (Размерность w и z одна и та же: кг/(м^3·с), моль/(м^3·с) или 1/(м^3·с).) Для того чтобы вы могли «почувствовать», насколько резка зависимость скорости химической реакции от температуры, мы предлагаем вам рассмотреть конкретный численный пример — решить задачу 1 (см. с. 16).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы объяснить явление теплового взрыва. Причина, приводящая к тепловому самовоспламенению, очень проста. Если реакция идет с выделением тепла, то вещество нагревается. С нагревом возрастает скорость химической реакции. Это, в свою очередь, должно привести к более интенсивному выделению энергии. На возможность такого прогрессивно самоускоряющегося протекания химической реакции указывал еще в конце прошлого века знаменитый голландский химик Вант-Гофф. Количественная теория теплового взрыва была дана в 1928 году академиком Н. Н. Семеновым. Ее с полным правом можно отнести к классическим. Теория достаточно проста, чтобы ее можно было объяснить «на пальцах». С другой стороны, и сейчас, спустя полстолетия после создания теории, она остается основой для исследования и решения все новых и новых задач химической физики — науки о физических основах химического процесса.

Конечно, скороспелый вывод о том, что любая смесь, в которой происходит экзотермическая реакция, в конце концов взорвется, неверен. Ведь сосуд, в котором происходит реакция, ограничен и выделяющееся тепло может отводиться в окружающую среду. Конкуренция тепловыделения и отвода тепла приводит к очень своеобразному поведению химически самоускоряющихся систем.

Перейдем к количественной стороне явления. Пусть в некотором объеме V идет реакция с теплотой сгорания Q Дж/кг. Количество тепла, выделяющегося ежесекундно во всем объеме, равно

$$P_+ = zQVe^{-E/kT} \text{ (Дж/с)},$$

где T — температура реагирующего вещества в объеме V.

Пусть температура окружающей среды постоянна и равна T_0. Потери тепла из реагирующего объема пропорциональны разности $T - T_0$ и площади S поверхности, ограничивающей объем V. Следовательно, ежесекундно реагирующее вещество отдает окружающей среде количество тепла

$$P_- = \alpha S\,(T - T_0),$$

где α — так называемый коэффициент теплоотвода. Естественно, эта величина должна содержать в себе характеристику способности вещества проводить тепло — коэффициент теплопроводности λ — и характерный размер тела — r (для шара, например, его радиус). Таким образом,

$$\alpha = K\lambda/r.$$

Коэффициент K — некоторая константа для данного тела, которая характеризует влияние формы тела на величину теплоотдачи. Понятно, почему размер r попал в знаменатель: при одной и той же разности температур между двумя точками тела поток тепла (количество тепла, проходящего за единицу времени через единичную площадку) тем меньше, чем больше расстояние между этими точками.

На рисунке 3 изображена функция тепловыделения $P_+(T)$ и несколько прямых теплоотвода $P_-(T)$, отвечающих различным температурам окружающей среды. Обратим внимание на число точек пересечения P_+ и P_-, то есть на число корней уравнения

$$P_+(T) = P_-(T). \qquad (*)$$

Из-за сильной нелинейности функции тепловыделения таких точек может быть несколько. Так, для достаточно низких и высоких температур T_0 ($T_0^{(1)}$ и $T_0^{(3)}$) есть только

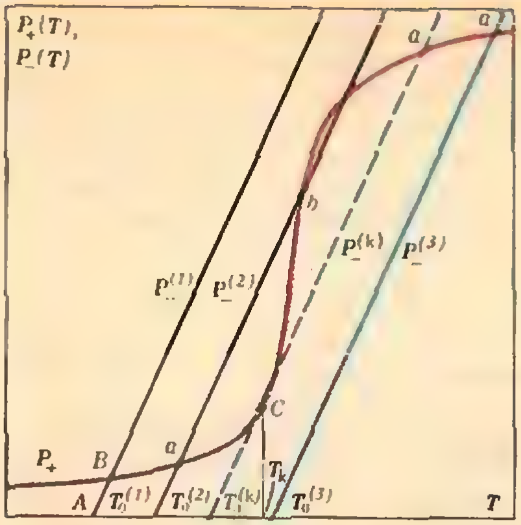


Рис. 3. Зависимость тепловыделения P_+ и теплоотвода P_- от температуры.

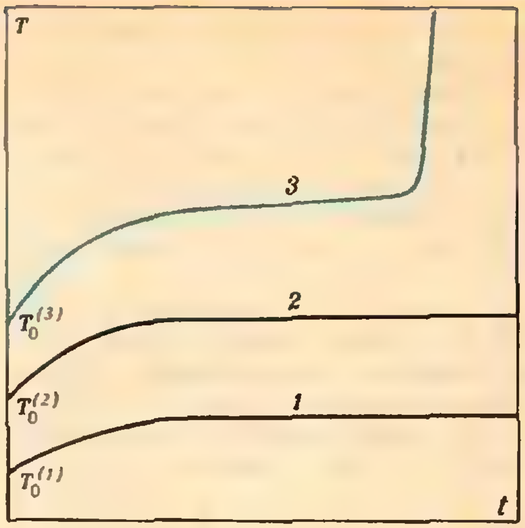


Рис. 4. Изменение температуры во времени для подкритического (кривые 1 и 2) и надкритического (кривая 3) режимов.

один корень; при некоторых же температурах окружающей среды (например, $T_0^{(2)}$) могут быть три точки пересечения. Равенство $P_+(T)$ и $P_-(T)$ отвечает условию теплового равновесия (стационарности) — вся выделяющаяся энергия отводится из системы в окружающую среду. Простым рассуждением (задача 2) можно показать, что точки пересечения типа a (кривая теплоотвода круче кривой тепловыделения) устойчивы, а точки типа b неустойчивы.

Рассмотрим теперь поведение реагирующей системы во времени. Пусть в начальный момент $t=0$ вещество имело температуру $T_0^{(1)}$, равную температуре окружающей среды (точка A на рисунке 3). Так как в этой точке $P_+ > P_-$, тело начнет нагреваться. На рисунке 4 этот процесс будет соответствовать движению системы по кривой 1. Видно, что рост температуры со временем замедляется. Это связано с уменьшением в процессе разогрева разности $P_+ - P_-$, которая и определяет рост температуры. Процесс нагрева окончится в точке B (см. рис. 3), которая устойчива. Подобная же зависимость (кривая 2 на рисунке 4) температуры от времени будет и для более высокой начальной температуры $T_0^{(2)}$. Система нагреется до несколько большей, чем в первом случае, конечной температуры и придет в устойчивое состояние.

Повышая температуру окружающей среды (и соответственно начальную температуру вещества), мы придем к качественно совершенно иному режиму разогрева. Посмотрим, как протекает процесс нагрева при начальной температуре $T_0^{(3)}$ (кривая 3 на рисунке 4). В начале процесса зависимость $T(t)$ похожа на два предыдущих случая: разность $P_+ - P_-$ с течением времени уменьшается, поэтому рост температуры замедляется. Система очень долго проходит через узкую щель между кривыми тепловыделения и теплоотвода — на температурной зависимости $T(t)$ это соответствует почти горизонтальному участку. После того как разность $P_+ - P_-$ пройдет через минимум, начнется резкий (быстрее экспоненциального) рост температуры. Возникнет самоускоряющийся процесс выделения энергии. Такое тепловое самоускорение экзотермической химической реакции и называется тепловым взрывом.

Наиболее замечательной стороной этого явления следует считать существование критического условия. Мы видим, что плавное изменение T_0 приводит к резкому качественному изменению поведения системы. Температурная зависимость $T(t)$ может быть только двух типов — либо слабый разогрев, либо резкое (после некоторого плавного периода) возрастание температуры — взрыв.

Очевидно, что должна существовать некоторая критическая температура $T_0^{(\text{к})}$, которая отделяет эти два типа режимов. Конечно, читатель уже обратил внимание на пунктирную кривую $P_-^{(\text{к})}$ на рисунке 3, соответствующую температуре $T_0^{(\text{к})}$. $T_0^{(\text{к})}$ и есть критическая начальная температура. Кривые P_+ и $P_-^{(\text{к})}$ имеют точку касания (точка C). Если начальная температура ниже $T_0^{(\text{к})}$, то происходит медленный разогрев вещества. Малейшее увеличение T_0 выше $T_0^{(\text{к})}$ приводит к взрыву.

Прежде чем переходить к расчетам условий взрыва, отметим, что критическое состояние системы может возникнуть не только за счет изменения начальной температуры. Функции P_+ и P_- содержат и другие параметры, изменение которых переводит систему из подкритического в надкритическое состояние (этому вопросу посвящена задача 3).

Перейдем теперь к математике, то есть получим количественный критерий взрыва. Он должен иметь характер некоторого неравенства типа $T_0 > T_0^{(\text{к})}$, в которое входили бы все параметры задачи. Мы хотим найти условие касания двух кривых, соответствующих функциям $P_+(T)$ и $P_-(T)$. Для старшеклассников, знакомых с дифференциальным исчислением, это подходящий случай проверить свои знания. Те же, кто не умеет дифференцировать, должны поверить в окончательный результат и понять его физический смысл.

Для того чтобы графики функций касались в данной точке, необходимо выполнение двух условий: во-первых, значения функций в этой точке должны быть равными, и во-вторых, значения производных функций в этой точке должны совпадать.

Эти два условия определяют критическую температуру, то есть ту температуру вещества, которая отвечает точке касания графиков $P_+(T)$ и $P_-(T)$:

$$T_\text{к} = T_0 + \frac{kT_0^2}{E}$$

(значение T_0 в этой формуле равно $T_0^{(\text{к})}$).

Значение $T_\text{к}$ определяет критерий теплового взрыва:

$$\frac{zQV}{\alpha S}\frac{E}{kT_0^2}e^{-E/kT_0} \geqslant \frac{1}{e}\,{}^{*)}. \qquad (**)$$

(Подстановка значения $T_\text{к}$ в равенство (**) дает условие критического режима; знак «больше» определяет взрыв.)

Таким образом, зная форму и размеры объема, содержащего вещество с известными физико-химическими свойствами, мы можем предсказать, произойдет взрыв или нет.

Теперь мы можем перейти к расследованию дела о взрывах судов, груженных аммиачной селитрой. Уже говорилось, что при ее разложении выделяется тепло, а поскольку скорость химической реакции растет с температурой, то в принципе тепловой взрыв нитрата аммония возможен. Однако возможность — это не необходимость. Только перейдя к численным оценкам, можно установить, произошел ли тепловой взрыв или причины катастрофы следует искать в чем-то ином.

Перепишем формулу (**) в несколько ином виде. Очевидно, что отношение $V/\alpha S$ пропорционально квадрату линейного размера тела r^2. Поэтому критерий теплового взрыва можно записать в виде условия, определяющего критический размер тела $r_\text{к}$:

$$r_\text{к} = \left(\frac{C\lambda kT_0^2}{zQE}e^{E/kT_0}\right)^{1/2},$$

при $r > r_\text{к}$ — взрыв.

(Постоянная C характеризует влияние формы тела.)

Значения параметров, входящих в выражение для $r_\text{к}$, известны с различной степенью точности. Теплота сгорания нитрата аммония равна 1 МДж/кг; коэффициент теплопроводности $\lambda = 0{,}17$ Дж/(м·с·град). А вот точные значения кинетических констант z и E для нитрата аммония указать нельзя. При современном состоянии науки о химических превращениях теоретически эти константы найти нельзя. Они измеряются, и такие измерения достаточно трудны и всегда связаны с ошибками. Поэтому в таблицах кинетических констант для z и E даны интервалы их вероятных значений: $z = (3 \div 5) \cdot 10^{16}$ кг/(м³·с), $E = (2{,}4 \div 2{,}7) \cdot 10^{-23}$ Дж.

---

*) Тем, кто захочет самостоятельно получить значение $T_\text{к}$ и критерий теплового взрыва, мы хотим дать указание. Поскольку, как уже говорилось, $kT/E \ll 1$, при вычислении $T_\text{к}$ выражение $\sqrt{1 - 4kT_0/E}$ можно заменить приближенно равным ему значением $1 - 2kT_0/E - 2(kT_0/E)^2$, а при нахождении критерия взрыва выражение $1/(1 + kT_0/E)$ можно заменить приближенно равным ему значением $1 - kT_0/E$.

Таким образом, вопрос заключается не в вычислении критического значения $r_к$ размеров тела, а в определении области значений $r_к$ при изменении кинетических параметров в тех пределах, которые указаны выше.

Наиболее сильно влияют на критический размер энергия активации и температура среды — они входят в показатель экспоненты. На их фоне влияние других параметров несущественно. Изобразим на графике зависимость $r_к(T_0)$ для различных значений энергии активации (рис. 5). Область выше кривой (большие r и высокие температуры) соответствует взрыву. При уменьшении энергии активации критический размер падает.

Из графика видно, что характерные размеры грузовых отсеков судов (порядка десятков метров) попадают в область $r_к$ в разумных пределах изменения энергии активации и начальной температуры. Как уже говорилось, серия взрывов началась в связи с ростом промышленного производства нитрата аммония. Ускорился технологический процесс, который включает в себя охлаждение селитры, получаемой при нейтрализации азотной кислоты аммиаком. Вполне возможно, что погрузка продукта велась при несколько повышенной температуре. Кроме того, для предотвращения слёживания удобрений гранулы их покрывают воском, а упаковку производят в бумажные мешки. Лабораторные исследования показали, что добавка органики снижает энергию активации. Эти факторы способствуют возникновению взрыва.

На этом мы и кончим с надеждой, что читатели почувствовали силу и высокую цену теории, ибо нет ничего практичнее, чем хорошая теория.

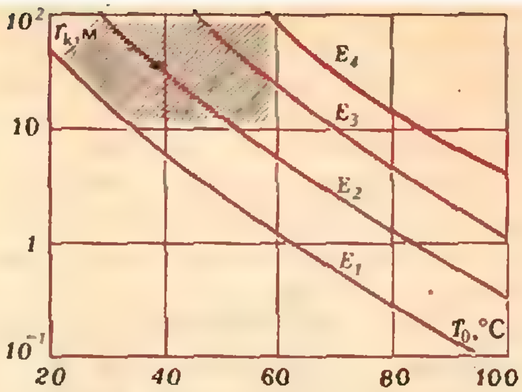


Рис. 5. Зависимость критического размера $r_к$ от температуры T_0 для нитрата аммония при различных значениях энергии активации: $E_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж; $E_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-23}$ Дж; $E_3 = 2{,}6 \cdot 10^{-23}$ Дж; $E_4 = 2{,}7 \cdot 10^{-24}$ Дж.

В заключение отметим, что методы, развитые в теории теплового взрыва, находят широкое применение при исследовании аналогичных явлений в других областях науки. Ограничимся лишь перечнем некоторых процессов, в которых существенную роль играют нелинейные (по температуре) источники тепла: термоядерные реакции, тепловой пробой диэлектриков, критические явления при движении вязкой жидкости — «гидродинамический тепловой взрыв» и т. п. Это еще раз подтверждает жизненность и силу теории теплового взрыва.

Задачи

1. Скорость газофазной реакции водорода с йодом $H_2 + J_2 = 2HJ$ выражается в виде

$$w = \varkappa n_{H_2} n_{J_2} e^{-E/kT}$$

(то есть $z = \varkappa n_{H_2} n_{J_2}$), где $\varkappa = 10^{-10}$ см³/с — некоторая характеристика рассматриваемой реакции. $E = 2{,}69 \cdot 10^{-19}$ Дж. Считая, что концентрации исходных веществ равны $n_{H_2} = n_{J_2} = n = 1{,}35 \cdot 10^{19}$ 1/см³ (нормальные условия), найти время, за которое прореагирует 1% смеси при температурах: а) 273 К, б) 600 К, в) 800 К.

2. Показать, что точки пересечения кривых теплоотвода и тепловыделения соответствуют устойчивым состояниям, если кривая теплоотвода круче кривой тепловыделения и наоборот.

3. Изобразить графически переход от подкритических условий к надкритическим при изменении: а) теплоты сгорания Q, б) коэффициента теплоотвода α.

С. Шабанов, В. Шубин

О вихревых кольцах

Как можно получить водяные и воздушные вихревые кольца в лабораторных условиях? Какими свойствами они обладают? Возможно ли взаимодействие колец с преградами и между собой? На эти и многие другие аналогичные вопросы вы получите ответ, прочитав предлагаемую статью.

Авторы статьи, еще будучи школьниками, обнаружили много интересных эффектов и особенностей поведения вихревых колец. Почти все им удалось качественно объяснить.

Образование вихревых колец

Для получения в лабораторных условиях вихрей в воздухе мы пользовались аппаратом Тэта (рис. 1). Он представляет собой цилиндр, один торец которого (мембрана) затянут каким-нибудь упругим материалом (например, кожей), а в другом имеется круглое отверстие (диафрагма).

Внутри цилиндра находятся два сосуда: один — с соляной кислотой (HCl), другой — с нашатырным спиртом (NH_4OH). В результате в цилиндре образуется густой туман (дым) из частичек хлористого аммония (нашатыря NH_4Cl).

Ударяя по мембране, мы сообщаем некоторую скорость прилегающему к мембране слою дыма. Придя в движение, этот слой вызовет уплотнение соседнего слоя, тот — следующего и так далее. Когда уплотнение дойдет до диафрагмы, дым вырвется из отверстия, приведет в движение ранее покоившийся воздух и, благодаря силам вязкого трения, сам закрутится в дымовое кольцо.

Может быть, в образовании вихревых колец главную роль играют края отверстия? Проверим это. Вместо обычной диафрагмы поставим в аппарате Тэта решето. Если наша гипотеза верна, должно получиться много маленьких колец. Однако опыт показывает, что это не так, — образуется одно большое вихревое кольцо (рис. 2).

Очень важно, чтобы дым из аппарата выходил отдельными порциями, а не непрерывной струей. Если мембрану заменить поршнем и перемещать его, из отверстия вместо колец появится непрерывная струя дыма.

Вихри в воде можно получить с помощью обыкновенной пипетки и чернил. Набрав в пипетку чернил, нужно их капать с высоты 2—3 см в аквариум с хорошо устоявшейся водой (в которой нет конвекционных потоков). В прозрачной воде хорошо заметны образующиеся чернильные кольца (рис. 3).

Можно сделать немного по-другому: выпустить струю чернил из пипетки прямо в воду (рис. 4). В этом случае вихревые кольца получаются несколько больших размеров.

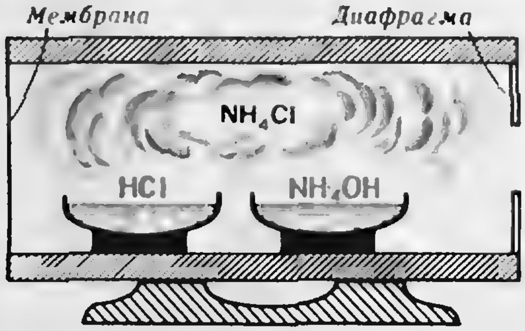


Рис. 1.

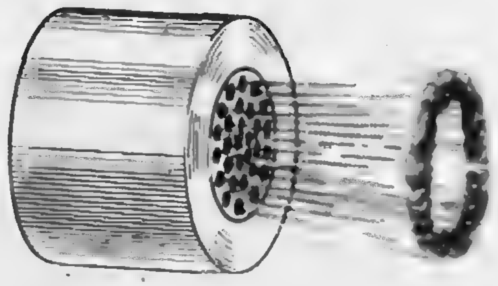


Рис 2

Природа образования вихревых колец в воде — такая же, как в воздухе; поведение чернил в воде аналогично поведению дыма в воздухе. В обоих случаях главную роль играют силы вязкого трения. (Правда, опыты показывают, что полная аналогия имеет место лишь в первый момент после образования вихрей. В дальнейшем поведение вихрей в воде и воздухе оказывается различным.)

Движение среды вокруг вихревых колец

Что происходит с окружающей средой после того, как образовался вихрь? Ответить на этот вопрос нам помогли соответствующие опыты.

На расстоянии 2—3 м от аппарата Тэта поставим зажженную свечу. Дымовое кольцо пустим с таким расчетом, чтобы оно не врезалось в пламя свечи, а прошло рядом. Пламя либо погаснет, либо будет очень сильно колыхаться. Это говорит о том, что движется не только видимая часть кольца, но и слои воздуха, прилегающие к кольцу.

Как же они движутся? Возьмем две тряпочки, одну смочим соляной кислотой, другую — нашатырным спиртом и подвесим их на расстоянии 10—15 см друг от друга. Пространство между ними сразу же заполнится дымом (парами нашатыря). Пустим в облако этого дыма дымовое кольцо из аппарата. После прохождения кольца через облако кольцо увеличивается в размерах, а облако приходит в круговое движение. Из этого можно заключить, что вокруг вихревого кольца воздух вращается (рис. 5).

Аналогичный опыт можно провести и с водой. Медленно вращая воду в стакане, капнем в нее чернил и дадим устояться. В стакане образуются чернильные нити. Теперь пустим чернильное кольцо. При прохождении кольца вблизи нитей они закручиваются.

Вихревые кольца в воде

Рассмотрим некоторые особенности поведения водяных вихрей.

В «Детской энциклопедии» приводятся очень интересные и красивые фотографии, на которых изображено последовательное развитие упавшей в воду капли чернил.

Мы заинтересовались этими фотографиями и решили сделать такой же опыт. Как уже говорилось выше, если каплю чернил капнуть с высоты 2—3 см в аквариум с водой, в воде образуется чернильное вихревое кольцо. Как оно будет вести себя дальше?

Оказывается, через некоторое время кольцо разделится на несколько новых колец, те в свою очередь тоже

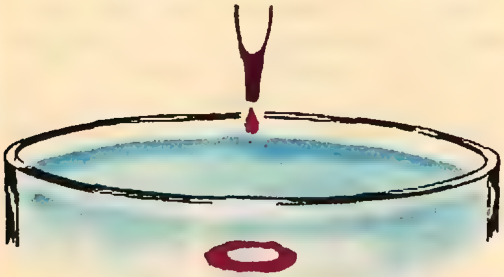


Рис. 3.

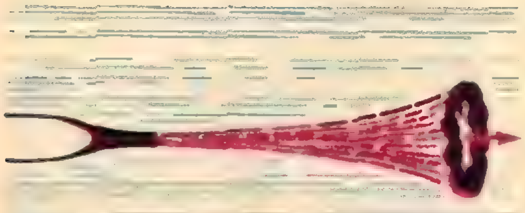


Рис. 4.

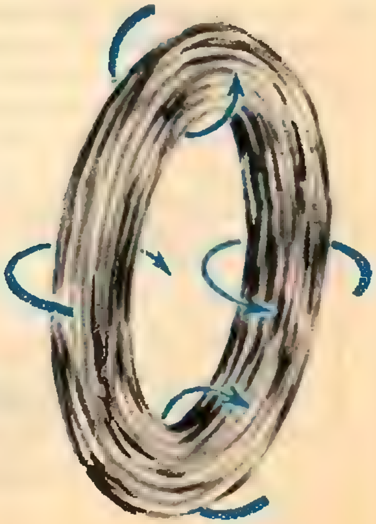


Рис. 5.

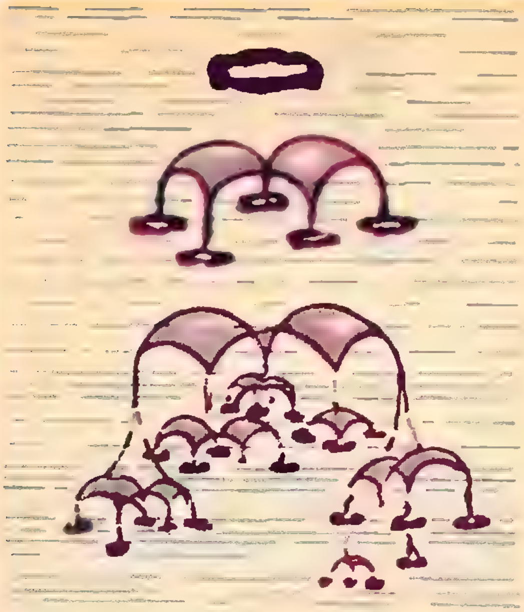


Рис. 6.

разделятся и т. д. В аквариуме появится красивый «замок» (рис. 6).

Мы заметили, что делению первичного кольца предшествует образование на нем утолщений, из которых потом рождаются вторичные кольца. Как это можно объяснить? Из-за неоднородности среды, в которой движется чернильное кольцо, некоторые его участки несколько опережают остальные, некоторые, наоборот, отстают. Чернила (более тяжелые, чем вода) стекают в те участки, которые движутся впереди, и за счет сил поверхностного натяжения формируются утолщения. Затем из этих утолщений рождаются новые капли. Каждая капля ведет себя независимо от исходного вихря, и через некоторое время из нее образуется новое вихревое кольцо. Так повторяется несколько раз. Интересно, что нам не удалось установить никакой закономерности — в десяти опытах конечное число колец четвертого «поколения» ни разу не совпало.

Оказывается, для существования вихревого кольца необходим некоторый «жизненный» объем. Мы убедились в этом на таком опыте. На пути движения водяного кольца мы ставили трубки различных диаметров. Если диаметр трубки был чуть-чуть больше диаметра кольца, влетевшее в трубку вихревое кольцо разрушалось, а взамен возникало новое кольцо меньших размеров. Если же диаметр трубки примерно в 4 раза превышал диаметр кольца, кольцо беспрепятственно проходило через трубку. В таком случае вихрь практически не подвергался никаким внешним воздействиям.

Рассеяние дымовых колец

Мы провели несколько опытов по взаимодействию дымовых колец с диафрагмами различных диаметров и с плоскостью. (Мы их назвали опытами по рассеянию вихревых колец.)

Представим себе, что кольцо налетает на диафрагму, диаметр которой меньше диаметра кольца. Рассмотрим два случая: центральное соударение, когда скорость поступательного движения кольца перпендикулярна плоскости диафрагмы, а центр кольца проходит через центр диафрагмы, и нецентральное соударение, когда центр кольца не проходит через центр диафрагмы.

В первом случае происходит следующее. Налетающее на диафрагму кольцо рассеивается, а по другую сторону диафрагмы возникает новое кольцо меньшего диаметра. Причина его возникновения — та же, что и в аппарате Тэта: воздух, движущийся вокруг первоначального кольца, устремляется в отверстие и увлекает за собой дым от рассеянного вихря.

Аналогично происходит центральное соударение в случае, когда диаметр диафрагмы равен диаметру кольца или несколько больше его.

Гораздо более интересен результат нецентрального соударения: вновь образовавшийся вихрь вылетает под углом к начальному направлению движения (рис. 7). (Попробуйте объяснить, почему!)

Теперь рассмотрим взаимодействие кольца с плоскостью. Опыты показывают, что, если плоскость перпендикулярна скорости кольца, кольцо только как бы расплывается, не теряя при этом своей формы. Объяснить это можно так: поток воздуха, движущегося внутри кольца, образует область повышенного давления, в результате чего и происходит равно-

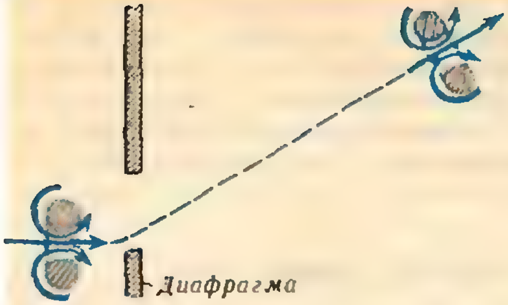


Рис. 7.

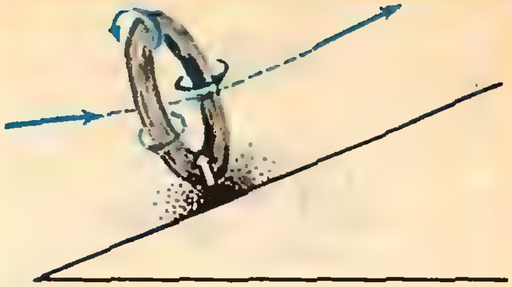


Рис. 8.

мерное расширение всего вихревого кольца.

Если же плоскость наклонить под некоторым углом к первоначальному положению, вихрь, налетая на плоскость, будет отталкиваться от нее (рис. 8). Этот факт тоже можно объяснить возникновением области повышенного давления в пространстве между кольцом и плоскостью.

Взаимодействие колец

Бесспорно, самыми интересными оказались опыты по изучению взаимодействия вихревых колец. Мы проводили эксперименты с кольцами и в воде, и в воздухе.

Пустим каплю чернил с высоты 1—2 см в сосуд с водой, а через секунду пустим еще одну каплю, но уже с высоты 2—3 см. В сосуде образуются два вихря, движущиеся с разными скоростями: второй — быстрее, чем первый ($v_2 > v_1$). Когда кольца окажутся на одной высоте, они начнут взаимодействовать друг с другом.

Оказывается, возможны три случая. Первый случай — второе кольцо обгоняет первое, не задевая его (рис. 9, *а*). При этом происходит следующее. Во-первых, потоки воды от обоих колец как бы отталкивают кольца друг от друга. Во-вторых, обнаруживается переток чернил с первого кольца на второе: водяные потоки второго кольца более интенсивны, они и увлекают чернила за собой. Иногда часть этих чернил проходит через второе кольцо, что влечет за собой образование нового небольшого кольца. Затем кольца начинают делиться, дальше ничего интересного нам заметить не удалось.

Второй случай — кольцо *2* при обгоне задевает кольцо *1* (рис. 9, *б*). В результате более интенсивные потоки второго кольца разрушают первое. Как правило, из оставшегося от первого кольца сгустка чернил образуются новые маленькие вихри.

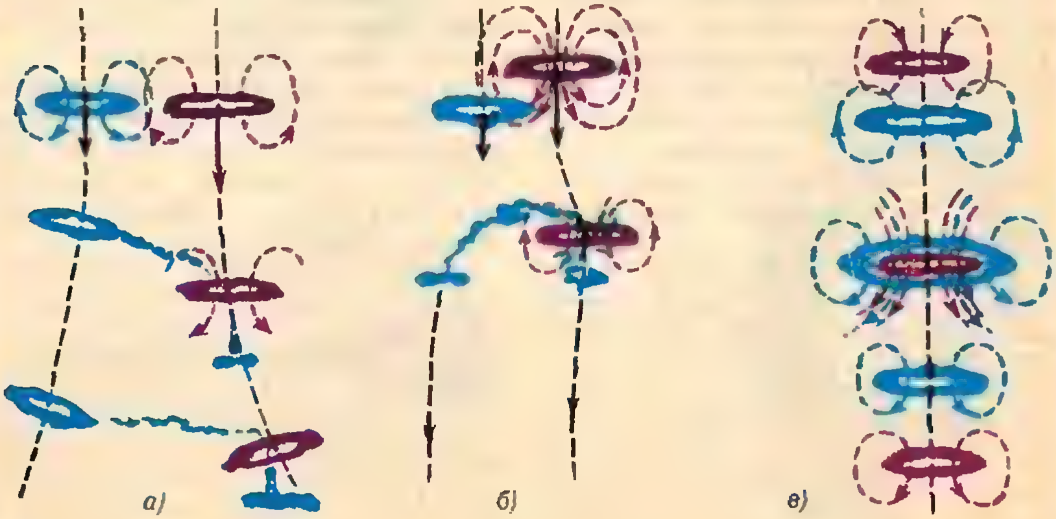


Рис. 9.

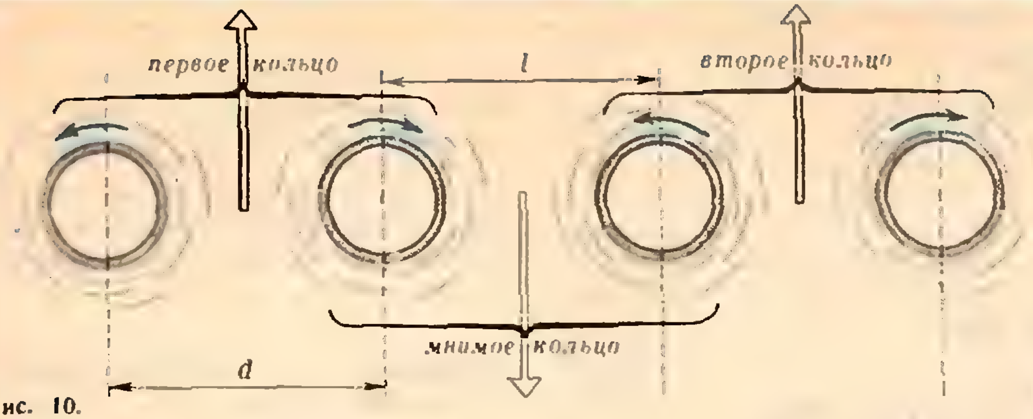


Рис. 10.

И наконец, третий случай — кольца испытывают центральное соударение (рис. 9, *в*). При этом второе кольцо проходит через первое и уменьшается в размерах, а первое, наоборот, расширяется. Как и в предыдущих случаях, это происходит за счет взаимного действия водяных потоков одного кольца на другое. В дальнейшем кольца начинают делиться.

Взаимодействие дымовых колец в воздухе мы исследовали с помощью аппарата Тэта с двумя отверстиями. Оказалось, что результаты опытов сильно зависят от силы и продолжительности удара по мембране. В нашей установке удар проводился тяжелым маятником.

Было обнаружено, что, если расстояние l между отверстиями меньше диаметра d каждого отверстия ($l<d$), два потока воздуха перемешиваются и образуется одно вихревое кольцо. При $d<l<1{,}5\,d$ кольцо, как правило, вообще не образуется. Во всех остальных случаях возникают два кольца. При этом, если $l>4d$, кольца не взаимодействуют друг с другом, а если $1{,}5d<l<4d$, кольца сначала сближаются, а затем, в конце своей «жизни», иногда расходятся.

Сближение можно объяснить тем, что в пространстве между кольцами образуется нечто подобное «мнимому» кольцу (рис. 10), которое движется в противоположную сторону. В результате плоскости настоящих колец поворачиваются друг к другу, и кольца начинают сближаться.

Что происходит с кольцами в конце «жизни», нам объяснить не удалось.

Наша обложка

Как разбить квадрат

Можно ли квадрат разрезать на некоторое число меньших попарно неконгруэнтных квадратов? Долгое время математики (среди них и Гуго Штейнгауз) предполагали, что нельзя. Возможность такого разбиения впервые была установлена немецким геометром Р. Шпрагом в 1939 году: ему удалось разбить квадрат на 55 попарно неконгруэнтных квадратов. Число 55 очень скоро было уменьшено: в 1940 году английские математики А. Стон и У. Татти установили, что квадрат можно разрезать на 28 попарно неконгруэнтных квадратов, причем это можно сделать двумя различными способами. Затем они же совместно с К. Смитом и Р. Бруксом уменьшили число 28 до 26.

Разбиение на 26 квадратов долго считалось «самым экономным» из всех возможных разбиений. Однако в 1948 году англичанин Ф. Вилькокс построил разбиение квадрата на 24 неповторяющихся квадрата. Этот «рекорд» держался на протяжении тридцати лет. В 1978 году голландский математик Дьювестин указал разбиение квадрата на 21 различный квадрат (см. Journal of Combinatorial Theory, 1978, V25, p. 240—243). Разбиение Дьювестина изображено на нашей обложке (числами отмечены длины сторон квадратов разбиения, если длина стороны исходного квадрата — 112). Дьювестин доказал, что число 21 уже уменьшить нельзя (ранее было доказано только, что число квадратов разбиения не меньше 14; см., например, с. 29 книги И. М. Яглома *«Как разрезать квадрат?»*, М., «Наука», ФМ, 1969).

О. М.

С. Агеев

Регулярное полимино

Имя С. В. Голомба — американского ученого, специалиста в области теории информации и статистики — хорошо известно любителям занимательной математики. Голомб изобрел замечательную серию игр, которым он дал общее название «полимино». Этим играм посвящено множество публикаций в самых различных журналах. «Квант» также неоднократно обращался к этой теме, а в 1975 году в издательстве «Мир» вышла книга самого автора этого изобретения, содержащая много красивых и занимательных математических задач *).

Вот пример «полиминошной» задачи (она была помещена в одном из номеров «Кванта»): *Докажите, что из трех уголков и девяти плиток (рис. 1) нельзя сложить квадрат 6×6.* Оказывается, произвольный прямоугольник сложить тоже нельзя из трех таких уголков и соответствующего числа плиток, но доказать это чрезвычайно трудно. Как правило, подобные задачи не могут исследовать методом перебора даже быстродействующие ЭВМ. Поэтому для их решения приходится придумывать весьма хитроумные методы. Об одном из них, основанном на раскрасках, рассказывалось в «Кванте» № 11 за 1972 год. В этой заметке мы расскажем о совсем другом подходе, связанном с … географией и игральной костью.

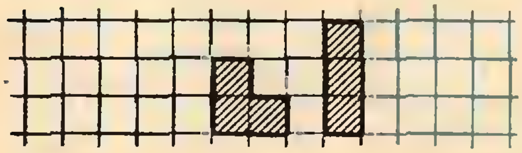


Рис. 1.

География на клетчатой бумаге и игральная кость

Все дальнейшие события в нашей статье будут происходить на клетчатой бумаге, снабженной «географической ориентировкой» (рис. 2). По этой клетчатой бумаге мы будем перекатывать по определенным правилам обыкновенную игральную кость — кубик с ребром единичной длины и пронумерованными гранями. Кубик всегда будет расположен на бумаге так, чтобы центр его нижней грани совпадал с узлом сетки, а боковые грани были параллельны линиям сетки. Каждому положению кубика на клетчатой бумаге поставим в соответствие два числа — номера южной и верхней граней. Назовем эту пару чисел *ориентацией* кубика.

Упражнение 1. Сколько существует различных ориентаций кубика?

Пусть задан путь Г, соединяющий узлы A и B сетки. Мы, разумеется, будем рассматривать пути, идущие только по линиям сетки. Если кубик стоит на узле A, то его можно

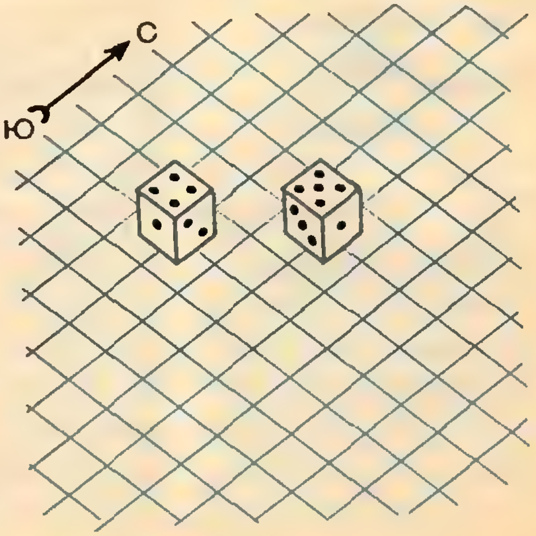


Рис. 2.

---

*) «Полимино» (М., «Мир», 1975)

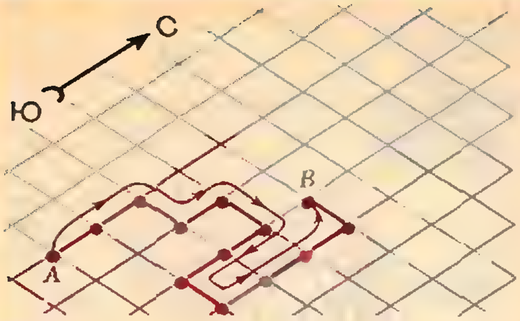


Рис. 3.

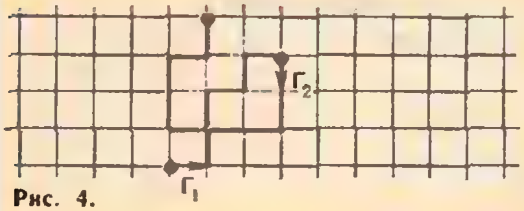


Рис. 4.

перекатить вдоль пути Γ на узел B (рис. 3). При этом его начальная ориентация α заменится на некоторую ориентацию β. Будем записывать это следующим образом: $\beta = \Gamma(\alpha)$.

Упражнение 2. Пусть зафиксированы узлы A и B и начальная ориентация α. Докажите, что, перекатывая кубик по всевозможным путям из A в B, можно получить не больше половины ориентаций кубика. Убедитесь, что половину ориентаций получить всегда можно.

Если конец пути Γ_1 совпадает с началом пути Γ_2, то возникает путь $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$, составленный из этих двух путей (рис. 4). Кроме того, для каждого пути Γ естественно определяется «обратный» путь Γ^{-1}, получающийся заменой направления вдоль пути Γ на обратное. Легко убедиться (сделайте это), что $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)(\alpha) = \Gamma_2(\Gamma_1(\alpha))$ и $\Gamma^{-1}(\Gamma(\alpha)) = \alpha$.

Назовем путь Γ *регулярным*, если $\Gamma(\alpha) = \alpha$ для некоторой ориентации α.

Упражнение 3. Докажите, что

а) если Γ — регулярный путь, то $\Gamma(\beta) = \beta$ для любой ориентации β;

б) если Γ — регулярный путь, то и Γ^{-1} — регулярный путь;

в) если Γ_1 и Γ_2 — регулярные пути и путь $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ определен, то и $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ — регулярный путь.

Упражнение 4. Докажите, что всякий регулярный путь имеет четную длину, и приведите пример нерегулярного пути четной длины.

Регулярное полимино

Теперь вернемся к полимино. Напомним, что полимино — это многоугольник, составленный из одноклеточных квадратов, причем любой квадрат примыкает хотя бы к одному соседнему по стороне (то есть шахматная ладья может пройти с любой клетки полимино на любую другую). Обычная задача из теории полимино формулируется так: можно ли из данного набора полимино сложить данную фигуру? Мы сумеем решить целый класс таких задач. Будем рассматривать полимино как многоугольник, нарисованный на нашей клетчатой бумаге. Назовем полимино *регулярным в узле A*, если регулярен путь, идущий по его контуру с началом и концом в узле A, лежащем на этом контуре. Оказывается, это определение не зависит от выбранного узла.

Упражнение 5. Если полимино регулярно в некотором узле его контура, то оно регулярно и в любом другом его узле. Докажите.

Упражнение 5 дает нам возможность говорить просто о регулярных полимино. Несколько таких полимино приведено на рисунке 5.

Упражнение 6. Докажите, что эти полимино регулярны.

Оказывается, из регулярных полимино нельзя сложить нерегулярное полимино. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать следующее утверждение:

Теорема о сумме. *Если полимино P и Q регулярны и полимино T сложено из них, то оно тоже регулярно.*

Пояснения к доказательству этой теоремы даны на рисунке 6.

Можно доказать и теорему о разности: *если полимино T, сложенное из полимино P и Q, регулярно и полимино P регулярно, то и полимино Q регулярно.*

Упражнение 7. Докажите теорему о разности полимино.

Упражнение 8. Докажите, что прямоугольное полимино регулярно тогда и только тогда, когда его площадь кратна четырем.

Из теоремы о сумме и упражнений 6 и 8 сразу вытекает решение задачи, похожей на *задачу про уголки*, — доказать, что из любого количества полимино, приведенных на рисунке 5, нельзя сложить прямоугольника с площадью, не кратной четырем.

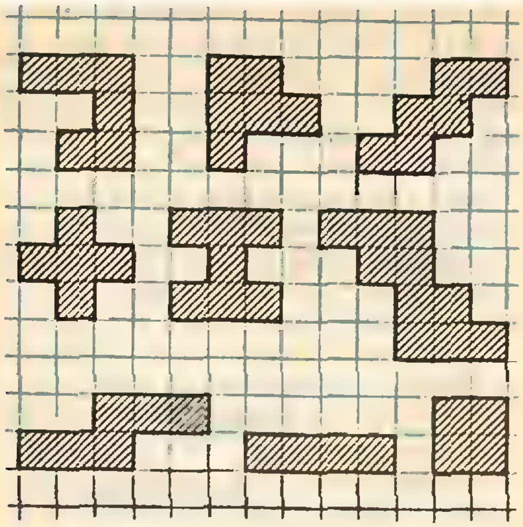


Рис. 5.

Регулярных полимино бесконечно много. Возникает вопрос, не складываются ли они все из конечного числа *простых* полимино — регулярных полимино, не представимых в виде объединения регулярных полимино. Подумайте над этим.

Упражнение 8 и теорема о разности подсказывают такой способ поиска простых полимино: взять некоторый прямоугольник $4k \times m$ и вычитать из него последовательно уже известные регулярные полимино, пока это возможно, а затем изучать полимино, полученное в остатке. Этот прием значительно ускоряет составление каталога простых полимино.

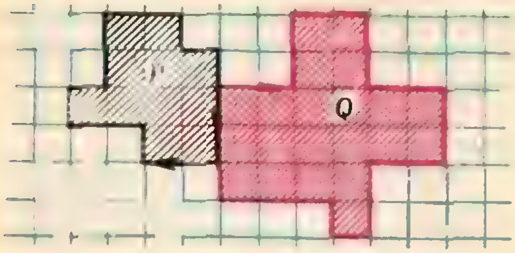


Рис. 6.

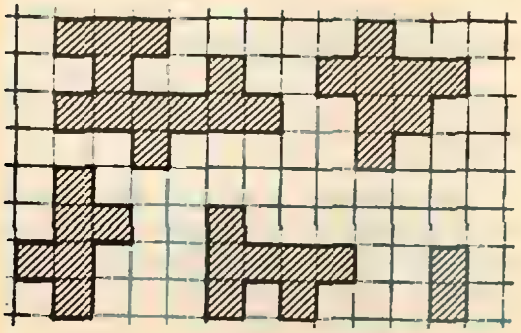


Рис. 7.

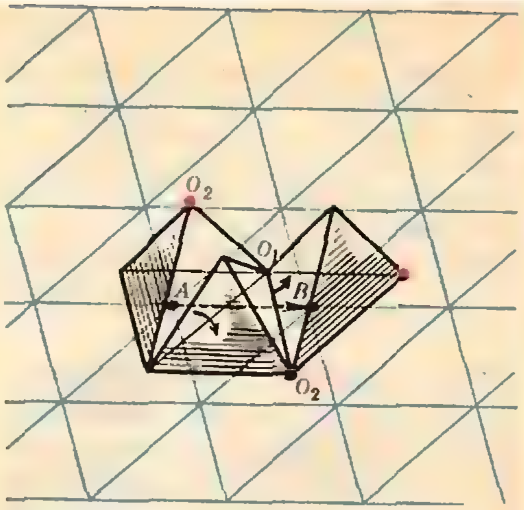


Рис. 8.

Упражнение 9. Убедитесь, что все полимино на рисунке 5 — простые. Найдите еще какие-нибудь простые полимино.

О других теориях регулярных полимино

Наше разбиение всех полимино на регулярные и нерегулярные оказалось полезным потому, что объединение и разность двух регулярных полимино вновь являются регулярными. Существует множество других полезных способов разбиения полимино на две группы. Например, можно было бы назвать полимино *регулярным*, если его площадь кратна пяти. Можно получить новую теорию, если занумеровать грани кубика так, чтобы противоположные грани имели одинаковые номера. В этой теории останутся регулярными полимино «старой» теории и появятся новые регулярные полимино. Некоторые из них приведены на рисунке 7.

Можно разрабатывать теории и для фигур из правильных треугольников. Они называются *полиамондами*. По паркету из правильных треугольников можно катать целых три фигуры — тетраэдр, октаэдр и додекаэдр. Правда, катать их надо более «хитрым» способом. Как катать тетраэдр, показано на рисунке 8 (переваливаем тетраэдр через ребро, пересекающее отрезок AB, его нужно затем повернуть на 60° вокруг «неподвижной» вершины O_1). Продумайте самостоятельно детали получающейся теории.

задачник Кванта

Задачи

M591—M595; Ф603—Ф607

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 января 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M591, M592» или «Ф603». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...: новая задача по математике»).

Задачи M591, M594 и M595 предлагались на XXI Международной олимпиаде.

M591. Пусть p и q — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Докажите, что число p делится на 1979.

M592. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

С. Овчинников

M593. Внутри окружности Γ расположено n кругов. Докажите, что длина границы объединения этих кругов не превосходит длину окружности Γ, если

а) $n=2$;

б) центры всех n кругов лежат на одном диаметре окружности Γ;

в) все n кругов содержат центр окружности Γ.

Ф. Кабдыкаиров,
В. Произволов

M594*. Найдите все действительные числа a, для которых существуют действительные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

M595. Пусть A и E — две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, лягушка может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E, лягушка останавливается и остается там. Пусть a_n — количество способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Докажите, что

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}),$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots, \text{ где } x = 2+\sqrt{2}, \; y = 2-\sqrt{2}.$$

Ф603. Студент ездит в институт на метро по кольцевой линии. Станция, на которой он садится, и станция, на которой он выходит, находятся на противоположных концах диаметра кольца, так что студенту безразлично, в какую сторону ехать. Поэтому он садится в тот поезд, который подойдет раньше. Количество поездов, идущих по кольцу в разные стороны, одинаково. Однако студент заметил, что он чаще ездит на поезде, идущем по часовой стрелке. Как это можно объяснить?

Ф604. В условиях невесомости жидкость, помещенная в стеклянный цилиндрический сосуд с радиусом основания R_1, приняла форму, показанную на рисунке 1. Свободная поверхность жидкости имела форму сферы с радиусом R_0. Та же жидкость, помещенная в стеклянный сферический сосуд радиуса R_2, приняла форму, показанную на рисунке 2. Свободная поверхность жидкости была плоской. Определить высоту уровня жидкости в сферическом сосуде. Какую форму будет иметь жидкость в сферическом сосуде, если радиус сосуда больше R_2? меньше R_2?

В. Скороваров

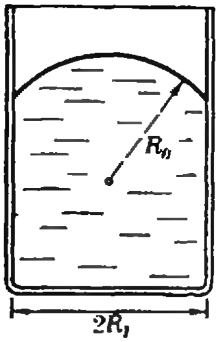


Рис. 1.

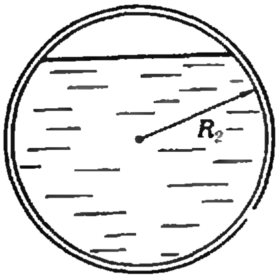


Рис. 2.

Ф605. Проволочный предохранитель перегорает, если напряжение на нем равно 10 В. При каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину увеличить вдвое?

Ф606. Шайба соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости с углом α. Коэффициент трения между шайбой и поверхностью наклонной плоскости изменяется с расстоянием l от вершины по закону $\mu = kl$ ($k = \text{const}$). На каком расстоянии от вершины надо поставить упор, чтобы после одного упругого соударения с упором шайба остановилась как можно выше?

В. Белонучкин

Ф607. Самолет летит по замкнутому маршруту ABC. Пункты A, B и C лежат в вершинах правильного треугольника. В каком случае время, затраченное на перелет, будет меньше: если ветер дует в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$ или если ветер дует в направлении вектора $\overrightarrow{BA}$?

Н. Кушнир,
ученик 9 класса

Решения задач

М538, М539; Ф547—Ф552

М538. *Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств* $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, *где* $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots$, $g(1)<g(2)<\ldots<g(n)<\ldots$, *и* $g(n)=f(f(n))+1$ *для всех* $n\geqslant 1$. *Определите* $f(240)$.

Таблица 1

n	$f(n)$	$g(n)$
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	. . .
11	17	
12	19	
13	21	
14	22	
. . .	. . .	

Таблица 2

n	$f(n)$	$g(n)$
2	3	2+3=5
3	5—1=4	3+4=7
4	7—1=6	4+6=10
6	10—1=9	6+9=15
9	15—1=14	9+14=23
14	23—1=22	14+22=36
22	36—1=35	22+35=57
35	57—1=56	35+56=91
56	90	146
90	145	235
145	234	379
234	378	. . .

Обозначим множества $\{f(n)\}$ и $\{g(n)\}$ через F и G (по условию $F\cap G=\varnothing$ и $F\cup G=\mathbb{N}$). Начав с первых натуральных чисел 1, 2, 3, ..., легко последовательно выяснить, к какому из множеств F или G следует отнести очередное натуральное число и какому номеру n оно соответствует в своем множестве: ясно, что $1=f(1)$, поэтому $2=f(f(1))+1=g(1)$; далее, $3=f(2)$, $4=f(3)$, $5=f(f(2))+1=g(2), \ldots$ (таблица 1). При этом мы пользуемся условием $g(n)=f(f(n))+1$ — очередное $g(n)$ ставим сразу после того, как поставлено $f(f(n))$.

Таким образом, $f(n)$ и $g(n)$ определяются однозначно, и в принципе можно решить задачу, просто доведя нашу таблицу до 240-й строки. Однако это утомительно и неинтересно. Можно сэкономить время, подметив появляющиеся закономерности:

1°. *разность* $f(n+1)-f(n)$ *равна всегда* 1 *или* 2, *причем*

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases} 1, \text{ если } n\in G, \\ 2, \text{ если } n\in F \end{cases}$$

(если $n=f(k)$, то $f(n)+1=g(k)$);

2°. $g(n)=f(n)+n$ *при любом* n. В самом деле, среди $g(n)$ чисел $1, 2, \ldots, f(f(n)), g(n)$ имеется $f(n)$ чисел $f(1), f(2), \ldots, f(f(n))$ из F и n чисел $g(1), g(2), \ldots, g(n)$ из G. Таким образом, $g(n)=f(n)+n$.

Свойства 1° и 2° дают нам возможность составить «ускоренную» таблицу 2. Теперь остается, пользуясь свойством 1°, перейти от 234 к 240 (таблица 3). Еще проще, как догадался наш читатель *А. Балинский*, предусмотрительно сделать лишний шаг раньше (используя равенство $f(f(n))=f(n)+n-1$):

$$f(57)=90+2\quad(56\in F),\quad f(92)=92+56=148,$$

$$f(148)=148+91,$$

$$f(239)=239+147=386,\quad f(240)=386+2=388\quad(239\in F).$$

Итак, ответ на конкретный вопрос задачи М538 получен: $f(240)=388$. Однако оказывается, что здесь можно продвинуться существенно дальше — найти замечательные простые формулы, сразу дающие ответ для любого n:

$$f(n)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right],\quad g(n)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]\qquad(*)$$

(здесь $[x]$ — целая часть x). До формул (*) додумались несколько наших читателей, но не всем удалось их аккуратно доказать. Алгебраическое доказательство довольно громоздко (хотя и не очень сложно); мы вместо него приведем наглядную картинку, из которой будут ясны и формулы (*), и ход построения последовательностей $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$. Но прежде объясним «на пальцах», откуда в этой задаче появляется иррациональное число $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Глядя на таблицу 1, естественно предположить, что последовательность $\{f(n)\}$ растет примерно как линейная функция от n: $f(n)\approx\gamma n$. Тогда при больших n должно быть $g(n)\approx f(f(n))\approx\gamma(\gamma n)=\gamma^2 n$. Но согласно 2°, $g(n)=f(n)+n$, так что $\gamma^2 n\approx\gamma n+n$, а это возможно лишь при $\gamma^2=\gamma+1$, откуда (если $\gamma>0$) $\gamma=(\sqrt{5}+1)/2$. Из дальнейшего будет видно, что наши множества F и G из первых n натуральных чисел действительно содержат примерно по n/γ и n/γ^2 чисел соответственно (как говорят, они имеют *плотности* $1/\gamma$ и $1/\gamma^2$).

$f(146) = 236$, $146 \in G$
$f(147) = 237$, $147 \in F$
$f(148) = 239$,
$f(235) = 380$, $235 \in G$
$f(236) = 381$, $236 \in F$
$f(237) = 383$, $237 \in F$
$f(238) = 385$, $238 \in G$
$f(239) = 386$, $239 \in F$
$f(240) = 388$.

Таблица 3

Число γ и его ближайшие «родственники»

$$1/\gamma = \gamma - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2, \ \gamma^2 = \gamma + 1 = (\sqrt{5} + 3)/2, \ 1/\gamma^2 = (3 - \sqrt{5})/2$$

возникают в самых разнообразных задачах *), в частности, при исследовании *чисел Фибоначчи* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., $\Phi_{n+1} = \Phi_{n-1} + \Phi_n$, ... (любопытно, что эти числа на 1 меньше чисел n из таблицы 2; подумайте, почему), в теории чисел, в геометрии. В частности, легко проверить, что при отрезании квадрата от прямоугольника с «золотым» отношением длин сторон γ остается прямоугольник, подобный первоначальному, — отсюда следует, что на рисунке 1, где такое отрезание проделано дважды, точки O, K и M лежат на одной прямой. Это свойство числа γ нам пригодится.

Приведем теперь простой способ построения чисел $f(n)$ и $g(n)$. На клетчатой бумаге как на координатной плоскости (рис. 2) проведем прямую l, определяемую уравнением $y = \gamma x$ — с «золотым» угловым коэффициентом $\gamma = (\sqrt{5} + 1)/2$. (Как это сделать с помощью циркуля и линейки?) Занумеруем подряд все те «красные» клетки (рис. 2), которые пересекает прямая l, начиная с нулевой клетки, содержащей начало координат O. Поскольку γ иррационально, l не проходит через узлы сетки, то есть входит в очередную клетку, пересекая либо прямую $y = n$, либо прямую $x = n$ ($n \in Z$). Заметим, что номер клетки $\{(x; y) : [x] = i, [y] = j\}$ равен $i + j$ (почему?). Мы утверждаем, что если номер клетки m, то соответственно либо $m = f(n)$, либо $m = g(n)$. Другими словами, если занумеровать по порядку отрезки координатных лучей Ox и Oy, то над отрезком номер n оси x лежит клетка номер $g(n)$, а справа от отрезка номер n оси y лежит клетка номер $f(n)$. Проверьте это по таблице 1 и рисунку 2!

Доказательство, что построенные таким образом, с помощью клетчатой бумаги, числа $f(n)$ и $g(n)$ в самом деле те, которые нам нужны, состоит в проверке того, что номера клеток удовлетворяют всем свойствам последовательностей f и g из условия задачи. Тот факт, что мы получаем разбиение всего натурального ряда N на две непересекающиеся возрастающие последовательности, ясен. Остается проверить, что $g(k) = f(f(k)) + 1$. «Распространим» нумерацию красных клеток на всю плоскость: каждой клетке плоскости $\{(x; y) : [x] = i, [y] = j\}$ присвоим номер $i + j$ (синие цифры на рисунке 2); при этом номера отрезков на осях совпадают с номерами содержащих их клеток.

Для произвольного n отметим точки $K(n\gamma; n)$ и $M(n; \gamma n)$ пересечения прямой l с прямыми $y = n$ и $x = n$ (рис. 3). Тогда левая клетка, содержащая точку K, имеет номер $f(n)$, а нижняя клетка, содержащая точку M, — номер $g(n)$. Отметим проекции K' и M' точек K и M на ось y. Заметим, что $\widehat{K'KM'} = 45^\circ$ (вспомните рисунок 1), поэтому клетки, содержащие точки K и M', имеют один и тот же номер $f(n)$. В точке M, таким образом, прямая l переходит из клетки номер $f(f(n))$ в клетку номер $g(n)$, то есть $f(f(n)) + 1 = g(n)$.

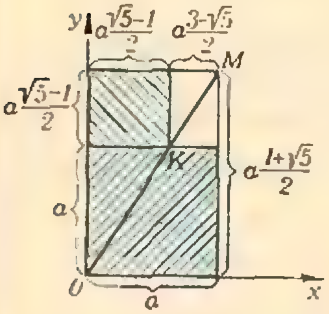


Рис. 1.

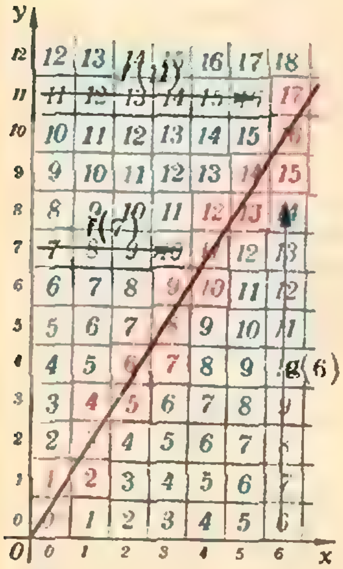


Рис. 2.

---

*) Н. Н. Воробьев «*Числа Фибоначчи*» (М., «Наука», 1978); Г. С. М. Коксетер «*Введение в геометрию*» (М., «Наука», 1966), гл. «Золотое сечение и филлотаксис»; А. Д. Бендукидзе «*Золотое сечение*» («Квант», 1973, № 8, с. 22).

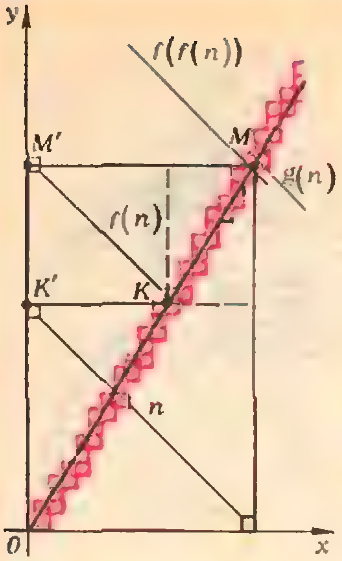


Рис. 3.

Заодно, подсчитав номера клеток, содержащих K и M, мы получим и основные формулы (*):

$$f(n)=[n/\gamma]+n=\left[n\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+n=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,n\right],$$

$$g(n)=n+[\gamma n]=n+\left[n\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]=\left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}\,n\right].$$

Заметим, что точно таким же образом можно доказать следующий интересный факт: *среди чисел $[\alpha n+\mu]$, $[\beta(n-\mu)+\mu]$, где α и β — иррациональные числа, связанные условием $\alpha\beta=\alpha+\beta$ (μ — любое фиксированное число, и n пробегает все множество целых чисел $\mathbf{Z}$), встречается каждое целое число, причем ровно один раз* *). (Для доказательства рассмотрите прямую $y=\lambda x+\mu$ с $\lambda=\alpha-1=1/(\beta-1)$ и выпишите номера клеток, содержащих эту прямую.) То же соотношение между α и β можно записать и так: $1/\alpha+1/\beta=1$ — плотности множеств

$$\{[\alpha n+\mu],\ n\in\mathbf{Z}\}\ \text{и}\ \{[\beta(n-\mu)+\mu],\ n\in\mathbf{Z}\}$$

в сумме, естественно, дают 1.

◆

М539. *Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки PA, PB и PC взаимно перпендикулярны. Пусть D — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC, диагонально противоположная к P. Определите множество точек D.*

Обсудим сначала аналогичную задачу на плоскости: *найти множество четвертых вершин D прямоугольников $PADC$, одна вершина P которых лежит в данной точке внутри данной окружности радиуса r, а две соседние с ней вершины A и C — на окружности.* У этой довольно популярной задачи **) запоминающийся ответ: *вершины D лежат на окружности, концентричной данной, квадрат радиуса которой равен $2r^2-|KP|^2$, где K — центр окружности* (рис. 4). Этот результат сразу вытекает из следующей полезной леммы:

1°. *Для любого прямоугольника $ABCD$ и любой точки K*

$$|AK|^2+|CK|^2=|BK|^2+|DK|^2. \qquad (1)$$

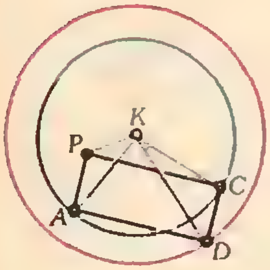


Рис. 4.

Равенство (1) становится очевидным, если ввести систему координат, как показано на рисунке 5: в обеих частях (1) стоит сумма

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(x-a)^2+(y-b)^2;$$

здесь $(x;\ y)$ — координаты точки K.

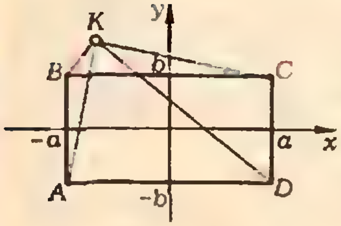


Рис. 5.

Если $|AK|=|CK|=r$, $|KP|=p$, то из (1) вытекает (с заменой буквы B на P): $|DK|^2=2r^2-p^2$, что и утверждалось выше.

Результат плоского варианта задачи **М**539 наводит на мысль, что в пространственной задаче ответом будет сфера, концентричная данной. Так оно и есть:

2°. *Все точки D лежат на сфере с центром в той же точке K, что у исходной сферы, и радиусом $\sqrt{3r^2-2p^2}$, где $p=|KP|$, r — радиус исходной сферы.*

Это доказали многие читатели, причем самыми разными способами: вычислениями в координатах, с векторами и скалярным произведением и др. Пожалуй, самое простое и наглядное решение получается с помощью той же леммы 1°.

---

*) При $\mu=0$ этот факт доказан в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома *«Избранные задачи и теоремы. Арифметика и алгебра»* (М., «Наука», 1976), а также в упоминавшейся книжке Н. Н. Воробьева.

**) См., например, книгу Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера *«Прямые и кривые»* (М., «Наука», 1978), задача 2.13.

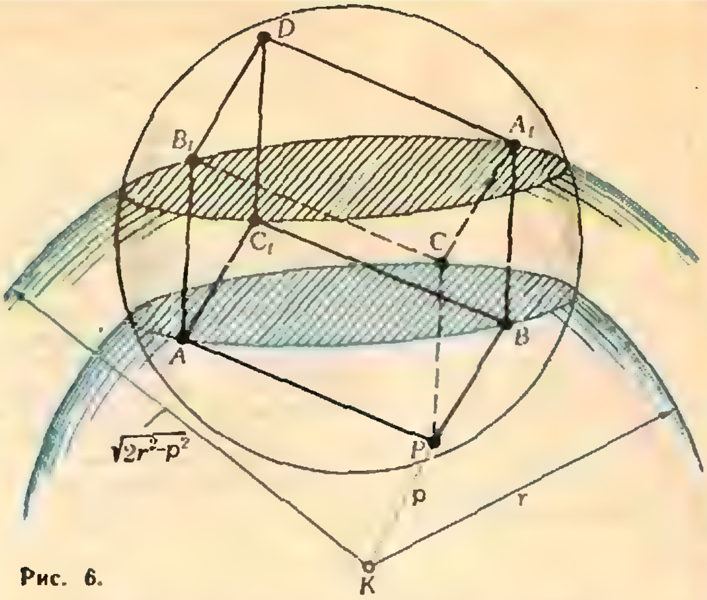


Рис. 6.

Заметим, что эта лемма верна и для любой точки K пространства: если точка K приподнята над плоскостью рисунка 5 на расстояние z, то есть имеет координаты $(x;\ y;\ z)$, то к обеим частям (1) добавится по $2z^2$.

Докажем теперь утверждение 2°. Согласно 1°, вершины A_1, B_1 и C_1 параллелепипеда — четвертые вершины прямоугольников PBA_1C, PCB_1A и PAC_1B (рис. 6) — лежат на расстоянии $\sqrt{2r^2-p^2}$ от точки K. Снова пользуемся 1°: четвертая вершина D прямоугольника A_1CB_1D, у которого $|A_1K|^2=|B_1K|^2=2r^2-p^2$, $|CK|^2=r^2$, находится от точки K на расстоянии

$$\sqrt{2(2r^2-p^2)-r^2}=\sqrt{3r^2-2p^2}.$$

Итак, мы доказали, что вершина D параллелепипеда лежит на сфере с центром K и радиусом $\sqrt{3r^2-2p^2}$. Но, как в любой задаче на отыскание множества точек, нужно доказать и обратное: что любая точка этой сферы является вершиной некоторого параллелепипеда, удовлетворяющего условию задачи. Про это забыли многие из читателей, приславших нам решение задачи **М539**. Между тем здесь дать аккуратное доказательство обратного утверждения далеко не так просто, как в плоском случае (там по заданным точкам P и D легко, построив окружность с диаметром $[PD]$, найти вершину A и с помощью 1° доказать, что четвертая вершина C прямоугольника $PADC$ лежит на данной окружности). Возможно, это связано с тем, что в пространственной задаче больше свободы в выборе нужного параллелепипеда: для данных точек P и D их существует целое семейство. (Нам, конечно, достаточно построить один из них.)

В доказательстве обратного утверждения некоторые читатели использовали метод координат, другие — соображения непрерывности. Мы же и здесь начнем с геометрических наблюдений, которые были сделаны при попытках решить эту задачу:

3°. *Квадраты радиусов четырех сфер с центром K, на которых лежат точки P; A, B и C; A_1, B_1 и C_1; D, образуют арифметическую прогрессию:*

$$p^2,\ r^3,\ 2r^3-p^2,\ 3r^2-2p^2.$$

Аналогичная закономерность есть и в плоском варианте (правда, там в прогрессии всего три члена). В связи с этим укажем следующее легко доказываемое утверждение:

Если несколько концентрических окружностей, квадраты радиусов которых составляют арифметическую про-

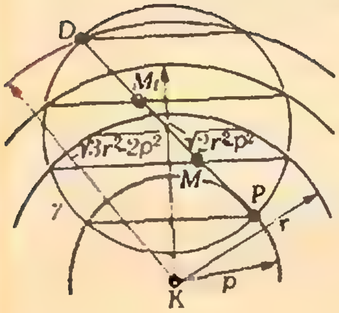


Рис. 7.

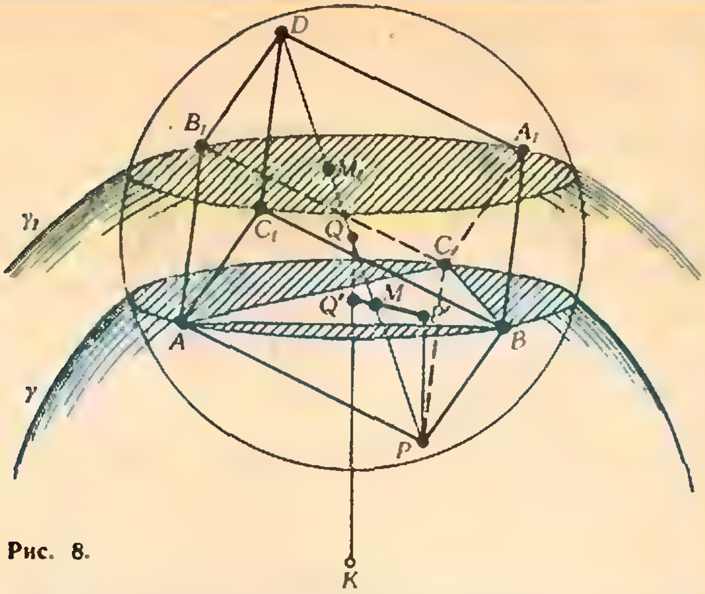


Рис. 8.

грессию, пересекают некоторую окружность γ, *то общие (с* γ*) хорды этих окружностей параллельны и находятся на одинаковом расстоянии друг от друга* (рис. 7).

Нам понадобится пространственный вариант этого утверждения, где вместо окружностей фигурируют сферы, вместо хорд — круги и т. п. (он получается из плоского рисунка 7 вращением вокруг оси симметрии).

4°. Как легко доказать, *плоскости* ABC *и* $A_1B_1C_1$ *пересекают диагональ* PD *параллелепипеда в таких точках* M *и* M_1, *которые делят ее на три одинаковых отрезка:* $|PM| = |MM_1| = |M_1D|$ *— и являются точками пересечения медиан треугольников* ABC *и* $A_1B_1C_1$ (рис. 8). Середина Q диагонали PD служит центром симметрии параллелепипеда.

5°. Чтобы получше объяснить пространственные рисунки 6 и 8, укажем еще следующие факты:

Проекция Q' на плоскость ABC центра Q прямоугольного параллелепипеда попадает в центр окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$; проекция P' вершины P параллелепипеда — в ортоцентр $\triangle ABC$ (точку пересечения высот). Отсюда и из 4° легко вывести теорему Эйлера: $M \in [Q'P']$ и $|MQ'| : |MP'| = 2$ (рис. 9) *). Теперь уже все готово для окончания решения задачи М539.

Пусть $|KP| = p$ и $|DK| = \sqrt{3r^2 - 2p^2}$; Q — середина отрезка $[PD]$, γ и γ_1 — окружности, по которым сфера с диаметром $[PD]$ пересекает сферы радиусов r и $\sqrt{2r^2 - p^2}$ с центром K (см. рис. 8). Согласно 4°, плоскости этих окружностей делят $[PD]$ на три одинаковые части: $[PM]$, $[MM_1]$, $[M_1D]$. Возьмем любую точку $A \in \gamma$ и обозначим через A_1 симметричную ей относительно Q точку $A_1 \in \gamma_1$.

Ясно, что $\widehat{PAD} = \widehat{PA_1D} = 90°$. Проведем через точки P и D плоскости, перпендикулярные отрезкам $[PA] \parallel [DA_1]$. Точки пересечения этих плоскостей с окружностями γ и γ_1 дают нам вершины нужного прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 8): в самом деле, середины E и E_1 отрезков AD и A_1P (рис. 10, 11) лежат в плоскостях окружностей γ и γ_1 и служат центрами сечений сферы построенными плоскостями; следовательно, AC_1DB_1 и A_1CPB — прямоугольники.

Н. Васильев

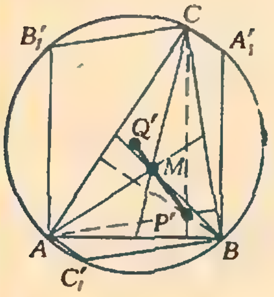


Рис. 9.

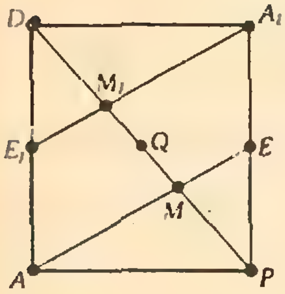


Рис. 10.

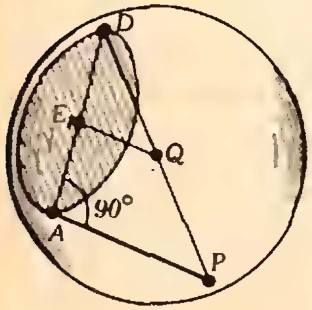


Рис. 11.

---

*) Правда, такое ее доказательство годится лишь для остроугольного треугольника, потому что лишь такой треугольник может служить сечением (ABC) для прямоугольного параллелепипеда. Подумайте, нельзя ли переделать это доказательство для тупоугольного $\triangle ABC$.

Ф547. *Фотографии шаровых сгустков светящейся плазмы, летящих равнозамедленно до остановки, имеют вид полос длины l. Максимальная ширина полос $d \ll l$. Расстояние между плазмой и объективом фотоаппарата L, фокусное расстояние объектива F. Минимальное время «засветки», необходимое для того, чтобы на фотографии появилось изображение, равно τ. Определить ускорение сгустков. Объектив фотоаппарата остается открытым до полной остановки сгустков.*

Максимальная ширина полосы, очевидно, определяется диаметром D сгустка. Если $\Gamma = \left|\frac{F}{F-L}\right|$ — увеличение фотоаппарата, то $D = \frac{d}{\Gamma}$. Чтобы изображение появилось на пленке, необходимо, чтобы скорость $\vec{v}$ сгустка была такой, что за время τ сгусток пролетал бы расстояние не больше D. Если с момента появления изображения до полной остановки сгустка проходит время t, то в момент появления изображения скорость сгустка равна $|\vec{v}| = \overrightarrow{|a|}\,t$ и удовлетворяет условию

$$\frac{D}{\overrightarrow{|a|}\,t} = \frac{d}{\Gamma\,\overrightarrow{|a|}\,t} = \tau. \tag{1}$$

До полной остановки сгусток проходит расстояние

$$L = \frac{l}{\Gamma} = \frac{\overrightarrow{|a|}\,t^2}{2}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) находим ускорение сгустка:

$$\overrightarrow{|a|} = \frac{d^2}{2\Gamma l\tau^2} = \frac{d^2}{2l\tau^2}\left|\frac{F-L}{F}\right|.$$

В. Сергиевич

◆

Ф548. *Реактивная тележка массы m описывает мертвую петлю по вертикальной круговой дорожке радиуса R с постоянной линейной скоростью v. Какая работа совершается силой трения при перемещении тележки из самого нижнего положения в самое верхнее? Коэффициент трения между тележкой и дорожкой равен μ.*

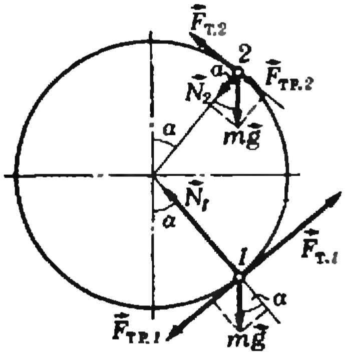


Рис. 12.

Рассмотрим два симметричных положения тележки, при которых радиус-векторы точек, в которых находится тележка, составляют с вертикалью один и тот же угол α (рис. 12). $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — силы реакции дорожки в этих положениях, $\vec{F}_{т1}$ и $\vec{F}_{т2}$ — силы тяги, $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ — силы трения. Так как тележка скользит по дорожке, $F_{тр1} = \mu N_1$ и $F_{тр2} = \mu N_2$ (здесь $N_1 = |\vec{N}_1|$, $F_{тр1} = |\vec{F}_{тр1}|$ и т. п.).

Тележка движется по окружности со скоростью v; следовательно, сумма проекций всех сил, действующих на тележку, на направление радиуса равна mv^2/R, то есть (см. рис. 12)

$$N_1 - mg\cos\alpha = mv^2/R, \quad N_2 + mg\cos\alpha = mv^2/R.$$

Отсюда

$$N_1 = (mv^2/R) + mg\cos\alpha, \quad N_2 = (mv^2/R) - mg\cos\alpha$$

и

$$F_{тр1} = \mu\,[(mv^2/R) + mg\cos\alpha],$$

$$F_{тр2} = \mu\,[(mv^2/R) - mg\cos\alpha].$$

При повороте радиус-вектора на малый угол $\Delta\alpha$, то есть при малом перемещении тележки на $\Delta l = R\,\Delta\alpha$ силы трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ совершают работы $\Delta A_1 = F_{тр1} R\,\Delta\alpha$ и $\Delta A_2 = F_{тр2} R\,\Delta\alpha$.

Сумма работ сил $\vec{F}_{тр\,1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ на малых участках Δl равна

$$\Delta A = (F_{тр\,1} + F_{тр\,2})\,R\,\Delta\alpha = 2\mu mv^2\,\Delta\alpha.$$

Значение ΔA не зависит от α. Это означает, что при повороте радиус-вектора тележки на малый угол $\Delta\alpha$ из любых двух симметричных точек (аналогичных 1 и 2) сила трения совершает одну и ту же работу, пропорциональную $\Delta\alpha$.

Перемещение тележки из нижней точки дорожки в верхнюю соответствует изменению α на $\pi/2$, то есть $\Sigma\,\Delta\alpha = \pi/2$. Следовательно, работа силы трения при таком перемещении равна

$$A = \Sigma\,\Delta A = 2\mu mv^2\,\Sigma\,\Delta\alpha = \pi\mu mv^2.$$

О. Савченко

Ф549. *Два шарика с массами m_1 и m_2 соединены пружинкой жесткости k; пружинка расположена горизонтально и не деформирована. Шарикам одновременно сообщаются скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, как показано на рисунке 13, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Найти максимальную высоту подъема системы и наибольшую деформацию пружинки.*

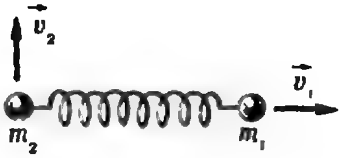


Рис. 13.

Центр масс системы (ц. м.) будет двигаться, как тело с массой $M = m_1 + m_2$, брошенное под углом к горизонту с начальным импульсом $\vec{p}_0$, равным сумме начальных импульсов шаров:

$$\vec{p}_0 = M\vec{u}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

($\vec{u}_0$ — начальная скорость ц. м.). Проекция импульса $\vec{p}_0$ на вертикальную ось OY равна $m_2 v$, следовательно, проекция начальной скорости ц. м. на ось OY равна $u_y = m_2 v/M$. Это означает, что максимальная высота подъема центра масс системы равна

$$H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Теперь найдем наибольшую деформацию пружинки. Очевидно, в тот момент, когда деформация пружинки максимальна, в системе координат, движущейся со скоростью центра масс системы, шарики могут только вращаться вокруг центра масс. Это означает, что энергию системы можно представить как сумму энергии W_C системы как целого и внутренней энергии, которая равна сумме потенциальной энергии деформации пружинки $kx^2/2$ (x — величина деформации) и кинетической энергии вращения шариков $W_{\text{к}} = {}^1/_2\,[m_1(\omega l_1)^2 + m_2(\omega l_2)^2]$, где ω — угловая скорость вращения, а l_1 и l_2 — расстояния от соответствующих шариков до центра масс.

Обозначим через l длину пружинки. Тогда $l_1 = lm_2/M$, $l_2 = lm_1/M$, так что

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2}\omega^2 l^2\left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\right) = \frac{1}{2}\omega^2 l^2\frac{m_1 m_2}{M}.$$

Найдем ω. Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$m_1(\omega l_1)\,l_1 + m_2(\omega l_2)\,l_2 = m_1\omega_0 l_{10}^2 + m_2\omega_0 l_{20}^2,$$

где l_{10} и l_{20} — начальные расстояния от шариков до центра масс, ω_0 — начальная угловая скорость. Очевидно, если начальная длина пружины равна l_0, то

$$l_{10} = l_0 m_2/M, \quad l_{20} = l_0 m_1/M.$$

Поэтому мы можем записать

$$\left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\omega l^2 =$$

$$= \left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\omega_0 l_0^2.$$

Отсюда $\omega = \omega_0 (l_0/l)^2$. Для того чтобы найти ω_0, необходимо найти начальные скорости $\vec{v}\,'_1$ и $\vec{v}\,'_2$ шариков в системе центра масс. Так как скорость центра масс в начальный момент равна $\vec{u}_0 = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/M$, скорости шариков в системе центра масс равны соответственно

$$\vec{v}\,'_1 = \vec{v}_1 - \vec{u}_0 = \frac{m_2}{M}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

$$\vec{v}\,'_2 = \vec{v}_2 - \vec{u}_0 = \frac{m_1}{M}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Угловая скорость ω_0 шариков равна, например, проекции скорости $\vec{v}\,'_2$ на ось OY, деленной на l_{20}, то есть

$$\omega_0 = \frac{vm_1/M}{l_{20}} = \frac{v}{l_0}.$$

Таким образом,

$$W_{к} = \frac{1}{2}\omega_0^2 l_0^2 \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{v^2}{2}\frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{2M} v^2 .$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии. Полная энергия системы равна

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{M v^2}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{Mv^2}{2} = W_{c} + \frac{kx^2}{2} + W_{к}.$$

Но, согласно закону сохранения энергии, для системы как целого

$$W_{c} = W_{co} - \frac{M u_0^2}{2} = \frac{M}{2}\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}\right)^2 .$$

Так как векторы $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ взаимно перпендикулярны,

$$\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)^2 = m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 = \left(m_1^2 + m_2^2\right) v^2.$$

Поэтому

$$W_{c} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2M} v^2 ,$$

и закон сохранения энергии можно переписать в виде

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2M} v^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{m_1 m_2 v^2}{2M} .$$

Отсюда

$$x = v\sqrt{\frac{m_1 m_2}{kM}} .$$

И. Слободецкий

◆

Ф550. *На шероховатый медный конус (покрытый мелкой насечкой, как напильник) надеты две шайбы: алюминиевая с отверстием радиуса $r=1$ см и железная с отверстием радиуса $R=3$ см. Расстояние между шайбами $a=6$ см. На сколько изменится это расстояние, если конус и шайбы нагреть на $\Delta t = 200$ К? Тепловые коэффициенты линейного расширения меди, алюминия и железа равны соответственно $\beta_1 = 1{,}7\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, $\beta_2 = 2{,}5\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$ и $\beta_3 = 10^{-5}$ К$^{-1}$. Конус расположен вертикально, вершиной вверх.*

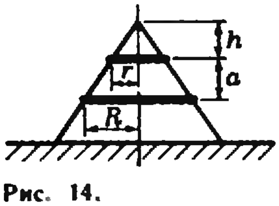


Рис. 14.

Расстояние h от центра алюминиевой шайбы до вершины конуса определяется уравнением $\frac{h+a}{h} = \frac{R}{r}$ (рис. 14) и равно $h = a\frac{r}{R-r} = 3$ (см).

При нагревании алюминиевая шайба расширяется больше, чем участок конуса, с которым она соприкасается ($\beta_2 > \beta_1$), поэтому она соскальзывает вниз. Железная шайба «заклинивается» на конусе ($\beta_3 < \beta_1$) и смещается вместе с участком конуса, на котором она держится. При нагревании угол при вершине конуса не изменяется. Новое расстояние h' от центра алюминиевой шайбы до вершины конуса определяется уравнением $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$ и равно

$$h' = h\frac{r(1+\beta_2\Delta t)}{r} = h(1+\beta_2\Delta t).$$

Новое расстояние от центра железной шайбы до вершины конуса равно

$$H' = (h+a)(1+\beta_1\Delta t).$$

Расстояние между шайбами при нагревании увеличилось на

$$\Delta a = (H' - h') - a = a\beta_1\Delta t - h(\beta_2 - \beta_1)\Delta t \approx 0{,}16 \text{ (мм)}.$$

Г. Коткин

Ф551. *Груз массы m подвешен к двум пружинам с жесткостью k_1 и k_2 с помощью нити и блока (рис. 15). Найти период малых колебаний груза. Нить и блок считать невесомыми.*

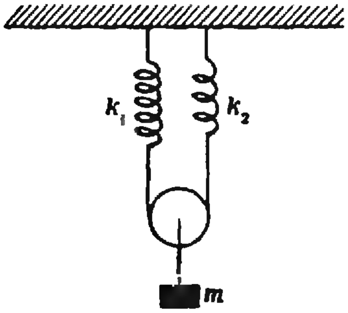


Рис. 15.

При смещении блока с грузом на величину x суммарная деформация пружин равна $2x$, то есть

$$x_1 + x_2 = 2x,$$

где x_1, x_2 — деформация пружин с жесткостью k_1 и жесткостью k_2 соответственно. Силы упругости, возникающие в пружинах, одинаковы — каждая из них равна по абсолютной величине силе $\vec{T}$ натяжения нити. Таким образом, $x_1 = T/k_1$, $x_2 = T/k_2$ и

$$2x = \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_2}$$

(здесь $T = |\vec{T}|$). Отсюда находим

$$T = 2\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}x.$$

Сила $\vec{F}$, действующая на блок с грузом, равна по абсолютной величине $2T$, то есть

$$F = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}x$$

(здесь $F = |\vec{F}|$). Таким образом, колебания блока с грузом можно рассматривать как колебания груза массы m на пружине с жесткостью $k' = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Период таких колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = \pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

◆

Ф552. *Вольт-амперная характеристика неоновой лампы показана на рисунке 16. При каком значении R сопротивления резистора, включенного в цепь, изображенную на рисунке 17, неоновая лампа (н. л.) не будет гаснуть после замыкания ключа K?*

При замыкании ключа конденсатор начинает заряжаться. Когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и на лампе станет равным 110 В, лампа загорится. С этого момента ток, текущий через лампу, будет возрастать, а напряжение на лампе и, следовательно, на конденсаторе будет падать — конденсатор будет разряжаться. Если в процессе разрядки напряжение на конденсаторе станет меньше 80 В, лампа погаснет — ток в цепи меньше номинального тока, текущего через лампу при напряжении ~80 В (см. рис. 16). Следовательно, чтобы лампа не гасла, напряжение на конденсаторе не должно в процессе разрядки падать ниже 80 В. В предельном случае, когда $U_C = 80$ В, напряжение на резисторе равно 40 В, ток, текущий через резистор, равен току, текущему через лампу (1 мкА), и, следовательно, сопротивление резистора $R = 40$ Ом. При меньшем значении сопротивления $U_C < 80$ В и лампа не горит.

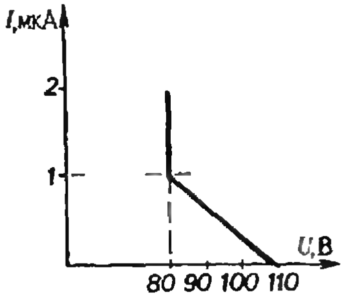


Рис. 16.

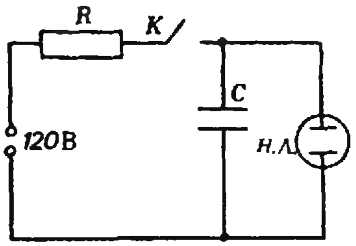
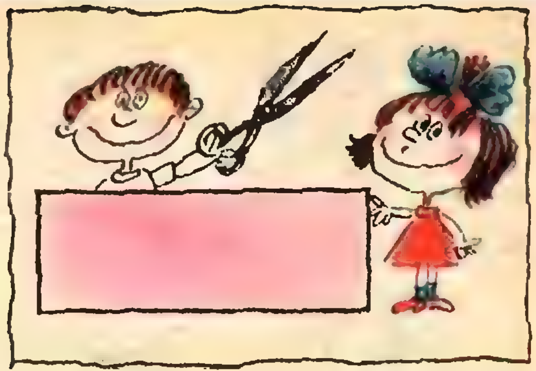


Рис. 17.

И. Слободецкий

квант для младших школьников

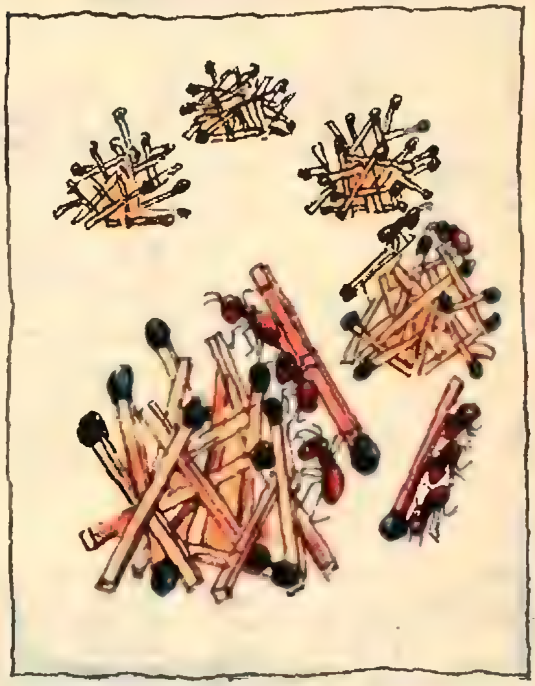


Задачи

1. Разрежьте бумажный прямоугольник 1,5 см×4 см на две части так, чтобы ими можно было оклеить куб с ребром 1 см.

2. Сумма всех натуральных чисел от 1 до любого числа, оканчивающегося на 5, сама делится на 5. Докажите.

3. Восемьдесят спичек были разложены на пять кучек. Из первой кучки взяли пятую часть бывших в ней спичек и переложили во вторую кучку. Затем из второй кучки пятую часть оказавшихся в ней после перекладывания спичек переложили в третью кучку и так далее. Наконец, из пятой кучки переложили пятую часть оказавшихся в ней спичек в первую кучку. После этого в каждой кучке спичек стало поровну. Сколько спичек было в каждой кучке до перекладывания?



4. Существует ли треугольник, длины высот которого равны 1, 2 и 3 соответственно?

5. Турист хочет приготовить себе на завтрак два яйца всмятку и еще четыре сварить вкрутую, чтобы взять их в дорогу. Яйца всмятку варятся 2 минуты, вкрутую — 4 минуты (яйца кладутся в кипящую воду). За какое наименьшее время турист может сварить яйца, если у него есть кастрюлька вместимостью четыре яйца?

П. Канаев

Опыты с водой на морозе

Почему зимой часто лопаются водопроводные трубы и разрываются бутылки с водой? Почему с приходом весны на крышах домов появляются сосульки, а летом иногда вместо дождя на землю падает град? Почему вода в глубоких реках и озерах не замерзает до дна?

Подобных вопросов можно сформулировать очень много, потому что много особенностей таит в себе замерзающая вода. С некоторыми из них вы сможете познакомиться на опытах с водой на морозе.

Все предлагаемые вам опыты очень просты, они не требуют никакой специальной подготовки. Однако дадим несколько советов. Опыты лучше проводить при температурах не выше —5°C. Помните, что цилиндрические стеклянные или пластмассовые сосуды с водой на морозе могут лопнуть, так что по возможности пользуйтесь сосудами конической формы. В некоторых опытах вам понадобится насыщенный раствор поваренной соли. Его лучше приготовить заранее, растворив 30 г поваренной соли в 100 мл теплой воды.

Проделав опыт, постарайтесь самостоятельно объяснить наблюдаемые явления и ответить на все возникающие вопросы. Если вы это сделать не сумеете, прочитайте ответы и объяснения в статье.

Итак, вам предстоит провести следующие эксперименты:

1. В холодном неотапливаемом помещении (например, в сарае, чулане, гараже) или на балконе на стол или другую горизонтальную поверхность положите стеклянную пластинку, поставьте рюмку, перевернув ее ножкой вверх, опрокинутое блюдце и, наконец, большой таз. С помощью узкой трубочки капните несколько капель воды на пластинку и заполните водой углубления в ножке рюмки и в блюдце, в таз налейте 2—3 кружки воды.

Когда вода замерзнет, внимательно посмотрите на поверхность льда. Вы увидите, что замерзшие капли заострились, в середине углублений рюмки и блюдца образовались конусообразные бугорки (рис. 1). А в тазу вырос настоящий ледяной бугор.

Теперь замените воду слабым раствором поваренной соли или мыльным раствором и повторите опыт (таз можно не использовать). Оказывается, при замерзании водных растворов (а не просто воды!) никаких бугорков не образуется.

И еще один опыт, но уже не с водой, а с парафином или воском. Налейте расплавленный парафин (или воск) в углубление основания рюмки и вынесите на мороз — после застывания парафина на его поверхности вы обнаружите... впадину (рис. 2).

Три опыта на одну и ту же тему дают разные результаты.

Почему?

При замерзании вода сильно расширяется, поэтому на поверхности льда и образуется бугорок. Водные растворы при отвердевании расширяются очень незначительно, их поверхность остается гладкой. Парафин же при переходе из жидкого состояния в твердое сжимается, в результате появляется впадина.

2. Для опыта вам потребуется тонкостенный стеклянный сосуд. Им может служить, например, баллон электрической лампочки накаливания без цоколя (цоколь можно удалить, если трехгранным надфилем аккуратно распилить стекло на его границе с металлом, при этом лампочку надо все время поворачивать).

Налейте в баллон воды до высоты его максимального горизонтального диаметра и дайте ей замерзнуть.

Вы увидите очень красивую картину (рис. 3). Края образовавшегося ледяного слитка в основном прозрачны, лишь кое-где в лед вкраплены пузырьки воздуха различной формы и размеров, а в середине слитка — непрозрачный сгусток, напоминающий свернувшегося в клубок ежа.

Предварительно подкрасьте воду «зеленкой» (ее можно купить в аптеке) и еще раз проведите тот же самый опыт.

После замерзания подкрашенной воды картина будет еще более красивой. По краям лед останется по-прежнему прозрачным и неокрашенным, в то время как в средней части окраска сильно сгустится, так что «еж» будет казаться зеленым.

Как все это можно объяснить?

Обычно вода начинает замерзать на своей поверхности и около стенок.

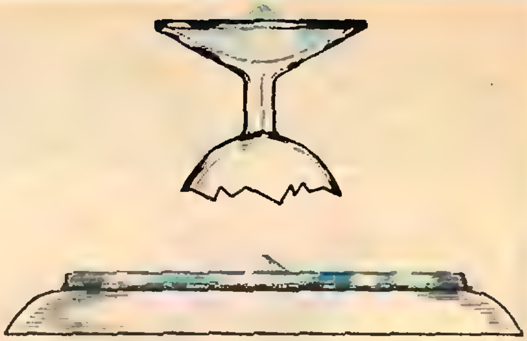


Рис. 1.

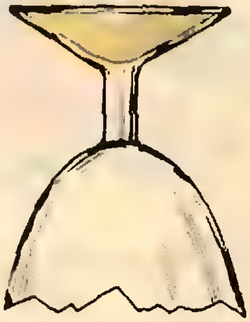


Рис. 2.

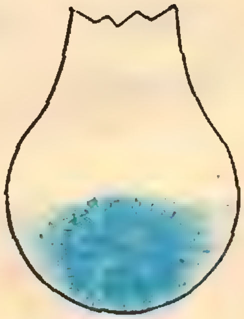


Рис. 3.

Затем замерзание постепенно распространяется к центру объема воды, где образуется множество различно направленных ледяных кристаллов. Так возникает непрозрачный сгусток из сросшихся кристаллов, который рассеивает свет по всем направлениям.

Как мы уже говорили, при отвердевании воды ее объем увеличивается. Внутри льда возникают пустоты. Мельчайшие, невидимые глазом, но всегда имеющиеся в воде пузырьки воздуха сливаются и образуют более крупные. Они хорошо видны там, где лед прозрачен.

Подкрашенная вода ведет себя аналогично чистой воде. При переходе из жидкого состояния в твердое ее молекулы должны расположиться упорядоченно. В результате молекулы красящего вещества как бы вытесняются от краев к середине объема жидкости. Вот почему лед остается прозрачным по краям и оказывается сильно окрашенным в середине.

3. Возьмите стеклянную трубку диаметром 7—15 мм и один конец ее закупорьте резиновой пробкой.(Можно воспользоваться цилиндром от прибора «Огниво», который имеется в школьном физическом кабинете. Винтовое дно нужно снять, а отверстие закрыть пробкой.) Укрепите трубку в вертикальном положении пробкой вниз (например, зажмите в лапке штатива). Заполните полученный сосуд до краев водой, а отверстие прикройте кружочком плотной бумаги.

При замерзании воды образовавшийся столбик льда будет подниматься вместе с бумажным кружочком (рис. 4, *а*).

Проделайте тот же опыт с перевернутым сосудом, то есть когда пробка находится вверху, а бумажный кружочек — внизу. В этом случае столбик льда будет опускаться вместе с кружочком (рис. 4, *б*).

Теперь несколько видоизмените последний опыт. В сосуд налейте столько воды, чтобы уровень ее не доходил до края примерно на 1 см. Отверстие закройте кружочком и переверните сосуд (рис. 4, *в*). После замерзания воды вы увидите, что ледяной столбик будет не опускаться, а подниматься, приближаясь к пробке.

Какие можно сделать выводы?

Вода при замерзании расширяется, причем расширяется по всем направлениям. Но «дно» и стенки сосуда препятствуют движению, поэтому ледяной столбик перемещается только в одном направлении — туда, где давление наименьшее.

4. Вынесите на мороз два стаканчика. В один налейте чистую воду, а в другой — насыщенный раствор поваренной соли. Для опыта потребуются две сосульки. (Их можно «вырастить» искусственно. Например, так: заморозьте воду в узкой, закрытой с одного конца стеклянной или металлической трубке. Чтобы вытащить образовавшуюся сосульку, трубку слегка подогрейте.)

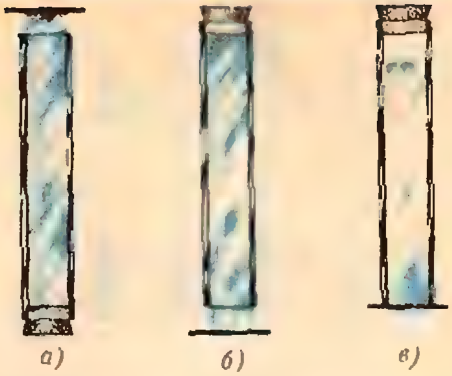


Рис. 4.

Одну сосульку опустите в замерзающую воду (предварительно хорошенько перемешайте содержимое стаканчика), а вторую — в раствор поваренной соли. Уже через несколько минут диаметр первой сосульки заметно увеличится, а второй — наоборот, уменьшится.

Почему?

Известно, что кристаллики льда активнее всего образуются там, где есть какие-нибудь шероховатости, щели, острия — одним словом, какие-либо неоднородности. Ледяная сосулька в холодной воде как раз и выполняет роль такой «неоднородности». Вокруг нее происходит усиленная кристаллизация воды, и слой льда на сосульке постепенно увеличивается.

Насыщенный раствор поваренной соли остается в жидком состоянии вплоть до температуры —21°С. При погружении в раствор сосульки молекулы соли, как более подвижные, будут непрерывно бомбардировать сосульку и тем самым разрушать ее.

5. Возьмите две трубки: одну стеклянную, другую металлическую, диаметром 10—12 мм и длиной 100—120 мм. Одно отверстие в каждой трубке плотно закупорьте резиновыми пробками. Наполнив трубки до краев водой, вынесите их на мороз и оставьте их там на некоторое время в вертикальном положении.

Когда вода замерзнет, внесите трубки в комнату и через несколько минут выньте образовавшиеся ледяные столбики (например, вытолкните их из трубок тупым концом карандаша).

Оказывается, столбик, образовавшийся в стеклянной трубке, имеет од-

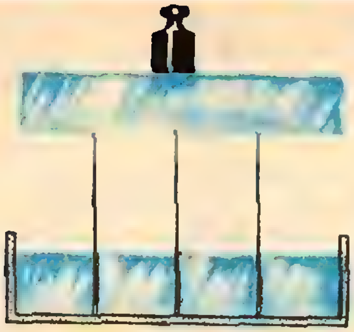


Рис. 5.

ну или две поперечные сквозные трещины. Столбик же из металлической трубки — однородный, никаких трещин на нем нет.

Чем это объясняется?

Поскольку стекло плохо проводит тепло, отвердевание воды в стеклянной трубке идет очень медленно и неравномерно. За длительный промежуток времени успевают образоваться два или три столбика льда, которые стыкуются друг с другом. В местах стыковки и возникают трещины.

В металлической трубке, у которой теплопроводность стенок хорошая, вся масса воды замерзает быстро и равномерно. Ледяной столбик получается монолитным.

6. Заполните водой почти до краев прямоугольную коробочку (пластмассовую или металлическую) размером 70×50×20 мм. Вырежьте из картона крышку для этой коробочки таких размеров, чтобы она чуть-чуть выходила за края. Из центра картонки проведите окружность диаметром, немного меньшим ширины коробочки. По окружности на равном расстоянии друг от друга строго вертикально воткните три одинаковые иголки так, чтобы ушками они касались дна коробочки, а крышку прижмите к коробочке.

Воду заморозьте. Осторожно снимите картонку с иголок, на их острия положите кусок льда с грузом и все это оставьте на морозе (рис. 5). Примерно через сутки вы обнаружите, что лед опустился до коробочки.

Почему же иголки не оказали льду никакого сопротивления?

Оказывается, все дело в том, что под давлением лед плавится при температуре существенно ниже 0°C, и поэтому иголки спокойно проходят сквозь лед.

Задачи наших читателей

1. Через точку K внутри треугольника с длинами сторон a, b, c проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Длины отрезков, заключенных между сторонами, равны, соответственно, a_1, b_1, c_1. Докажите, что

а) $\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=2$;

б) $\frac{4}{3}\leqslant\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{b_1^2}{b^2}+\frac{c_1^2}{c^2}\leqslant 2$.

2. Через точку K внутри тетраэдра $ABCD$ с площадями граней S_a, S_b, S_c и S_d проведены четыре плоскости, параллельные граням тетраэдра. Площади полученных сечений равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что

а) $\sqrt{\frac{S_1}{S_a}}+\sqrt{\frac{S_2}{S_b}}+\sqrt{\frac{S_3}{S_c}}+\sqrt{\frac{S_4}{S_d}}=3$;

б) $\frac{S_1}{S_a}+\frac{S_2}{S_b}+\frac{S_3}{S_c}+\frac{S_4}{S_d}\geqslant\frac{9}{4}$.

3. Через точку K внутри тетраэдра проведены прямые, параллельные его ребрам $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$, $|AD|=d_1$, $|BD|=d_2$, $|CD|=d_3$. Длины отрезков этих прямых, заключенных между гранями, равны соответственно a', b', c', d_1', d_2', d_3'. Докажите, что

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\frac{d_1'}{d_1}+\frac{d_2'}{d_2}+\frac{d_3'}{d_3}=3.$$

Э. Ясиновый

(Куйбышев)

Г. Бевз

Задачи можно решать проще

Готовящиеся к поступлению в вузы нередко спрашивают:

— Могут ли на вступительных экзаменах по математике предлагать задачи, для решения которых необходимо знать теоремы, не предусмотренные школьной программой?

— Нет, не могут!

Услыхав такой ответ, один мой десятиклассник возразил, показывая статью И. Габовича «Векторы помогают на экзамене» («Квант», 1979, № 1):

— Неправда. Ведь формул

$$\overrightarrow{BD}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}, \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD} \qquad (**)$$

в школе не изучают, а задачи на применение этих формул предлагают и в МГУ, и в МФТИ, и в Киевском политехническом...

К сожалению, так думают многие читатели «Кванта» и — ошибаются.

Из того факта, что некоторые задачи можно решать с помощью каких-то формул, еще не следует, что без этих формул их решить нельзя. Для примера рассмотрим задачи из упомянутой статьи.

Задача 1 (МГУ, эконом. ф-т, 1978). *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $|KA|:|AL|=1:3$; на стороне LM взята точка B так, что $|LB|:|BM|=4:1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найти площадь треугольника KLM.*

Эту задачу можно решить, используя только тот факт, что площади треугольников с одинаковыми высотами относятся, как их основания.

Решение (рис. 1). Обозначим площади треугольников KLM, AKC и BCM, соответственно, через s, p и q. Тогда

$$S_{KLB}=\frac{4}{5}s,\ S_{ALM}=\frac{3}{4}s,$$

$$S_{KLC}=4p,\ S_{LCB}=4q,$$

$$S_{KLC}-S_{LCB}=4p-4q=4(p-q)=$$

$$=4(S_{KLB}-S_{ALM})=4\cdot\frac{1}{20}s=\frac{1}{5}s,$$

$$S_{KLC}+S_{LCB}=S_{KLB}=\frac{4}{5}s.$$

Из двух последних равенств $s=2S_{KLC}=4$.

Задача 2 (МФТИ, 1977). *Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.*

1) *Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $|AM|:|AD_1|=2:3$. Найти его длину.*

2) *Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.*

Эту задачу проще решать координатным методом.

Решение. Данную призму расположим в прямоугольной системе координат, как показано на рисунке 2. Через точку X ребра AD, удаленную от D на расстояние x, проведем плоскость XTT_1X_1, параллельную грани ABB_1A_1. Пусть R и S — точки пересечения этой плоскости с $[AD_1]$ и $[DB_1]$. Абсциссы и ординаты точек R и S можно определить устно, а аппликаты — используя свойства подобных треугольников ADD_1 и AXR, DBB_1 и DQS. Имеем: $R\left(x;0;\frac{2a-x}{2}\right)$, $S\left(x;x;\frac{x}{2}\right)$. Значит, $|RS|=\sqrt{x^2+(a-x)^2}$.

1) Если $R = M$, то есть $|AR| : |AD_1| = 2 : 3$, то $x = \frac{2}{3}a$ и $|RS| = \frac{a}{3}\sqrt{5}$.

2) $|RS|$ будет иметь наименьшее значение при наименьшем значении функции $f(x) = x^2 + (a - x)^2$ ($x \in [0; 2a]$), то есть (производная!) при $x = \frac{a}{2}$.

Ответ. $\min|RS| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Задача 3 (МФТИ, 1978). *Длина ребра правильного тетраэдри $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.*

Решение*). Соединим середины ребер AB, AC, BD и CD — получим квадрат (Указание. $AD \perp BC$), у которого E — одна из вершин, F — середина стороны (рис. 3). Прямые AD и BC параллельны плоскости этого квадрата и «висят» над его средними линиями (рис. 4). Спроектируем MN на плоскость квадрата. Из $MN \perp EF$ следует, что проекция $M'N' \perp EF$ (рис. 5). Поскольку прямые AD и BC находятся от плоскости квадрата на одинаковом расстоянии, точка $[M'N'] \cap [EF]$ делит отрезок $M'N'$ пополам. Отсюда (рис. 5) $|OM'| = \frac{a}{3}$ и $|ON'| = \frac{a}{6}$. При проектировании на плоскость квадрата середины L, P отрезков AD и BC попадают в точку O. Поэтому $|LM| = |OM'| = \frac{a}{3}$, $|PN| = |ON'| = \frac{a}{6}$. Из прямоугольного $\triangle APL$ находим $|PL| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Отрезки ML, LP и PN взаимно перпендикулярны. Поэтому (§ 49 «Геометрии 10») $|MN| = \sqrt{|ML|^2 + |LP|^2 + |PN|^2} = \frac{a}{6}\sqrt{23}$.

Замечание. Многие факты, касающиеся правильного тетраэдра, становятся очевидными, если такой тетраэдр «вложить» в куб (рис. 6).

Задача 4 (Киевский политехнич. ин-т, 1978). *Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Дока-*

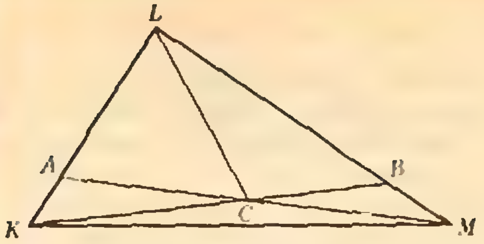


Рис. 1.

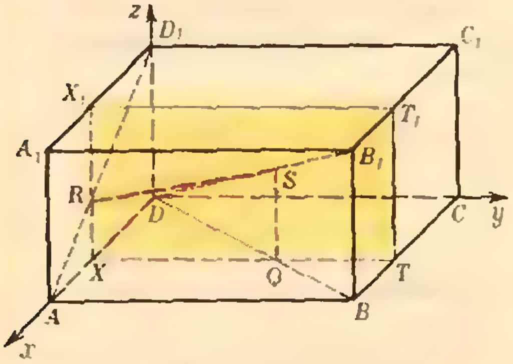


Рис. 2.

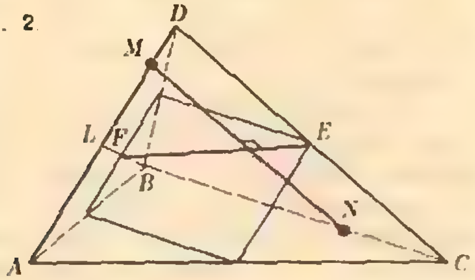


Рис. 3.

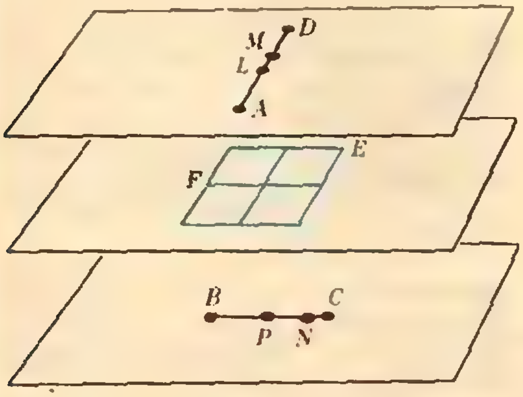


Рис. 4.

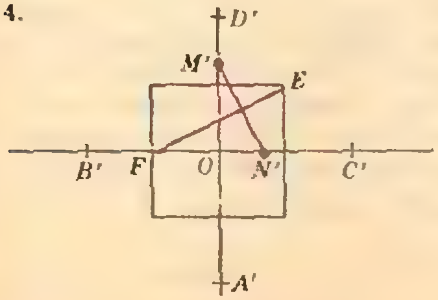


Рис. 5.

---

*) Предложено Л. Г. Макар— Лимановым.

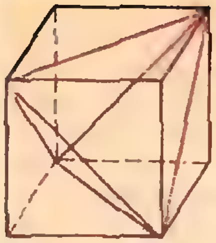


Рис. 6.

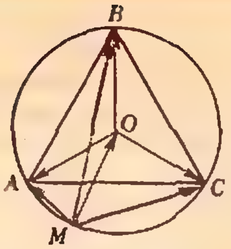


Рис. 7.

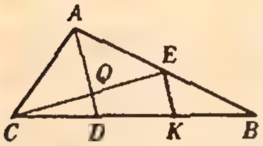


Рис. 8.

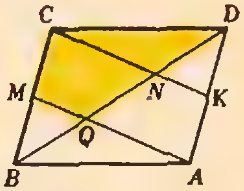


Рис. 9.

зать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого треугольника равна $2a^2$.

Решение (рис. 7). Пусть M — произвольная точка окружности. Тогда $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}$. Учитывая, что $|MO|=|OA|=|OB|=|OC|=R$, получим

$$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2=6R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Так как треугольник ABC — правильный, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, а $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2=6\cdot\frac{a^2}{3}=2a^2$.

Это решение не только проще имеющегося в статье И. Габовича, но и более общее. Его легко обобщить на случай правильного n-угольника, и не обязательно вписанного в окружность, можно и описанного, и не только для планиметрических задач. Например, предложенное выше доказательство справедливо для следующей стереометрической задачи: *около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана сфера, центр которой совпадает с центром данного треугольника; доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до вершин этого треугольника равна* $2a^2$.

Приведенные в конце статьи И. Габовича задачи тоже намного проще решать без соотношений (*), (**). Рассмотрим два примера.

Задача 5 (МФТИ, 1970). *В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $|BD|:|CD|=2:1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?*

Решение (рис. 8). Проведем $[EK)\parallel[AD]$; $\triangle CQD\backsim\triangle CEK$, $|EK|=\frac{1}{2}|AD|$, $|BK|=|KD|=|CD|$. Поэтому $\frac{|DQ|}{|DA|}=\frac{|DQ|}{2|EK|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|CD|}{|CK|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Значит, $|DQ|:|QA|=1:3$.

Задача 6 (МГУ, биофак, 1973). *Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найти площадь четырехугольника $QMCD$.*

Решение (рис. 9). Пусть K — середина $[AD]$, тогда $AMCK$ — параллелограмм. $[NK]$ — средняя линия $\triangle AQD$, а $[MQ]$ — средняя линия $\triangle BCN$. Поэтому $|BQ|=|QN|=|ND|$. Площадь треугольника BCD равна $\frac{1}{2}$. Поэтому площадь $\triangle BMQ$ равна $\frac{1}{12}$. Итак, $S_{MCDQ}=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$.

Как видим, не такие уж трудные эти задачи. Для их решения нет надобности применять формулы (*) и (**), не предусмотренные школьной программой.

Заочная школа программирования

Урок 4: Арифметические предписания языка Робик. Условные и циклические предписания. Процедуры с параметрами

В языке Робик можно выполнять арифметические действия над числами. Для этого предназначены предписания СЛОЖИТЬ и ВЫЧЕСТЬ, синтаксические диаграммы которых приведены в сводной таблице (с. 47). Смысл этих предписаний настолько очевиден, что мы не будем подробно описывать их работу, ограничившись одним небольшим примером:

```
СЛОЖИТЬ 5 С 10 И ПРИСВОИТЬ А;
ВЫЧЕСТЬ 3 ИЗ А И ПРИСВОИТЬ В;
СЛОЖИТЬ А С В И ПРИСВОИТЬ В;
    ОТПЕЧАТАТЬ 'А-', А, 'В-', В;
```

По этой программе будет отпечатана строка:

```
А=15В=27
```

Многих может удивить отсутствие операций умножения и деления среди предписаний языка. Дело в том, что Робик — это учебный язык, а составление процедур для умножения и деления чисел — отличное учебное упражнение.

Задание 4.1. *Описать процедуру, которая увеличивает значение имени А в четыре раза и присваивает результат тому же имени.*

Одно из самых важных предписаний в любом языке программирования — это *условное предписание*, структура которого изображена в сводной таблице.

Встретив в тексте программы условное предписание, ЭВМ прежде всего проверяет условие: истинно оно или ложно. Если условие истинно, будет исполнено только предписание, стоящее после слова ТО. Если условие ложно, будет исполняться только то предписание, которое стоит после слова ИНАЧЕ (если этого слова в предписании нет, то при ложном условии условное предписание в этом случае просто пропускается).

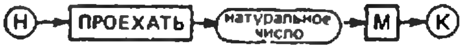
Например, если значениями имен А и В являются какие-то числа, то предписание

ЕСЛИ А БОЛЬШЕ В ТО ОТПЕЧАТАТЬ А ИНАЧЕ ОТПЕЧАТАТЬ В;

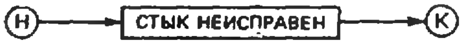
отпечатает большее из этих чисел (если числа равны между собой, отпечатается второе число, которое, впрочем, совпадает тогда с первым).

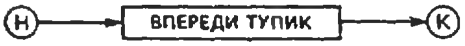
Задача о роботе-обходчике

Робот РО-1 должен проверить прочность стыков на новой железнодорожной ветке. Обнаружив неисправный стык, робот должен сообщить об этом дежурному оператору, находящемуся на станции. РО-1 умеет выполнять все предписания языка Робик. Кроме того, в его СПР входит предписание:



а список допустимых условий дополнен двумя:





Расстояние между стыками — 24 метра. Ветка заканчивается тупиком. Перед началом работы робот установлен на первом стыке проверяемой ветки. *Составить программу.*

Решение.

```
ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ ПРО-
    ВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН ТО
    ОТПЕЧАТАТЬ 'ОБНАРУЖЕН
    НЕИСПРАВНЫЙ СТЫК';
20 ПРОЕХАТЬ 24 М;
30 ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ ПРО-
    ВЕРКА;
ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРО-
    ЦЕДУРЫ;
ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ ПРО-
    ВЕРКА;
```

Проследим, как выполняется эта программа. Будем считать, что первый и второй стыки исправны, а с третьим что-то не в порядке. Когда мы вызовем процедуру ПРОВЕРКА в первый раз, робот начнет выполнять оператор с номером 10. Это — условный оператор, поэтому РО-1 в первую очередь проверит условие

СТЫК НЕИСПРАВЕН

Как мы договорились, первый стык исправен, так что это условие ложно. Слова ИНАЧЕ в операторе нет, поэтому при ложном условии роботу нечего исполнять и он переходит к следующему предписанию:

ПРОЕХАТЬ 24 М;

Теперь РО-1 оказывается уже над вторым стыком. После этого он исполнит предписание с номером 30, то есть заново вызовет процедуру ПРОВЕРКА и начнет повторять все сначала. Для второго, исправного, стыка все повторится в точности, а вот на третьем стыке условие в десятом операторе окажется истинным и на экране терминала, установленного на станции, появятся слова

ОБНАРУЖЕН НЕИСПРАВНЫЙ СТЫК

После этого робот вновь перейдет к двадцатому оператору, проедет еще 24 метра и опять начнет все сначала. Кажется, все в порядке. Впрочем, один неясный вопрос остается: а до каких пор робот будет повторять выполнение этой процедуры? Судя по программе — до бесконечности. На самом деле, разумеется, ветка где-то кончится и робот налетит на тупик. Но это — ситуация аварийная. Попробуем ее предотвратить: для этого, очевидно, нужно, чтобы операторы 20 и 30 выполнялись только в том случае, когда впереди нет тупика. Если же тупик обнаружен, можно, например, отпечатать такое сообщение дежурному оператору:

ЛИНИЯ ПРОВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ ЗАКОНЧИЛ

Ну, что ж, попробуем написать такую программу:

```
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'ОБНАРУ-
   ЖЕН НЕИСПРАВНЫЙ СТЫК';
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК ТО
   ОТПЕЧАТАТЬ 'ЛИНИЯ
   ПРОВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ
   ЗАКОНЧИЛ'. ИНАЧЕ...
```

СТОП!! А что, собственно, ИНАЧЕ?

Ведь если впереди нет тупика, нам нужно выполнить два оператора сразу: проехать 24 метра и вызвать процедуру ПРОВЕРКА, а, судя по диаграмме, после слов ТО и ИНАЧЕ может стоять только одно предписание.

Впрочем, выход есть: опишем новую процедуру, состоящую из этих двух операторов, а после слов ИНАЧЕ поставим просто вызов этой процедуры:

```
ЗАПОМНИТЬ РЕЛЬС;
10 ПРОЕХАТЬ 24 М;
20: ПРОВЕРКА;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10  ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
    ТО ОТПЕЧАТАТЬ
    'ОБНАРУЖЕН НЕИСПРАВ-
    НЫЙ СТЫК';
20  ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК ТО
    ОТПЕЧАТАТЬ 'ЛИНИЯ ПРО-
    ВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ ЗА-
    КОНЧИЛ'. ИНАЧЕ: РЕЛЬС;
ЗАКОНЧИТЬ;
:ПРОВЕРКА;
```

Усложним задание: предположим, что робот должен каждый раз печатать номер неисправного стыка. Проверьте, что для этого подойдет такая, например, программа:

```
ЗНАЧЕНИЕ 1 ПРИСВОИТЬ ИМЕ-
    НИ Н;
ЗАПОМНИТЬ РЕЛЬС;
10 ПРОЕХАТЬ 24 М;
20 СЛОЖИТЬ 1 С Н И ПРИСВОИТЬ
    ИМЕНИ Н;
30: ПРОВЕРКА;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'СТЫК
   НОМЕР' ,Н, 'НЕИСПРАВЕН'.
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК ТО
   ОТПЕЧАТАТЬ 'ЛИНИЯ ПРО-
   ВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ ЗА-
   КОНЧИЛ'. ИНАЧЕ: РЕЛЬС;
ЗАКОНЧИТЬ;
:ПРОВЕРКА;
```

Задание 4.2. *Робот РО-1 должен проверить и сосчитать* *все стыки на новой ветке. Обнаружив неисправный стык, робот должен отпечатать его номер и* **расстояние до него** *(в метрах). После окончания проверки нужно отпечатать, сколько всего оказалось стыков на ветке и сколько из них неисправных. Составить программму.*

Используя условное предписание, можно построить, например, процедуру перемножения двух натуральных чисел в следующем виде:

```
ЗАПОМНИТЬ СЧЕТ;
10 СЛОЖИТЬ 1 С СЧ И ПРИС-
   ВОИТЬ СЧ;
20 СЛОЖИТЬ А С ПР И ПРИС-
   ВОИТЬ ПР;
30 ЕСЛИ СЧ РАВНО В ТО ОТПЕ-
   ЧАТАТЬ ПР: ИНАЧЕ СЧЕТ;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ УМНОЖ;
10 0 ПРИСВОИТЬ СЧ;
20 0 ПРИСВОИТЬ ПР;
30 ЕСЛИ СЧ РАВНО В ТО ОТПЕЧА-
    ТАТЬ ПР ИНАЧЕ :СЧЕТ;
ЗАКОНЧИТЬ;
```

Эта процедура перемножает значения имен А и В и печатает произведение. Проверьте это на конкретных примерах.

Мы уже несколько раз встречали программы, в которых нужно было многократно повторять выполнение одного или нескольких предписаний. Это не случайно: именно такие повторяющиеся действия целесообразно поручать автоматам, поэтому среди задач, решаемых на ЭВМ, повторение встречается очень часто.

До сих пор мы организовали повторяющиеся действия при помощи условного оператора и вызова процедуры: многократно повторяющаяся процедура вызывала сама себя до тех пор, пока срабатывал условный оператор. Однако в Робике и в большинстве других языков есть специальное предписание для организации повторений — *Циклическое предписание* (посмотрите соответствующую диаграмму — с. 47).

Работает эта конструкция так: предписание, стоящее после слова ПОВТОРЯТЬ, будет исполняться снова и снова до тех пор, пока условие остается истинным. Иначе говоря, машина работает с этим предписанием так: сначала, как и в условном предписании, проверяется условие. Если оно ложно, то предписание вообще не исполняется.

Если условие истинно, то предписание, стоящее после слова ПОВТОРЯТЬ, исполняется, после чего снова проверяется условие. Если оно остается истинным, то предписание исполняется снова — и так повторяется до тех пор, пока условие не окажется ложным. Если оно никогда не станет ложным (а такое случается при неправильно составленных программах), то машина будет вновь и вновь исполнять предписание до выключения или аварии — возникает неприятная ситуация, называемая *зацикливанием*. С примерами мы столкнемся на следующих уроках.

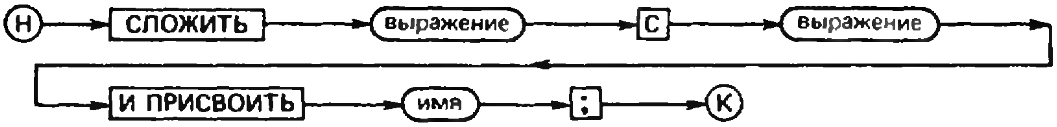
С помощью циклического оператора процедуру умножения можно записать несколько изящнее:

```
ЗАПОМНИТЬ СЧЕТ;
10 СЛОЖИТЬ 1 С СЧ И ПРИС-
   ВОИТЬ СЧ;
20 СЛОЖИТЬ А С ПР И ПРИСВО-
   ИТЬ ПР;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ УМНОЖ;
10 ПРИСВОИТЬ СЧ;
20 ПРИСВОИТЬ ПР;
30 ПОКА СЧ МЕНЬШЕ В ПОВТО-
     РЯТЬ :СЧЕТ;
40 ОТПЕЧАТАТЬ ПР:
ЗАКОНЧИТЬ;
```

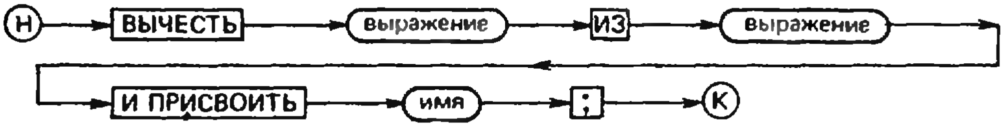
Однако и у этой процедуры есть существенный недостаток: она перемножает только значения имен А и В. Для того чтобы перемножить значения других имен, или просто два числа, их необходимо прежде присвоить именам А и В.

Этого недостатка можно избежать, если использовать механизм *параметров*. Параметры — это имена, которые перечисляются в скобках после имени процедуры в директиве ЗАПОМНИТЬ (посмотрите на диаграмму *Запоминание процедуры* в № 10, с. 57). Значения этих имен перечисляются в таких же скобках при вызове процедуры. Например, если описа-

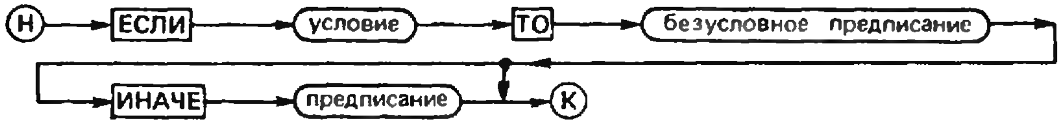
Сложение:


Н
СЛОЖИТЬ
выражение
С
выражение
И ПРИСВОИТЬ
имя
;
К

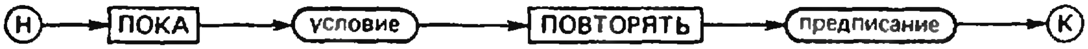
Вычитание:


Н
ВЫЧЕСТЬ
выражение
ИЗ
выражение
И ПРИСВОИТЬ
имя
;
К

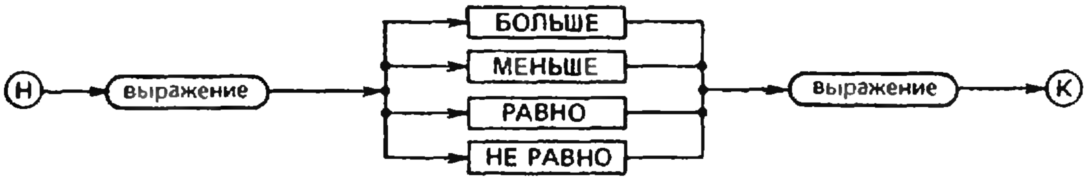
Условное предписание:


Н
ЕСЛИ
условие
ТО
безусловное предписание
ИНАЧЕ
предписание
К

Циклическое предписание:


Н
ПОКА
условие
ПОВТОРЯТЬ
предписание
К

Условие:


Н
выражение
БОЛЬШЕ
МЕНЬШЕ
РАВНО
НЕ РАВНО
выражение
К

ние процедуры КРОЛИК начинать так:

```
ЗАПОМНИТЬ КРОЛИК (А, В, С);
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

то при вызове этой процедуры мы можем написать:

```
ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ КРОЛИК
      (10, 'ХВОСТ', НОМ);
```

В этом случае имя А получит значение 10, имя В — значение 'ХВОСТ', а имени С будет присвоено такое же значение, какое было у имени НОМ.

Попробуем снова описать процедуру УМНОЖ — на этот раз с использованием параметров (процедура СЧЕТ остается без изменений):

```
ЗАПОМНИТЬ УМНОЖ (А, В);
10 0 ПРИСВОИТЬ СЧ;
20 0 ПРИСВОИТЬ ПР;
30 ПОКА СЧ МЕНЬШЕ В ПОВТО-
      РЯТЬ  : СЧЕТ;
40 ОТПЕЧАТАТЬ  ПР;
ЗАКОНЧИТЬ;
```

Теперь для того чтобы перемножить 47 и 34, достаточно написать:

```
:УМНОЖ (47, 34);
```

А вызов этой же процедуры для перемножения значений имен Т и К будет выглядеть так:

```
:УМНОЖ (Т, К);
```

Задание 4.3. *Описать процедуру ДЕЛ с двумя параметрами. Процедура должна печатать частное и остаток от деления первого параметра на второй, например, при вызове*

```
:ДЕЛ (28,5);
```

ЭВМ должна отпечатать:

```
ЧАСТНОЕ=5, ОСТАТОК=3
```

Задание 4.4. *Описать процедуру НОД с двумя параметрами для вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел* (см. «Квант», 1970, № 9, с. 48).

Итак, мы познакомились с основными конструкциями языка Робик. Разумеется, это учебный, упрощенный язык, большой программы на нем не напишешь, но такие понятия, как операторы и директивы, имена и значения, процедуры и параметры, условные операторы и циклы, предписания присваивания и печати очень пригодятся нам при изучении более серьезных и интересных языков.

Г. Звенигородский

XIII Всесоюзная олимпиада школьников

Н. Розов, М. Смолянский

Олимпиада по математике

С 11 по 18 апреля в Тбилиси проводился заключительный этап XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 152 школьника: 39 восьмиклассников, 54 девятиклассника и 59 десятиклассников.

В столицу Грузии собрались команды всех братских республик нашей Родины. В составе команд — победители республиканских олимпиад, зональных олимпиад РСФСР, олимпиад Москвы и Ленинграда, а также ребята, отмеченные на предыдущей олимпиаде (Ташкент, 1978) дипломами I и II степени. В третий раз в заключительном этапе Всесоюзной олимпиады по математике выступала команда учащихся профессионально-технических училищ — призеров олимпиады ПТУ Ленинграда. Отдельная команда тбилисских школьников представляла город, принимавший олимпиаду.

С первых же минут пребывания на грузинской земле все команды были окружены заботой и вниманием. Представители партийных и советских органов Грузии, члены оргкомитета олимпиады и ученые-математики, комсомольцы и школьники Тбилиси сделали все возможное, чтобы праздник математики прошел успешно. И не будет преувеличением сказать, что в организационном отношении олимпиада в Тбилиси была одной из лучших.

12 апреля участники олимпиады в торжественной обстановке возложили цветы к памятнику В. И. Ленина. Затем в республиканском дворце пионеров и школьников имени Б. Дзнеладзе состоялось официальное открытие заключительного этапа. Председатель оргкомитета министр просвещения ГССР профессор О. Д. Кинкладзе тепло приветствовал гостей Грузии и сердечно поздравил собравшихся с началом соревнования. Больших успехов в олимпиаде и в дальнейших занятиях любимой наукой пожелали участникам заместитель председателя Совета Министров ГССР О. Е. Черкезия, президент АН ГССР академик Е. К. Хорадзе, секретарь ЦК ЛКСМ Грузии М. П. Циклаури и другие.

Олимпиаде предшествовала кропотливая работа по подготовке заданий для участников. Несколько месяцев методическая комиссия центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников тщательно изучала длинный список задач-«кандидатов», составленный по предложениям математиков из разных городов нашей страны, придирчиво отбирала из него наиболее оригинальные и нестандартные задачи.

Чтобы читатели журнала смогли составить целостное впечатление о характере задач, ниже полностью приводятся их условия. Все эти задачи включены в Задачник «Кванта» — соответствующий номер, под которым там помещена задача, указан в скобках после текста условия. В Задачнике «Кванта» будут помещены и решения всех задач.

Как обычно, заключительный этап олимпиады проводился в два тура. Первый тур состоялся 13 апреля. Участникам олимпиады предложили по три задачи, на решение которых отводилось четыре часа.

Задачи первого тура

8 класс

1. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат на трех разных сторонах другого? (М566)

2. Кенгуру прыгает по углу $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x; y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1; y-1)$ или в точку $(x-5; y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x; y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии более 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x; y)$ и найдите его площадь. (М572)

3. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A — враг B, то B — враг A.) (М580)

9 класс

1. См. задачу № 1 для 8 класса.

2. В тетради написано несколько чисел. Разрешается приписать к уже написанным числам любое число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если только оно отлично от всех уже написанных. Докажите, что, начиная с двух чисел 0 и 1, с помощью таких приписок можно получить:

а) число 1/5,

б) любое рациональное число между 0 и 1. (М569)

3. См. задачу № 3 для 8 класса.

10 класс

1. Убывающая последовательность (x_n) положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\ldots+\frac{x_{n^2}}{n} \leqslant 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n} < 3. \quad (М571)$$

2. См. задачу № 2 для 9 класса.

3. См. задачу № 3 для 8 класса

С задачами первого тура успешно справились многие участники. Как и ожидалось, наиболее трудной оказалась третья задача (общая для всех классов).

Следующий день был свободным от соревнования. Утром состоялась встреча с редколлегией журнала «Квант». Заместитель главного редактора журнала М. Л. Смолянский познакомил участников встречи с творческими планами редакции, с содержанием ближайших номеров. Перед школьниками выступили члены редколлегии В. Г. Болтянский, Л. Г. Макар-Лиманов, А. П. Савин; они рассказали об интересных математических вопросах и предложили слушателям ряд задач для самостоятельного обдумывания.

Затем десятиклассники прослушали лекцию Д. Б. Фукса о топологии, а девятиклассники — лекцию А. Б. Сосинского о так называемых «сюрреальных числах» *). Н. Н. Константинов провел с восьмиклассниками занятие математического кружка, посвященное решению логических задач. Кроме того, школьники беседовали с математиками, приглашенными Советом молодых ученых Грузии.

Члены жюри провели подробный разбор решений задач первого тура, ответили на многочисленные вопросы участников олимпиады.

15 апреля состоялся второй тур. Задания второго тура состояли из четырех задач и были рассчитаны на пять часов.

Задачи второго тура

8 класс

4. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех взятых векторов равна $\vec{0}$. (М576)

5. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами

а) 8×8 клеток;

б) $n\times n$ клеток

для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.) (М577)

6. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a, \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b \end{cases}$$

(a и b — данные числа). (М578)

---

*) Статья о «сюрреальных числах» помещена на с. 2.

Жюри заключительного этапа XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике.

7. Имеется несколько квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что такими квадратами всегда можно покрыть квадрат площади 1. (M570)

9 класс

4. Докажите, что для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполняется неравенство

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_n). \quad (M579)$$

5. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p},$$
$$\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}. \quad (M567)$$

6. Через точку O в пространстве проведено 1979 прямых $l_1, l_2, \ldots, l_{1979}$, никакие две из которых не взаимно перпендикулярны. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать точки $A_k \in l_k$, $k=2, 3, \ldots, 1979$, таким образом, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярными:
$(A_1A_3) \perp l_2$, $(A_2A_4) \perp l_3$, …, $(A_{k-1}A_{k+1}) \perp l_k$, …, $(A_{1977}A_{1979}) \perp l_{1978}$, $(A_{1978}A_1) \perp l_{1979}$, $(A_{1979}A_2) \perp l_1$. (M573)

7. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого числа k от 0 до $n-1$ сумма

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+2} + \ldots + a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n > 1000$. (M574)

10 класс

4. См. задачу № 6 для 8 класса.

5. См. задачу № 5 для 8 класса.

6. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разрезан своими диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы всех четырех окружностей, вписанных в эти треугольники, равны между собой, то четырехугольник $ABCD$ — ромб. (M568)

7. На прямой по порядку расположены точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что длины отрезков $|A_0A_1|, |A_1A_2|, \ldots, |A_{n-1}A_n|$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ красным цветом так, чтобы длины любых двух k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать

а) при $k=3$;

б) для каждого натурального $k<n$. (M575)

Задачи второго тура были достаточно серьезны. (Кстати, в некоторых из них речь идет о содержательных математических результатах.) Однако юным математикам они оказались по плечу. За исключением пункта б) в задаче № 7 для 10 класса, не было ни одной задачи, которую бы не решил никто из участников олимпиады. Для некоторых задач школьники предложили оригинальные решения, ранее не известные жюри.

В приведенной таблице указано, сколько участников олимпиады решило каждую задачу (полностью или с небольшими недочетами). Жюри старалось расположить задачи по мере возрастания их трудности. Из таблицы видно, что во второй день «мнение» участников олимпиады о трудности задач совпало с мнением составителей.

Класс	Номера задач						
	1	2	3	4	5	6	7
8	5	19	3	36	а) 15 б) 4	13	3
9	22	а) 35 б) 16	9	36	23	17	а) 2 б) 1
10	39	а) 56 б) 32	13	47	а) 41 б) 21	15	а) 2 б) 0

16 апреля школьникам были рассказаны решения задач второго тура, а потом начался индивидуальный разбор — каждый участник олимпиады получил возможность подробно обсудить свою работу с членами жюри (подать апелляцию). Такое обсуждение очень полезно, оно помогает ребятам понять, что является исчерпывающим решением задачи, что такое строгое логическое рассуждение, как правильно излагать свои мысли.

17 апреля в актовом зале Тбилисского университета состоялось торжественное закрытие XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. По итогам заключительного этапа присуждено 14 дипломов I степени, 31 диплом II степени и 36 дипломов III степени. Кроме того, 8 восьмиклассников, 15 девятиклассников и 21 десятиклассник были награждены грамотами. Остальным участникам олимпиады были вручены памятные дипломы участника (эти дипломы учреждены впервые)*).

Некоторые участники олимпиады были отмечены специальными призами, установленными государственными учреждениями, общественными организациями, коллективами производственных предприятий Грузии. За успехи в олимпиаде специальными призами журнала «Квант» награждены восьмиклассники *Александр Бабак* (с. ш. № 2 п. Каменка), *Константин Левицкий* (с. ш. № 16, Кара-Балты), *Чарияр Ашыралыев* (с. ш. № 5, Кара-Кала); девятиклассники *Лола Сатафова* (с. ш. № 1, Душанбе), *Бачук Месаблишвили* (школа-интернат им. Комарова, Тбилиси), *Георгий Павлиашвили* (школа-интернат им. Комарова, Тбилиси).

За отличное проведение заключительного этапа XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике редколлегия нашего журнала наградила специальными призами председателя жюри олимпиады члена-корреспондента АН ГССР *Т. Г. Гегелию*, Республиканскую физико-математическую школу-интернат им. Комарова (директор *А. Л. Цхадая*), с. ш. № 42 Тбилиси (директор *О. И. Гаганидзе*).

Научная программа заключительного этапа была очень насыщенной. Но участники олимпиады, покидая землю Грузии, увозили не только награды и математические впечатления. В памяти ребят надолго останутся солнечный Тбилиси, поездка в древнюю Мцхету, теплые встречи с грузинскими сверстниками, интересные театральные постановки, сеанс одновременной игры чемпионки мира по шахматам среди женщин Майи Чибурданидзе.

Олимпиада в Тбилиси в определенном смысле была юбилейной. В двадцатый раз на математический турнир собрались школьники со всей страны — эта традиция зародилась в

---

*) Список участников олимпиады, награжденных дипломами I, II и III степени, приведен на с. 59.

Восьмиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): Б. Рублев, Г. Барздинь, Ю. Чеканов.

А. Бабак, награжденный специальным призом нашего журнала.

Девятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): Ю. Ткаченко, Ю. Кузьмин, А. Разборов, С. Беспамятных, М. Концевич.

1960 году, когда на 23-ю Московскую математическую олимпиаду школьников впервые прибыли представители других республик и областей. А 12 лет назад здесь же, в Тбилиси, состоялась I Всесоюзная олимпиада школьников по математике.

В составе жюри нынешней олимпиады было несколько «ветеранов», принимавших участие в проведении всех этих соревнований. И среди них прежде всего хочется назвать научного сотрудника Московского университета, заместителя председателя методической комиссии по математике при Министерстве просвещения СССР *Н. Б. Васильева*, одного из активнейших зачинателей и энтузиастов всесоюзных олимпиад.

Министерство просвещения Грузии подготовило и выпустило к олимпиаде специальный сборник «Праздник юных математиков». Один из составителей этого сборника — заслуженный учитель ГССР, директор с. ш. № 42 Тбилиси О. И. Гаганидзе — был призером первой математической олимпиады, проходившей в Грузии в 1933 году. В этом сборнике собраны приветствия участникам олимпиады от вид-

Десятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): И. Захаревич, А. Ляховец, С. Хлебутин, А. Дегтярев, И. Лысенок.

Фото Г. Габунии

Сеанс одновременной игры с участниками олимпиады проводит чемпионка мира по шахматам Майя Чибурданидзе.

«Я рада приветствовать участников Всесоюзной олимпиады школьников по математике в моем родном городе Тбилиси и пожелать им больших успехов.

Я хочу так же приветствовать всех школьников Советского Союза через их журнал «Квант» и надеюсь, что еще много школьных праздников будет проходить в нашем прекрасном городе».

Майя Чибурданидзе

ных деятелей науки и культуры Грузии, приведено много любопытных высказываний о математике, подробно рассказано, что делают ученые и учителя республики для юных любителей математики.

Один из материалов этого сборника привлек особое внимание. Мы с удивлением узнали, что первая математическая олимпиада в истории советской школы — «олимпиада пионеров-математиков» — состоялась в Тбилиси в 1933 году (во всех материалах, посвященных истории олимпиад, указывается, что впервые в нашей стране математическая олимпиада школьников была проведена в 1934 году в Ленинграде). На с. 61 публикуется более подробная информация о Тбилисской олимпиаде 1933 года; она, несомненно, заинтересует всех любителей математики.

Существует поверие, что 13 — несчастливое число. Но математики не верят в числовую магию. И хотя олимпиада носила номер XIII, а ее первый тур состоялся 13 апреля, она прошла успешно, доставив много радости участникам и принеся глубокое удовлетворение организаторам.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

С 12 по 17 апреля во Львове состоялся заключительный тур XIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Его участниками были победители республиканских олимпиад и призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады. Среди них — 49 восьмиклассников, 47 девятиклассников, 52 десятиклассника.

13 апреля школьники выполняли теоретическое задание. Восьмиклассникам были предложены 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач. На решение задач восьмиклассникам отводилось 4 часа, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 часов.

Ниже мы приводим условия этих задач*).

8 класс

1. Рисунок 1 сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от двух паровозов, которые движутся по прямолинейному участку дороги со скоростями $v_1=50$ км/ч и $v_2=70$ км/ч (вид сверху). Направления движения поездов указаны стрелками. Найти скорость ветра.

2. Наблюдатель движется с постоянной скоростью по некоторой наклонной прямой. Брошенное под углом к горизонту тело пересекает траекторию наблюдателя дважды с интервалом времени τ. Оба раза тело находится впереди наблюдателя на одном и том же расстоянии от него. Как будет выглядеть с точки зрения наблюдателя траектория тела? После второго пересечения наблюдатель измеряет пути, пройденные телом за последовательные промежутки времени по τ секунд каждый. Найдите отношение этих путей.

3. Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится 5 л воды при температуре $t_1=60$ °С, во втором — 1 л воды при температуре $t_2=20$ °С. Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, когда во втором сосуде установилось тепловое равновесие, из него в первый сосуд отлили столько воды, чтобы ее объемы в сосудах стали равны первоначальным. После этих операций температура воды в первом сосуде стала равной $t=59$ °С. Сколько воды переливали из первого сосуда во второй и обратно?

4. Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке 2. Амперметр A_1 показывает 2 А, амперметр A_2 показывает 3 А. Какие токи протекают через амперметры A_3, A_4 и резистор? Найти отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению R резистора.

9 класс

1. Рисунок 3 (вид сверху) сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от трех паровозов, которые движутся по прямолинейному участку железнодорожного пути. Скорость первого паровоза $v_1=50$ км/ч, а второго $v_2=70$ км/ч, направления их движения указаны на рисунке стрелками. Какова скорость третьего паровоза?

2. Шар массой $2M$ бросают вертикально вверх со скоростью v_0. К шару привязана легкая нить длиной $l<v_0^2/2g$, на втором конце которой находится груз массой M. Через какое время и на каком расстоянии от точки бросания шары столкнутся? Нить абсолютно жесткая.

3. В небольшую тонкостенную металлическую кастрюлю налили 0,5 л воды, поставили кастрюлю на плиту и, измеряя температуру воды в различные моменты времени, построили график зависимости температуры от времени. Затем воду вылили, в ту же кастрюлю налили 0,7 кг спирта и, поставив кастрюлю на ту же самую плиту, построили график зависимости температуры спирта от времени. Эти графики приведены на рисунке 4. Пользуясь этими графиками, определить удельную теплоемкость спирта и удельную теплоту его парообразования, если за 30 мин кипения количество спирта в кастрюле уменьшилось вдвое. Теплоемкость кастрюли равна 200 Дж/К. Испарением с поверхности жидкостей пренебречь.

4. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0. В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде после его заполнения?

5. Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке 2. Амперметр A_1 показывает

---

*) Почти все задачи были включены в Задачник «Кванта» в 7-м и 8-м номерах нашего журнала.

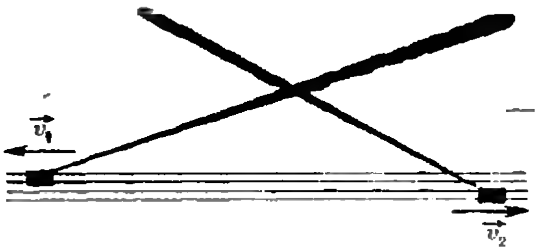


Рис. 1.

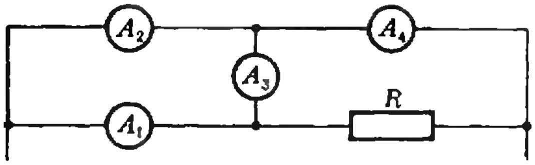


Рис. 2.

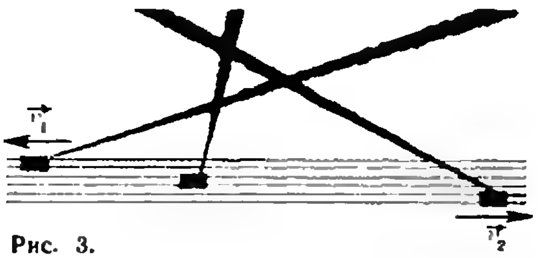


Рис. 3.

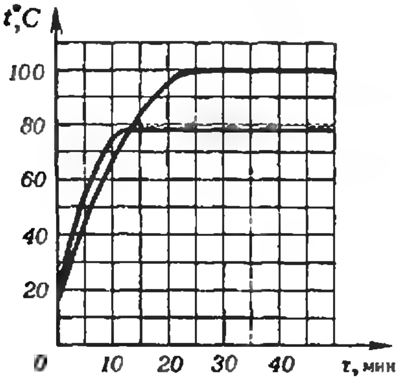


Рис. 4.

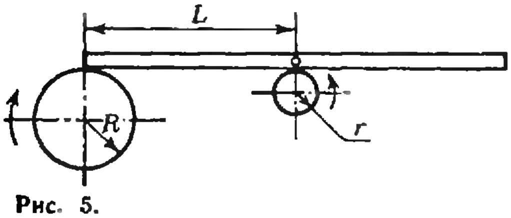


Рис. 5.

3 А, амперметр A_2 показывает 5 А. Найти отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению резистора.

10 класс

1. В цилиндре объемом 10 л, закрытом поршнем и помещенном в термостат с температурой 40 °С, находится по 0,05 моля двух веществ. Определить массу жидкости в цилиндре после изотермического сжатия, вследствие которого объем под поршнем уменьшается в 3 раза. Давление насыщенных паров первой жидкости при температуре 40 °С равно $0{,}7\cdot10^4$ Па, второй — $1{,}7\cdot10^4$ Па. Начертить изотерму сжатия. Молярная масса первой жидкости составляет $1{,}8\cdot10^{-2}$ кг/моль, второй — $4{,}6\cdot10^{-2}$ кг/моль.

2. При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель потребляет ток $I_0=100$ А, при этом КПД двигателя равен $\eta=0{,}9$. При движении трамвая по наклонному участку пути вниз с той же скоростью ток в двигателе равен нулю. Какой ток будет потреблять двигатель при движении трамвая по тому же участку пути вверх с той же скоростью?

3. Два цилиндра различных радиусов вращаются в противоположные стороны вокруг горизонтальных параллельных осей с угловой скоростью $\omega_1=\omega_2=\omega=2$ рад/с. Расстояние по горизонтали между осями $L=4$ м. В момент времени $t=0$ на цилиндры перпендикулярно осям кладут балку так, что она находится в горизонтальном положении и одновременно касается обеих поверхностей вращения, а ее центр масс расположен точно над осью цилиндра меньшего радиуса ($r=0{,}25$ м), как показано на рисунке 5. Рассчитать и проиллюстрировать графически зависимость горизонтального смещения балки от времени, начиная с момента $t=0$. Коэффициент трения $\mu=0{,}05$, ускорение свободного падения принять равным $g=10{,}0$ м/с².

4. Проводник массой M и длиной l подвешен за концы к диэлектрику с помощью двух одинаковых проводящих невесомых пружин с общим коэффициентом жесткости k. Перпендикулярно плоскости конструкции направлено однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Проводник сместили в вертикальной плоскости из положения равновесия и отпустили. Определить дальнейшее движение проводника в вертикальной плоскости. Сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников пренебречь.

5. См. задачу 3 для 9 класса.

В тот же день жюри олимпиады проверило работы участников. Результаты проверки показали, что наиболее трудной для восьмиклассников была задача № 2. Ее решили правильно только 15% участников. Наиболее легкой оказалась задача № 3 — ее решили 65% восьмиклассников. У девятиклассников наибольшие затруднения вызвала задача № 4. Справились с ней лишь 13% участников. Задачу № 5 правильно решили 74% девятиклассников. В десятом классе сложной оказалась задача № 2 — ее решили правильно 26% участни-

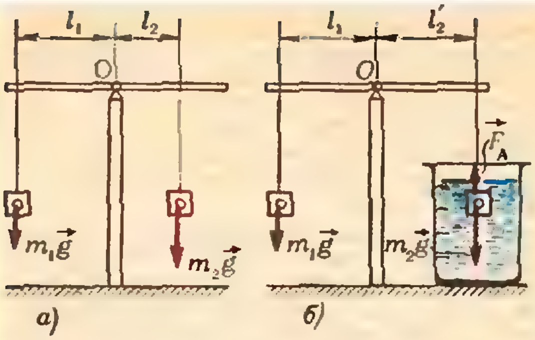


Рис. 6. Запишем правило моментов:

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2. \qquad (а)$$

$$m_1 g l_1 = (m_2 g - F_A)\, l'_2. \qquad (б)$$

Здесь m_1 и m_2 — массы металлических грузов, F_A — модуль архимедовой силы, $F_A = \rho_В g V_2$ (V_2 — объем груза m_2, $\rho_В$ — плотность воды). Из (а) и (б) находим

$$m_2 = \rho_В V_2 \frac{l'_2}{l'_2 - l_2}.$$

Аналогично определяем m_1:

$$m_1 = \rho_В V_1 \frac{l'_1}{l'_1 - l_1}.$$

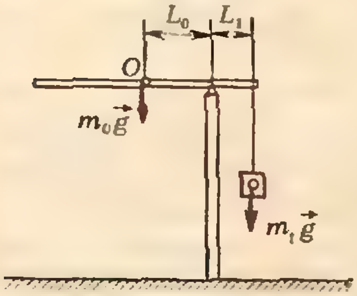


Рис. 7. m_1 — известная (найденная ранее) масса металлического груза. Из условия $m_0 g L_0 = m_1 g L_1$ получаем

$$m_0 = m_1 \frac{L_1}{L_0}.$$

ков. А с задачей № 1 справились 54% десятиклассников.

15 апреля с 10 до 15 часов участники олимпиады выполняли экспериментальное задание. Восьмиклассникам и десятиклассникам было предложено по две задачи, девятиклассникам — одна. Вот их условия:

8 класс

1. Определить массы металлических грузов (m_1, m_2) и деревянного стержня (m_0).

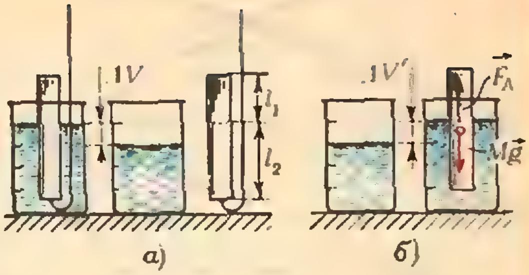


Рис. 8. а) Определим объем V образца: $V = V_1 + V_2$, где V_1 и V_2 — объемы верхней (длины l_1) и нижней (длины l_2) частей образца. Так как $\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1}{l_2}$ (образец однородный) и $V_2 = \Delta V$, находим

$$V = \Delta V \left(\frac{l_1 + l_2}{l_2}\right) = \Delta V \frac{l}{l_2}.$$

б) Определим плотность образца. Запишем условие плавания: $Mg = F_A$, где $M = \rho V$ и $F_A = \rho_В g \Delta V'$. Отсюда находим плотность ρ породы образца: $\rho = \rho_В \frac{\Delta V'}{V}$.

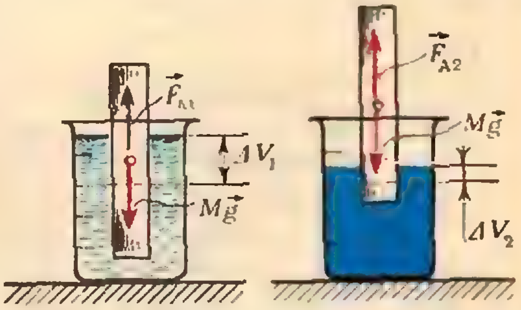


Рис. 9. Запишем условия равновесия образца в воде и в медном купоросе: $F_{A1} = \rho_В \Delta V_1 g$ и $F_{A2} = \rho_К \Delta V_2 g$ ($\rho_В$, $\rho_К$ — плотность воды и медного купороса соответственно). Поскольку $F_{A1} = F_{A2} = Mg$, находим $\rho_К = \rho_В \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2}$.

Примечание. Массу стержня (m_0) определить несколькими способами.

Оборудование: деревянный стержень, металлические грузы, опора, призма, измерительная линейка, мензурка, стакан с водой, нитки.

2. Определить породы деревянных образцов и плотность раствора медного купороса.

Оборудование: образцы двух различных пород (№ 1 и № 2), мензурка, стакан с водой, стакан с раствором медного купороса, крючок, таблица плотностей различных пород древесины.

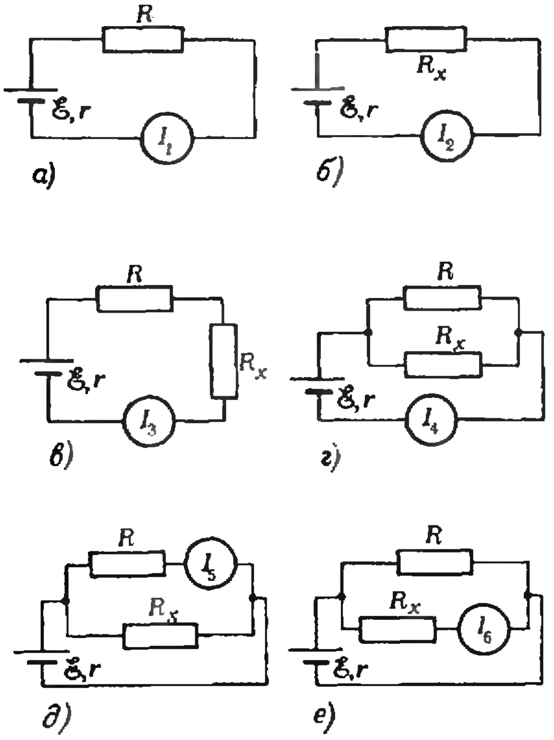


Рис. 10. Запишем закон Ома для полной цепи ($R_а$ — сопротивление миллиамперметра):

$$I_1(r+R+R_а)=\mathscr{E}, \qquad (а)$$

$$I_2(r+R_x+R_а)=\mathscr{E}, \qquad (б)$$

$$I_3(r+R+R_x+R_а)=\mathscr{E}, \qquad (в)$$

$$I_4\left(r+\frac{RR_x}{R+R_x}+R_а\right)=\mathscr{E}, \qquad (г)$$

$$I_5\left(r+\frac{(R+R_а)R_x}{R+R_а+R_x}\right)=\mathscr{E}, \qquad (д)$$

$$I_6\left(r+\frac{(R_а+R_x)R}{R+R_а+R_x}\right)=\mathscr{E}. \qquad (е)$$

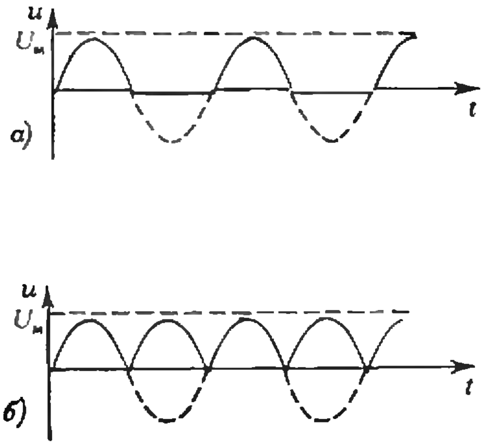


Рис. 11. а) $U_{д1}=U_м/2$; б) $U_{д2}=U_м/\sqrt{2}$.

9 класс

Определить, с наименьшей погрешностью, неизвестное сопротивление, внутреннее сопротивление источника тока и его электродвижущую силу.

Оборудование: источник постоянного тока, миллиамперметр, два сопротивления (известное и неизвестное), ключ, соединительные провода.

10 класс

1. Дан выпрямитель с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, не содержащий фильтра сглаживания пульсаций. Определить, по какой схеме собран выпрямитель — однополупериодной или двухполупериодной.

Оборудование: два одинаковых калориметра с одинаковыми электрическими нагревателями, термометры, электролитический конденсатор большой емкости (падение напряжения на конденсаторе за время 0,02 с при разрядке через сопротивление нагревателя пренебрежимо мало) и диод.

2. По возможности точнее определить коэффициент преломления стекла, из которого изготовлен полуцилиндр с полированной поверхностью.

Оборудование: матовое стекло, угольник, линейка, электрическая лампочка (подсоединяется к клеммам выпрямителя), белая и черная бумага.

Разберем коротко, в общих чертах, решения этих задач.

8 класс

Задача 1. Рисунок 6 иллюстрирует способ определения масс металлических грузов. В качестве рычага используется деревянный стержень. Он уравновешивается сначала на опоре без грузов, так что точка опоры О определяет центр масс стержня. Объем груза, опущенного в воду, определяется по изменению уровня воды в мензурке (шкала мензурки проградуирована по объему).

Для большей точности массу каждого груза следует определить независимо, непосредственно из измерений.

Один из способов измерения массы m_0 стержня иллюстрирует рисунок 7. Точка O — центр масс стержня. Разные способы определения m_0 основаны на использовании правила рычага с различными вариантами уравновешивания грузов m_1, m_2 и m_0.

Задача 2. Способ определения плотности образцов иллюстрируется рисунком 8. Найдя плотности, по таблицам определяем породы образцов.

Из рисунка 9 ясен способ определения плотности медного купороса.

9 класс

Возможные схемы соединения элементов в цепь приведены на рисунке 10. Очевидно, что из любых трех уравнений (а) — (е) можно найти три неизвестных —

ЭДС источника $\mathscr{E}$, его внутреннее сопротивление r и неизвестное сопротивление R_x.

Однако требование максимальной точности обязывает сравнить погрешности значений $\mathscr{E}$, r и R, определенных по расчетам различных схем. Точность значений известного сопротивления R и сопротивления миллиамперметра $R_а$ задана (указана на приборах), точность показаний миллиамперметра определяется шкалой прибора.

10 класс

Задача 1. В случае однополупериодной схемы напряжение на выходе выпрямителя меняется со временем так, как показано на рисунке 11, *а*; в случае двухполупериодной схемы — как на рисунке 11, *б*. В первом случае действующее значение напряжения равно $U_{д1} = U_м/2$, во втором — $U_{д2} = U_м/\sqrt{2}$.

Конденсатор, включенный соответствующим образом в цепь (рис. 12), может быть заряжен до напряжения $U_м$. Если через один нагреватель пропускать ток непосредственно от выпрямителя, а через другой нагреватель разряжать конденсатор, то количество теплоты, выделившееся за время t, на первом нагревателе будет пропорционально $U_д^2$, а на втором — $U_м^2$ (поскольку падение напряжения на конденсаторе за время 0,02 с при разрядке через сопротивление нагревателя пренебрежимо мало), то есть $Q_1 \sim U_д^2$ и $Q_2 \sim U_м^2$. Отношение $Q_1 : Q_2$ равно $U_{д1}^2 : U_м^2 = 1:4$ при однополупериодной схеме выпрямителя и $U_{д2}^2 : U_м^2 = 1:2$ при двухполупериодной схеме.

Установка, показанная на рисунке 12, позволяет найти отношение $U_д^2 : U_м^2$.

Задача 2. Наиболее удобный и простой метод определения показателя преломления основан на наблюдении явления полного внутреннего отражения.

На матовом стекле нарисуем прямую линию и положим полуцилиндр на стекло так, чтобы эта линия проходила по его оси (рис. 13). Будем смотреть на боковую поверхность полуцилиндра. При некотором угле зрения у дна полуцилиндра (по всей его длине) появляется полоса, сквозь которую матовое стекло не видно (рис. 14). При уменьшении угла зрения эта полоса перекрывает все бо́льшую часть полуцилиндра. При некотором угле зрения верхняя граница этой полосы совпадает с линией, проведенной на матовом стекле (см. рис. 14, *в*). При этом граничные лучи (отражающиеся от оси) выходят из полуцилиндра, не преломляясь по радиусу (рис. 15).

Пользуясь соотношением $\sin\alpha = 1/n$ (см. рис. 15), найдем n.

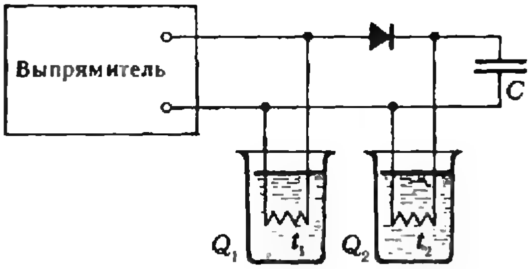


Рис. 12. При одинаковых количествах воды в калориметрах и при одной и той же начальной температуре воды t_0 количества теплоты Q_1 и Q_2, выделяющиеся на нагревателях, относятся, как $Q_1 : Q_2 = (t_1 - t_0) : (t_2 - t_0)$, где t_1 и t_2 — температуры воды в калориметрах через некоторое время после включения выпрямителя в цепь.

Если $(t_1 - t_0) : (t_2 - t_0) = 1:4$, выпрямитель собран по однополупериодной схеме.

Если $(t_1 - t_0) : (t_2 - t_0) = 1:2$, выпрямитель собран по двухполупериодной схеме.

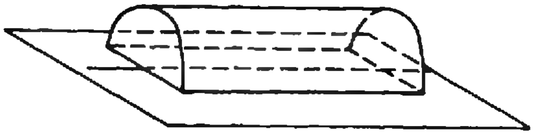


Рис. 13.

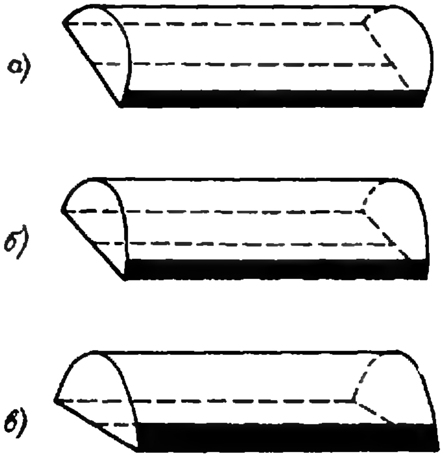


Рис. 14.

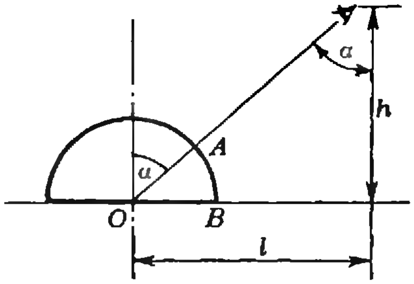


Рис. 15. AB — область полного внутреннего отражения; OA — граничный луч; $\sin\alpha = l/\sqrt{l^2 + h^2}$.

Проверка экспериментальных работ показала, что 34% восьмиклассников полностью решили задачу № 1 и 37% — задачу № 2 (с описанием выполнения эксперимента, с обоснованием выбора методики, с оценкой погрешностей полученных результатов). В 9 классе с задачей полностью справились 48% участников. С задачей № 1 в 10 классе успешно справились 51%, а с задачей № 2—28% участников.

17 апреля состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором были объявлены имена призеров. Список участников олимпиады, награжденных дипломами I, II и III степени, приведен на с. 60. Специальный приз журнала «Квант» — подшивку за 1978 год с автографом главного редактора журнала академика И. К. Кикоина — получил восьмиклассник *Юрий Хохлов* (Эмба). Подпиской на журнал «Квант» на 1980 год награждены *Валерий Айдагумов* (Андижан), *Сергей Кудрявцев* (Магадан), *Юрий Остапчук* (Здолбунов), *Константин Фефилов* (Поставы), *Сергей Шумко* (Ладейное поле).

Призеры XIII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Барздинь Г. (Рига, с. ш. № 1),
Рублев Б. (Киев, ФМШ № 145),
Чеканов Ю. (Москва, с. ш. № 91);

по 9 классам —

Беспамятных С. (Артемовский, с. ш. № 12),
Концевич М. (Москва, с. ш. № 91),
Кузьмин Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Разборов А. (Москва, с. ш. № 2),
Ткаченко Ю. (Киев, ФМШ № 145);

по 10 классам —

Амброладзе М. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Дегтярев А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Захаревич И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Лысенок И. (Москва, ФМШ № 18),
Ляховец А. (Москва, ФМШ № 18),
Хлебутин С. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Алания Л. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Алексеев В. (Миасс, с. ш. № 9),
Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 47),
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45),
Гринберг Н. (Киев, ФМШ № 145),
Драмбян Р. (Ереван, ФМШ № 1),
Маланюк Т. (Киев, ФМШ № 145),
Мелгалвис А. (Рига, с. ш. № 1),
Минарский А. (Ленинград, с. ш. № 80),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Огурцов А. (Светлогорск, с. ш. № 6),
Пименов А. (Казань, с. ш. № 123),
Шулюпов В. (Тула, с. ш. № 28),
Эпиктетов М. (Алма-Ата, с. ш. № 15);

по 9 классам —

Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 16),
Балинский А. (Львов, с. ш. № 11),
Василовский С. (Ашхабад, с. ш. № 30),
Зайцев Ю. (Видное, с. ш. № 6),
Ижболдин О. (Ленинград, ФМШ № 45),
Канепс Я. (Рига, с. ш. № 1),
Келарев А. (Свердловск, с. ш. № 141),
Коротков А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Лернер Л. (Вильнюс, с. ш. № 8),
Набоков Р. (Саратов, с. ш. № 13),
Радченко В. (Киев, ФМШ № 145),
Сивацкий А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Стрелецкий А. (Вильнюс, с. ш. № 8);

по 10 классам —

Ашкинази А. (Москва, с. ш. № 315),
Надеждин Б. (Москва, ФМШ № 18),
Облаков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Рудковский М. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Балашов А. (Махачкала, с. ш. № 8),
Грицаенко Д. (Губкин, с. ш. № 2),
Ибодинов М. (Душанбе, с. ш. № 1),
Иванцов Р. (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2),
Коротков А. (Горький, с. ш. № 44),
Кругляк А. (Киев, ФМШ № 145),
Новиков Г. (Димитровград, с. ш. № 5),
Тимченко С. (Томск, с. ш. № 8);

по 9 классам —

Ардан Р. (Львов, с. ш. № 11),
Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45),

Головинская О. (Киев, ФМШ № 145),
Добров Б. (Ангарск, с. ш. № 10),
Каплан А. (Сумгаит, с. ш. № 11),
Кукк Х. (Ныо, с. ш.),
Лавров П. (Ленинград, с. ш. № 207),
Лацис С. (Стучки, с. ш. № 2),
Лучко Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Павлющик С. (Москва, ФМШ № 18),
Попелюхин А. (Киев, ФМШ № 145),
Рухадзе К. (Москва, ФМШ № 18);

по 10 классам —

Забелин В. (Москва, ФМШ № 18),
Звирбулис Э. (Рига, с. ш. № 1),
Измайлов Р. (Баку, с. ш. № 134),
Карагулян Г. (Ереван, ФМШ № 1),
Кордюков Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Кузьмин Е. (Череповец, с. ш. № 4),
Лиманаускас В. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Новосельцева Т. (Москва, с. ш. № 7),
Панченко А. (Поворино, с. ш. № 22),
Патария Д. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Пикусов С. (Новочебоксарск, с. ш. № 2),
Сарчимелия А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Сафонов С. (Киев, ФМШ № 145),
Скрябин С. (Казань, с. ш. № 18),
Тартаковский А. (Москва, с. ш. № 2),
Фесенко И. (Ленинград, ФМШ № 45).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Гутин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Деревянко В. (Умань, с. ш. № 2),
Матвеев А. (Ульяновск, с. ш. № 4),
Харченко А. (Кременчуг, с. ш. № 21);

по 9 классам —
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Ляпин А. (Гомель, с. ш. № 33),
Одинцов А. (Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам —
Кривицкий В. (Харьков, с. ш. № 27),
Цыпин М. (Москва, с. ш. № 2),
Ющук О. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Байков П. (Балашиха, с. ш. № 10),
Беспалов А. (Горький, с. ш. № 40),
Григорьев Д. (Москва, с. ш. № 57),
Дмитрук И. (Киев, ФМШ № 145),
Лийву Ю. (Таллин, с. ш. № 1),
Павлов Ю. (Ленинград, с. ш. № 121),
Рябкин Е. (Гомель, с. ш. № 11),
Слюняев В. (Обнинск, с. ш. № 8);

по 9 классам —

Андрианов А. (Москва, с. ш. № 2),
Голобоков А. (Москва, ФМШ № 18),
Коваленко А. (Львов, с. ш. № 69),
Ковтуненко В. (Киев, ФМШ № 145),
Красиков И. (Киев, ФМШ № 145),
Кунингас О. (Таллин, с. ш. № 1),
Лебедянцев С. (Куйбышев, с. ш. № 135),
Перлов А. (Киев, ФМШ № 145),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10),
Ратников Ф. (Ленинград, ФМШ № 45),
Швец И. (Киев, ФМШ № 145),
Юшкайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9);

по 10 классам —

Васильев А. (Чебоксары, с. ш. № 2),
Гордиенко С. (Смолевичи, с. ш. № 2),
Шпилькин С. (Москва, ФМШ № 18),
Ясонов И. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Абаджев В. (Львов, с. ш. № 52),
Бабий О. (Киев, ФМШ № 145),
Грасманис М. (Рига, с. ш. № 1),
Кузьмин М. (Орел, с. ш. № 27),
Чуев И. (Тула, с. ш. № 21);

по 9 классам —

Барков С. (Новомосковск Тульской обл., с. ш. № 2),
Бесарабский А. (п. Запрудня Московской обл., с. ш.),
Вайникко Т. (Ныо, с. ш.),
Жельвис А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Заневский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Козловский В. (Новолукомль, с. ш.),
Крапивный К. (Запорожье, с. ш. № 28),
Микулич А. (Минск, с. ш. № 19),
Николаев С. (Нальчик, с. ш. № 2),
Пакалнс А. (Тукумс, с. ш. № 1),
Сергейцев Т. (Челябинск, с. ш. № 112),
Трощиев Ю. (Арзамас, с. ш. № 2),
Яшин А. (Братск, с. ш. № 26);

по 10 классам —

Гаврилов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),
Мирлин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Надежин Д. (Курган, с. ш. № 47),
Николаев А. (Москва, ФМШ № 18),
Омельянчук А. (Москва, ФМШ № 18),
Севрюк М. (Москва, с. ш. № 2),
Чикин Д. (Москва, ФМШ № 18).

С. Вашакмадзе

У истоков олимпиадного движения

Главное внимание уделить борьбе за овладение основами наук, ... организуя смотры, ... академические бои групп и школ, конкурсы на лучших физиков, математиков.

Из постановлений
VII Всесоюзной конференции
ВЛКСМ (1932 год).

28 ноября 1933 года в Тбилисском русском театре юного зрителя состоялась районная олимпиада пионеров-математиков. На сцене — 42 ученика грузинских, русских, армянских школ; в зрительном зале — друзья «бойцов математического фронта», их родители, учителя, представители партийных и комсомольских организаций района.

Ученик VI класса 26-й школы Ладо Цулукидзе за 17 минут решил 7 задач и примеров; еще через 25 минут на «поле битвы» остались лишь пустые столы: все бойцы математического фронта, одержавшие быструю, но бескровную победу, смешались со зрителями. А пока члены жюри подводили итоги ,,боя'', участники художественной самодеятельности устроили интересный концерт.

«,,Бой'' окончен: двое ,,раненых'', ,,убитых'' нет ...». Под таким заголовком тбилисская газета ,,Молодой рабочий'' 5 декабря опубликовала подробные сообщения о первой районной математической олимпиаде и наградила победителей почетными грамотами.

Бюро Организации коммунистического воспитания детей при ЦК КП(б) Грузии одобрило почин 26-й школы и рекомендовало распространить опыт, а также проводить ,,академические соревнования'' по физике, химии, биологии и другим дисциплинам.

В мае 1934 года в Тбилиси состоялась общегородская олимпиада математиков, а в июне 30 учеников десятых классов — победители городской олимпиады — были приглашены на математическую олимпиаду в Тбилисский университет.

За активную работу по подготовке и проведению олимпиад в школе и районе жюри выразило благодарность учителям математики С. Вашакмадзе и Т. Петраковской. Ниже мы публикуем воспоминания заслуженного учителя республики персонального пенсионера Сергея Евстафьевича Вашакмадзе о первых опытах проведения математических олимпиад в Грузии *).

В начале 30-х годов, после исторических решений ЦК ВКП (б) и Правительства СССР о школе, практиковавшиеся несколько лет дальтон-план и ,,бригадный метод'' были вновь заменены классно-урочной системой. В Грузии, как и во всей Советской стране, проходила реорганизация школы. В 1932/33 учебном году я был переведен в 26-ю опытно-показательную школу учителем математики.

Школа являлась одной из передовых. Заведовал учебной частью известный педагог, автор первого сборника арифметических задач на грузинском языке Л. Чимакадзе. В каждом классе было прочное ядро активных и старательных учащихся. Хорошие ученики под моим руководством изготовляли простейшие модели и приборы, помогали подтягивать отстающих, поэтому я мог уделять время систематической проверке тетрадей, проводил много письменных работ по математике.

---

*) Литературная обработка А. Яковлева.

В конце первой четверти 1933/34 учебного года из лучших учеников сформировались 3 математических кружка: для V—VI, для VII—VIII и для IX—X классов. В целях повышения интереса учащихся к изучению математики я предложил провести, как тогда говорили, „академическое соревнование“ под названием „олимпиада юных пионеров-математиков“. Дирекция школы и районный отдел народного образования дали согласие, и 3 ноября состоялась внутришкольная олимпиада — отдельно по каждому классу.

Опыт оказался удачным, и с самого начала второй четверти развернулась подготовка к проведению районной математической олимпиады. В состав жюри вошли Л. Чимакадзе (председатель), заведующий Тбилисским городским отделом народного образования К. Кацарава, представитель газеты „Молодой рабочий“ С. Аветисян, председатель районного бюро детской коммунистической организации К. Ноников, профессор Тбилисского университета М. Кониашвили и др.

Каждый участник олимпиады — боец математического фронта — получил отдельный конверт с набором заданий. Сами по себе задания были довольно простыми, иной раз попросту повторяли определения и формулировки из школьных учебников. Однако торжественная обстановка, большое количество зрителей и „болельщиков“ за честь своей школы и класса, ответственное отношение участников олимпиады были новинкой. Из 42 участников олимпиады 40 решили все или почти все задачи и примеры.

17 участников, чьи решения признали лучшими, были награждены. Профессор Кониашвили, подводя итоги олимпиады, отметил, что подобные соревнования способствуют улучшению учебного процесса, повышению интереса к овладению математическими знаниями не только у самих участников, но и у многих других школьников — их товарищей. Поэтому, заявил он, следовало бы распространить этот опыт за пределы одного района и одного предмета; следовало бы создать общества любителей математики, любителей физики, любителей химии и т. п. От имени математиков Тбилисского университета он обещал всемерную поддержку предполагаемому обществу любителей математики.

В декабре 1933 года ЦК КП(б) Грузии одобрил почин школы и района. В январе 1934 года мы приступили к подготовке городской олимпиады, которая состоялась в мае; число участников ее составило несколько сотен.

Таким образом, первые математические олимпиады в Тбилиси были проведены уже в 1933 году. В дальнейшем Тбилисский дворец пионеров и Тбилисская центральная станция юных техников проводили олимпиады по математике и другим предметам под руководством Наркомпроса Республики.

Ранее в «Кванте» сообщалось *), что первые математические олимпиады в СССР состоялись в Ленинграде — весной 1934 года, а в Москве — осенью 1935 года. Однако нам, тбилисцам, удалось опередить в этом отношении ленинградцев и москвичей.

После войны подготовку и проведение олимпиад осуществляет у нас Министерство просвещения Республики. С 1956/57 учебного года проводятся и ежегодные Республиканские олимпиады по математике. Создан постоянно действующий оргкомитет, который ряд лет успешно возглавлял проф. В. Челидзе, а после его смерти — член-корр. АН Грузинской ССР проф. Т. Гегелия.

Необходимо отметить, что число участников республиканских математических олимпиад из года в год растет, задачи постепенно усложняются, причем включаются и задачи логического содержания.

Для меня, одного из зачинателей математических олимпиад, особенно отрадно, что многие мои бывшие ученики, которые в 1933/34 году добились успехов на первых школьных, районных, городских олимпиадах, стали замечательными учеными и педагогами. В их числе — В. Чавчанидзе, академик АН Грузинской ССР, директор Института кибернетики, Г. Хатиашвили, профессор ТГУ, О. Гаганидзе, заслуженный учитель республики, директор 42-й средней школы, кавалер многих орденов и медалей.

Отар Гаганидзе сумел заинтересовать учащихся своей школы — очень многие из них участвуют в различных предметных олимпиадах в школе, районе, городе. Около 80 учеников 42-й школы принимают участие ежегодно в республиканских олимпиадах по различным предметам, и ежегодно среди них оказывается немало победителей.

---

*) «Квант», 1973, № 9.

Тепловой взрыв

1. Так как рассматривается случай малого изменения концентрации исходных веществ (малой глубины превращения), можно считать скорость реакции постоянной во времени. Искомое время τ определяется простым соотношением $w\tau=10^{-2}n$, или

$$\tau=\frac{10^{-2}}{2n}e^{E/kT}=7\cdot10^{-12}e^{E/kT}\text{ (c)}.$$

Подставляя значения энергии активации и температуры, получаем:
$\tau_{273}=7\cdot10^{19}$ с $=2\cdot10^{12}$ лет — время, большее чем возраст Вселенной! Естественно считать газовую смесь при такой температуре инертной.
$\tau_{600}=7\cdot10^{2}$ с ≈ 10 минут — медленное протекание реакции.

$\tau_{800}=0{,}3$ с — быстрая реакция.

Таким образом, увеличение абсолютной температуры смеси всего лишь в два раза (273—600 К) изменяет скорость химической реакции на семнадцать порядков!

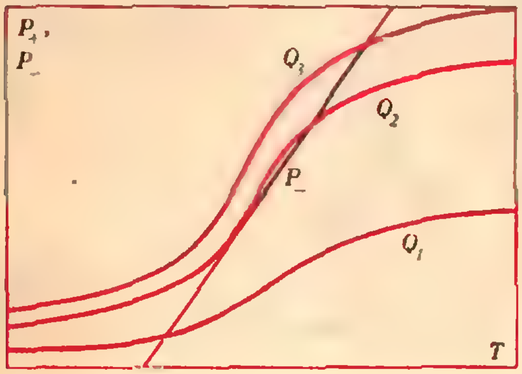


Рис. 1.

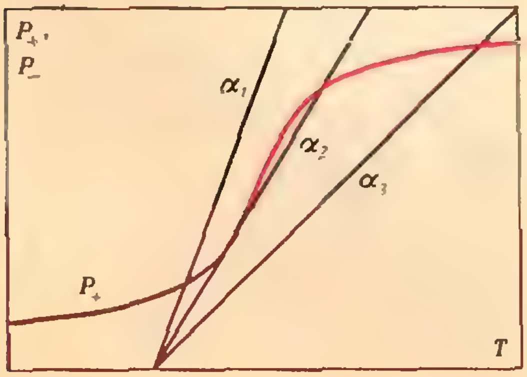


Рис. 2.

2. Если кривая теплоотвода круче кривой тепловыделения, то случайное увеличение температуры приведет к неравенству $P_->P_+$ и система начнет охлаждаться, то есть вернется в исходную точку. При случайном уменьшении температуры неравенство будет обратным и система нагреется. Таким образом, рассматриваемая точка отвечает устойчивому состоянию. Наоборот, если наклон кривой тепловыделения больше наклона прямой теплоотвода, то случайное изменение температуры будет нарастать — точка равновесия неустойчива.

3. а) Изменение теплоты сгорания (теплового эффекта реакции) меняет функцию тепловыделения (ординаты умножаются на постоянное число), прямая теплоотвода не меняется. На рисунке 1 $Q_1<Q_2<Q_3$.

б) Изменение коэффициента теплоотвода α меняет наклон прямой теплоотвода. На рисунке 2 $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$.

Регулярное полимино

2, 4. Расставим в вершинах кубика знаки «+» и «—» так, как показано на рисунке 3. Назовем *индексом* кубика знак, стоящий в вершине, расположенной в пересечении южной, восточной и верхней граней.

Заметим, что

1° если начальная ориентация α и конечная ориентация $\Gamma(\alpha)$ совпали, то индексы одинаковы;

2° при одном перекатывании через любое ребро кубика (а также при нечетном числе перекатываний) индекс меняет знак.

Из 1° и 2° следуют утверждения упражнений 2 и 4.

Заочная школа программирования

Урок 3

(см. «Квант» № 10)

3.1. На терминале будет отпечатана такая строка:

B = A C = 5

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. 60 коробок спичек, 39 пирожков и 1 банка консервов.

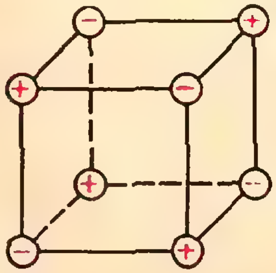


Рис. 3.

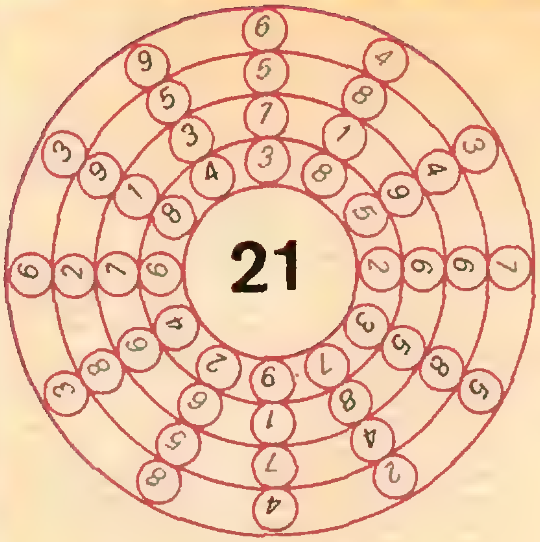
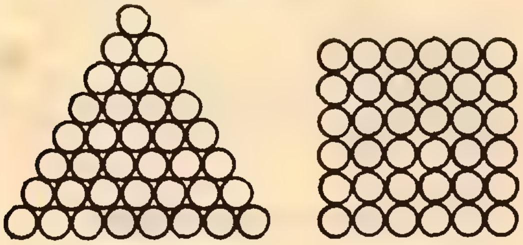


Рис. 4.

2. 21 — см. рисунок 4.
3. 36 — см. рисунки 5, *а*, *б*.
4. Можно. Указание. Возьмите любое целое число $n > 4\cdot 1979$ и разбейте квадрат на n^2 квадратиков со стороной длины $\frac{1}{n}$. В каждый квадратик поместите круг радиуса $\frac{1979}{n^2}$.



а) *б)*

Рис. 5.

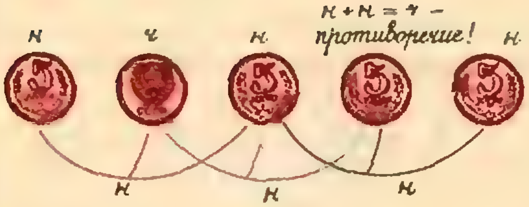


Рис. 6.

5. Если первоначально вверх орлом лежит средняя монета, то достаточно перевернуть сначала первые три монеты, а потом — последние три.

Если же первоначально вверх орлом лежит вторая монета, то перевернуть все монеты вверх орлом невозможно. Действительно, существуют три способа переворачивания трех рядом лежащих монет: первые три монеты, средние три и последние три монеты (рис. 6). Поскольку первая и последняя монеты лежат вверх решкой, каждая из них должна быть перевернута нечетное число раз, то есть «переворотов» как первого, так и третьего типов должно быть нечетное число. При этом средняя монета перевернется четное число раз. Но первоначально она лежала вверх решкой, поэтому переворотов второго типа должно быть нечетное число. Однако при этом четвертая монета окажется перевернутой четное число раз, то есть останется лежать вверх решкой. Поэтому в данном случае указанными переворачиваниями не удается перевернуть все монеты вверх орлом.

Аналогично доказывается, что невозможно перевернуть все пять монет вверх орлом и в том случае, когда первоначально вверх орлом лежит первая монета.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономарева, В. Чернов

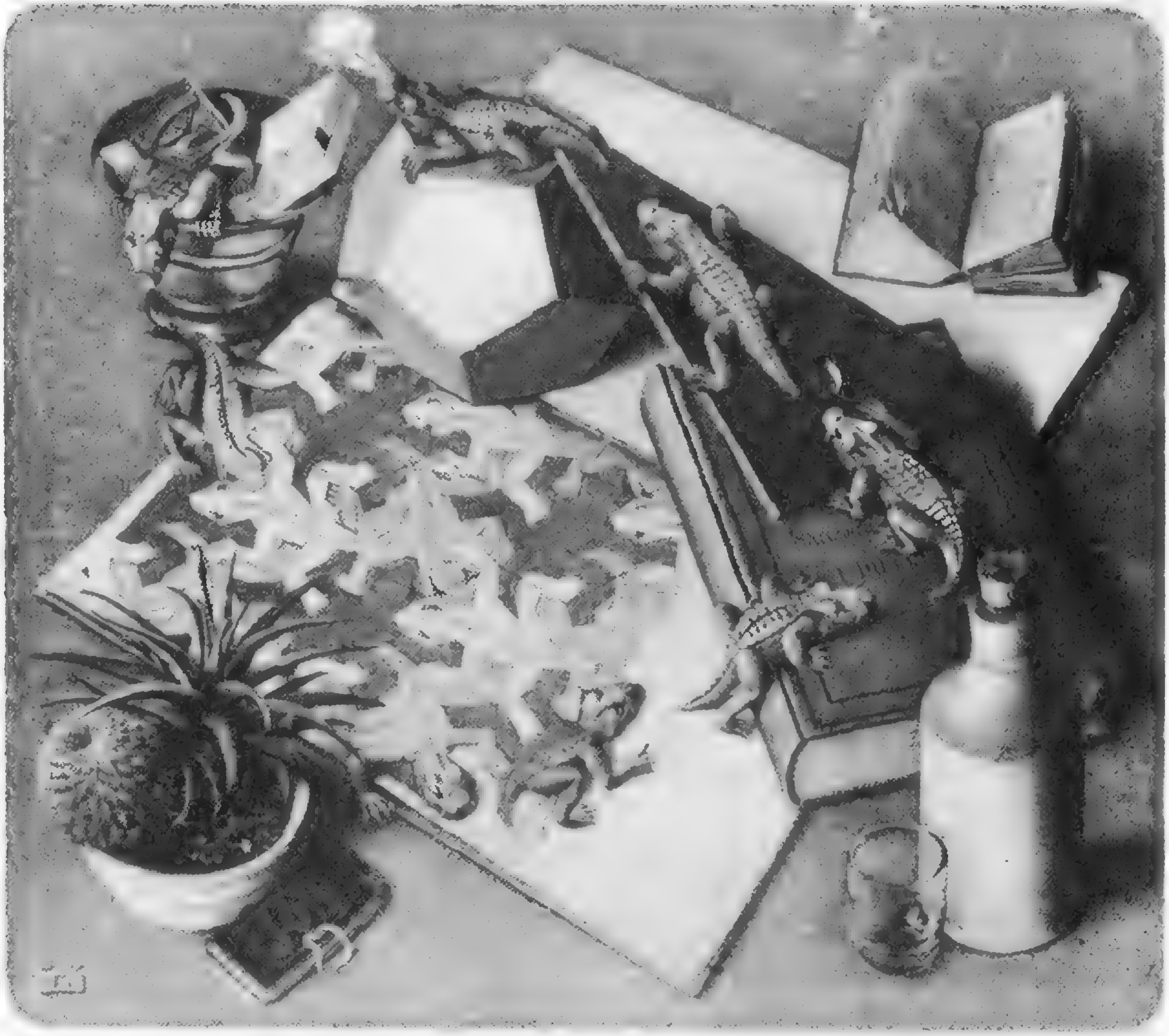
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Т. Плетнева, Е. Сидоркина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 3/IX-79
Подписано в печать 16X-79
Бумага 70×108 1/16 Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,13 Т-18625
Цена 30 коп. Заказ 2017 Тираж 279 347 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



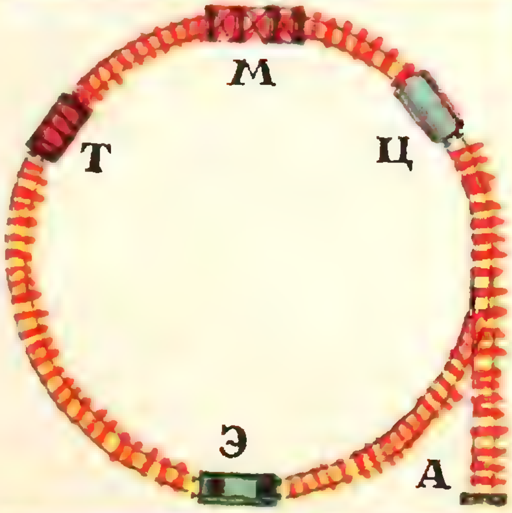
На приведенной выше литографии «Рептилии», созданной в 1943 году, замечательный голландский художник Эшер, дав волю своему воображению, изобразил необычайное событие.

...На покинутом художником столе в беспорядке среди кактусов, книг, сигарет и спичек, модели додекаэдра, бутылки и стакана, угольника лежит эскиз знаменитого рисунка Эшера «Ящерицы» (см., например, обложку «Кванта», 1977, № 3). И вдруг плоские ящерицы-узоры начинают приобретать объем, оживают, сосредоточенно и зловеще ползут по столу и даже извергают пламень. Но вскоре возвращаются и вновь растворяются в своем двумерном изображении, в спокойных и красивых закономерностях геометрии.

ЭЛЕКТРОВОЗ ПЕРЕГОНЯЕТ ВАГОНЫ

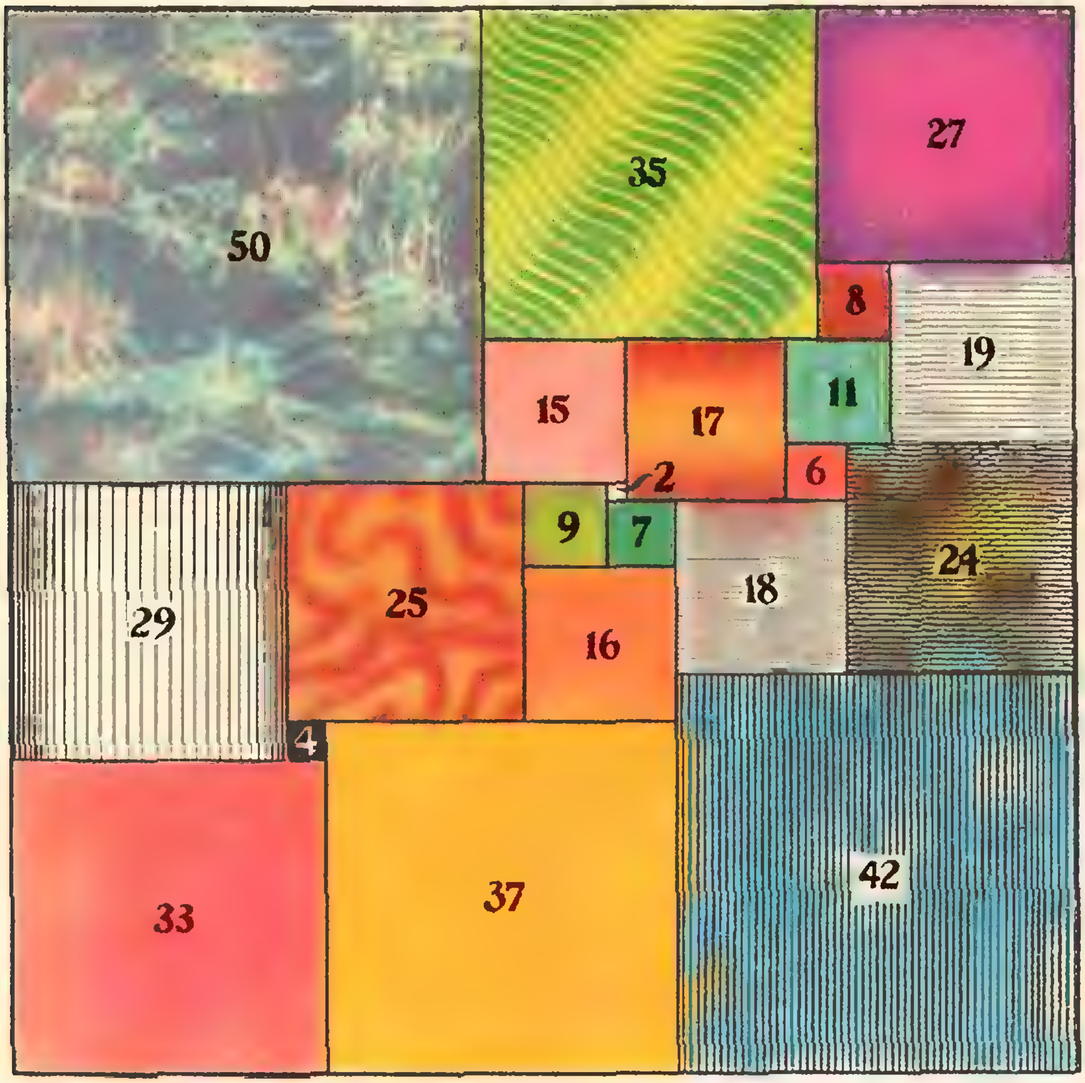
На рисунке изображен кольцевой участок железнодорожного пути с мостом М и тупиком А. На этом участке находятся электровоз Э и два вагона: товарный Т и вагон-цистерна Ц. Через мост может проезжать только электровоз (без вагонов). Вагоны можно перемещать только тогда, когда они сцеплены с электровозом. В тупик разрешается ставить только один из вагонов. Как должен маневрировать электровоз, чтобы поменять местами товарный вагон и вагон-цистерну и оказаться на первоначальном месте?

Ф. Бартенев



Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом рисунке показано разбиение квадрата на 21 попарно конгруэнтных квадратов, придуманное голландским математиком Дьювестином в 1978 году. Цифры указывают длины сторон соответствующих квадратов, если длина исходного — 112. Это построение — своеобразный рекорд: в нем наименьшее пока число попарно неконгруэнтных квадратов (21). Подробнее об этом см. на с. 21.


50
35
27
8
19
15
17
11
6
2
9
7
24
18
29
25
16
4
42
33
37

НОМЕР
12

Основан в 1970 году

Квант

12
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 Первая научная работа Максвелла
6 *М. Цаленко.* Комбинаторные задачи информационного поиска
13 *Я. Смородинский.* Планеты движутся по эллипсам

Задачник «Кванта»

20 М596—М600; Ф608—Ф612
22 Решения задач М540—М544; Ф553—Ф557

«Квант» для младших школьников

30 Задачи
31 *О. Оре.* Простые числа Ферма

Практикум абитуриента

34 *В. Иванов.* Преобразование решений тригонометрического уравнения

Искусство программирования

37 *Л. Виленкина, Г. Звенигородский.* IV Всесоюзная летняя школа юных программистов
45 **Спрашивайте — отвечаем**

Рецензии, библиография

47 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

Информация

49 *И. Слободецкий.* XI Международная физическая олимпиада школьников
53 *В. Мишин, А. Савин.* XXI Международная математическая олимпиада школьников
55 *Л. Садовский.* 10 лет ФМШ МИИТа
56 *Г. Мякишев.* Энциклопедия микромира
57 *А. Криворучко, М. Немиченицер.* Олимпиада в Омске
58 *Ж. Роббот.* Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
59 *И. Сергеев.* Новый прием на малый мехмат
60 Напечатано в 1979 году
63 **Ответы, указания, решения**
Наша обложка *(с. 48)*
Смесь *(с. 5, 36, 57)*

Как получить красивый многогранник, изображенный на первой странице обложки, посмотрите на четвертой странице обложки

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1979

Первая научная работа Максвелла

5 ноября 1979 года исполнилось 100 лет со дня смерти великого английского ученого Джеймса Клерка Максвелла. Разгадка природы колец Сатурна, теория цветового зрения, знаменитый закон распределения молекул газа по скоростям и, прежде всего, теория электромагнетизма входят сейчас в сокровищницу мировой науки. Имя Максвелла, как говорил Макс Планк, «блещет на вратах классической физики».

Для молодежи особый интерес представляют ранние работы крупных ученых. И не потому, что эти работы более просты и понятны, чем фундаментальные открытия, принесшие славу их авторам. А потому, что они учат труду, творчеству, раскрывают красоту научного поиска. Сам Максвелл заметил, что «наука захватывает нас только тогда, когда, заинтересовавшись жизнью великих исследователей, мы начинаем следить за историей развития их открытий».

Свою первую научную работу Максвелл выполнил, когда ему было четырнадцать лет. Биографы Максвелла так описывают это событие. После ранней смерти матери (она умерла, когда Джеймсу было 8 лет) воспитанием сына занимался его отец, глубоко образованный человек, сам увлекавшийся научными и техническими вопросами. У Джеймса очень рано пробудился интерес к технике и развились практические навыки. В немалой степени этому способствовали постоянное общение с отцом, чтение и, конечно, детские игры и первые «научные» игрушки. До десяти лет Джеймс жил в деревне, и это было для него счастливым временем. Потом отец отвез его в Эдинбург, в школу, которая называлась академией.

Поначалу в академии Джеймс чувствовал себя неважно. Он сразу натолкнулся на отчужденный прием одноклассников, для которых он был простым деревенским парнем. Джеймс приехал в академию в середине учебного года, по одежде и по поведению он сильно отличался от сверстников, был необщительным, и в науках на первых порах не блистал. У него даже появилось прозвище «дуралей». Мальчик скучал по дому, по отцу, по вольной жизни в деревне. Но потом Джеймс удивил одноклассников. Он увлекся геометрией и стал первым учеником в школе по математике. В 14 лет за блестящие успехи по этому предмету он был награжден медалью.

Отец Джеймса иногда посещал заседания Эдинбургского королевского общества. Однажды он взял с собой сына. Тема заседания оказалась интересной для Джеймса: ученые обсуждали замечательные способности древних этрусков. Не владея высшей математикой, они знали сложные математические кривые: сечения этрусских погребальных урн являлись совершенными овалами! Каким образом древние делали такие построения? Какова связь искусства и математики? Никто из ученых мужей толком не мог ответить на эти вопросы.

Дискуссия ученых так взволновала мальчика, что он целыми днями размышлял над загадкой древних художников. Джеймс загорелся идеей построения красивых фигур при помощи законов геометрии и механических устройств. Несколько недель упорной работы (и увлекательнейшей игры) — и вот первое открытие: овалы можно чертить с помощью карандаша и булавок с нитью! Так Максвелл, будучи знаком только с основами алгебры и геометрией Евклида, решил задачу о построении овалов. Задачу, для решения которой Ньютон и Декарт применяли гораздо более сложный математический аппарат. Причем Максвелл предложил действительно новый способ, ранее неизвестный математикам.

Значение этого способа оказалось бо́льшим, чем одно из возможных решений загадки древних этрусков. Действительно, геометрические построения юного Максвелла открывают перед нами удивительные оптические свойства овалов и вводят нас в круг интереснейших задач геометрической оптики, над которыми трудилось немало замечательных ученых прошлого.

Профессор Форбс, покровительствовавший молодым талантам, 6 апреля 1846 года доложил об исследовании Максвелла на заседании Эдинбургского королевского общества.

Перевод изложения этого доклада, напечатанного в Трудах общества, помещен ниже.

К описанию овалов и многофокусных овальных кривых

(с замечаниями профессора Форбса)

Мистер Клерк Максвелл остроумно предлагает распространить обычную теорию фокусов конических сечений на более сложные кривые следующим образом:

(1) По аналогии с эллипсом и гиперболой, у которых постоянны соответственно сумма и разность расстояний от произвольной точки кривой до двух точек, называемых фокусами, автор приходит к выводу, что в некоторой степени похожие кривые могут быть определены и построены из условия равенства постоянной величине суммы расстояния от произвольной точки кривой до одного фокуса и многократно повторенного расстояния от этой же точки до другого фокуса или же, в общем случае, m-кратное расстояние от одного фокуса$+n$-кратное расстояние до другого фокуса$=$const.

(2) Автор изобрел простой механический способ построения таких кривых с помощью булавок и нити, которая петлей обертывает две булавки, воткнутые в доску в точках f и F, как показано на рисунках 1 и 2. Затем автору пришла мысль распространить этот принцип на другие кривые, у которых сумма однократных или многократных расстояний от произвольной точки кривой до трех или более фокусов постоянная. И эти сложные кривые он предложил строить с помощью такого же простого механического приспособления, состоящего из нити заданной длины,

---

Перевод, подготовка к публикации и подстрочные примечания А. Митрофанова

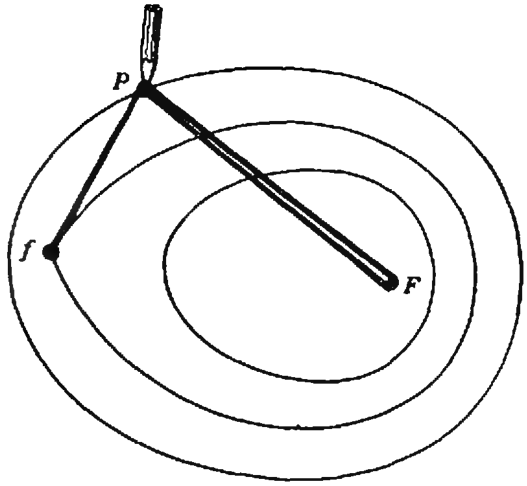


Рис. 1.

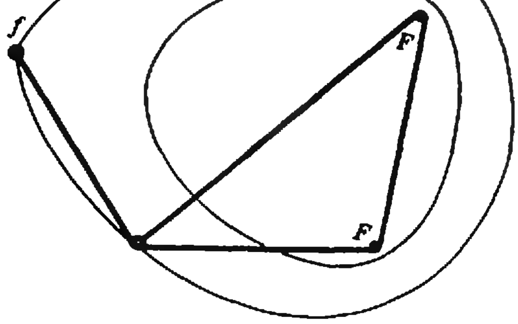


Рис. 3.

охватывающей три или более закрепленные булавки и ограничивающей подвижную точку P, которая при своем движении вычерчивает искомую кривую. Смотри рисунок 3. Далее, автор рассматривает кривые с двумя фокусами как частный случай класса кривых с многими фокусами, у которых два или более фокусов совпадают; фокус, где две нити встречаются, рассматривается как двойной фокус, если три нити встречаются, то это тройной фокус, и т. д.

Профессор Форбс заметил, что уравнение кривой с двумя фокусами легко приводится к виду

$$\sqrt{x^2+y^2} = a + b\sqrt{(x-c)^2+y^2}\quad,$$

т. е. такому же, как семейства кривых, известных как овалы Декарта первого рода *). Мистер Максвелл установил, что когда один из фокусов находится в бесконечности (или когда нить при построении кривой движется почти параллельно самой себе и ограничивается только максимальным размером стола), вычерчивается кривая, похожая на эллипс, — факт, натолкнувший профессора Форбса на вывод о тождественности построенного овала и декартового овала, так как последний, как хорошо известно, имеет такое же свойство. Но наиболее отчетливо идентичность овалов вытекает из принципа построения, т. е. из равенства

$$mr + nr' = \text{const}$$

(r и r' — расстояния от произвольной точки кривой до фокусов), на самом деле ясно выражающего оптическое свойство рассматриваемых поверхностей *), вытекающее из волновой теории, а именно: свет, испущенный из одного фокуса, расположенного в свободном пространстве, сходится точно в фокусе, находящемся в среде, и отношение $\frac{n}{m}$ равно коэффициенту преломления среды.

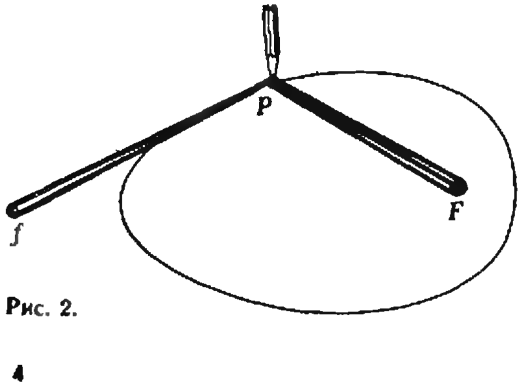


Рис. 2.

Назовем *степенью* (или *порядком*) фокуса количество отрезков нити, которые подходят к булавке, закрепленной в этом фокусе для построения кривой по схеме Максвелла. Если один из двух фокусов находится в бесконечности и если степени фокусов равны, то построенная кривая является параболой; если степень конечного фокуса больше, чем бесконечного, то кривая — эллипс; если же степень удаленного в бесконечность фокуса больше, то кривая — гипербола. Очевидно, первый случай соответствует отражению параллельных лучей в фокус, когда при отражении от поверхности скорость света не изменяется; второй случай — это преломление параллельных лучей в фокус тела, оптически более плотного, чем окружающее пространство; третий — это преломление параллельного пучка в оптически менее плотную среду.

---

*) Овалами в широком смысле слова называют плоские кривые яйцеобразной формы: сам термин «овал» происходит от латинского слова «*ovum*» (яйцо). Овалы Декарта первого и второго рода — некоторый класс овалов (см. «Квант», 1977, № 6, с. 43).

*) То есть поверхностей тел вращения овалов.

Декарт описал свои овалы в «Геометрии», предложив также способ их построения, но только в частном случае, и его метод оказался менее простым, чем метод мистера Максвелла. Иллюстрация оптических свойств овалов была дана Ньютоном с помощью синусов и Гюйгенсом (в его «Трактате о свете»). Но вряд ли кто подозревал, что существует такой легкий и изящный способ построения овалов с помощью булавок и нити в любом случае, когда порядки фокусов соизмеримы. Например, на рисунке 2 кривая с фокусами второго и третьего порядка задает форму сечения поверхности тела из стекла с коэффициентом преломления 1,5, подходящую для того, чтобы лучи, испущенные из точки f, собрались в точке F.

Что же касается сложных кривых с тремя и более фокусами, то мы не в состоянии на сегодняшний день дать им четкую физическую интерпретацию, но такой метод построения кривых, удовлетворяющих уравнению

$$mr+nr'+pr''+\ldots=\text{const},$$

в силу своей простоты представляет самостоятельный интерес. И если, следуя мистеру Максвеллу, считать овалы Декарта предельным случаем овальных кривых со многими фокусами, то мы имеем дальнейшее обобщение того же сорта, как у Монтюкла *), предлагавшего рассматривать конические сечения как частный случай овалов Декарта.

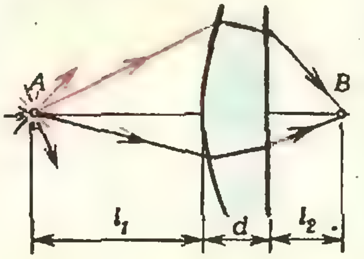
---

*) Жан-Этьен Монтюкла — французский ученый XVIII века, механик, автор многотомной «Истории точных наук».

Построим овал

Для тех, кого заинтересовала работа Дж. Максвелла (с. 3), мы здесь приводим несколько геометрических задач на построение овалов различными чертежными средствами. Для выполнения чертежей, кроме карандаша, циркуля и линейки, вам потребуется ровная доска, булавки или тонкие гвоздики, суровая нитка и тонкий длинный металлический прутик (можно прямой кусок жесткой проволоки) со свободно скользящим по нему колечком. А для решения задач — смекалка! (Впрочем, нетерпеливые любители черчения могут подглядеть решения на с. 63.)

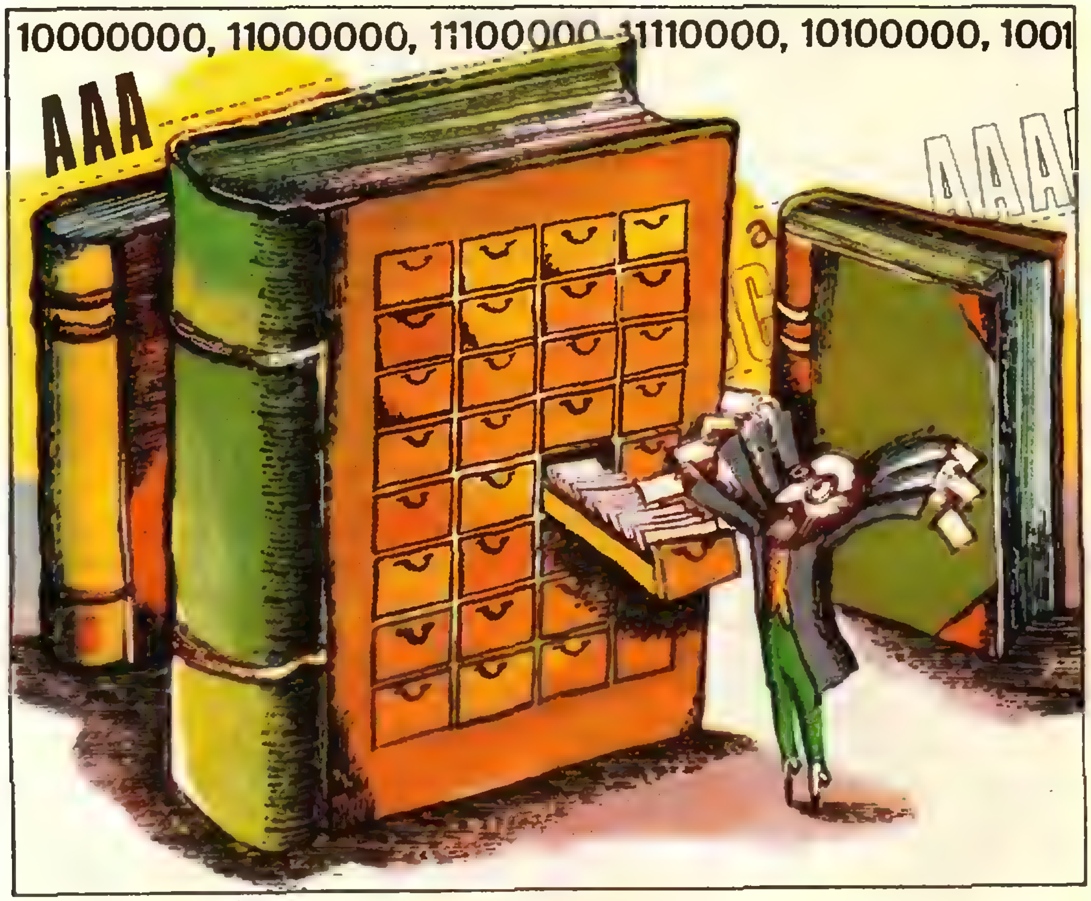
Для разминки начните с повторения конструкций Максвелла: прикрепите кнопками лист чертежной бумаги к доске, воткните в него две булавки, обмотайте нитку так, как показано на рисунке 2 на с. 4, и проведите овал Декарта первого рода типа $m:n=2:3$. (Если у вас нитка будет соскальзывать с карандаша, рекомендуем на его кончике проделать круговую лунку, по которой нить будет скользить не выскакивая.)



Задача 1. Укажите способ построения точек лежащих на овале Декарта первого рода, с помощью только циркуля и линейки. Проверьте его экспериментально, построив несколько точек на нарисованном методом Максвелла овале Декарта типа 2 : 3.

Задача 2. Укажите способ вычерчивания профиля плосковыпуклой линзы (см. рис.) толщины d (по оси), фокусирующей точечный источник A (расположенный по оси на расстоянии l_1 от выпуклой поверхности) в точку B (на расстоянии l_2 от плоской поверхности), если коэффициент преломления материала, из которого сделана линза, равен 1,5 или 2. (Здесь, кроме нитки и булавок, вам пригодится стержень с колечком!)

А. Митрофанов



М. Цаленко

Комбинаторные задачи информационного поиска

Научно-техническая революция, происходящая сейчас в промышленно развитых странах, тесно связана с появлением и развитием электронных вычислительных машин (ЭВМ). Современные ЭВМ могут выполнять миллионы арифметических действий в секунду. Однако ЭВМ вторгаются также в такие области человеческой деятельности, в которых нет больших и сложных вычислений и которые вроде бы далеки от математики. Поучительным примером служит библиотечное дело. В настоящей статье рассказывается, почему ЭВМ начали широко применяться в библиотеках и какие интересные и трудные математические задачи возникают при этом.

1. Что такое информационный поиск?

В крупных современных библиотеках хранятся миллионы книг, журналов, газет и других печатных материалов. Для того чтобы не запутаться в этом огромном собрании литературы, сотрудники библиотек создают справочную систему из каталогов с аннотированными карточками.

Теперь представим себе читателя, который пришел в библиотеку, чтобы прочесть какую-нибудь популярную книгу о решении уравнений в радикалах. Он может знать, что этой трудной задачей занимались многие математики и что ее решение связано с именами Абеля и Галуа, однако его математическое образование недостаточно для чтения специальной литературы. Таким образом, появление нашего читателя в библиотеке приводит к так называемому *информационному запросу:* «НАЙТИ ПОПУЛЯРНУЮ ЛИТЕРАТУРУ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ», и прежде чем читатель удовлетворит свою любознательность, он должен решить задачу информационного поиска: среди всех хранящихся в библиотеке книг отыскать ту, которая в наибольшей степени его удовлетворит. Здесь на помощь ему приходит система каталогов. В тематическом каталоге он найдет раздел, содержащий перечень книг по математике, а внутри него — часть, содержащую перечисление книг по алгебре. И вот среди каталожных карточек этой части нужно выбрать те, которые, указывают на отыскиваемую литературу.

Теперь проведем несколько простых расчетов. Допустим, что на ознакомление с карточкой, расходуется в среднем всего 20 секунд. Это значит, что читатель работает очень быстро: считается, что на выполнение одной арифметической операции человек тратит порядка 10 секунд. Если читатель должен просмотреть 200 карточек, то он потратит около 67 минут только на отбор интересующей его литературы. Этот отбор составляет непроизводительную часть общего процесса поиска интересующих читателя сведений. Сам процесс называют *информационным поиском;* проведенный расчет показывает, что при информационном поиске с помощью каталогов значительная часть времени тратится непродуктивно. Так как читальные залы крупных библиотек в течение одного дня посещают сотни людей, а их информационные запросы бывают гораздо более сложными, чем в приведенном выше примере, непроизводительные затраты времени при информационном поиске выражаются сотнями и тысячами часов.

Чтобы проиллюстрировать сложность информационного поиска, приведем еще одну цифру. Сейчас во всем мире издается свыше 750 журналов и других периодических изданий, посвященных только вычислительной технике. Это значит, что в течение года на различных языках публикуются десятки тысяч статей, занимающих сотни тысяч печатных страниц, которые относятся только к одной области человеческой деятельности. Однако эта область представляет интерес для специалистов самых различных специальностей: инженеров-конструкторов, физиков, химиков, математиков, социологов, философов и многих других. Разобраться в нарастающем потоке литературы, найти необходимые сведения, использовать их в своей работе и не повторять уже выполненные работы очень трудно. Системы каталогов оказывается недостаточно, и во многих странах мира создаются специальные институты информации.

2. ЭВМ и информационный поиск

Замечательной особенностью ЭВМ является ее умение «читать» и сравнивать слова, устанавливать, одинаковы они или различны. Дело в том, что для написания любого слова русского языка нужно уметь изображать всего 33 буквы. С другой стороны, ЭВМ легко распознать последовательности из единиц и нулей. Рассмотрим, как это принято, во многих современных вычислительных машинах, все последовательности из единиц и нулей, имеющие ровно восемь членов. Например, сюда войдут такие последовательности:

00000000, 01010101, 11110000

(для краткости между членами последовательностей запятая не ставится).

Так как в каждой последовательности ровно восемь членов, а любой член равен нулю или единице, общее число рассматриваемых последовательностей равно $2^8=256$. Условимся вместо первых букв *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* русского алфавита писать соответственно последовательности

10000000, 11000000, 11100000,
11110000, 10100000, 10010000

Подчеркнем, что каждую последовательность мы рассматриваем как один, а не восемь символов. Теперь с помощью новой символики можно записывать слова так, что их может «узнавать» ЭВМ. Например, слово *беда* будет выглядеть так:

1100000 10010000 10100000 10000000

Разумеется, подобный способ записи неудобен для человека, но он позволяет ЭВМ «читать». При этом машина может читать тексты на многих языках, поскольку с помощью 256 последовательностей она может запомнить не только русские буквы, но и цифры, латинские буквы и многие специальные знаки, например знаки арифметических действий.

Наученная человеком читать, машина немедленно обгоняет его по скорости чтения: если человеку нужно 67 минут на прочтение 200 каталожных карточек, то ЭВМ справляется с этой работой за несколько секунд. При чтении машина может сравнивать два текста, устанавливать наличие в них общих слов или выражений, определять частоту появления отдельных слов и т. д.

Однако естественные языки (русский, английский, немецкий или любой другой) машине «понимать» очень трудно: каждую мысль на них можно выразить многими способами. Поэтому лингвисты разрабатывают искусственные языки, называемые *информационно-поисковыми*, которые свободны от этого недостатка.

Основной частью информационно-поискового языка является совокупность понятий, терминов, словосочетаний, которые постоянно используются в конкретной предметной области — в математике, химии, биологии и т. д. Составляя аннотацию книги или реферат научной статьи, можно вместо предложений естественного языка дать перечисление тех терминов, которые в наибольшей степени отражают содержание книги или статьи. То же самое можно сделать и с информационными запросами читателей. Например, в серии «Популярные лекции по математике» была выпущена брошюра А. Г. Куроша «Алгебраические уравнения высших степеней». Ее аннотация могла бы быть записана следующим образом:

> *Комплексные числа, решение в радикалах уравнений второй и третьей степени, теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени, приближенное вычисление корней, группа, кольцо, поле.*

Аннотация статьи Б. Н. Делоне «Алгебра (теория алгебраических уравнений)», помещенной в первом томе коллективного трехтомного труда «Математика, ее содержание, методы и значение», может выглядеть так:

> *Решение в радикалах уравнений низших степеней, формула Кардано, теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени, теория Галуа, расположение корней уравнения на комплексной плоскости, основная теорема алгебры, приближенное вычисление корней.*

Вспомним теперь о читателе, желавшем получить литературу о решении уравнений в радикалах. Его запрос можно описать так:

> *Решение в радикалах уравнений низших степеней, теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени.*

Сравнение запроса с двумя приведенными выше аннотациями показывает, что почти все встречающиеся в нем словосочетания входят в аннотации. Поэтому с большой вероятностью можно предположить, что брошюра А. Г. Куроша и статья Б. Н. Делоне содержат интересующие читателя сведения.

Теперь становится ясным, какую часть информационного поиска можно передать вычислительной машине: машина должна проверять, содержатся ли термины и словосочетания запроса в аннотациях книг или статей, хранящихся в библиотеке. Термины, понятия, словосочетания информационно-поискового языка называются *ключевыми словами*.

3. ЭВМ нужно использовать эффективно

Теперь рассмотрим несколько подробнее выполнение операций в ЭВМ. В каждой современной вычислительной машине имеются четыре главные компоненты: центральный процессор, оперативная память, внешняя память и устройство ввода — вывода. Центральный процессор управляет работой всей системы, и в нем совершаются арифметические и логические операции, причем на отдельную операцию расходуются миллионные доли секунды. Данные (числа, слова), с которыми оперирует процессор, находятся в оперативной памяти. Она имеет сравнительно небольшой объем, поскольку ее стоимость очень высока.

Напомним, что на запись отдельного символа (буквы, цифры, специального знака) уходит восьмичленная последовательность единиц и нулей. В оперативной памяти современных ЭВМ обычно можно записать 256000 или 512000 таких последовательностей, или знаков. Много это или мало? Как показывает практика, библиографическая карточка вместе с аннотацией содержит 1000—1500 знаков. Следовательно, в оперативной памяти можно в лучшем случае разместить около 500 карточек. Ясно, что это очень мало.

Остальные карточки помещаются во внешней памяти, объем которой в сотни раз больше объема оперативной памяти. Однако на передачу данных уходит времени в тысячу раз больше, чем на работу центрального процессора, который во время передачи попросту простаивает. Ясно, что передача данных непосредственного отношения к информационному поиску не имеет и является непроизводительной тратой времени. Таким образом, возникает задача об уменьшении числа обращений к внешней памяти. Существуют различные подходы к ее решению. Один из них приводит к красивой и трудной математической задаче, о которой и будет рассказано в заключение.

4. Как уменьшить «вес» множества слов?

Пусть A — какое-то множество из n элементов. Элементы будем обозначать малыми латинскими буквами a, b, c, ... Произвольное подмножество элементов из A будем называть *словом* и вместо традиционной записи $\{a, b, c, d\}$ будем писать просто $abcd$; разумеется, с одинаковым успехом можно написать $bdac$ или $dcab$ и т. д. Слово, в котором нет букв, т. е. пустое слово, рассматриваться не будет. Поэтому имеется всего 2^n-1 слов.

Для связи с предыдущими рассмотрениями укажем, что буквами мы стали обозначать ключевые слова информационно-поискового языка, т. е. термины, понятия, словосочетания. Их число может быть очень большим, например порядка 10000. Набор ключевых слов может быть аннотацией или информационным запросом.

Предположим, что некоторое множество слов M размещено во внешней памяти ЭВМ и что необходимо найти все слова из M, в которых встречаются буквы a, b и c. Чтобы справиться с этой задачей, нужно поочередно «прочесть» все слова из M, предварительно переписав их в оперативную память. Если M невелико, то можно сразу все множество M переместить туда. В общем же случае такое перемещение осуществляется порциями, размер которых заранее определен. Следовательно, число обращений к внешней памяти определяется размером M и размером передаваемой порции. Это число можно было бы уменьшить, если бы при помещении слов во внешнюю память слова с буквами a, b и c записывались отдельно. Однако для задачи: найти все слова с буквами b, c и d — проделанная работа бесполезна.

Тем не менее предварительная сортировка слов при их записи во внешнюю память оказывается полезной, если иметь в виду не отдельный запрос, а все возможные запросы. Разобьем множество M на части и поместим каждую часть в отдельный конверт, а на конверте перечислим все буквы, встретившиеся в положенных в конверт словах. Теперь при поиске слов с буквами a, b и c сначала отбираются конверты, на которых надписаны эти буквы, а потом прочитываются слова из этих конвертов. Слова по конвертам следует разместить таким образом, чтобы общее число «вскрытий» конвертов для всех возможных запросов оказалось наименьшим.

Проиллюстрируем эту идею на простом примере. Пусть множество M состоит всего из трех слов ab, ac и bc, а запросы, которые мы будем делать, должны быть непустыми подмножествами множества $\{a, b, c\}$. Тогда общее число запросов равно семи. Поместим сначала каждое слово в отдельный конверт. Тогда конверт со словом ab откроется три раза: при поиске слов с a, слов с b и слов с a и b. Так как все конверты равноправны, то общее число вскрытий равно 9. Теперь поместим слова ab и ac в один конверт, а слово bc в другой. В этом случае первый конверт придется открывать семь раз, а второй по-прежнему три раза, и общее число вскрытий равно 10.

Наконец, поместим все слова в один конверт. Тогда общее число вскрытий равно 7: при каждом запросе надо открыть конверт, а всего запросов 7. Таким образом, в нашем примере лучше всего держать M в одном конверте. (Изменится ли результат, если к M добавить слова a и abc или удалить из M слово bc?)

Теперь мы готовы к рассмотрению общей задачи. Пусть M — произвольное множество слов. Число k различных букв, встречающихся в словах из M, называется *уровнем* множества M и обозначается $l(M)$. Например, если

$$M=\{abc, bcd, cde, dea, eab\}, \qquad (1)$$

то уровень M равен 5.

Весом множества M называется число $2^{l(M)}-1$. В приведенном выше примере вес M равен 31. Ясно, что вес M равен числу слов, которые можно составить из $l(M)$ букв.

Задачу, которая возникает при попытках уменьшить число обращений к внешней памяти ЭВМ, можно сформулировать так: для любого множества слов M указать метод его разбиения на такие непересекающиеся подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_k$, что сумма весов

$$P=(2^{l(S_1)}-1)+\ldots+(2^{l(S_k)}-1)=\sum_{i=1}^{k}(2^{l(S_i)}-1) \qquad (2)$$

является наименьшей.

Разумеется, если M фиксировано, то теоретически можно перебрать все его разбиения на непересекающиеся подмножества, для каждого разбиения подсчитать сумму весов и выбрать разбиение с наименьшей суммой. Однако при большом количестве слов такой перебор становится практически неосуществимым (попробуйте оценить число возможных разбиений!). Поэтому задача состоит в том, чтобы указать метод нахождения искомого разбиения, во много раз сокращающий перебор всех вариантов.

Сразу же отметим, что удовлетворительного решения задачи пока найти не удалось, хотя общий подход к решению уже определился. Прежде всего, легко сообразить, что в искомом разбиении не могут появляться любые подмножества множества M, а только подмножества S, для которых наименьшее значение суммы (2) равно весу S. Такие подмножества будем называть *блоками*. Таким образом, блок — это такое множество слов, для которого искомое разбиение состоит из самого этого множества.

Блоков внутри множества M оказывается довольно много, но можно показать, что отыскивать надо сначала так называемые минимальные блоки: блок S называется *минимальным*, если он не содержит блоков того же уровня, что и S. Ниже будет показано, что множество (1) является минимальным блоком.

Разыскание минимальных блоков связано с трудоемким перебором вариантов и конкретными расчетами, однако эта работа должна быть проделана только один раз, а затем ее результаты можно использовать для любых множеств M. Чтобы понять причину этого явления, помимо множества (1), рассмотрим также множество

$$M_1=\{xyz, yzu, zuv, uvx, vxy\}.$$

Эти множества различны, однако при замене букв a, b, c, d, e на буквы x, y, z, u, v соответственно множество M переходит в множество M_1. Зная, что M — блок, можно сразу сказать, что M_1 — блок. Поэтому естественно считать, что M и M_1 являются раз-

a	*b*			
a				
a				
	b			
	b			

Табл. 1а.

a	*b*	*c*		
a		*c*		
a				
	b	*c*		
	b			

Табл. 1б.

a	*b*	*c*		
a		*c*	*d*	
a			*d*	*e*
	b	*c*		*e*
	b		*d*	*e*

Табл. 1в.

ными экземплярами одного и того же минимального блока. В дальнейшем такие блоки для нас равноправны.

Докажем теперь одну из теорем, дающих представление об устройстве минимальных блоков.

Теорема. Минимальные блоки уровня 5, состоящие из трехбуквенных слов, с точностью до замены букв исчерпываются следующим списком:

$S_1=\{abc,\ bcd,\ cde,\ dea,\ eab\}$;
$S_2=\{abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade\}$;
$S_3=\{abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ bde\}$.

Доказательство. Каждое трехбуквенное слово имеет вес $2^3-1=7$. Вес любого множества уровня 5 равен 31. Поэтому в любой блок уровня 5 входит не менее пяти слов: в противном случае сумма весов отдельных слов была бы меньше 31.

Далее, в любом блоке уровня 5 каждая буква должна встречаться не менее трех раз. В самом деле, пусть буква *a* встречается менее трех раз. Тогда вес множества слов, в которых нет *a*, не превосходит 15, а сумма весов слов с *a* не превосходит 14. Значит, общая сумма весов меньше 29, что противоречит определению блока.

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1. Минимальный блок *S* содержит пять слов. Так как число всех букв в *S* равно 15, в силу предыдущего замечания каждая буква встречается ровно три раза. Введем для наглядности рассуждений квадратную таблицу размера 5×5, в первом столбце которой будет записываться буква *a*, во втором — *b* и т. д. (см. таблицы 1а—1в).

Предположим, что какая-то пара букв, например *a* и *b*, встречается только один раз. Тогда возникает ситуация, изображенная на таблице 1а. Обозначим через *c* ту букву, которая входит в первое слово. Эта буква обязана встретиться еще по разу с *a* и *b*: если бы она еще два раза встретилась с *a*, то в двух последних строках таблицы стояло бы одно и то же слово, что невозможно. Поэтому от таблицы 1а мы переходим к таблице 1б.

Ясно, что в третью и пятую строки таблицы нужно поставить слова *ade* и *bde*. Но тогда во вторую строку следует поместить *d* (или *e*), а в четвертую — *e* (или *d*); ввиду симметрии между *a* и *b* на таблице 1б обе возможности равноправны. Таблица 1в дает возможного кандидата в минимальный блок. Построенное множество слов *S* действительно является минимальным блоком, поскольку любое его подмножество из трех слов имеет вес 31. Оно переходит в S_1, если *d* заменить на *e*, *e* на *a* и *a* на *d*.

Никакая пара букв не может встретиться три раза, так как не хватит букв для пятого слова; поэтому остается предположить, что *каждая* пара букв встречается дважды. Однако и этот вариант невозможен: буквы *a*, *b* и *c* можно разместить только так, как показано на таблице 2, и для последнего слова недостаточно букв.

Случай 2. В минимальном блоке *S* шесть слов. Тогда в словах

a	*b*	*c*		
a	*b*			
a		*c*		
	b	*c*		

Табл. 2.

из S встречается всего 18 букв. Число 18 можно следующими способами представить в виде суммы пяти слагаемых, каждое из которых равно 3, 4, 5 или 6:

а) $18=6+3+3+3+3$;
б) $18=5+4+3+3+3$;
в) $18=4+4+4+3+3$.

При способе а) одна буква, например a, встречается шесть раз. Поэтому S совпадает с S_2; предлагаем читателю самостоятельно доказать, что S_2 — минимальный блок.

Перейдем к способу б). Пусть для определенности пять раз встречается буква a, четыре раза—буква b. Тогда сразу получаем таблицу 3а. В четвертой и пятой строках какая-то из букв: c, d или e — появляется дважды; обозначим ее через c. В шестой строке может стоять только слово bde, и в результате мы приходим к таблице 3б.

a	*b*	*c*		
a	*b*		*d*	
a	*b*			*e*
a				
a				
	b			

Табл. 3а.

a	*b*	*c*		
a	*b*		*d*	
a	*b*			*e*
a		*c*	*d*	
a		*c*		*e*
	b		*d*	*e*

Табл. 3б.

Для доказательства того, что построенное множество слов S_3 является блоком, достаточно заметить, что в S любое подмножество уровня 4 содержит не больше трех слов, а остальные слова образуют подмножество уровня 5 и потому сумма весов не может быть меньше $36=15+7\times3$, а вес S равен 31. Минимальность следует из того, что, какое бы слово ни удалить, в оставшихся словах буква a встречается не менее четырех раз, чего не может быть в блоках уровня 5 из пяти слов в силу первого случая.

Переходим к способу в). Пусть буквы a, b и c встречаются по четыре раза. Тогда либо какая-то пара этих букв встречается три раза, либо любая пара встречается ровно два раза. В соответствии с этим мы приходим к таблицам 4а и 4б (с точностью до переименования букв).

a	*b*	*c*		
a	*b*		*d*	
a	*b*			*e*
a		*c*	*d*	
	b	*c*		*e*
		c	*d*	*e*

Табл. 4а.

a	*b*		*d*	
a	*b*			*e*
a		*c*	*d*	
a		*c*		*e*
	b	*c*	*d*	
	b	*c*		*e*

Табл. 4б.

Первое построенное множество является блоком, но неминимальным: после удаления из него слова abc получится блок типа S_1. Второе множество вообще не является блоком, так как оно является объединением своих подмножеств $\{abd, acd, bcd\}$ и $\{abe, ace, bce\}$ уровня 4, и для этого разбиения сумма весов равна $30<31$.

Теперь остается доказать, что других минимальных блоков уровня 5 из трехбуквенных слов не существует. Если в множестве S девять или десять слов, то хотя бы одна буква встречается шесть раз, и потому в S содержится блок типа S_2. Значит, S — всегда неминимальный блок.

Если в S семь или восемь слов и ни одна буква не встречается шесть раз, то всегда найдется такая пара букв, скажем a и b, что a встречается пять раз, b — не менее четырех раз, а пара a, b встречается три раза (проверьте!). Поэтому можно считать (убедитесь в этом!), что в S входят следующие пять слов: abc, abd, abe, acd, ace. К ним надо добавить не менее двух слов из следующих четырех: bcd, bce, bde, cde. Если добавится одно из слов bde или cde, то в S попадет минимальный блок типа S_3. Если же добавятся слова bcd и bce, то в словах из S вообще не встретится пара букв d и e, чего не может быть в блоке (см. ниже задачу 3).

Задачи

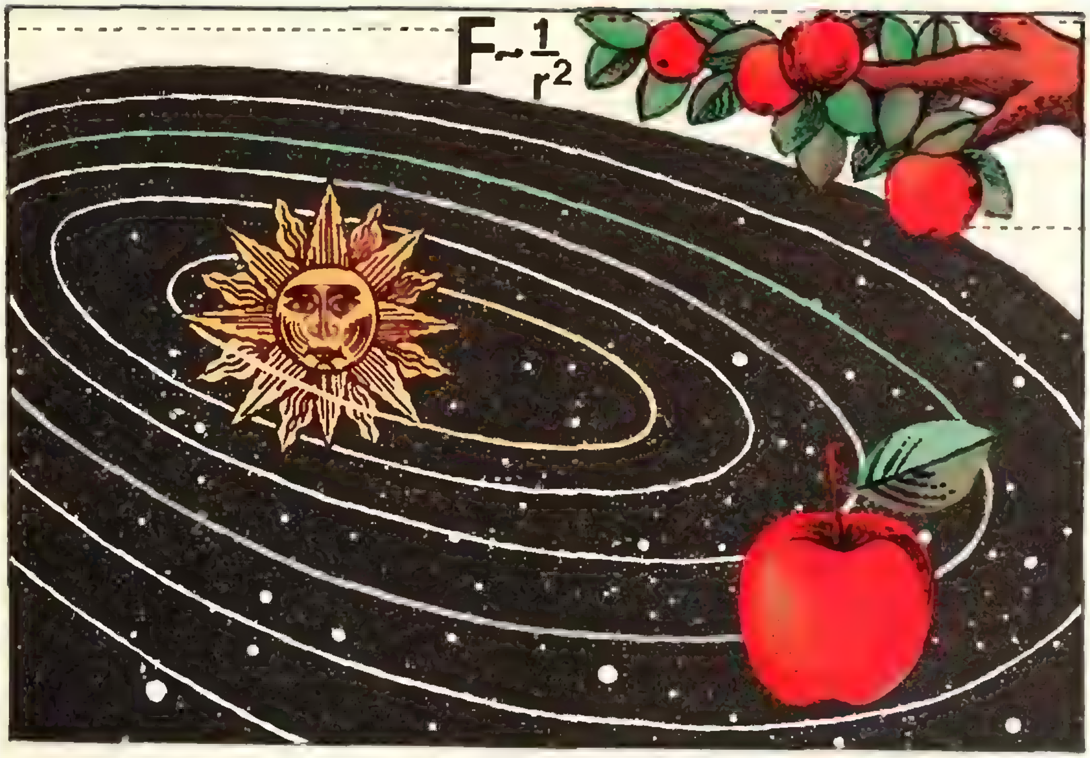
1. Описать все минимальные блоки уровня 5 из двухбуквенных слов.

2. Множество S' получено из слов множества S приписыванием к ним новой буквы. Доказать, что если S — минимальный блок, то и S' — минимальный блок.

3. Если в словах блока S встречаются буквы a и b, то в S найдется слово, содержащее a и b.

4**. Описать все минимальные блоки уровней 6 и 7 из трехбуквенных слов

5*. Доказать, что не существует блоков уровня 8 из трехбуквенных слов.



Я. Смородинский

Планеты движутся по эллипсам

«Каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце».

Этот закон природы был открыт Кеплером в XVI веке. Как «первый закон Кеплера» он вошел во все учебники, стал привычным и «само собой разумеющимся». И для нас нет ничего странного в поведении планет.

А ведь на самом деле этот факт удивителен. Почему по эллипсу? Конечно, по какой-то кривой планета должна двигаться. Но почему она движется по замкнутой кривой? Почему планета, сделав полный оборот вокруг Солнца, возвращается в ту же точку? Как она эту точку запоминает? Почему движение планеты в поле тяжести Солнца оказывается периодическим? Это свойство весьма необычно. Если бы сила притяжения планеты к Солнцу не была обратно пропорциональна квадрату расстояния, а изменялась бы, например, по закону $1/r^3$ или даже $1/r^{2,01}$, то орбита планеты не была бы замкнутой.

Отсюда, между прочим, следует, что в Солнечной системе планеты, вообще говоря, не могут двигаться по эллипсу. Притяжение других планет, и особенно такого гиганта, как Юпитер, должно как-то сказываться на движении планеты. И оно сказывается: сделав полный оборот вокруг Солнца, планета не возвращается точно на старое место, а «проскакивает» его. Именно этим объясняется смещение перигелия Меркурия в направлении его движения примерно на 1,2″ за один оборот (на 5″ за земной год). (К счастью, Кеплер об этом не знал — его наблюдения Марса, для которого он строил свою теорию, были недостаточно точны, чтобы заметить столь маленькую «прецессию».)

Нелегко было Кеплеру в XVI веке освободиться от старого убеждения, что небесные тела — самые «идеальные» тела в нашем мире — должны и двигаться по самым идеальным кривым, то есть по окружностям. Даже Коперник, отбросивший представление о покоящейся Земле и приписавший ей такое же круговое движение, какое совершают другие планеты, не смог отказаться от идеальных кривых и использовал для точного описания движения планет систему катящихся окружностей.

Но ни Коперник, ни его предшественники не проводили тщательного сравнения своих моделей с наблюдениями. А небольшие расхождения их не смущали. Только Кеплер поставил перед собой дерзкую по тому времени задачу: описать движение планет точно, не примиряясь ни с какими расхождениями наблюдений с теорией. Решить такую задачу ему помогло сотрудничество с датским астрономом Тихо Браге, который, изо дня в день наблюдая в течение почти 25 лет положение планет, собрал необычайно полный по тому времени материал *).

Кеплер задумался о том, почему планеты искривляют свой путь вокруг Солнца. Он догадался, что Солнце действует на планеты, несмотря на то, что планеты находятся на больших расстояниях от него. Но установить правильную зависимость силы этого действия на расстоянии Кеплер не смог — он думал, что эта сила обратно пропорциональна расстоянию. О выводе формулы орбиты Кеплер не мог даже подумать — у него не было уравнений движения.

Только спустя более чем полвека Ньютон в своей замечательной книге «Начала натуральной философии» (так тогда называли физику) показал, как вывести все законы движения планеты из уравнений **). Вывод Ньютона лежит в основе небесной механики и в наши дни. Только сейчас для вывода используют дифференциальные уравнения, а Ньютон в своем сочинении пользовался лишь простыми геометрическими теоремами. Вывод Ньютона в принципе вполне элементарен, но понять его не очень легко. Может быть, поэтому сложилось убеждение, что для вывода первого закона Кеплера элементарных средств не хватает. На самом деле это неверно. Если использовать закон сохранения энергии (который Ньютону был еще не известен) и закон сохранения момента импульса (углового момента), то вывод закона Кеплера можно сильно упростить. Это мы и сделаем.

Что же нам нужно доказать? Во-первых, нам нужно доказать, что существует некий вектор, связанный с орбитой планеты, который остается при движении планеты постоянным. Он определит нам неподвижную большую полуось эллипса. Во-вторых, нам нужно доказать, что сумма расстояний от любой точки орбиты до двух заданных точек (фокусов эллипса) остается постоянной. Если воспользоваться обозначениями, введенными на рисунке 1, то наша задача такова: нужно доказать, что разность двух переменных векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ равна постоянному вектору $2\vec{c}$, а сумма r_1+r длин векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ постоянна и равна $2a$.

Чем мы можем воспользоваться при доказательстве? Это мы уже сказали: законами сохранения энергии и момента импульса. И еще уравнением движения Ньютона.

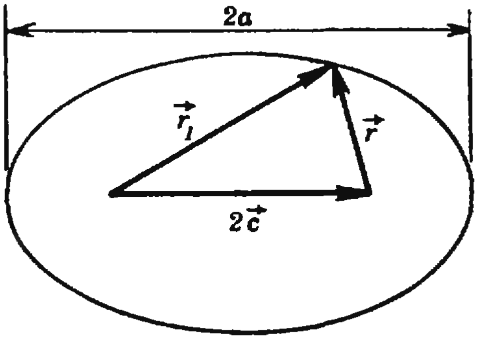


Рис. 1. $\vec{r}_1-\vec{r}=2\vec{c}$, $r_1+r=2a$.

---

*) Тихо Браге был последним великим астрономом, у которого не было телескопа. Все наблюдения он проводил, просто смотря на небо и измеряя углы с помощью астролябии.

**) Ньютон решил обратную задачу: какова должна быть зависимость действующей на планету силы притяжения к Солнцу от расстояния между планетой и Солнцем чтобы планета двигалась по эллипсу? Он показал, что сила должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Закон сохранения энергии

При движении планеты ее полная энергия E остается постоянной:

$$E=\text{const}.$$

Эта энергия равна сумме кинетической энергии $K=\frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии планеты в поле силы тяжести Солнца

$$П=-\gamma\frac{mM}{r}=-\frac{\alpha m}{r} \qquad (\alpha=\gamma M)^{*)}$$

(m — масса планеты, M — масса Солнца, r — расстояние между ними и γ — гравитационная постоянная). Итак,

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{\alpha m}{r}. \qquad (1)$$

Для удобства вместо постоянной E введем другую постоянную v_0 такую, что

$$E=-\frac{mv_0^2}{2}.$$

Мы поставили в этой формуле знак минус, потому что полная энергия планеты отрицательна, а $v_0^2>0$.

Формулу (1) мы теперь можем записать так, что масса «выпадет» из уравнения:

$$-\frac{v_0^2}{2}=\frac{v^2}{2}-\frac{\alpha}{r},$$

или

$$\frac{v^2}{2}+\frac{v_0^2}{2}=\frac{\alpha}{r}. \qquad (1')$$

Разделив обе части этого равенства на $v_0^2/2r$, получим

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 r+r=\frac{2\alpha}{v_0^2}.$$

Постоянную $2\alpha/v_0^2$ обозначим через $2a$, а отношение v/v_0 — буквой u.

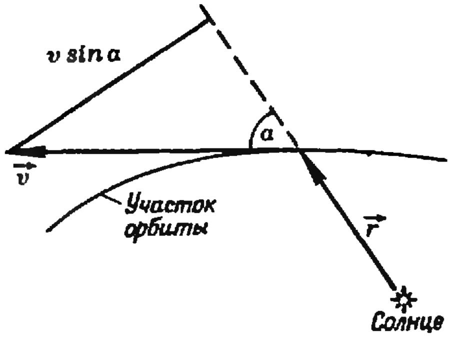


Рис. 2.

Получим простую формулу

$$\boxed{ru^2+r=2a}. \qquad (*)$$

В таком виде закон сохранения энергии очень удобен для наших целей.

Момент импульса

При движении планеты остается постоянной еще одна величина — момент импульса:

$$L=mvr\sin\alpha,$$

где α — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ планеты и вектором $\vec{v}$ ее скорости (о моменте импульса рассказано в Приложении).

Нам удобнее будет вместо L ввести другую величину, которая тоже остается постоянной,—

$$L_0=L/m=rv\sin\alpha.$$

Из рисунка 2 видно, что $v\sin\alpha$ — это проекция вектора $\vec{v}$ на направление, перпендикулярное радиус-вектору $\vec{r}$. Это означает, что величина $(v\sin\alpha)/r$ равна угловой скорости ω планеты в тот момент, когда ее положение определяется радиус-вектором $\vec{r}$. Таким образом,

$$L_0=\omega r^2. \qquad (2)$$

Уравнение движения

Согласно второму закону Ньютона под действием силы притяжения к Солнцу $F=-\gamma\frac{mM}{r^2}$ планета движется с ускорением

$$w=-\gamma\frac{M}{r^2}=-\frac{a}{r^2}.$$

---

*) Напомним, что потенциальная энергия принимается равной нулю при бесконечно большом r. Поэтому в случае сил притяжения потенциальная энергия оказывается отрицательной. По абсолютной величине потенциальная энергия больше кинетической — планета не может «оторваться» от Солнца.

Это уравнение движения планеты правильнее записывать в векторном виде. Чтобы сделать это, введем вектор $\vec{n}$ такой, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Эта запись означает, что длина вектора $\vec{n}$ равна единице, а направлен этот вектор по радиус-вектору $\vec{r}$. Таким образом, в векторном виде уравнение движения планеты можно записать так:

$$\vec{w} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{n}. \qquad (3)$$

Вектор Лапласа

Теперь мы можем приступить непосредственно к нашей задаче. Попытаемся найти вектор, связанный с орбитой планеты, который при движении планеты остается постоянным и которому мы можем сопоставить вектор $2\vec{c}$.

При движении по круговой орбите угловая скорость постоянна и векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ все время остаются взаимно перпендикулярными. При движении же по некруговой орбите (например, по эллипсу) угловая скорость изменяется со временем и угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$ не остается постоянным.

Найдем, по какому закону изменяется вектор $\vec{n}$. Для определенности будем считать, что движение по орбите происходит против часовой стрелки.

Пусть за малый промежуток времени Δt планета переместилась по орбите из точки B в точку C (рис. 3) так, что радиус-вектор ее $\vec{r}$ повернулся на угол $\omega\,\Delta t$ (время Δt мало настолько, что угловую скорость ω можно считать неизменной). Вектор $\vec{n}$ в результате поворота перейдет в новый вектор $\vec{n}+\Delta\vec{n}$, но длина этого нового вектора, разумеется, равна единице. Изменение $\Delta\vec{n}$ вектора $\vec{n}$ найти нетрудно: $\Delta n = \omega\,\Delta t\,n$, а направление $\Delta\vec{n}$ перпендикулярно $\vec{n}$. Так что мы можем записать $\Delta\vec{n}$ так:

$$\Delta\vec{n} = \omega\,\Delta t\,\vec{n}',$$

где через $\vec{n}'$ мы обозначили единичный вектор, направление которого перпендикулярно $\vec{n}$. Подставим в эту формулу $\omega = L_0/r^2$ (см. (2)):

$$\Delta\vec{n} = \frac{L_0}{r^2}\,\Delta t\vec{n}'. \qquad (4)$$

(Сравним изменение вектора $\Delta\vec{n}$ с изменением вектора скорости

$$\Delta\vec{v} = -\frac{\alpha}{r^2}\,\Delta t\vec{n} \qquad (5)$$

(это выражение мы получили из (3), учтя, что $\vec{w} = \Delta\vec{v}/\Delta t$). И Δn, и Δv пропорциональны $1/r^2$; направления же $\Delta\vec{n}$ и $\Delta\vec{v}$ взаимно перпендикулярны.

В этом месте мы применим простую хитрость: повернем векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ против часовой стрелки на 90°. Тогда вектор $\vec{n}$ перейдет в вектор $\vec{n}'$, а вектор $\vec{v}$ перейдет в новый вектор $\vec{v}'$, равный по длине v/n и перпендикулярный $\vec{v}$. Векторы $\vec{v}'$ и $\vec{n}'$ связаны между собой так же, как векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$. «Повернутое» уравнение (5) мы можем записать так:

$$\Delta\vec{v}' = -\frac{\alpha}{r^2}\,\Delta t\vec{n}'. \qquad (6)$$

Дальше будем рассматривать формулы (4) и (6). Из них следует, что

$$-L_0\Delta\vec{v}' - \alpha\Delta\vec{n} = \vec{0}.$$

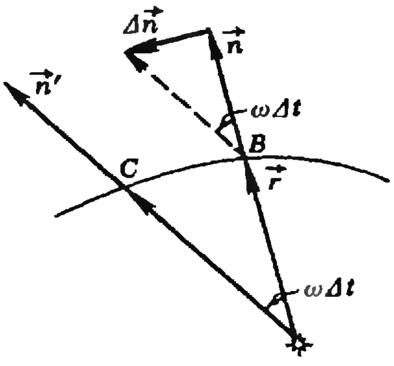


Рис. 3.

Это выражение, очевидно, можно записать так:

$$\Delta(-L_0\vec{v}\,'-\alpha\vec{n})=\vec{0}.$$

Но это означает, что вектор

$$\vec{A}=-L_0\vec{v}\,'-\alpha\vec{n} \qquad (7)$$

при движении планеты остается постоянным. Как мы увидим дальше, это и есть тот вектор, который мы ищем.

Преобразуем формулу (7). Прежде всего избавимся от вектора $\vec{v}\,'$. Сделаем мы это с помощью рисунка 4. Как видно из рисунка,

$$\vec{v}\,'=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\vec{v}-\frac{v}{\sin\alpha}\vec{n}\,.$$

Учтывая, что $\sin\alpha=L_0/rv$, а $\cos\alpha=$ $=\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{rv}$, выражение для $\vec{v}\,'$ мы можем записать так:

$$\vec{v}\,'=\frac{1}{L_0}[(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}-v^2\vec{r}]$$

(поскольку $r\vec{n}=\vec{r}$). Подставляя это $\vec{v}\,'$ в формулу (7), получим:

$$\vec{A}=v^2\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}-\alpha\vec{r}/r. \qquad (8)$$

Этот вектор в механике называют вектором Лапласа.

Выражение (8) мы еще преобразуем. Из формулы (1′) для закона сохранения энергии находим:

$$\frac{\alpha}{r}=\frac{v^2+v_0^2}{2}.$$

Подставим это выражение в (8), разделим обе стороны на $v_0^2/2$, перейдем к новой переменной $u=v/v_0$ и обозначим вектор $2\vec{A}/v_0^2$ через $2\vec{c}$:

$$2\vec{c}=u^2\vec{r}-2(\vec{r}\cdot\vec{u})\vec{u}-\vec{r}$$

(здесь $\vec{u}=\vec{v}/v_0$). Если ввести и еще одно обозначение:

$$\vec{r}_1=u^2\vec{r}-2(\vec{r}\cdot\vec{u})\vec{u},$$

то последнее равенство запишется совсем просто:

$$\boxed{\vec{r}_1-\vec{r}=2\vec{c}}\,. \qquad (**)$$

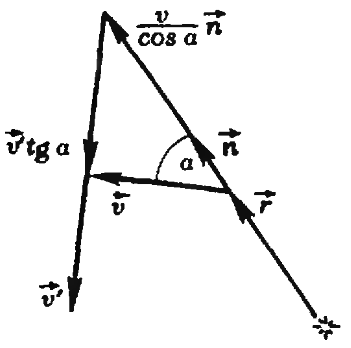


Рис. 4.

Уравнение эллипса

Если читателю надоели преобразования, то ему будет приятно узнать, что задача уже решена. Траектория планеты заключена в двух формулах в рамках: в формуле (*), которую мы получили из закона сохранения энергии,

$$u^2r+r=2a$$

и в формуле (**). .

Для того чтобы убедиться в этом, вычислим квадрат длины вектора $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}_1^{\,2}=u^4\vec{r}^{\,2}-4u^2(\vec{r}\cdot\vec{u})^2+4(\vec{r}\cdot\vec{u})^2u^2=$$
$$=u^4r^2.$$

Отсюда следует, что длина вектора $\vec{r}_1$ равна u^2r, то есть как раз первому члену в равенстве (*).

Теперь это равенство (*) выглядит как уравнение эллипса

$$r_1+r=2a.$$

Итак, мы доказали, что три вектора $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ и $2\vec{c}$ образуют треугольник, сумма двух сторон которого постоянна и равна $2a$. Но это и значит, что геометрическое место концов всевозможных радиус-векторов $\vec{r}$ (при постоянном векторе $\vec{c}$) есть эллипс.

Теперь выясняется геометрический смысл введенных постоянных, $a=\alpha/v_0^2$ — это большая полуось эллипса. Она зависит только от полной энергии планеты и не зависит от момента импульса. Вектор $2\vec{c}$ соединяет два фокуса эллипса. Длина $\vec{c}$ равна фокусному расстоянию (половине расстояния между фокусами). По-

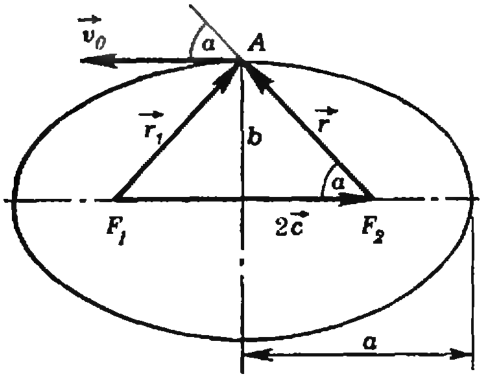


Рис. 5. F_1, F—фокусы эллипса; $r_1=r$. В точке A $L_0=v_0 r\sin\alpha=v_0 b$.

стоянная v_0 — это значение скорости планеты в тот момент, когда планета находится на конце малой полуоси. Покажем это. На конце малой полуоси, по определению, длины радиус-векторов $\vec r$ и $\vec r'$ равны. Следовательно, $u^2=1$ (так как $r_1=u^2 r$). Это и означает, что $v=v_0$. Отсюда, в частности, следует, что малая полуось эллипса b равна

$$b=L_0/v_0$$

(это равенство разъясняет рисунок 5).

Итак, подведем итог. Мы показали, что планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Параметры этого эллипса таковы:

большая полуось: $a=\alpha/v_0^2$,
малая полуось: $b=L_0/v_0$,

где $\alpha=\gamma M$ (M — масса Солнца), L_0, v_0 — константы для данной планеты.

Последнее замечание

Мы получили практически все формулы, которые описывают движение планеты по эллипсу. Все, кроме одной, — мы не знаем, как изменяется во времени положение планеты на орбите. Это — более сложная задача, и мы не станем ею заниматься. По крайней мере сейчас.

Приложение

Закон, о котором пойдет речь, впервые был установлен И. Кеплером. Изучая движение планет вокруг Солнца, Кеплер обнаружил, что площадь, «заметаемая» радиус-вектором планеты в единицу времени, постоянна. Она не зависит от положения планеты на орбите. Обозначим через $\vec r$ радиус-вектор планеты и через $\vec v$ ее скорость в момент времени t (рис. 6). За маленький промежуток времени Δt планета совершит перемещение $\vec v\,\Delta t$. При малых Δt площадью сектора эллипса совпадает с площадью треугольника, построенного на векторах $\vec r$ и $\vec v\Delta t$, то есть

$$\Delta S=\frac{1}{2}rv\,\Delta t\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec r$ и $\vec v$ (см. рис. 6). Площадь, заметаемая за единицу времени (ее называют *секториальной скоростью*), очевидно, равна

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}rv\sin\alpha.$$

Следовательно, второй закон Кеплера состоит в том, что при движении планеты секториальная скорость постоянна:

$$\frac{1}{2}rv\sin\alpha=\text{const}.$$

Этот закон можно доказать с помощью несложной геометрии. Построим на векторах $\vec r$ и $\vec v$ параллелограмм (рис. 7). Площадь этого параллелограмма равна $rv\sin\alpha$. Вычислим, какой будет площадь параллелограмма через маленький интервал времени Δt. За это время будут изменяться скорости и углы. Так как время Δt мы выбрали очень малым, будем считать, что оба вектора изменяются пропорционально Δt (иначе говоря, будем считать, что векторы изменяются с постоянными скоростями); ускорениями же, т. е. членами, пропорциональными $(\Delta t)^2$, мы будем пренебрегать.

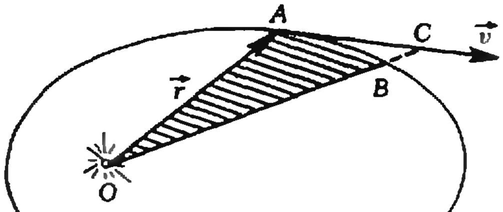


Рис. 6.

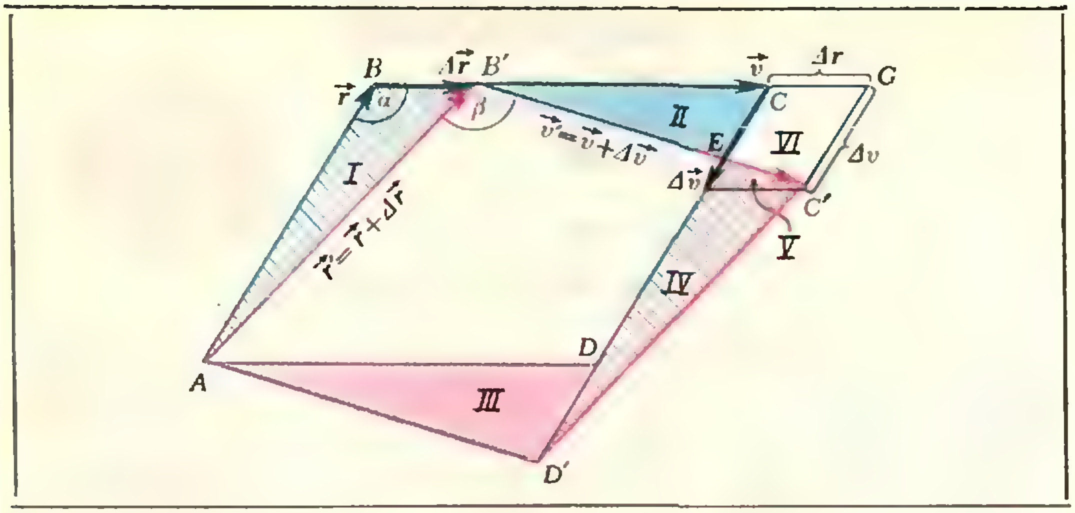


Рис. 7.

Таким образом, мы будем считать, что

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t,$$
$$\Delta\vec{v} = \vec{w}\,\Delta t\ ^{*}).$$

Естественно, что при вычислении изменения площади параллелограмма нас также будет интересовать только скорость изменения площади, а ускорения (величины, пропорциональные $(\Delta t)^2$) мы будем отбрасывать. Ускорение планеты пропорционально силе $\vec{F}$, действующей на планету. Сила же направлена к Солнцу, т. е. противоположна по направлению радиус-вектору. Следовательно, вектор $\Delta\vec{v}$ параллелен вектору $\vec{r}$. Направлен же он противоположно вектору $\vec{r}$. Теперь нетрудно нарисовать векторы $\Delta\vec{r}$ и $\Delta\vec{v}$, затем векторы $\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ и $\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v}$ и построить на них параллелограммы (рис. 7). Площади этих параллелограммов равны соответственно $S_2 = v'r' \sin\beta$, где β—угол между векторами v' и $\vec{r}'$, и $S_3 = \Delta r \Delta v \sin\alpha$. Нетрудно показать, что

$$S_2 = S_1 + S_3.$$

Теперь мы заметим, что площадь S_3 пропорциональна Δt^2, так как и Δr, и Δv пропорциональны Δt. Так как мы условились *величинами, пропорциональными* $(\Delta t)^2$, пренебрегать, мы можем выкинуть и площадь S_3. Мы получаем нужное нам утверждение

$$S_2 = S_1,$$

т. е. площадь параллелограмма не изменяется со временем.

Наше рассуждение, конечно, не очень строгое, но его можно сделать точным, особенно если уметь дифференцировать.

Вернемся теперь к физике. Если Δt *мало, то площадь маленького параллелограмма* можно считать очень маленькой. Так что при движении планеты площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{v}$, остается постоянной:

$$vr \sin\alpha \approx v'r' \sin\beta = \text{const}.$$

Остается только заметить, что площадь треугольника, построенного на тех же векторах, вдвое меньше площади параллелограмма, и мы приходим ко второму закону Кеплера: $\dfrac{1}{2}\ vr \sin\alpha = \text{const}$.

При доказательстве мы использовали только то обстоятельство, что сила, действующая на планету, направлена вдоль радиус-вектора. В таких случаях говорят, что тело движется *под действием центральной силы*, т. е. силы, направленной всегда в одну точку (или от нее). Поэтому доказанное нами утверждение можно сформулировать так:

Для материальной точки, которая движется под действием центральной силы, величина $rv \sin\alpha$ *остается постоянной.* Остается постоянной и величина $mvr \sin\alpha$, где m — масса материальной точки. Но $m\vec{v} = \vec{p}$ — это импульс частицы. Величина же $L = pr \sin\alpha$ называется *моментом импульса.* Так мы пришли к закону сохранения момента импульса:

При движении материальной точки в поле центральной силы момент импульса остается постоянным.

Этот закон играет для движения в поле центральной силы роль, похожую на роль закона сохранения импульса для движения в отсутствие сил.

---

*) w есть ускорение для вектора $\vec{r}$, но это — скорость изменения скорости $\vec{v}$.

задачник кванта

Задачи

М596—М600; Ф608—Ф612

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 февраля 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М596, М597» или «Ф807». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М596. Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки $A_iB_j (i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ окрашены либо в красный, либо в зеленый цвет так, что в каждом треугольнике вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Докажите, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.

XXI Международная олимпиада по математике, 1979 г.

М597. Положим

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

а) Докажите существование предела

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(x_n - \ln n).$$

б) Докажите, что для любых n, $m \in \mathbb{N}$

$$\gamma < x_n + x_m - x_{nm} \subseteq 1.$$

в) Найдите γ с точностью до 0,1.

В. Ясинский

М598. Даны плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найдите все точки n в плоскости π, для которых отношение $(|QP| + |PR|)/|QR|$ максимально.

XXI Международная олимпиада по математике 1979 г.

М599. а) Сколькими нулями оканчивается число*)

$$4^{5^6} + 6^{5^4}?$$

б)* Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число

$$1978^{1979^{1980}} + 1980^{1979^{1978}}.$$

П. Гусятников

М600. Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.

Н. Васильев, И. Шарыгин

---

*) a^{b^c} означает $a^{(b^c)}$

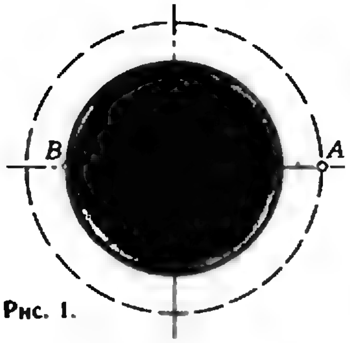


Рис. 1.

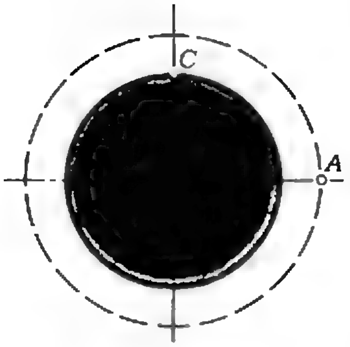


Рис. 2.

Ф608. Космический корабль массой $M=12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h=100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается реактивный двигатель. Скорость вылетающих из сопла ракеты газов $u=10^4$ м/с. Радиус Луны $R_Л=1{,}7\cdot10^3$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л=1{,}7$ м/с^2.

1) Какое количество топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабля он опустился на Луну в точке B (рис. 1)?

2) Во втором варианте прилунения кораблю в точке A сообщается импульс в направлении на центр Луны, чтобы перевести корабль на орбиту, касающуюся Луны в точке C (рис. 2). Какое количество топлива необходимо израсходовать в этом случае?

XI Международная олимпиада по физике, 1979 г.

Ф609. Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. При одном взвешивании воздух внутри весов сухой, при другом — влажный, давление водяных паров в котором равно $p_в=15{,}2$ мм рт. ст.. Внешнее давление ($p=760$ мм рт. ст.) и температура ($t=20$ °C) воздуха в обоих случаях одинаковы.

При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их чувствительность $m_0=0{,}1$ мг? Плотность алюминия $\rho_1=2{,}7$ г/см^3, латуни $\rho_2=8{,}5$ г/см^3

XI Международная олимпиада по физике, 1979 г.

Ф610. В советско-французском эксперименте по оптической локации Луны импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda=0{,}69$ мкм направлялось с помощью телескопа с диаметром зеркала $D=2{,}6$ м на лунную поверхность. На Луне был установлен отражатель, который работал как идеальное зеркало диаметра $d=20$ см, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливался тем же телескопом и фокусировался на фотоприемник.

1) С какой точностью должна быть установлена оптическая ось телескопа в этом эксперименте?

2) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зарегистрирована фотоприемником.

3) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n=100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, равна $E=1$ Дж?

4) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha=10$ % падающего света равномерно в телесный угол 2π стер.

Расстояние от Земли до Луны $L=380\cdot10^3$ км. Диаметр зрачка глаза принять равным $d=5$ мм. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

XI Международная олимпиада по физике, 1979 г.

Ф611. Акробат, находясь на боковой поверхности цилиндра, лежащего на очень шероховатом полу, перебирает ногами и движется с постоянной скоростью вправо. Считая коэффициент трения ботинок акробата о поверхность цилиндра равным μ, определить предельный угол α, который может составить с вертикалью радиус цилиндра, проведенный в точку, в которой находится акробат. Чему будет равна при этом сила трения ботинок акробата о цилиндр?

Ф612. Какое количество теплоты необходимо сообщить 0,1 кг неона для его нагревания на 5°С, если при нагревании давление неона прямо пропорционально его объему?

Решения задач

M540—M544; Ф553—Ф557

M540. *Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2,..., 1978.*

Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

Предположим, что заключение задачи не выполняется. Заметим, что одна из стран представлена в обществе не менее чем 330 членами. Действительно, если бы каждая делегация состояла не более чем из 329 членов, то всего в обществе было бы не больше чем 329×6=1974 члена. Аналогичным рассуждением (известным под названием *принципа Дирихле*) мы будем пользоваться еще несколько раз, не поясняя его специально. Расположим номера ученых этой страны в порядке возрастания: a_1, a_2, ..., a_{330},... В силу нашего предположения ученые с номерами $a_2—a_1$, $a_3—a_1$, ..., $a_{330}—a_1$ представляют оставшиеся пять стран. Среди них не менее 66 представляют одну страну; пусть это ученые с номерами b_1, b_2, ..., b_{66}. Тогда ученые с номерами $b_2—b_1$, ..., $b_{66}—b_1$ представляют оставшиеся четыре страны. Среди них не меньше 17 ученых представляют одну страну; пусть их номера c_1, c_2, ..., c_{17}. Тогда ученые с номерами $c_2—c_1$, ..., $c_{17}—c_1$ живут в оставшихся трех странах. Из них мы аналогичным образом найдем 5 ученых, представляющих две страны, а затем двух представителей одной страны, разность номеров которых не может быть номером ученого ни одной из стран. Противоречие!

Задача решена.

Если поставить теперь вопрос о том, сколько должно быть членов в обществе из представителей k стран, чтобы заключение задачи наверняка выполнялось, то приведенный выше метод решения дает ответ $n_k=[k!e]=k!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)$ (проверьте это самостоятельно). Однако эта оценка может быть улучшена уже для $k=3$. Как сообщил нам *А. Ходулев*, для трех стран достаточно не $16=[3!e]$, а 14 представителей. Для тринадцати представителей трех стран заключение задачи не выполняется; соответствующий пример приведен на рисунке 1. А для четырех стран достаточно 45 представителей; для 44 же представителей четырех стран можно привести пример, когда заключение задачи не выполняется. Оценка снизу для количества членов общества из k стран, для которых

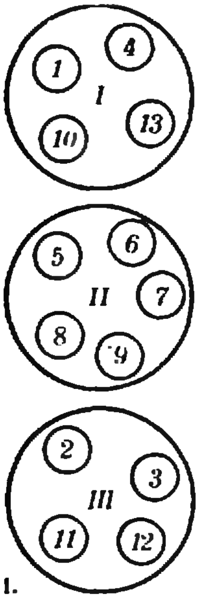


Рис. 1.

возможна такая нумерация, что заключение задачи **М540** будет неверно, очень далека от верхней оценки. Лучшей пока является оценка $m_k=(3^k-1)/2$.

Л. Лиманов

◆

М541. *В компании из N человек у каждого ровно трое друзей.*

а) Докажите, что N четно.

б) Всегда ли такую компанию можно разбить на $N/2$ пар так, чтобы люди в каждой паре были друзьями?

а) Подсчитаем число пар друзей. Поскольку каждый имеет трех друзей, то есть входит в 3 такие пары, то общее число пар равно $3N/2$. Отсюда следует, что N четно.

Если изображать людей точками — *вершинами*, а друзей соединять отрезками — *ребрами*, то конфигурация, удовлетворяющая условию задачи, будет *однородным графом степени* 3 (от каждой вершины отходит 3 ребра). На языке графов наше решение можно записать так: поскольку у каждого из M ребер графа два конца и каждая из N вершин служит концом трех ребер, $2M=3N$, откуда $M=3N/2$.

б) Ответ. Не всегда. Простейший пример, который привели почти все читатели, правильно решившие задачу, содержит 16 вершин и, стало быть, 24 ребра (рис. 2). Если выбрать пару OA_1, то пятерки, содержащие A_2 и A_3, уже нельзя разбить на пары. Как отметил десятиклассник *В. Губа* из Вологды, такие примеры существуют при всех четных $N\geqslant 16$.

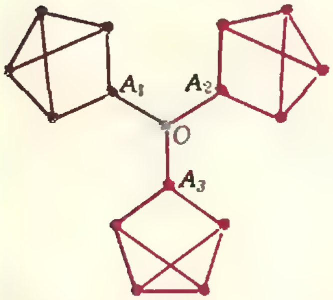


Рис. 2.

Во всех контрпримерах, приведенных читателями, на графе имеется *перешеек* — ребро, после выбрасывания которого граф распадается на два куска (в нашем примере три перешейка: OA_1, OA_2 и OA_3). Это не случайно. Можно доказать — предлагаем это как задачу читателям, — что *в однородном графе степени 3 без перешейков всегда существует совершенное паросочетание*, то есть множество ребер, содержащих все вершины графа и не имеющих общих вершин. (См., например, главу 18 книги К. Бержа «Теория графов и ее применения» (М., ИЛ, 1962).)

Задачи о паросочетаниях — достаточно продвинутый раздел теории графов. О некоторых из этих задач рассказывалось в «Кванте» (1970, № 4, с. 14; 1974, № 11, с. 23).

◆

М542. *Дан прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с катетами $|A_0A_2|=a$ и $|A_1A_2|=b$. Муравей ползет по бесконечной ломаной $A_2A_3A_4A_5\ldots$, где A_nA_{n+1} — высота треугольника $A_{n-2}A_{n-1}A_n$.*

а) Найдите длину его пути (из бесконечного числа отрезков).

б) Постройте предельную точку L, к которой приближается муравей. На каких расстояниях от катетов она находится?

Рассмотрим преобразование подобия $П$, переводящее треугольник $A_0A_1A_2$ в треугольник $A_2A_3A_4$. Его коэффициент подобия

$$k=\frac{|A_2A_3|}{|A_0A_1|}=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Преобразование $П$, очевидно, отображает интересующую нас красную ломаную $Г$, дополненную двумя начальными звеньями $[A_0A_1]$ и $[A_1A_2]$, в точности на $Г$, поскольку $П(A_n)=A_{n+2}$ для $n=0, 1, 2, \ldots$ (рис. 3). Поскольку $П$ сокращает все расстояния в k раз, длина z ломаной $Г$ определяется из уравнения

$$k(|A_0A_1|+|A_1A_2|+z)=z,$$

откуда

$$z=\frac{k(\sqrt{a^2+b^2}+b)}{1-k}=\frac{(\sqrt{a^2+b^2}+b)\,ab}{a^2+b^2-ab}.$$

(В этом рассуждении завуалирован обычный способ отыскания суммы бесконечной геометрической прогрессии: $(\sqrt{a^2+b^2}+b)(k+k^2+k^3+\cdots)=z$.)

Заметим, что каждый треугольник $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ содержит следующий ($n=0, 1, \ldots$), а пересечение всех этих треугольников—точка L, к которой в пределе стремится муравей. Поскольку $П(\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2})=\triangle A_{n+2}A_{n+3}A_{n+4}$, получаем $П(L)=L$, то есть точка L является *неподвижной точкой* преобразования $П$.

Преобразование $П$ — *центрально подобное вращение*; его можно получить как композицию поворота на 90°

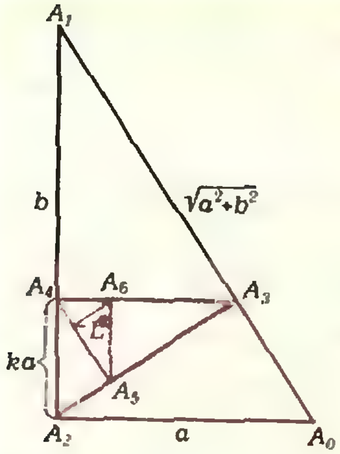


Рис. 3.

и гомотетии (с коэффициентом k) с центром L. Отсюда следует, что $\widehat{A_0LA_2} = \widehat{A_2LA_4} = 90^\circ$; таким образом, точку L можно построить как пересечение двух полуокружностей с диаметрами $[A_0A_2]$ и $[A_2A_4]$ или еще проще — опустить из A_2 перпендикуляр A_2L на отрезок A_0A_4. А найти расстояния x и y от точки L до катетов длины a и b треугольника $A_0A_1A_2$ можно, воспользовавшись либо тем, что $L \in [A_0A_4]$ и $|LA_4| : |LA_0| = k^2$, либо тем, что перпендикуляры, опущенные из L на отрезки A_0A_2, A_2A_4, A_4A_6, получаются друг из друга преобразованием Π, откуда

$$\begin{cases} y = kx, \\ ka - x = ky \end{cases}$$

(на рисунке 3 отрезок длины x голубой, отрезок длины $y=kx$ — зеленый, отрезок длины ky — снова голубой). Таким образом,

$$x = \frac{ka}{k^2+1} = \frac{a^2b\,(a^2+b^2)}{a^4+3a^2b^2+b^4},$$

$$y = \frac{k^2a}{k^2+1} = \frac{a^3b^2}{a^4+3a^2b^2+b^4}.$$

В ряде писем эти ответы получены как суммы геометрической прогрессии со знаменателем k^2 — коэффициентом гомотетии преобразования Π^2.

◆

M543. *Пусть*

$$\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, с выполнено неравенство

$$\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

Формулу для «расстояния» ρ можно существенно упростить, установив взаимно однозначное соответствие $y = \operatorname{tg}\alpha$ между числами $y \in \mathbf{R}$ и числами $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Если $y_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $y_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, то, заменив $\operatorname{tg}\alpha$ на $\sin\alpha/\cos\alpha$, получим

$$\rho(y_1, y_2) = \frac{|\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}\ \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2}} = |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|. \qquad (1)$$

Таким образом, нужное нам *неравенство треугольника* для расстояния ρ вытекает из следующего неравенства:

$$|\sin(\alpha_1-\alpha_3)| \leqslant |\sin(\alpha_1-\alpha_2)| + |\sin(\alpha_2-\alpha_3)|; \qquad (2)$$

справедливость последнего неравенства (для всех α_1, α_2, α_3) не вызывает сомнений: для любых β и γ

$$|\sin(\beta+\gamma)| = |\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta| \leqslant |\sin\beta\cos\gamma| + {}$$
$$+ |\sin\gamma\cos\beta| \leqslant |\sin\beta| + |\sin\gamma|;$$

положив здесь $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$, $\gamma = \alpha_2 - \alpha_3$, получим (2).

Эти формальные тригонометрические выкладки, как заметили многие читатели, можно прояснить с помощью геометрической интерпретации нашего расстояния ρ. Начертим на плоскости окружность, касающуюся координатной прямой Oy в точке O ($y=0$), с диаметром $|OP|=1$ и каждой точке Y (с координатой y) нашей прямой поставим в соответствие пересечение $F=F(y)$ отрезка PY с этой окружностью (рис. 4). Пусть $F_1=F(y_1)$, $F_2=F(y_2)$. Тогда $\rho(y_1, y_2)$ есть просто *длина хорды* $|F_1F_2|=\sin\beta$. (Это сразу ясно из (1), поскольку $\widehat{F_1PF_2} = |\alpha_1-\alpha_2| = \beta$, но легко установить и геометрически — например, заметив, что площадь треугольника на рисунке 4 с длиной основания $|y_1-y_2|$ и высотой длины 1 равна половине произведения $\sqrt{1+y_1^2}\ \sqrt{1+y_2^2}\,\sin\beta$.) Теперь «неравенство треугольника» очевидно.

Отображение $y \to F(y)$ прямой на окружность и аналогичное отображение плоскости на сферу — «стереогра-

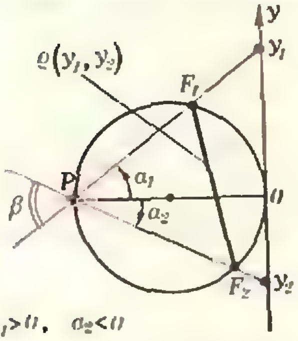


Рис. 4.

фическая проекция» — очень важный инструмент для решения разнообразных геометрических задач *).

Читатели, знакомые с комплексными числами, оценят и такое решение (которое указал десятиклассник *В. Губа* из Вологды). После преобразования $y \to \frac{1}{y+i} = z\,(y)$ расстояние ρ переходит в обычное расстояние между точками на комплексной плоскости: $\rho\,(y_1,\ y_2) = \left|\frac{1}{y_1+i} - \frac{1}{y_2+i}\right|$; заметим, что геометрическая интерпретация этого отображения приводит, по существу, к тому же рисунку 4.

Н. Васильев

◆

М544. *Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали (лежащей целиком внутри многоугольника), может иметь выпуклый n-угольник? Решите эту задачу сначала для* $n=4,5,6,7$.

Докажем, что число таких вершин не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$. Это сразу вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если A и B — соседние вершины невыпуклого многоугольника M, то из A или из B можно провести диагональ.*

Доказательство. Пусть B и C — вершины многоугольника M, соседние с A.

Предположим сначала, что $\widehat{BAC} < 180^\circ$. Если в треугольнике ABC (включая его стороны) нет других вершин многоугольника M, то искомая диагональ — $[BC]$. Если же в треугольнике ABC есть другие вершины многоугольника M, то выберем среди них вершину D, находящуюся на минимальном расстоянии от прямой l, проходящей через точку A параллельно $[BC]$. Тогда $[AD]$ — искомая диагональ, поскольку в противном случае отрезок AD пересекала бы какая-то сторона EF многоугольника M (рис. 5), один из концов которой лежал бы ближе к прямой l, чем точка D, что противоречило бы выбору последней.

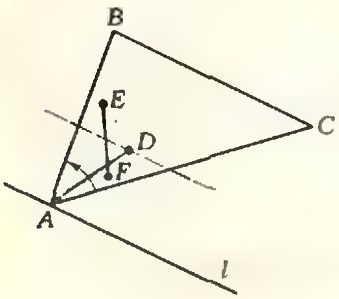


Рис. 5.

Пусть теперь $\widehat{BAC} > 180^\circ$. Покажем, что в этом случае всегда можно провести диагональ из вершины A. Для этого продолжим сторону BA многоугольника M за вершину A до первого пересечения со сторонами многоугольника M в некоторой точке D. Если D — вершина многоугольника M, то $[AD]$ — искомая диагональ. В противном случае точка D лежит на стороне EF многоугольника. Пусть вершина E расположена по разные стороны от прямой BA с вершиной C (рис. 6). Будем двигать переменную точку P на стороне EF от точки D к точке E. Тогда переменный отрезок AP заметет треугольник ADE. Если в треугольнике ADE нет вершин многоугольника M, то $[AE]$ — искомая диагональ. Если же таковые найдутся, то мы обязательно наткнемся на одну из них при повороте отрезка AP от положения $[AD]$ до положения $[AE]$. Отрезок от вершины A до ближайшей к A вершине на отрезке AP, впервые «встретившем» вершины многоугольника M, будет искомой диагональю.

Лемма доказана.

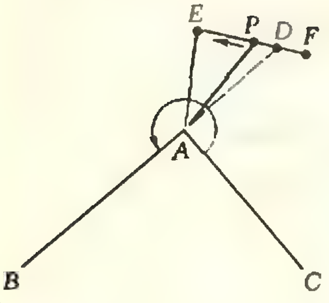


Рис. 6.

---

*) См., например, книгу И. М. Яглома «Геометрические преобразования. II. Линейные и круговые преобразования» (М., ГТТИ, 1956); брошюру Б. А. Розенфельда и Н. Д. Сергеевой «Стереографическая проекция» («Популярные лекции по математике», вып. 53, М., «Наука», 1973); статьи из «Кванта»: 1977, № 10, с. 14; 1978, № 12, с. с. 1, 50 и 2-я с. обложки.

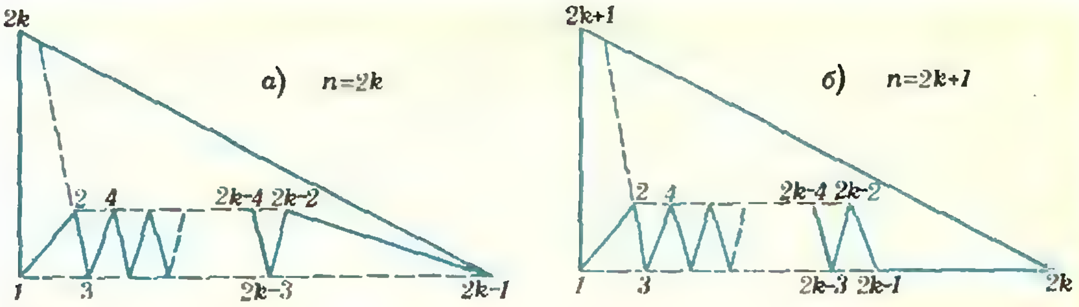


Рис. 7.

На рисунках 7, а и 7, б приведены примеры невыпуклых $(2k)$-угольника и $(2k+1)$-угольника, для которых оценка $\left[\frac{n}{2}\right]$ достигается.

Таким образом, наибольшее число вершин невыпуклого n-угольника, из которых нельзя провести ни одной диагонали, равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.

С. Бычков

◆

Ф553. *Тяжелая доска массы M лежит на двух тонкостенных катках радиусов r и R и равных масс m. Расстояние между центрами катков l. С каким ускорением начнет двигаться доска, если ее отпустить? Трение между всеми поверхностями такое, что проскальзывания нет.*

Так как проскальзывание между всеми поверхностями отсутствует, при движении доски и катков будут оставаться неизменными расстояние $|AB|$ между точками касания катков и горизонтальной плоскостью и равное ему расстояние $|A'B'|$ между точками касания катков и доски (рис. 8). Следовательно, не будет изменяться и расстояние $|O_1O_2|=l$ между центрами катков. А это означает, что скорости центров обоих катков в любой момент времени одинаковы и направлены по прямой O_1O_2.

Найдем направление скорости центра масс доски O. Пусть скорость центров катков равна $\vec{v}$. Тогда в системе отсчета, движущейся с этой скоростью, центры катков неподвижны, скорости же точек A' и B', а значит, и скорость $\vec{v}'$ центра масс доски равны по модулю $|\vec{v}|$ и направлены вдоль доски. В неподвижной относительно горизонтальной плоскости системе отсчета скорость $\vec{u}$ центра масс доски равна векторной сумме скоростей $\vec{v}'$ и $\vec{v}$. Из рисунка 8 видно, что скорость $\vec{u}$ направлена параллельно прямой O_1O_2. Так же направлены перемещение доски и ее ускорение.

Обозначим через $\vec{s}$ перемещение центра масс доски в тот момент, когда его скорость равна $\vec{u}$. В этот момент модуль скорости центров катков $|\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot 2\cos\alpha$ и кинетическая энергия всей системы равна

$$2\frac{m|\vec{v}|^2}{2}+\frac{M|\vec{u}|^2}{2}=\frac{|\vec{u}|^2}{4}(m\cos^2\alpha+2M).$$

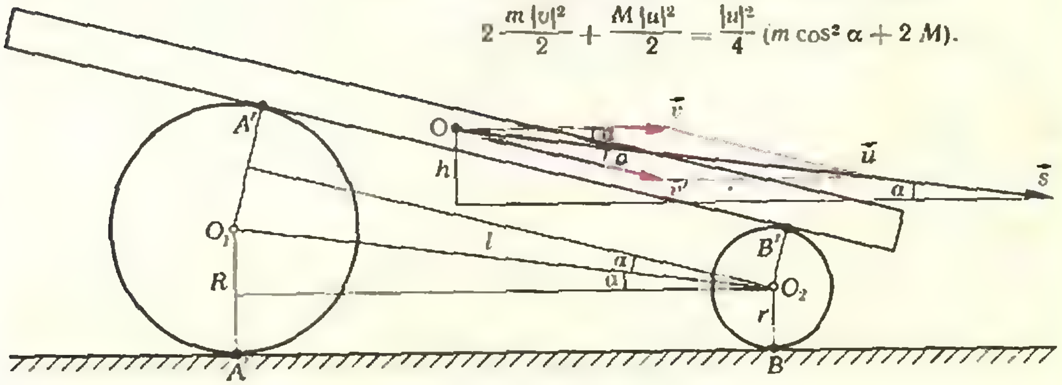


Рис. 8.

Изменение кинетической энергии системы происходит за счет изменения потенциальной энергии доски:

$$\frac{|\vec{u}|^2}{4}(m\cos^2\alpha + 2M) = Mgh,$$

$$\text{где } h = |\vec{s}|\sin\alpha, \text{ а } \sin\alpha = \frac{R-r}{l}.$$

Так как доска движется равноускоренно (действующие на систему силы постоянны), справедливо равенство

$$|\vec{u}|^2 = 2|\vec{a}|\,|\vec{s}|$$

($\vec{a}$ — ускорение доски).

Используя полученные соотношения, найдем

$$|\vec{a}| = g\frac{2(R-r)}{l\left(2 + \frac{m}{M}(1-(R-r)^2/l^2)\right)}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф554. *Брусок массы m_1 лежит на доске массы m_2, которая находится на гладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и доской равен μ. На доску действует сила $\vec{F}$, изменяющаяся со временем по закону $|\vec{F}| = bt$, где b — постоянная величина. Нарисовать графики зависимости ускорений бруска и доски от времени t.*

На брусок в горизонтальном направлении действует только одна сила — сила трения $\vec{F}_1$ (рис. 9), поэтому он движется с ускорением

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m_1}.$$

Так как $|\vec{F}_1| \leqslant \mu m_1 g$, то

$$|\vec{a}_1| \leqslant \mu g.$$

На доску действуют две силы: сила $\vec{F}$ и сила трения, равная $-\vec{F}_1$, поэтому ускорение доски равно

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F} - \vec{F}_1}{m_2}.$$

Вначале, пока сила $\vec{F}$ мала, брусок и доска движутся вместе: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, то есть

$$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F} - \vec{F}_1}{m_2}.$$

Отсюда

$$\vec{F}_1 = \vec{F}\frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

и

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = \frac{|\vec{F}|}{m_1 + m_2} = \frac{b}{m_1 + m_2}t$$

— модуль ускорения бруска и доски растет пропорционально времени.

В некоторый момент времени t_0 модуль этого ускорения оказывается равным $|\vec{a}_{1\max}| = \mu g$, а сила $\vec{F}_1$ становится равной по модулю $\mu m_1 g$. После этого ускорение бруска перестает расти и остается равным

$$|\vec{a}_1| = \mu g,$$

и ускорение доски растет по закону

$$|\vec{a}_2| = \frac{bt - \mu m_1 g}{m_2}.$$

Найдем t_0. Так как в этот момент $|\vec{a}_1| = \mu g$, то

$$\frac{bt_0}{m_1 + m_2} = \mu g.$$

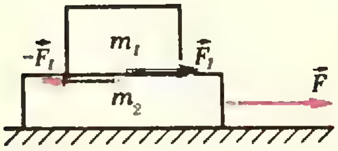


Рис. 9.

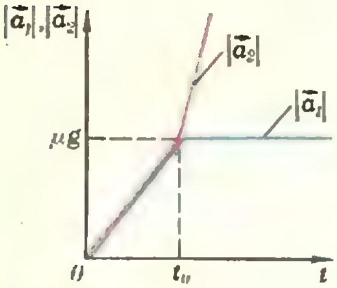


Рис. 10.

откуда

$$l_0 = \frac{\mu g}{b}(m_1 + m_2).$$

Теперь нетрудно построить графики зависимости $|\vec{a}_1|$ и $|\vec{a}_2|$ от времени t (рис. 10).

И. Слободецкий

◆

Ф555. *а) Легкий жесткий стержень длины l с грузом массы m наверху закреплен шарнирно в нижней точке и удерживается в вертикальном положении двумя горизонтальными пружинами жесткости k, скрепленными с его верхним концом (рис. 11). В направлении, перпендикулярном к пружинам, стержень двигаться не может. При какой массе груза вертикальное положение стержня перестанет быть устойчивым?*

б) Стальная спица длины l заделана в пол так, что стоит вертикально. Если к ее верхнему концу приложить небольшую горизонтальную силу $\vec{F}$, верхний конец спицы отклонится на величину $a \ll l$. Оценить, груз какой массы может выдержать, не согнувшись, спица на своем верхнем конце. Различием формы, которую принимает спица при действии на нее горизонтальной или вертикальной сил, пренебречь.

а) Вертикальное положение стержня становится неустойчивым, если при небольшом отклонении стержня от положения равновесия момент силы тяжести груза относительно оси, проходящей через точку O закрепления стержня, будет больше момента сил упругости пружин.

Обозначим через x малое горизонтальное смещение груза (рис. 12). Тогда момент силы тяжести равен mgx, а момент сил упругости равен приблизительно $|\vec{F}|\,l = 2\,kxl$.

Таким образом, равновесие стержня неустойчиво при

$$mgx > 2\,kxl,$$

то есть при

$$m > \frac{2\,kl}{g}.$$

б) В действительности форма спицы изменяется в зависимости от того, горизонтальная или вертикальная сила удерживает ее в равновесии, однако для оценки этим можно пренебречь. Тогда задача становится аналогичной задаче а), в которой величину $2k$, характеризующую жесткость пружин на растяжение (сжатие), нужно заменить жесткостью k' спицы на изгиб, равной отношению модуля силы упругости, уравновешивающей силу $\vec{F}$, к смещению конца стержня, то есть $\frac{|\vec{F}|}{a}$.

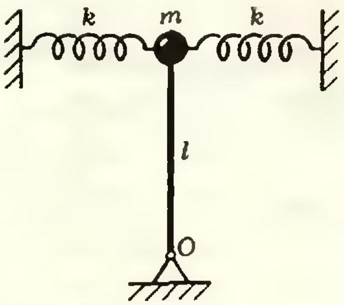


Рис. 11.

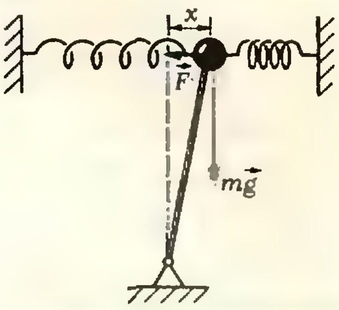


Рис. 12.

Следовательно, максимальная масса груза, который может выдержать спица, равна приблизительно

$$m \approx \frac{|\vec{F}|\,l}{ag}.$$

Г. Коткин

Ф556. *Если на ледяной брусок надеть проволочную петлю, к которой подвешен груз (рис. 13), проволока начинает резать лед. Это объясняется тем, что при повышении давления температура плавления льда понижается, лед под проволокой начинает таять, а над проволокой — вновь смерзаться.*

Однако если петлю сделать не из проволоки, а из капроновой нити такого же или даже меньшего диаметра, лед практически не режется. Почему? Попробуйте провести описанный опыт.

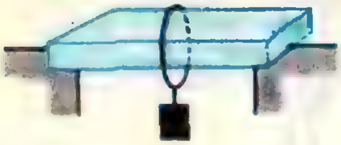


Рис. 13.

При повышении давления температура плавления льда действительно понижается. Однако при плавлении льда поглощается теплота плавления, и температура льда под проволокой начинает падать. Это происходит до тех пор, пока температура льда в области повышенного давления не упадет до температуры плавления при этом давлении. Дальнейшее плавление льда будет определяться теплом, которое вследствие теплопроводности будет приходить к области пониженной температуры.

В случае проволоки это тепло будет проводиться за счет хорошей теплопроводности металла от замерзающей сверху воды, и процесс разрезания льда будет быстрым. В случае капроновой нити, обладающей малой теплопроводностью, тепло будет подводиться главным образом за счет охлаждения всего бруска льда в целом, и процесс разрезания пойдет очень медленно.

И. Слободецкий

◆

Ф557. *В схеме, изображенной на рисунке 14, ключ K замыкают. Найти максимальный ток в цепи и максимальное напряжение на конденсаторе.*

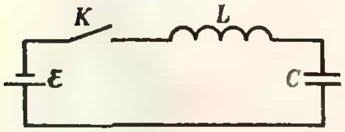


Рис. 14.

После замыкания ключа в цепи потечет ток. Из-за наличия индуктивности ток вырасти мгновенно не может; он будет увеличиваться постепенно, пока не достигнет максимального значения.

Ток, текущий через индуктивность, заряжает конденсатор. Согласно закону сохранения энергии в любой момент времени

$$\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}=q\mathcal{E}=CU\mathcal{E}. \qquad (*)$$

Здесь I — ток, текущий через индуктивность в данный момент, $LI^2/2$ — энергия, запасенная к этому моменту в магнитном поле индуктивности, U — напряжение на конденсаторе, $CU^2/2$ — энергия конденсатора в данный момент, $q=CU$ — заряд, прошедший через батарею, $q\mathcal{E}$ — работа, совершенная батареей.

При некотором значении тока I_0 напряжение на конденсаторе становится равным $\mathcal{E}$. С этого момента конденсатор продолжает заряжаться за счет энергии магнитного поля индуктивности. При этом ток через индуктивность начинает уменьшаться.

Следовательно, I_0 и есть максимальный ток в цепи. Из (*) при $U=\mathcal{E}$ находим

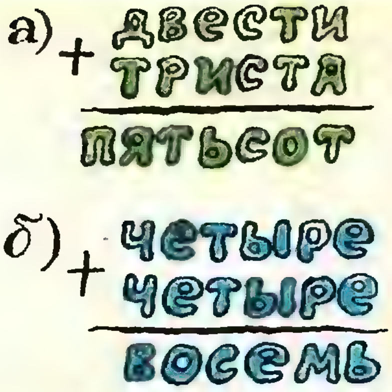
$$I_0=\mathcal{E}\sqrt{C/L}.$$

Зарядка конденсатора продолжается до тех пор, пока в цепи течет ток. Максимальное напряжение на конденсаторе находим из (*) при условии $I=0$:

$$U_{\max}=2\mathcal{E}.$$

П. Зубков

КВАНТ для младших школьников

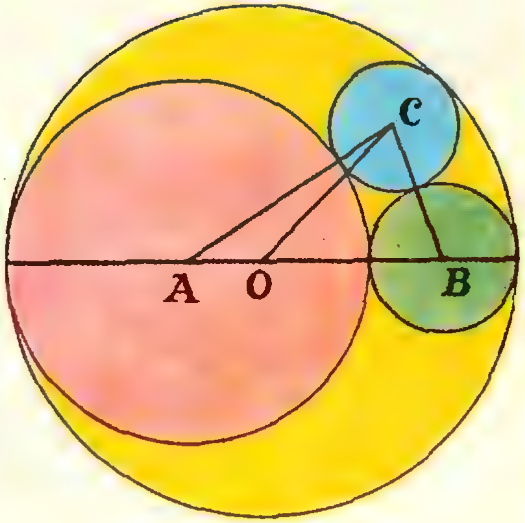


Задачи

1. В обоих примерах, приведенных на рисунке, использованы все десять цифр. В первом примере буква О является цифрой нуль, буква П равна букве И, а буква В — букве Я, остальные буквы имеют самостоятельные цифровые значения. Во втором примере нет букв, имеющих одинаковые значения, зато известно, что $\text{Ч}^{\text{Е}}=\text{С}$, причем Е — нечетная цифра.

Определите значения всех букв в каждом примере.

2. Мальчик купил на рубль почтовых марок, причем двухкопеечных марок он купил в 10 раз меньше, чем однокопеечных, остальные же марки были пятикопеечными. Сколько марок каждого достоинства купил мальчик?



3. На диаметре окружности с центром в точке O находятся центры A и B еще двух окружностей, касающихся первоначальной окружности и друг друга (см. рисунок). Еще одна окружность, центр которой обозначим через C, касается всех трех рассмотренных ранее окружностей, как на рисунке. Докажите, что периметры треугольников AOC и BOC равны длине диаметра первой окружности.

4. Ученик 6 класса Петя Иванов придумал две новые теоремы:

а) если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27;

б) если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Сможет ли Петя доказать эти теоремы?

$\mathcal{F}_n = 2^{2^n} + 1$

О. Оре

Простые числа Ферма

Вероятно, одним из первых свойств чисел, открытых людьми, был тот факт, что некоторые числа раскладываются на два меньших множителя, например

$$6=2\cdot3,\ 9=3\cdot3,\ 30=2\cdot15=3\cdot10,$$

в то время как другие, например

$$3,\ 7,\ 13,\ 37,$$

на множители подобным образом не раскладываются.

Если число c является произведением двух чисел a и b ($c=a\cdot b$), мы называем числа a и b *множителями* или *делителями* числа c. Каждое число имеет *тривиальное* (простейшее) разложение на множители:

$$c=1\cdot c=c\cdot1.$$

Соответственно числа 1 и c мы называем *тривиальными делителями числа* c.

Любое число $c>1$, у которого существует нетривиальное разложение на множители, называется *составным*. Если число, большее единицы, имеет только тривиальное разложение на множители, то оно называется *простым*. Среди первых ста чисел простыми являются следующие 25 чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,

а все остальные числа, кроме 1, являются составными.

За последние 200 лет было издано много таблиц простых чисел. Наиболее обширной из них является таблица Д. Н. Лехмера, содержащая все простые числа до 10000000.

Некоторые энтузиасты составили таблицы простых чисел, превосходящих 10000000, однако, по-видимому, нет большого смысла публиковать эти таблицы. Лишь в очень редких случаях математику, даже специалисту по теории чисел, приходится решать вопрос, является ли какое-то большое число простым. Кроме того, большие числа, о которых математик хочет узнать, являются ли они простыми или составными, не возникают произвольно. Они обычно появляются в специальных математических задачах и поэтому имеют очень специфичную форму.

Эта статья является отрывком из книги О. Оре «Приглашение в теорию чисел», выходящей в 1980 г. в Библиотечке «Квант» (перевод Л. Савиной под ред. А. Савина).

Расскажем об одном из типов простых чисел, имеющем большую и интересную историю. Эти числа впервые были введены Пьером Ферма (1601—1665), французским юристом, который был одновременно и выдающимся математиком *). Первыми пятью простыми числами Ферма являются

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3,\ F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5,$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257,\ F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537.$$

В соответствии с этой последовательностью общая формула для простых чисел Ферма должна иметь вид

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Ферма был абсолютно уверен, что все числа такого вида являются простыми, хотя он не вычислял других чисел, кроме указанных пяти. Но после того, как Леонард Эйлер сделал еще один шаг, показав, что следующее число Ферма:

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

не является простым, это предположение было сдано в архив неоправдавшихся математических гипотез. Возможно, этим история чисел Ферма была бы закончена, если бы числа Ферма не появились в совсем другой задаче — задаче построения правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки.

Правильным многоугольником называется многоугольник, вершины которого лежат на некоторой окружности на одинаковых расстояниях друг от друга (см. рисунок). Если у правильного многоугольника n вершин, то мы называем его *правильным n-угольником*. Если мы проведем n радиусов, соединяющих центр окружности с вершинами, то получим n центральных углов величиной $\frac{1}{n} \cdot 360^\circ$ каждый. Если можно построить угол, имеющий эту величину, то можно построить и сам многоугольник.

Древние греки очень хотели найти методы построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Разумеется, они умели строить простейшие из них — равносторонний треугольник и квадрат. С помощью повторного деления пополам центрального угла они могли также построить правильные многоугольники с

8, 16, 32, ...,

6, 12, 24, ...

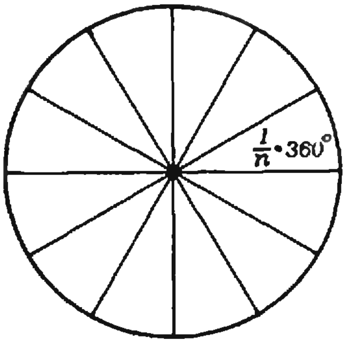
вершинами. Кроме того, они умели строить правильный пятиугольник и, следовательно, также правильные многоугольники с

10, 20, 40, ...

вершинами. Был также получен еще один тип правильного многоугольника. Центральный угол в правильном 15-угольнике равен

$$\frac{1}{15} \cdot 360^\circ = 24^\circ,$$

Леонард Эйлер (1707—1783).



---

*) См. «Квант», 1976, № 8 (прим. ред.).

Карл-Фридрих Гаусс (1777—1855).

и он может быть получен с помощью угла в 72°, соответствующего правильному пятиугольнику, и угла в 120°, соответствующего правильному треугольнику, если удвоить первый угол и вычесть из него второй. Следовательно, мы можем построить правильные многоугольники с 15, 30, 60, 120, ... сторонами.

В таком состоянии проблема оставалась до 1801 года. В том году молодой немецкий математик Карл-Фридрих Гаусс (1777—1855) опубликовал работу по теории чисел «Арифметические исследования». Эта работа открыла новую эпоху в математике. В ней Гаусс превзошел греческих геометров не только тем, что указал метод для построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника — он пошел гораздо дальше. Для всех чисел n он определил, какие n-угольники могут быть построены таким образом, а какие нет. Сейчас мы опишем результаты, полученные Гауссом.

Мы уже говорили, что, деля каждый центральный угол пополам, из правильного n-угольника можно получить правильный $2n$-угольник. С другой стороны, из $2n$-угольника можно получить n-угольник, используя лишь каждую вторую вершину. Это показывает, что достаточно провести поиск многоугольников, которые могут быть построены с помощью циркуля и линейки, только среди многоугольников с нечетным числом вершин. Гаусс показал, что *правильный многоугольник с нечетным числом вершин может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число n является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма.*

Что это нам дает для небольших значений n? Очевидно, треугольник и пятиугольник могут быть построены, в то время как семиугольник не может быть построен, так как 7 не является простым числом Ферма. Не может быть построен и девятиугольник, так как $9=3\cdot 3$ является произведением двух равных простых чисел Ферма. Для $n=11$ и $n=13$ соответствующий n-угольник не может быть построен, но он может быть построен для $n=15=3\cdot 5$ и $n=17$.

Открытие Гаусса, естественно, возродило интерес к числам Ферма. За последнее столетие были предприняты поистине героические поиски «вручную», без помощи машин, новых простых чисел Ферма. В настоящее время эти вычисления ведутся со все возрастающей скоростью при помощи ЭВМ, однако до сих пор результаты были отрицательными. Ни одного нового простого числа Ферма пока не найдено. И сейчас многие математики склонны считать, что их больше нет.

Задачи

1. Найдите все нечетные числа $n<100$, для которых можно построить правильный n-угольник.

2. Как построить правильный 51-угольник, имея правильный 17-угольник?

3. Если не существует простых чисел Ферма, кроме вышеуказанных пяти, то сколько существует правильных n-угольников (n нечетно), которые могут быть построены циркулем и линейкой? Каково наибольшее нечетное n, для которого может быть построен правильный n-угольник?

В. Иванов

Преобразование решений тригонометрического уравнения

Очевидно, произвольное натуральное число n представимо в виде либо $n=2t$, либо $n=2t+1$. Кроме того, любое натуральное число n представимо в виде либо $n=3t$, либо $n=3t+1$, либо $n=3t+2$. Далее, всякое натуральное число n представимо в виде либо $n=4t$, либо $n=4t+1$, либо $n=4t+2$, либо $n=4t+3$. И т. д. Эта серия утверждений является теоретической основой преобразования, которое приходится иногда делать с решениями тригонометрического уравнения.

Пример 1 (НГУ, мехмат, 1974). *Решить уравнение*

$$\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x. \quad (1)$$

Напрашивающийся путь решения уравнения (1) — возведение обеих частей уравнения в квадрат:

$$\cos 2x-\sin 4x=(\sin x-\cos x)^2. \quad (2)$$

После легких равносильных преобразований получаем

$$\sin x\,(\sin x+\cos 3x)=0.$$

Таким образом, уравнение (2) имеет ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} x_1=\pi k & (k\in\mathbf{Z}),\\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi l & (l\in\mathbf{Z}),\\ x_3=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}m & (m\in\mathbf{Z}). \end{array}\right. \quad (3)$$

Но уравнение (2), вообще говоря, не равносильно уравнению (1); оно является лишь выводным из (1). Поэтому необходимо сделать проверку.

Наименьший общий период функций $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\sin x$ и $\cos x$ — 2π. Значит, если число a является корнем уравнения (1), то и все числа $a+2\pi l$ $(l\in\mathbf{Z})$ являются его корнями. Поэтому запишем решения (3) «с периодом 2π».

Заменив в x_1 переменную k на $k=2t$ и $k=2t+1$, получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{11}=2\pi t,\\ x_{12}=\pi+2\pi t. \end{array}\right. \quad (3_1)$$

Аналогично из x_2 получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{21}=\frac{\pi}{4}+2\pi t,\\ x_{22}=\frac{5}{4}\pi+2\pi t. \end{array}\right. \quad (3_2)$$

Заменив в x_3 переменную m на $m=4t$, $m=4t+1$, $m=4t+2$ и $m=4t+3$, получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{31}=-\frac{\pi}{8}+2\pi t,\\ x_{32}=\frac{3}{8}\pi+2\pi t,\\ x_{33}=\frac{7}{8}\pi+2\pi t,\\ x_{34}=\frac{11}{8}\pi+2\pi t. \end{array}\right. \quad (3_3)$$

Из (3_1), (3_2), (3_3) видно, что, ввиду вышесказанного, достаточно проверить числа 0, π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$. Можно просто подставить эти 8 чисел в (1). Проще, однако, сообразить, что уравнение (1) равносильно «смешанной системе»

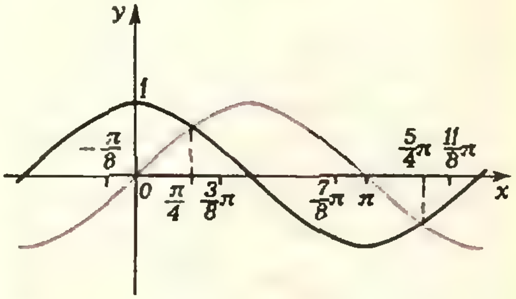


Рис. 1.

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 4x = (\sin x - \cos x)^2, \\ \sin x - \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, достаточно посмотреть (рис. 1), какие из выписанных чисел удовлетворяют неравенству $\sin x \geqslant \cos x$. «Выдерживают» это неравенство $\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi$ и $\frac{7}{8}\pi$. Значит, в ответ уравнения (1) входят $x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{32}$ и x_{33}. При желании x_{21} и x_{22} можно объединить «обратно».

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\sin 7x + \cos 2x = -2. \qquad (4)$$

Поскольку $\min\limits_{\mathbf{R}} \sin 7x = \min\limits_{\mathbf{R}} \cos 2x = -1$, уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 7x = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Решение первого уравнения системы

$$x_1 = \frac{3}{14}\pi + \frac{2\pi}{7} k \ (k \in \mathbf{Z}), \qquad (5)$$

решение второго уравнения

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi l \ (l \in \mathbf{Z}). \qquad (6)$$

Чтобы найти пересечение множеств (5), (6), запишем их «с периодом 2π». Заменив в (5) переменную k на $7t$, $7t+1$, $7t+2$, $7t+3$, $7t+4$, $7t+5$ и $7t+6$, получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{11} = \frac{3}{14}\pi + 2\pi t, \\ x_{12} = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, \\ x_{13} = \frac{11}{14}\pi + 2\pi t, \\ x_{14} = \frac{15}{14}\pi + 2\pi t, \\ x_{15} = \frac{19}{14}\pi + 2\pi t, \\ x_{16} = \frac{23}{14}\pi + 2\pi t, \\ x_{17} = \frac{27}{14}\pi + 2\pi t. \end{array}\right. \qquad (7)$$

Заменив в (6) переменную l на $l = 2t$ и $l = 2t + 1$, получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{21} = \frac{\pi}{2} + 2\pi t, \\ x_{22} = \frac{3}{2}\pi + 2\pi t. \end{array}\right. \qquad (8)$$

Из сравнения (7) и (8) виден ответ: x_{12}.

Пример 3 (МГУ, химфак, 1977) *Найти решения уравнения*

$$2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x, \qquad (9)$$

удовлетворяющие неравенству

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

Уравнение (9) равносильно уравнению

$$1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \cos 6x.$$

Поэтому его ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{48}\pi + \frac{\pi}{4}k \quad (k \in \mathbf{Z}), \\ x_2 = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi}{2}l \quad (l \in \mathbf{Z}). \end{array}\right.$$

Чтобы $2x - \frac{\pi}{4}$ имело период 2π, запишем этот ответ «с периодом π». Заменив в x_1 переменную k на $k = 4t$, $k = 4t + 1$, $k = 4t + 2$ и $k = 4t + 3$, получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{11} = \frac{5}{48}\pi + \pi t, \\ x_{12} = \frac{17}{48}\pi + \pi t, \\ x_{13} = \frac{29}{48}\pi + \pi t, \\ x_{14} = \frac{41}{48}\pi + \pi t. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 2x_{11} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{24} + 2\pi t, \\ 2x_{12} - \frac{\pi}{4} = \frac{11}{24}\pi + 2\pi t, \\ 2x_{13} - \frac{\pi}{4} = \frac{23}{24}\pi + 2\pi t, \\ 2x_{14} - \frac{\pi}{4} = \frac{35}{24}\pi + 2\pi t. \end{array}\right.$$

Видно, что нужному неравенству удовлетворяют x_{11} и x_{12}.

Аналогично, заменив в x_2 переменную l на $l = 2t$ и $l = 2t + 1$, получим

$$\left|\begin{array}{l} x_{21} = \frac{7}{24}\pi + \pi l, \\ x_{22} = \frac{19}{24}\pi + \pi l. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left|\begin{array}{l} 2x_{21} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi t, \\ 2x_{22} - \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi + 2\pi t. \end{array}\right.$$

Нужному неравенству удовлетворяет x_{21}.

Упражнения

Решить уравнения:

1 (МГУ, мехмат, 1974). $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$.

2 (МФТИ, 1974). $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \cdot \sin 3x$.

3 (МГУ, географич. ф-т, 1977). $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cdot \cos^2 2x}$.

4 (МИЭМ, 1977). $\sqrt{1 - \sqrt{2}\sin x} + 2\cos x = 0$.

5 (МГУ, химфак, 1976). Найти все решения уравнения

$$4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\,(1 - \cos x - \sin x) = 4 - \sin x - 3\cos x,$$

которые являются и решением уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 x + \left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\right)\cos x = 1 - \sin x.$$

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач Ф548—Ф557 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф548—Ф557**, справились с задачами **Ф548, Ф554** и **Ф555**. Остальные задачи правильно решили: *М. Агиштейн* (Москва) **56**; *М. Алексеев* (Обнинск) **51**; *И. Аполонский* (Жуковский) **50, 51**; *Р. Бабаев* (Баку) **51**; *Л. Бараз* (Свердловск) **49, 50**; *С. Баргуев* (Улан-Удэ) **49, 51, 53, 57**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **49, 51, 52**; *М. Башкин* (Тула) **51**; *А. Браурман* (Баку) **51**; *Е. Викторов* (Москва) **51**; *С. Власенко* (Бобруйск) **56**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **49, 51—53, 57**; *С. Глушко* (Дрогобыч) **56**; *А. Глушков* (Йошкар-Ола) **57**; *М. Гоганов* (Караганда) **51**; *М. Гольцман* (Днепропетровск) **51, 52**; *И. Гопич* (Новосибирск) **51**; *В. Горшков* (Среднеуральск) **57**; *Д. Григорьев* (Москва) **53**; *М. Данилин* (Москва) **57**; *В. Дидух* (Львов) **56, 57**; *В. Димантман* (Баку) **51**; *С. Довбыш* (Москва) **56**; *С. Довженко* (Донецк) **50**; *Н. Житенев* (п. Черноголовка Московской обл.) **51**; *В. Жордочкин* (Орск) **51, 56**; *С. Журавель* (Североморск) **56**; *Г. Заславский* (Тбилиси) **51, 53, 56**; *Е. Зудин* (Александров) **49—52**; *Г. Ирисов* (Донецк) **51**; *Я. Каминский* (Тула) **53, 57**; *А. Канель* (Москва) **50**; *В. Кельман* (Москва) **51**; *Л. Клейман* (Москва) **51**; *Е. Коган* (Днепропетровск) **50, 51, 53, 56**; *Г. Кожаридзе* (Телави) **54**; *В. Комов* (Александров) **53, 56, 57**; *В. Коробов* (Кировоград) **50**; *О. Кравец* (Воронеж) **51**; *В. Кригер* (Кайраккум) **51**; *Р. Крис* (Киев) **53, 56**; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) **51**; *А. Кушнеров* (Москва) **50**; *А. Леонович* (Лида) **50, 51**; *С. Логунов* (Москва) **50, 52**; *М. Локсин* (Баку) **51**; *Д. Людмирский* (Киев) **51, 52**; *Л. Ляпин* (Гомель) **49—51, 56**; *А. Мазуркевич* (п. Лыткарино Московской обл.) **50, 51**; *З. Максумов* (Ташкент) **53**; *А. Масленников* (п. Н-Тарьял Марийской АССР) **52; 57**; *В. Матчишин* (Целиноград) **50, 51**; *Е. Мельничук* (с. Черные Воды Хмельницкой обл.) **56**; *А. Минаев* (Саратов) **52**; *А. Могильнер* (Свердловск) **51, 56, 57**; *Г. Молчанов* (Саратов) **56**; *М. Морозов* (Ашхабад) **51, 52**; *Ю. Морозов* (Бугульма) **50**; *И. Муромцев* (Москва) **51, 52**; *А. Мухачев* (Салават) **56**; *А. Мыльников* (п. Черноголовка Московской обл.) **56**; *М. Наймарк* (Первоуральск) **53**; *В. Наталич* (Ашхабад) **53**; *Д. Овсянников* (Ленинград) **50, 51, 53**; *А. Оглоблин* (Кутаиси) **56, 57**; *А. Одинцов* (Москва) **53, 56, 57**; *И. Омелян* (Львов) **51, 56, 57**; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) **52, 56, 57**; *А. Павенис* (п/о Ногале ЛатвССР) **56**; *А. Павлычев* (Рига) **56**; *А. Перов* (Москва) **51, 56**; *О. Погодаев* (Ангарск) **51**; *А. Подвязников* (Мосальск) **51**; *В. Подольский* (Тамбов) **51**; *А. Попович* (Апатиты) **56**; *С. Прядкин* (Киев) **49—51**; *С. Равняго* (Золочев Львовской обл.) **56**; *Ф. Ратников* (Ленинград) **50, 51, 53, 56**; *М. Рейтман* (Москва) **50, 56**; *И. Романовский* (Лида) **50—52**; *И. Рузин* (Ленинград) **49—51**; *И. Савенков* (п. Лысые Горы Саратовской обл.) **49, 50**; *С. Сафронюк* (Ровно) **56**; *В. Семенов* (Киев) **56**; *В. Середа* (Львов) **56**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **49, 51**; *С. Смирнов* (Ташкент) **53**; *Г. Солдак* (Минск) **50**; *Д. Сорока* (Запорожье) **56**; *А. Сромин* (Ленинград) **49—51**; *С. Стешенко* (с. Малоданиловское Харь-

(Окончание см. на с. 57)

Л. Виленкина, Г. Звенигородский

IV Всесоюзная летняя школа юных программистов

В этой статье подробно рассказывается о работе школы юных программистов, проходившей в июле — августе в Новосибирском академгородке. Наши читатели узнают, какие задачи могут порой решать совсем юные программисты. Для учащихся нашей Заочной школы программирования статья закрепит освоение языка Робик и подготовит к изучению языка Рапира, которое начнется в «Кванте», 1980, № 1.

С 26 июля по 10 августа 1979 года в Новосибирском академгородке проходила IV Всесоюзная летняя школа юных программистов, в работе которой участвовало более 120 школьников. Среди них были представители Харькова и Находки, Киева и Ангарска, Ленинграда и Москвы и многих других городов нашей страны.

Торжественное открытие Школы состоялось в Малом зале Дома ученых Сибирского отделения АН СССР, где часто проходят научные съезды, симпозиумы и конференции. Перед участниками Школы выступили председатель Научного совета по проблемам образования при Президиуме СО АН СССР, ректор Новосибирского университета академик В. А. Коптюг, заведующий отделом информатики ВЦ СО АН СССР, научный руководитель Летней школы член-корреспондент АН СССР А. П. Ершов и другие ученые.

На лекционных и семинарских занятиях, проходивших в Новосибирском университете, школьники познакомились с современными языками и системами программирования (Рапира, Паскаль, Сетл, Поплан), с системой машинной графики Шпага, позволяющей выполнять на ЭВМ различные рисунки, схемы чертежи, изготовлять диапозитивы, снимать мультипликационные фильмы. Юным программистам рассказывали о различных способах и приемах программирования, их учили применять ЭВМ для решения самых разнообразных задач, работать на различных внешних устройствах, пользоваться архивными системами Краб и Хамелеон.

Пожалуй, самыми интересными были практические занятия: в течение нескольких дней школьники получили возможность работать в ВЦ СО АН СССР — одном из лучших в стране вычислительных центров, оборудованном самой современной техникой.

Во время работы Школы были проведены две конференции, на которых школьники рассказали о своих работах и узнали о результатах работы своих товарищей. Большинство представленных на конференции работ выполнялось по заказам промышленных предприятий, научно-исследовательских институтов, учебных заведений. Такие работы имеют не только учебное, но и большое практическое значение. Результаты некоторых из них опубликованы в научной литературе или рекомендованы к публикации по итогам Школы.

О некоторых работах, получивших дипломы первой, второй и третьей степени, мы расскажем в этой заметке.

Как обучить ЭВМ языку?

В Новосибирской школе юных программистов, как и в Заочной школе программирования «Кванта», учащиеся, освоившие учебный язык Робик, приступают к изучению более сложных языков программирования, обладающих большими возможностями и позволяющих решать не только учебные, но и практически важные прикладные задачи. Один из таких языков — учебно-производственный язык Рапира — будет описан на ближайших уроках Заочной школы программирования.

Задача *Анатолия Величко* (Новосибирск, 8 кл.) состояла в том, чтобы научить этому языку вычислительную машину БЭСМ-6. Составленная им программа переводит все конструкции Рапиры в конструкции языка Поплан, который машина БЭСМ-6 понимает. Пожалуй, самая сложная часть работы заключалась в организации работы с памятью.

На уроках Заочной школы уже рассказывалось о том, как работать с памятью на языке Робик. Имеющееся в этом языке предписание присваивания позволяет записать в блок памяти одно число или одну строку текста. Для того чтобы запомнить в памяти ЭВМ таблицу или список чисел (например, страницу школьного журнала с оценками), в Робике нужно выделять отдельный блок памяти для каждой клетки таблицы и придумывать для этого блока новое имя.

Понятно, что гораздо удобнее было бы поместить всю таблицу в один и тот же блок памяти. Однако для работы с таблицей, хранящейся в таком блоке, нужно, очевидно, уметь заполнять и читать отдельные ее клетки, то есть работать не только с блоком памяти в целом, но и с отдельными его частями.

В большинстве языков программирования предусмотрена возможность работы с таблицами, в каждой клетке которых записано число. Но во многих программах нужно хранить вперемежку в одном блоке памяти разные объекты (числа, тексты, таблицы и т. д.). Например, информация о каждом химическом элементе в таблице Менделеева содержит атомный номер элемента (число), название (строка текста), обозначение (строка текста) и атомный вес (число) (рис. 1). Конечный набор объ-

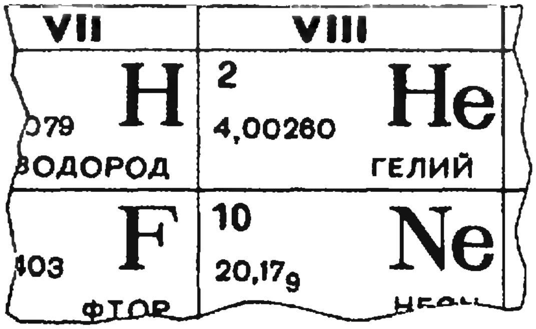


Рис. 1.

ектов, расположенных в определенном порядке, называется в математике *кортежем*. Например, изображенную на рисунке клетку таблицы Менделеева можно представить таким кортежем:

⟨2, 'Гелий', 'Не', 4.00260⟩

Чтобы прочитать в памяти отдельный элемент кортежа, нужно назвать имя блока и указать порядковый номер нужного элемента. Например, если приведенный здесь кортеж записан в память под именем А, то его первый элемент (число 2) обозначается А [1], а запись А [3] обозначает третий элемент кортежа, то есть текст 'Не'.

Один кортеж может быть элементом другого кортежа. Например, всю таблицу Менделеева удобно записать в один блок памяти в виде большого кортежа, каждый элемент которого — это маленький кортеж, описывающий отдельную клетку:

⟨1, 'Водород', 'Н', 1.0079⟩,

⟨2, 'Гелий', 'Не', 4.0026⟩,...

В памяти машины приходится хранить также и неупорядоченные наборы объектов, т. е. просто множества. Процедуры работы с памятью, разработанные Анатолием Величко при реализации языка Рапира, позволяют не только записывать множества и кортежи в памяти ЭВМ и выбирать из них отдельные элементы, но и выполнять различные математические операции над ними, например, находить объединение и пересечение множеств и т. п.

Юрий Ширман (Харьков, 8 кл.) решал более частную задачу: как освободить блок памяти, если хранящаяся в нем информация больше не нужна. Иметь такую возможность очень важно. Довольно часто случается так, что вся память машины заполнена и новую информацию некуда записать, хотя часть старой уже не нужна и ее можно стереть. В некоторых языках и системах сделать это довольно просто, но в системе ДОС ЕС, с которой работали харьковские школьники, такая возможность не предусмотрена. Юрий написал на языке PL-1 серию процедур, позволяющих программисту в любой момент запросить блок памяти нужного размера или освободить занятый блок.

Семиклассница *Наталья Глаголева* (Новосибирск) занималась усовершенствованием языка Поплан — одного из распространенных диалоговых языков программирования. Существенный недостаток этого языка состоит в том, что текст процедуры, записанной в память ЭВМ, невозможно ни проверить, ни исправить: если в процедуре обнаружена ошибка, то всю процедуру нужно запоминать заново. Разработанная Наташей программа позволяет изменять и исправлять тексты процедур примерно так же, как это делается в Робике.

Бельчонок ведет поиск

Огромную помощь специалистам самых различных отраслей знания оказывают диалоговые информационные системы, позволяющие быстро найти и проанализировать нужные сведения. При разработке таких систем важно уметь хранить информацию в форме, удобной для машины, а общение (диалог) с машиной организовать в форме, удобной для человека. Как правило, эти системы обслуживают специалистов, хорошо знающих свою науку, но слабо знакомых с программированием, поэтому вопросы и ответы при работе системы должны формулироваться так, чтобы они были понятны такому специалисту. Скажем, химик поймет вопрос «Чему равен атомный вес?», но формулировка «Назовите четвертый элемент такого-то кортежа» его явно не устроит — ведь он не обязан помнить, в каком блоке и под каким номером хранится интересующая его информация. Мы расскажем о трех информационных системах, представленных на конференцию.

Бесспорно, наибольший интерес вызвала диалоговая система для анализа структуры белковых соединений «Бельчонок».

Как известно, белки состоят из аминокислот, соединенных в цепочки, порой очень длинные (от нескольких десятков до нескольких тысяч).

Различных же аминокислот немного — около двадцати. Составы многих белков известны: они занесены в специальные каталоги в виде кортежей аминокислот.

Задача системы «Бельчонок» состояла в том, чтобы по обнаруженному в ходе эксперимента «обрывку» белковой цепочки выяснить, в состав каких белков она могла бы входить. Разумеется, это можно сделать «вручную» — перебрав все справочники и каталоги, — но это займет много времени, и, главное, всегда сохраняется опасность, что что-то пропущено.

По заказу Института органической химии СО АН новосибирские восьмиклассники *Татьяна Вайнштейн* и *Анатолий Величко* разработали систему «Бельчонок», которая выполняет эту работу гораздо быстрее и качественнее. Если раньше на нее иногда уходило несколько дней, то теперь машина находит нужную информацию за несколько секунд.

В памяти ЭВМ постоянно хранятся необходимые сведения о белках: структура белка, название, физические и химические свойства и ссылка на литературу, в которой он подробно описан.

Каждая аминокислота обозначается буквой латинского алфавита, например *A* — аланин, *V* — валин и т. п.; структура каждого белка представлена в виде последовательности букв, то есть в виде строки текста.

Под действием некоторых химических реактивов (ферментов) молекулы белка разрываются в определенных местах. Для того чтобы запомнить эту информацию, каждый рассматриваемый фермент обозначается цифрой, которая ставится в месте разрыва. Если бы существовал, например, белок Б1 всего из двух различных аминокислот *A* и *V* и под действием ферментов 1 и 2 он разрывался бы так, как это изображено на рисунке 2, то его структура записывалась бы в виде строки

'*AV*1*V*2*AA*1*A*2*VA*1*VV*'

Остальные сведения о белке также хранятся в виде строки, а информация о каждом белке — как кортеж из строк.

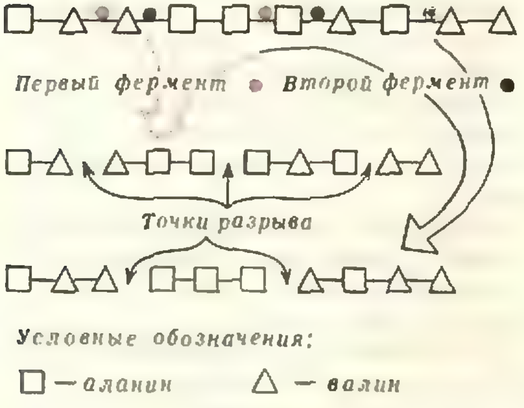


Рис. 2.

Для того чтобы сообщить системе, какая именно информация требуется в данный момент, предусмотрены несколько директив. Например, по директиве ПОИСК машина отпечатает список всех белков, в которых встречается заданный участок структуры, по директиве ЗНАК — перечислит участки, на которые распадается молекула белка под действием определенного фермента, а директива СПРАВКА позволяет получить сведения о нужном белке: узнать его структуру, физические и химические свойства, найти ссылку на литературу, где этот белок описан подробно.

Предположим, что информация о придуманном нами белке Б1, структура которого изображена на рисунке 2, хранится в памяти ЭВМ. Тогда протокол диалога с машиной мог бы выглядеть так (настоящий протокол мы не приводим, так как он занял бы слишком много места из-за большой длины аминокислотных цепочек в настоящих белках)

```
— ПОИСК
— КАКАЯ    КОНФИГУРА-
ЦИЯ ВАС ИНТЕРЕСУЕТ?
— AV

—БЕЛОК          ПОЗИЦИЯ
Б1.........................1
Б1.........................6
Б1.........................8
B12......................197
...*)
```

---

*) Далее машина печатает все белки, содержащие конфигурацию *AV* и ее позицию, по той же схеме.

Член-корреспондент АН СССР А. П. Ершов и юные программисты

```
ЖДУ ВАШИХ УКАЗАНИЙ
— ЗНАК
— КАКОЙ БЕЛОК ВАС ИН-
ТЕРЕСУЕТ?
— Б1
— ЗНАК РАЗРЫВА?
— 1
— AV, VAA, AVA, VV
ЖДУ ВАШИХ УКАЗАНИЙ
— СПРАВКА
— КАКОЙ БЕЛОК ВАС ИН-
ТЕРЕСУЕТ?
— Б1
— ЧТО ВАС ИНТЕРЕСУЕТ:
СТРУКТУРА, ЛИТЕРАТУРА
ИЛИ КОММЕНТАРИЙ?
— ЛИТЕРАТУРА
— ЖУРНАЛ КВАНТ № 12
1979 Г
ЖДУ ВАШИХ УКАЗАНИЙ
— КОНЕЦ
— СИСТЕМА БЕЛЬЧОНОК
РАБОТУ ЗАКОНЧИЛА
ДО СВИДАНИЯ!
```

Две другие информационные системы представили на конференцию харьковские школьники. Шестиклассница *Наталья Вольфовская* разработала программу для работы с научной литературой в библиотеках. Программа позволяет быстро получить список всех книг и статей, относящихся к заданной теме.

А программа «Индекс», разработанная *Алексеем Карножицким* и *Игорем Розенбергом* (8—9 кл.), предназначена для получения справок о почтовых индексах. Интересная особенность программы состоит в том, что ею можно пользоваться с любого домашнего телефона: достаточно набрать номер — и телефон подключается к ЭВМ. После этого машине сообщается название нужного города. Его приходится кодировать, поскольку телефонный диск не очень удобен для набора текста. Можно, например, вместо каждой буквы набирать ее номер по алфавиту, но это займет довольно много времени.

Был предложен менее трудоемкий способ: достаточно набрать номера первой и последней букв в названии города и общее число букв в названии. В ответ на такой запрос ЭВМ включает магнитофонную пленку с того места, где записан почтовый индекс нужного города. Эта система разработана по заказу харьковского почтамта.

Второклассник обучает ЭВМ

Несложную, но красивую программу, позволяющую моделировать на ЭВМ простейшие ядерные реакции, разработали самые юные участники конференции — второклассник *Леонид Рабинович* и третьеклассник *Сергей Гавриленко* из Новосибирска.

Известно, что в ядерных реакциях синтеза при слиянии ядер двух атомов может получиться ядро нового химического элемента. Его атомный номер, то есть число протонов в ядре, будет равен сумме атомных номеров участвующих в реакции элементов. Это простое правило и положено в основу программы.

В памяти ЭВМ постоянно хранится таблица Менделеева. Программа запрашивает в диалоговом режиме обозначения и атомные веса участвующих в реакции ядер, находит по таблице их атомные номера, вычисляет атомный номер элемента, получающегося в результате реакции, и по той же таблице находит его обозначение. Вот пример диалога с этой программой в процессе моделирования реакции синтеза гелия (рис. 1):

— ОБОЗНАЧЕНИЕ ПЕРВОГО ЭЛЕМЕНТА?
— H
— АТОМНЫЙ ВЕС?
— 1
— ОБОЗНАЧЕНИЕ ВТОРОГО ЭЛЕМЕНТА?
— H
— АТОМНЫЙ ВЕС?
— 3
— РЕАКЦИЯ:
H+H=He
РЕЗУЛЬТАТ РЕАКЦИИ:
НАЗВАНИЕ — 'ГЕЛИЙ',
ОБОЗНАЧЕНИЕ — 'He',
АТОМНЫЙ ВЕС — 4

После незначительных усовершенствований эту программу можно использовать на уроках физики при изучении ядерных реакций и строения атома.

Модель машины Тьюринга

Программа *Виталия Цикозы* (Новосибирск, 7 кл.) предназначена в основном для студентов, изучающих теорию алгоритмов и теоретическое программирование. В этих дисциплинах широко используется представление о так называемой *машине Тьюринга* — универсальном логическом устройстве с очень простой системой команд.

В теоретических исследованиях такая «машина» иногда оказывается удобнее настоящих ЭВМ. Виталий подготовил программу, моделирующую на ЭВМ БЭСМ-6 работу машины Тьюринга. На экране терминала можно увидеть всю «конструкцию» машины: запоминающее устройство в виде движущейся ленты, головку записи и считывания и устройство управления. Составив программу для машины Тьюринга, студент может проследить на экране за работой этой программы во всех деталях (раньше проверить такие программы приходилось вручную).

ЭВМ создает мультфильмы

Пожалуй, наибольший интерес у всех участников и гостей конференции вызвала секция машинной графики. Семиклассница *Асия Салихова* (Новосибирск) рассказала о структуре учебной графической системы Шпага, разработанной ею вместе с восьмиклассницей *Натальей Соколовой*, и об особенностях работы с этой системой в разных языках программирования *).

Третьеклассница *Анна Вайнштейн* (Новосибирск) рассказала о том, как с помощью систем Шпага и СМОГ можно составлять програм-

---

*) Статья о системе Шпага, написанная ее разработчицами, будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала.

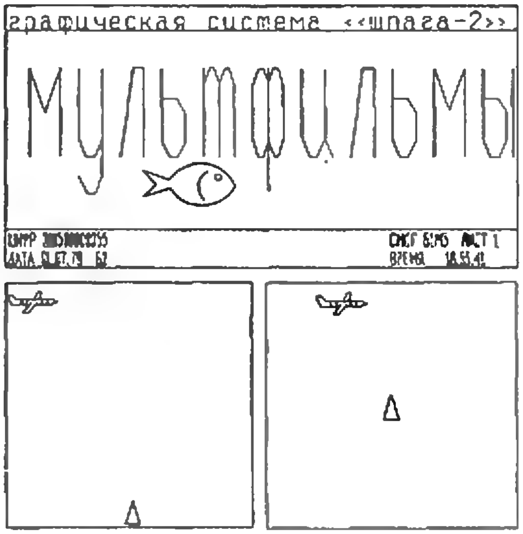


Рис. 3.

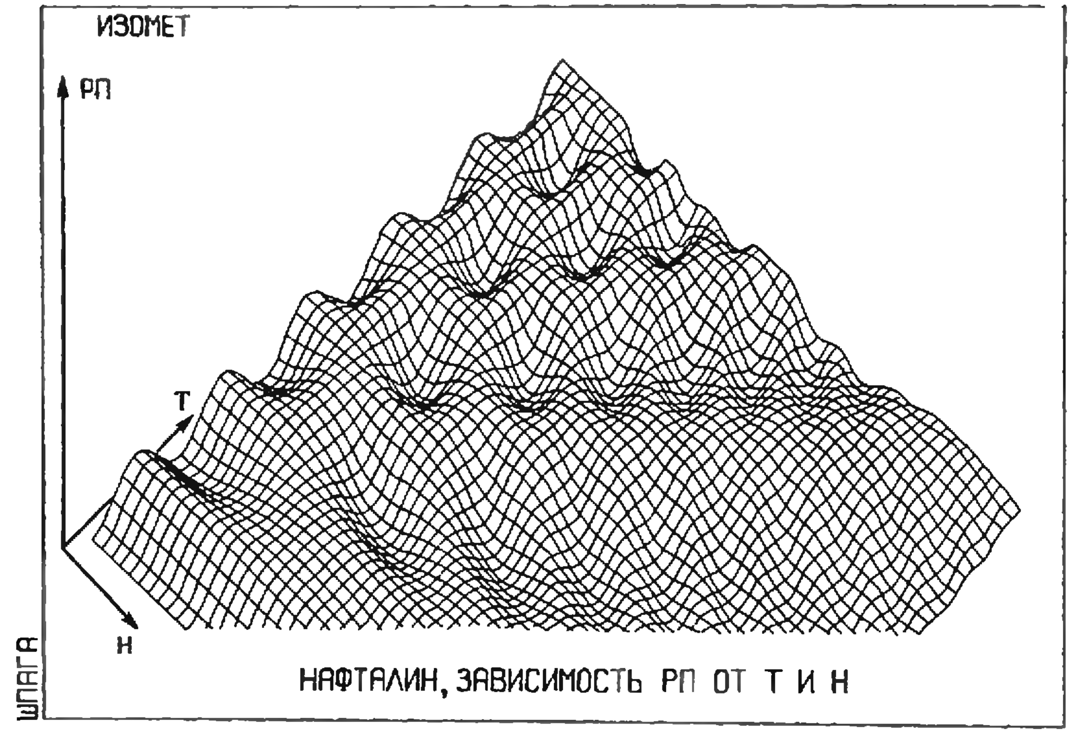


Рис. 4.

мы для изготовления на ЭВМ мультипликационных фильмов. После этого доклада был показан первый в СССР мультфильм, созданный школьниками младших классов с помощью ЭВМ. На рисунке 3 показана заставка этого мультфильма (рыбка проплывает при показе вдоль всего кадра) и два кадра из мульфильма «Ракета поражает самолет». В составлении программ для отдельных кадров этого фильма принимали участие *Сергей Гавриленко* (3 кл.) и *Володя Фишелев* (2 кл.).

Работа *Светланы Урюпиной* и *Анны Филатовой* (Новосибирск, 3—4 кл.) выполнялась по заказу сотрудников Института химической кинетики и горения СО АН СССР. Задача заключалась в том, чтобы построить серию графиков довольно сложных функций.

Школьницы успешно справились с заданием, удачно использовав при этом основные конструкции различных языков программирования. Например, координатная сетка, которая почти на всех графиках должна была выглядеть одинаково, изображалась с помощью отдельной процедуры, внутри которой применялось несколько циклических предписаний.

Функции, зависящие от двух переменных, для большей наглядности изображались двумя способами: во-первых, при помощи аксонометрической проекции (рис. 4), во-вторых, при помощи системы маркировки, позволяющей изобразить на одном рисунке несколько графиков, каждый из которых отмечен специальным значком (маркером) — рисунок 5. Для двух наиболее сложных функций были созданы мультфильмы, показывающие, как изменяется график при усилении магнитного поля.

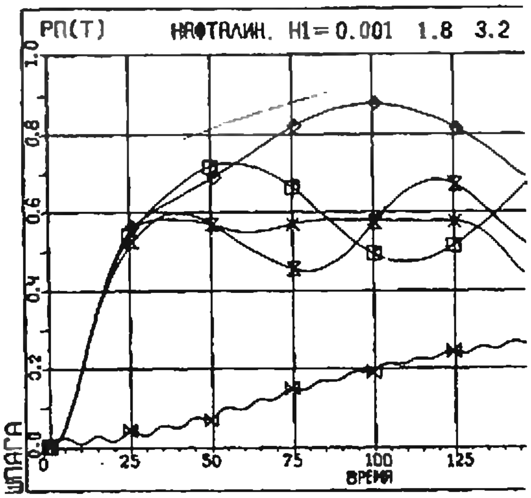


Рис. 5.

В общей сложности девочки составили свыше сорока процедур для построения восьмидесяти графиков.

Борис Слуцкий (Новосибирск, 7 кл.) разработал программу для изображения пространственной структуры белковых молекул. Взаимное расположение различных аминокислот в белковых молекулах играет большую роль в биохимии, и специалистам часто бывает нужно наглядно представлять строение той или иной молекулы. Борис не только «научил машину» рисовать отдельные молекулы на бумаге (рис. 6), но и разработал программу для съемки мультфильма, показывающего, как молекула поворачивается.

ЭВМ классифицирует

Большое внимание на конференции было уделено проблеме распознавания образов. Основная трудность этой проблемы заключается в том, что расплывчатые понятия «близко», «похоже» и т. п. нужно сделать настолько точными, чтобы можно было сформулировать и решить на машине соответствующие задачи.

Программа *Михаила Дуна* и *Андрея Кагала* (Харьков, 7 кл.) выполняет группирование деталей в технологически подобные группы. Каждая деталь имеет так называемую технологическую карту, в которой описано, каким образом нужно выполнить каждую из операций обработки. Если пронумеровать способы выполнения операции, то вместо карты можно написать «технологическое число», в котором каждая цифра говорит, каким образом нужно выполнить соответствующую операцию. Например:

1 — обработать фрезой № 1,
2 — обработать фрезой № 2;
1 — покрасить в синий цвет,
2 — покрасить в серый цвет.

Тогда 11 означает, что деталь нужно обработать фрезой № 1 и покрасить в синий цвет. Задача состоит в том, чтобы выбрать технологически подобные детали, то есть детали, для которых некоторые операции обработки совпадают. Программа позволяет решить эту задачу, выбирая детали, технологические числа которых имеют в определенных позициях одинаковые цифры.

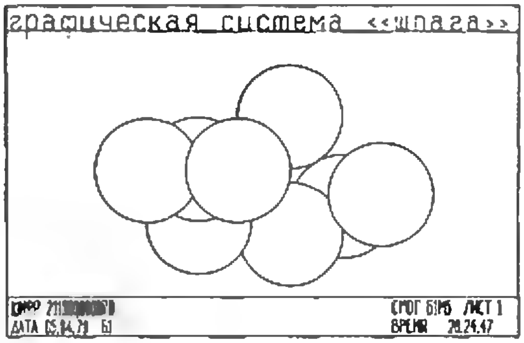


Рис. 6.

Более сложную задачу решали *Галина Шварц* и *Анна Беспрозванная* (Москва, 9 кл.). Они разработали программу, классифицирующую объекты в многомерных пространствах.

Общая формулировка задачи такова. Каждый из n объектов имеет k признаков, значение каждого признака — это число (например: объекты — различные заводы, а признаки — экономические показатели их работы). Тогда каждый объект можно представить себе как точку в многомерном пространстве: значения признаков будут координатами этой точки. В этом случае близкими можно считать точки, расстояния между которыми не слишком велики. Программа, составленная московскими школьницами, позволяет разделить заданный набор точек на несколько групп близких между собой точек, причем число таких групп задается заранее. Программа предназначена для применения в экономике промышленности при разделении предприятий на группы по величине, объему и ассортименту продукции.

Андрей Тартаковский (Харьков, 8 кл.) разработал программу, которая находит, с помощью какого аффинного преобразования один чертеж можно перевести в другой. Эта программа применяется психологами при изучении зрительной функции.

Дмитрий Гершуни (Москва, 9 кл.) написал программу, вычисляющую количество различных систем голосования. Ему удалось так организовать работу машины, что перебор 2^{15} вариантов происходит меньше чем за минуту.

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция!

К Вам обращается бывший школьник.

Я закончил школу два года назад. Это был первый год, когда школа выпускала по новой программе. После школы я служил в рядах Советской Армии, а сейчас хочу продолжить свое образование. Конечно, я многое забыл и самостоятельно подготовиться в институт мне трудно. Многие мои сверстники занимаются с репетиторами, но мне это не по карману. Есть ли какой-нибудь другой способ подготовиться в институт?

Ваш читатель В. Доронин

Вопрос о репетиторстве не нов. Эта проблема серьезно и обстоятельно рассматривалась и рассматривается на страницах газет и журналов, отражается в радио- и телепередачах. Наш журнал также поднимал вопрос о репетиторстве.

В этой статье мы хотим рассказать вам о системе подготовки абитуриентов в институты, осуществляемой государством, эффективность которой во много раз превышает эффективность занятий с репетиторами.

1. С 1969 года при высших учебных заведениях открыты *подготовительные отделения*.

На подготовительное отделение принимаются лица с законченным средним образованием из числа передовых рабочих, колхозников и демобилизованных из рядов Вооруженных Сил СССР. Рабочие и колхозники, направляемые на подготовительное отделение, должны иметь стаж работы не менее одного года, т. е. полных 12 месяцев ко дню начала занятий. Направленные на подготовительное отделение представляют заявление, направление с места работы (подписанное руководителем предприятия или командиром войсковой части), документ о среднем образовании (в подлиннике), характеристику, 6 фотографий (снимок без головного убора, размером 3×4) и медицинскую справку о состоянии здоровья (форма № 286).

Демобилизованный, не имеющий направления от командования воинской части и вернувшийся работать на то же предприятие, где он работал до призыва в армию, может поступить на подготовительное отделение по направлению этого предприятия, если общий стаж его работы (на данном предприятии) составляет не менее одного года по совокупности — до службы в армии и после демобилизации.

Прием на подготовительное отделение производится путем индивидуального устного собеседования, целью которого является не столько выяснение объема знаний поступающего на отделение, сколько выявление его потенциальных возможностей, общего уровня развития, определение степени сознательности выбора им данного вуза. При этом особо ценится более или менее близкое знакомство с выбранной им специальностью. Собеседование проводится по двум-трем предметам из числа изучаемых на подготовительном отделении данного института (более подробно о подготовительных отделениях вы можете прочитать в нашем журнале: «Квант», 1978, № 12, с. 47).

2. По решению Министерства высшего и среднего специального образования СССР практически при всех вузах страны организованы *очные и заочные курсы* по подготовке в институты. Эти курсы, как правило, платные, но плата за обучение минимальная (35 р. за весь цикл).

В качестве примера мы расскажем о работе подготовительных курсов при МИСИ им. Куйбышева (аналогично работают подготовительные курсы и при других институтах).

Основная задача курсов — помочь производственникам и демобилизованным воинам, имеющим значительный перерыв в учебе, повторить программу средней школы без отрыва от производства и подготовиться к сдаче вступительных экзаменов в вуз, а также помочь учащимся десятых классов более глубоко усвоить наиболее трудные вопросы школьной программы.

Занятия на курсах ведутся как по новой, так и по старой программам. Работа курсов проводится в несколько потоков с продолжительностью от 1 до 10 месяцев.

Занятия по математике и физике на очных подготовительных курсах проходят следующим образом. Абитуриентам читаются лекции по основным разделам курса; при этом основное внимание уделяется вопросам, часто вызывающим затруднения при ответах на экзаменах. По каждой пройденной теме регулярно проводятся практические занятия, на которых рассматриваются типовые задачи по данному разделу, а затем учащиеся сдают «домашнее задание», состоящее из 20—25 задач и списка теоретических вопросов. Прием «домашнего задания» по форме близок к вузовскому коллоквиуму.

Два раза в год (в январе — феврале и в мае) слушатели подготовительных курсов сдают письменные и устные зачеты. Эти зачеты проходят в обстановке, близкой к экзаменационной. Билеты зачетов составлены по типу экзаменационных, принимают зачеты члены предметных комиссий. Все это является хорошей психологической подготовкой будущих абитуриентов, помогает им оценить уровень требований на вступительных экзаменах в вуз, выявить недостатки в своих знаниях и своевременно принять меры для их устранения.

Прием на очные подготовительные курсы начинается 1 сентября и продолжается до 1 июля (на разные потоки). Поступающие на курсы представляют документ о среднем образовании или справку с места учебы, справку с места работы (для работающей молодежи), одну фотографию, квитанцию почтового отделения связи о перечислении 35 р. на расчетный счет института.

Для поступления на заочные курсы необходимо выслать в адрес курсов заявление на имя ректора (113114, Москва, Шлюзовая набережная 8, МИСИ, комн. 225а, подготовительные курсы).

Поступившим на заочные курсы институт высылает методические пособия по математике, физике, русскому языку и литературе, а также контрольные работы. Контрольная работа состоит из теоретических вопросов и задач. Изучение каждой темы заканчивается контрольной работой, которую слушатель должен выслать в указанные графиком сроки в институт.

В процессе выполнения контрольной работы слушатель может обращаться к преподавателям с вопросами теоретического и практического характера, а также посещать раз в месяц консультации.

Учащиеся заочных курсов, выполнившие контрольные работы, приглашаются перед экзаменами на очные курсы. Занятия проводятся ежедневно, кроме воскресенья, с 1 по 31 июля (абитуриенты обеспечиваются общежитием).

3. Вот уже в течение девяти лет работают *Московские телевизионные курсы по подготовке молодежи в вузы*, организованные совместно Центральным телевидением и Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

Подготовку телепередач и организацию занятий совместно с Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения осуществляют: на отделениях математики и физики — Московский инженерно-физический институт, на отделении русского языка — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Курирует работу телекурсов Совет ректоров высших учебных заведений г. Москвы.

На телекурсах в основном принята лекционная форма занятий, однако значительная часть телеуроков отводится под практические занятия, консультации и обзорные передачи. Телезанятия проводят ведущие ученые и преподаватели московских вузов. Учебные передачи сопровождаются демонстрациями экспериментов, физических приборов, показом фрагментов из кинофильмов, фотографий и т. п.

Для закрепления знаний слушателям регулярно предлагаются домашние задания, состоящие из задач, примеров и текстов различной трудности. Как правило, задания соответствуют тематике лекций; выполнение некоторых заданий требует использования знаний, полученных в течение всего предшествующего периода занятий. Домашние задания публикуются в еженедельном обозрении программ Центрального телевидения и радиовещания «Говорит и показывает Москва».

Ответы слушателей на домашние задания проверяются преподавателями курсов. Результаты проверки заносятся в картотеку, после чего почтовые карточки с ответами возвращаются адресатам. Кроме того, в течение года регулярно публикуются контрольные работы по пройденным темам и проводятся контрольные опросы во время телепередач.

На телекурсах проводятся очные зачеты: зимой (примерно в январе — феврале) и весной (в конце апреля — в мае). Наряду с приемом зачетов проводятся периодические очные консультации.

На очные зачеты и консультации вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Успешно сдавшие зачеты получают в конце учебного года Свидетельство об окончании Московских подготовительных телекурсов.

В 1979/80 учебном году слушателям еженедельно предлагаются передачи: в понедельник — по математике и по физике, во вторник — по русскому языку; в среду — по математике и по физике.

Передачи «Для поступающих в вузы» могут смотреть жители примерно 150 областных и районных центров Европейской части СССР, Украины, Белоруссии, Прибалтики, Молдавии, автономных республик Поволжья, районов Северного Кавказа и Северного Казахстана.

На подготовительные курсы принимаются все желающие. Прием на телекурсы проводится без конкурса; обучение — бесплатное.

Для поступления на телекурсы нужно прислать на телевидение заявление, написанное в произвольной форме, и указать — работает поступающий или учится. Кроме того, необходимо прислать конверт с маркой и обратным адресом; в этом конверте слушателю будет отослана регистрационная карточка с присвоенным ему шифром.

Слушателям курсов будут регулярно высылаться календарно - тематические планы и методические указания.

Адрес телекурсов: 113162, Москва, Шаболовка 37, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы.

М. Смолянский

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, вышедшие в IV квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Успенский В. А. *Машина Поста.* Объем 4 л., тираж 50 000 экз., цена 15 к.

Машина Поста — это очень простая «абстрактная» (т. е. воображаемая) вычислительная машина. На машине Поста можно запрограммировать — в известном смысле — любые алгоритмы. Изучение машины Поста можно рассматривать как начальный этап обучения теории алгоритмов и программированию.

Брошюра доступна и ученикам младших классов.

2. Арлазаров В. Л., Донской М. В., Адельсон-Вельский Г. М. *Машины играют в шахматы.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 65 к.

Работа посвящена одной из проблем так называемого искусственного интеллекта — созданию программ для машин, играющих в шахматы. Основной принцип таких программ — перебор позиций — является частным случаем общего метода перебора, широко применяемого при решении задач дискретной математики. В книге рассказывается о достигнутых успехах в этой области и о дальнейших перспективах.

3. Симонов Р. А. *Кирик Новгородец — ученый XII в.* Объем 6 л., тираж 30 000 экз., цена 40 к.

В 1136 году 26-летний новгородец Кирик написал научный трактат, посвященный единицам счета времени, основным понятиям календаря и использованию этих сведений в хронологии. Попутно древнерусский автор демонстрирует высокое уменье счета, производя точные вычисления с числами порядка десятков миллионов. В книге используются новые документальные данные о Кирике.

4. Стеклов В. А. и Кнейзер А. *Переписка.* Объем 7 л., тираж 15 000 экз., цена 50 к.

В книге рассказывается о жизни и деятельности двух известных ученых конца XIX — начала XX века: русского математика и механика В. А. Стеклова (1864—1924) и немецкого математика А. Кнейзера (1862—1930). Их обширная переписка интересна как своим научным содержанием, так и заключенным в ней историческим материалом.

5. Никифоровский В. А. *Из истории алгебры XVI—XVII столетий.* Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 65 к.

XVI и XVII столетия являются важным рубежом в развитии алгебры — был найден метод решения уравнений третьей и четвертой степеней и в основном завершена разработка алгебраической символики. Основной вклад в алгебру этого времени внесли Кардано, Виет, Декарт, Ньютон, Лейбниц. Анализу их творчества и посвящена настоящая работа.

6. Добровольский В. А. *Василий Петрович Ермаков.* Объем 5 л., тираж 15 000 экз., цена 35 к.

Научно-педагогическая и общественная деятельность В. П. Ермакова (1845—1922) оставила заметный след в истории математики и ее преподавания. Он был не только крупным ученым, но и автором многих интересных работ по методике математики, организатором и издателем «Журнала элементарной математики». В предлагаемой книге рассказывается о жизненном пути ученого и о его вкладе в различные отделы математики.

7. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. *Джон Непер (1550—1617).* Объем 12 л., тираж 15 000 экз., цена 90 к.

Книга содержит биографию и анализ творчества Джона Непера — одного из крупнейших математиков XVI—XVII столетий, изобретателя логарифмов.

Издательство «Просвещение»

8. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н., Стеценко В. Я. *Как научиться решать задачи.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В этой книге авторы пытаются научить читателя решать не какие-то конкретные задачи, а задачи вообще. Они приводят способы решения наиболее часто встречающихся школьных математических задач и некоторых задач повышенной трудности.

Издательство «Мир»

9. Фрид Э. *Элементарное введение в абстрактную алгебру.* Перевод с венг. Объем 20 л., тираж 75 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Книга крупного венгерского математика посвящена одному из наиболее важных и бурно развивающихся разделов современной математики — абстрактной алгебре. Написанная простым языком, она позволяет овладеть основными понятиями современной алгебры.

Физика

Издательство «Наука»

1. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика в примерах и задачах.* Для поступающих в вузы. Объем 20 л., тираж 300 000 экз., цена 80 к.

Книга занимает промежуточное положение между учебником и сборником задач и является логическим продолжением книги «Физика» тех же авторов, вышедшей в 1978 году.

В книге содержится в основном весь материал, входящий в программу вступительных экзаменов. Большое количество задач способствует лучшему пониманию материала.

2. Маковецкий П. В. *Смотри в корень.* Сборник любопытных задач и вопросов. Объем 18 л., тираж 300 000 экз., цена 80 к.

Эта книга выходит уже четвертым изданием, и популярность ее растет от издания к изданию. В книге собрано большое количество оригинальных задач. Почти в каждой задаче можно встретиться с некоторыми неожиданностями, чаще всего в ответе. Иногда неожиданность содержится в постановке вопроса или в подсказке его решения. Парадоксальность задач подчеркивается их юмористическим освещением и шуточными эпиграфами к ним.

3. Цесевич В. П. *Что и как наблюдать на небе.* Издание 5-е, переработанное. Объем 20 л., тираж 80 000 экз., цена 1 р.

Книга является хорошим пособием для организации любительских наблюдений над небесными светилами. Она содержит описание звездного неба, основных понятий астрономии и астрофизики, освещает современные данные о телах Солнечной системы — Луне и планетах, о Солнце и звездах.

В книге излагаются различные способы наблюдений, доступных любителю астрономии, и обработки этих наблюдений.

Издательство «Просвещение»

4. Космодемьянский А. А. *К. Э. Циолковский.* Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 25 к.

В книге рассказано о жизни и деятельности замечательного русского ученого Константина Эдуардовича Циолковского. Приведены интересные сведения о работах Циолковского по аэронавтике.

Издательство «Мир»

5. Девис П. *Пространство и время в современной картине Вселенной.* Перевод с английского. Объем 14 л., тираж 30 000 экз., цена 72 к.

В книге английского астрофизика П. Девиса в популярной форме рассказывается об истории развития и современном состоянии теории относительности, космологии, астрофизики высоких энергий.

6. Уокер Дж. *Физический фейерверк.* Перевод с английского. Объем 22 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 50 к.

Эта книга — первый сборник задач по физике, включенный в серию «Задачи и олимпиады», которую издательство «Мир» выпускает с 1975 года. В книге собрано свыше 600 оригинальных задач-вопросов на самые различные темы и ответы на них. Большинство задач связано с различными явлениями природы, встречающимися практически на каждом шагу. Правда, порой их или не замечают, или не думают о том, насколько они интересны.

И. Клумова, М. Смолянский

Наша обложка

Пятиконечная звезда

(см. 2-ю с. обложки)

Геометрическую фигуру «пятиконечная звезда» очень легко нарисовать, если уже построен правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 1). Можно, например, просто продолжить его стороны. У пятиконечной звезды $A_1B_1C_1D_1E_1$, как и у всякого звездчатого многоугольника, сторонами принято считать отрезки $[A_1C_1]$, $[B_1D_1]$ и т. д. (а не $[A_1B]$, $[BB_1]$ и т. д.), вершинами — только точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Пятиконечная звезда имеет пять конгруэнтных углов:

$A_1\widehat{D_1}B_1$, $B_1\widehat{E_1}C_1$,...

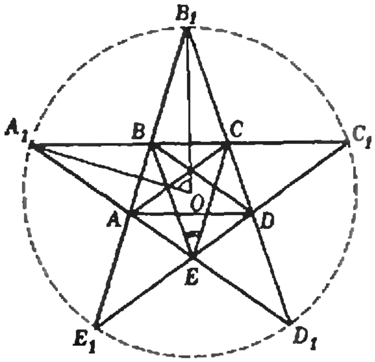


Рис. 1.

Исходный пятиугольник $ABCDE$ является пересечением этих углов. Пятиконечную звезду из пятиугольника $ABCDE$ можно, конечно, получить, и соединяя отрезками прямых его вершины.

Мы строили пятиконечную звезду, исходя из правильного пятиугольника. А нельзя ли обойтись без него? На рисунке 2 приведено такое построение с помощью циркуля и линейки.

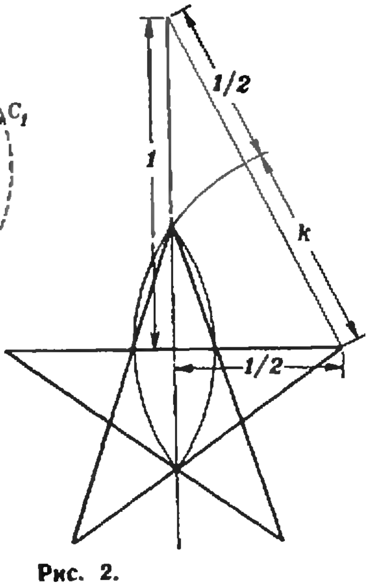


Рис. 2.

В. Тихонов

И. Слободецкий

XI Международная физическая олимпиада школьников

В начале июля Москва принимала участников и гостей XI Международной физической олимпиады школьников. В нашей стране такая олимпиада проводилась во второй раз, впервые Советский Союз был организатором Международной физической олимпиады в 1971 году.

На олимпиаду в Москву приехали школьники, точнее — выпускники школ, из десяти европейских стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Финляндии, ФРГ, Чехословакии и Швеции. Команда каждой страны состояла из пяти участников и двух руководителей.

В состав команды СССР вошли призеры XIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике:

Сергей Гордиенко — выпускник школы № 2 г. Смолевичи,

Максим Цыпин — выпускник школы № 2 г. Москвы,

Сергей Шпилькин — выпускник школы-интерната № 18 при МГУ,

Олег Ющук — выпускник школы № 145 г. Киева,

Игорь Ясонов — выпускник школы-интерната № 18 при МГУ.

Руководителями команды были старший научный сотрудник Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР В. А. Орлов и младший научный сотрудник этого же института С. М. Кабардина.

Проведение Международной олимпиады — дело довольно трудное. Достаточно сказать, что было необходимо подобрать задачи, обеспечить перевод задач на три языка (официальных языков олимпиады было четыре — русский, английский, немецкий и французский), организовать проверку работ, написанных на различных языках, составить интересную программу встреч и экскурсий. Поэтому задолго до начала олимпиады был создан

Оргкомитет олимпиады и началась ее подготовка. Председателем Оргкомитета была заместитель министра просвещения СССР М. И. Журавлева. Большую помощь в подборе задач оказали члены методической комиссии Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников.

Непосредственным проведением соревнований олимпиады руководила Международная комиссия, в которую входили руководители всех команд. Возглавлял комиссию заведующий кафедрой физики Московского физико-технического института вице-президент Европейского физического общества (ЕФО) профессор Сергей Петрович Капица.

Соревнования олимпиады проходили в два этапа. 6 июля участники олимпиады решали три теоретические задачи (на их решение давалось пять часов), а 8 июля — выполняли экспериментальную работу (в течение четырех часов). Приводим их условия.

Теоретические задачи

1. Космический корабль массой $M = 12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h = 100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается реактивный двигатель. Скорость вылетающих из сопла ракеты газов $u = 10^4$ м/с. Радиус Луны $R_Л = 1{,}7 \cdot 10^3$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л = 1{,}7$ м/с^2.

1) Какое количество топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабля он опустился на Луну в точке B (рис. 1)?

2) Во втором варианте прилунения кораблю в точке A сообщается импульс в направлении на центр Луны, чтобы перевести корабль на орбиту, касающуюся Луны в точке C. Какое количество топлива необходимо израсходовать в этом случае?

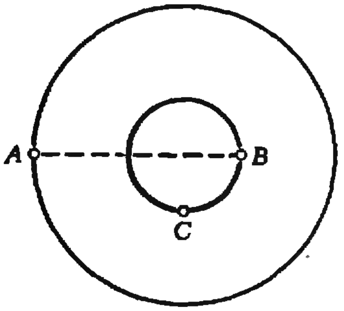


Рис. 1.

2. Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. Один раз взвешивание производится в сухом воздухе, второй раз — во влажном при давлении паров воды $p_в = 15{,}2$ мм рт. ст. Общее давление ($p = 760$ мм рт. ст.) и температура ($t = 20$ °C) воздуха в обоих случаях одинаковы. При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их точность $m_0 = 0{,}1$ мг? Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7$ г/см^3, латуни $\rho_2 = 8{,}5$ г/см^3.

3. В советско-французском эксперименте по оптической локации Луны импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda = 0{,}69$ мкм направлялось с помощью телескопа с диаметром зеркала $D = 2{,}6$ м на лунную поверхность. На Луне был установлен отражатель, который работал как идеальное зеркало диаметром $d = 0{,}2$ м, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливался тем же телескопом и фокусировался на фотоприемник.

1) С какой точностью должна быть установлена в этом эксперименте оптическая ось телескопа?

2) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зафиксирована фотоприемником.

3) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n = 100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, равна $E = 1$ Дж?

4) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha = 10\,\%$ падающего света равномерно в телесный угол 2π стерадиан.

Расстояние от Земли до Луны $L = 3{,}8 \cdot 10^8$ м, диаметр зрачка принять равным $d_{зр} = 5$ мм. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Экспериментальная задача

Перед вами «черный ящик». Определить его электрические параметры.

В вашем распоряжении источник постоянного тока с напряжением около 5 В, источник переменного тока с частотой 50 Гц и напряжением на выходе около 30 В, два универсальных прибора для измерения силы тока и напряжения постоянного и переменного токов (один из приборов может быть использован как омметр), переменный резистор, соединительные провода.

Мы не будем приводить здесь решения теоретических задач, так как все они вошли в Задачник «Кванта» (Ф608—Ф610). Остановимся лишь на экспериментальной задаче.

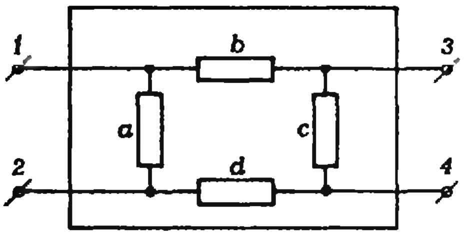


Рис. 2.

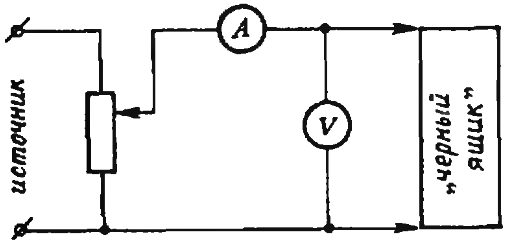


Рис. 3.

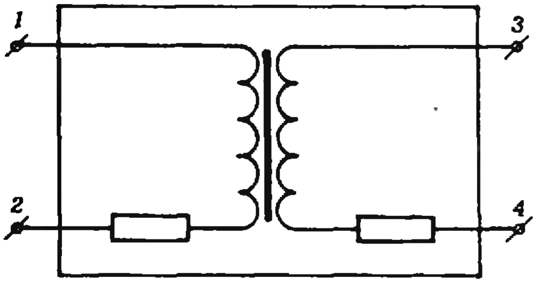


Рис. 4.

Прежде всего нужно было определить содержимое «черного ящика». Естественно было начать с измерения сопротивлений R между всеми парами выводов при постоянном токе. Это позволило составить схему, показанную на рисунке 2, и предположить, что элементы b и d — конденсаторы, а элементы a и c — резисторы или какие-то комбинации резисторов и катушек индуктивности (поскольку лишь сопротивления R_{12} и R_{34} оказались отличными от нуля).

Сопротивления можно было измерять омметром, но лучше было собрать цепь, изображенную на рисунке 3, и, меняя напряжение на входе с помощью переменного резистора, построить график зависимости тока I от напряжения U. По этому графику можно было найти сопротивление между соответствующими выводами, а также убедиться в том, что внутри «черного ящика» нет ни источников тока (график зависимости I от U проходит через начало координат), ни диодов (для этого надо было изменить полярность подключения источника).

От участников олимпиады требовалось также оценить погрешность измерения сопротивлений R_{12} и R_{34} и оценить минимально возможные значения сопротивлений между другими парами выводов.

Вторым этапом работы было измерение *импедансов* Z, то есть сопротивлений при переменном токе. Для этого опять следовало воспользоваться схемой, приведенной на рисунке 3, и построить графики зависимости тока от напряжения. Измерения показали, что и в этом случае лишь на участках 1—2 и 3—4 импедансы не равны нулю, причем $Z_{12} > R_{12}$ и $Z_{34} > R_{34}$. Это позволило сделать иной вывод о содержимом «черного ящика» (рис. 4) — внутри него находится трансформатор, к обмоткам которого последовательно подключены резисторы (при параллельном соединении катушки индуктивности и резистора $Z < R$).

Затем нужно было определить различные параметры «черного ящика». Так как сопротивления R_{12} и R_{34} уже были определены, а частота переменного тока задана, то по импедансам Z_{12} и Z_{34} нетрудно было найти индуктивности катушек и обнаружить их зависимость от напряжения (последнее связано с изменением магнитной проницаемости сердечника трансформатора). Потом надо было проверить, нет ли индуктивной связи между катушками, найти коэффициент трансформации ($k = U_{12}/U_{34}$) и указать максимальное рабочее напряжение трансформатора (при котором еще несущественно насыщение сердечника трансформатора).

Нужно было оценить также максимально возможные значения емкостей между клеммами 2 и 4, 1 и 3.

Интересно заметить, что по данным опытов можно было определить, как намотаны обмотки трансформатора — в одну сторону или нет. Для этого достаточно было сравнить направления отброса стрелок вольтметров, подсоединенных к обмоткам трансформатора, при подключении к одной из обмоток источника постоянного тока. К сожалению, этого не сделал ни один участник олимпиады.

Как обычно, решение каждой теоретической задачи оценивалось 10 баллами, а экспериментальной — 20 баллами. Проверка показала, что участники олимпиады хорошо справились с первой и второй теоретическими задачами: первую задачу решили половина участников, вторую — 44 из 50. Гораздо более трудной оказалась третья задача: ее решили лишь 9 человек. С экспериментальной задачей успешно справились половина участников. Максимальное количество баллов (43 из 50) получил Максим Цыпин (команда СССР).

Торжественным было закрытие олимпиады, на котором председатель Международной комиссии С. П. Капица вручил награды призерам олимпиады. От Академии наук

Участники и руководители советской команды (слева направо): С. Гордиенко, В. А. Орлов, М. Цыпин, С. М. Кабардина, О. Ющук, И. Ясонов, С. Шпилькин.

СССР тепло поздравил призеров академик И. К. Кикоин.

Дипломами I степени было отмечено восемь участников олимпиады: *Иван Ганьчев* (НРБ), *Калиной Павол* (ЧССР), *Анджей Прашмо* (ПНР), *Золтан Кауфман* (ВНР), *Максим Цыпин* (СССР), *Сергей Шпилькин* (СССР), *Олег Ющук* (СССР), *Игорь Ясонов* (СССР). Все они получили также специальные призы. Четырем участникам олимпиады были вручены дипломы II степени и призы, четырнадцати участникам — дипломы III степени и призы. Среди награжденных дипломом III степени — *Сергей Гордиенко*. Пятнадцати участникам олимпиады были вручены похвальные грамоты.

Олег Ющук получил специальный приз — самому юному участнику олимпиады — от журнала «Советская женщина». За лучшее решение второй теоретической задачи специальным призом журнала «Техника — молодежи» отмечен *Ларс Уландер* (Швеция). *Тимо Туулиниеми* (Финляндия) и *Микс Хартмут* (ГДР) получили специальные призы журнала «Техника — молодежи» за лучшее выполнение экспериментальной задачи.

Большой интерес к олимпиаде проявило Европейское физическое общество. Лучшие из каждой команды получили книгу о будущем физики, выпущенную ЕФО, и приглашение приехать на молодежный научный семинар, который проводит в Италии это общество.

Участники олимпиады осмотрели Москву, побывали на экскурсиях в Кремле, Горках Ленинских, ВДНХ.

В заключение отметим, что международные олимпиады школьников, без сомнения, приносят огромную пользу и участникам, и организаторам. Они дают возможность будущим физикам познакомиться со своими сверстниками из других стран. Помогают устроителям олимпиад из разных стран обменяться опытом со своими коллегами, увидеть свои успехи и недостатки, выявить уровень образования, к которому нужно стремиться, наладить творческие контакты. А главное — международные олимпиады школьников, как и все международные форумы, способствуют укреплению взаимопонимания и дружбы.

В. Мишин, А. Савин

XXI Международная математическая олимпиада школьников

XXI Международная математическая олимпиада, проходившая с 28 июня по 9 июля 1978 года в Великобритании, была одной из самых представительных олимпиад. В ней приняли участие команды 22 стран: Австрии, Бельгии, Болгарии, Бразилии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Греции, Израиля, Кубы, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии. В команде Бельгии был дополнительный участник от Люксембурга. В качестве наблюдателя присутствовал представитель Австралии.

По традиции команда каждой страны состояла из 8 школьников и 2 руководителей. Исключение составили команды Бразилии — 5 школьников, Вьетнама и Кубы — по 4 школьника. В команду СССР вошли победители Всесоюзной математической олимпиады: десятиклассники Мурман Амброладзе (ФМШ им. Комарова, Тбилиси), Александр Дегтярев и Илья Захаревич (оба из школы-интерната при ЛГУ), Игорь Лысенок, Андрей Ляховец, Сергей Хлебутин (все из школы-интерната при МГУ), Михаил Рудковский (школа-интернат при КГУ) и девятиклассник из Москвы Александр Разборов (школа № 2).

Поездке предшествовал месячный тренировочный сбор на базе экспериментальной школы АПН СССР в поселке Черноголовка Московской области. Поскольку состав команды был определен заранее (в команду вошли все 6 школьников, получивших на Всесоюзной олимпиаде первые премии по 10 классам, а также школьник, получивший лучшую первую премию по 9 классам, и школьник, получивший лучшую вторую премию по 10 классам), сбор носил лишь тренировочный характер, что избавило его участников от лишних волнений, связанных с дальнейшим отбором команды. На сборе изучались вопросы как теоретического, так и практического характера, в частности разбирались задачи предыдущих олимпиад. По традиции на сборах проводилась весьма содержательная культурно-воспитательная работа и интересные спортивные соревнования.

Еще до приезда школьников в Великобританию, 28 июня в г. Бристоле жюри олимпиады, состоящее из научных руководителей команд, начало работу по отбору задач. До 1 июля жюри отобрало 6 задач для соревнований из числа задач, присланных странами-участницами олимпиады. Задачи, сформулированные вначале на официальных языках олимпиады: русском, немецком, французском и английском, затем были переведены на языки стран-участниц олимпиады, с тем чтобы каждый школьник писал работу на родном языке.

Школьники вместе с педагогическими руководителями прибыли в Лондон 30 июня. Команды разместились в общежитиях Вестфилд-колледжа Лондонского университета. В аудиториях этого же колледжа 2 и 3 июля проходили и сами соревнования. В каждый из этих двух дней участникам предлагалось по 3 задачи.

Публикуем условия задач (в конце каждой задачи указывается страна, предложившая задачу, и количество очков за ее полное решение).

Первый день

1. Пусть p и q — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Доказать, что число p делится на 1979. *(ФРГ, 6 очков)*.

2. Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки A_iB_j ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) окрашены либо в красный, либо в зеленый цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, все стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Доказать, что все десять ребер оснований окрашены одинаково. *(Болгария, 7 очков)*.

3. На плоскости даны две пересекающиеся окружности C_1 и C_2. Пусть точка A — одна из точек их пересечения. Из точки A по окружностям C_1 и C_2 соответственно одновременно начинают двигаться точки M_1 и M_2. Точки движутся с постоянными скоростями в одном и том же направлении. После одного оборота обе точки одновременно возвращаются в точку A.

Доказать, что на плоскости существует неподвижная точка P такая, что расстояния от точки P до точек M_1 и M_2 равны в течение всего времени движения. *(СССР, 7 очков)*.

Второй день

4. Дана плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найти все точки R в плоскости π, для которых отношение $(|QP|+|PR|)/|QR|$ максимально. *(США, 6 очков)*.

5. Найти все вещественные числа a, для которых существуют вещественные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

(Израиль, 7 очков).

6. Пусть A и E — две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится кенгуру. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, кенгуру может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E, кенгуру останавливается и остается там. Пусть a_n — количество способов, которыми кенгуру может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Доказать, что

$$a_{2n-1} = 0, \qquad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$.

(Способом попадания из вершины A в вершину E за n прыжков называется последовательность вершин $(P_0, \ldots, P_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $P_0 = A$,
2) $P_n = E$,
3) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_i \neq E$,
4) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i и P_{i+1} — соседние вершины многоугольника.) *(ФРГ, 7 очков)*.

В каждый из дней на решение предложенных задач давалось по 4 часа.

4, 5 и 6 июля проходила проверка работ и координация оценок за работы. Проверку работ проводили руководители команд, а окончательная оценка выставлялась совместно с координаторами — английскими математиками. Школьники в это время знакомились с достопримечательностями Лондона.

После подведения итогов оказалось, что команда СССР набрала в сумме 267 очков и заняла первое место. На втором месте — команда Румынии (240 очков), на третьем — команда ФРГ (235 очков), на четвертом — Великобритания (218 очков), на пятом — США (199 очков).

В личном первенстве четверо участников набрали полное количество очков: А. Разборов и И. Захаревич (СССР), а также по одному участнику от команд Вьетнама и Чехословакии. Они и участники, набравшие более чем по 36 очков, всего 8 человек, получили первые премии. Вторыми премиями был награжден 21 участник — те, кто набрал от 29 до 36 очков, в том числе 4 участника команды СССР: И. Лысенок и М. Рудковский (по 36 очков), С. Хлебутин (35 очков) и А. Ляховец (34 очка). Третьими премиями были награждены участники олимпиады, набравшие от 20 до 28 очков, в том числе А. Дегтярев (27 очков); М. Амброладзе набрал 19 очков.

Следует отметить, что среди лучших десяти работ четыре были написаны советскими школьниками.

Анализ результатов команды СССР по задачам показывает, что наша команда ровно выступила по всем задачам, набрав от 73 до 100 процентов от возможного количества очков по отдельным задачам.

После закрытия олимпиады ее участники в течение двух дней были гостями Оксфордского университета. Они знакомились с многочисленными колледжами этого университета, одного из старейших в Англии, а также выезжали на экскурсию в Стратфорд — на родину В. Шекспира. Поздно вечером 9 июля команда СССР вылетела на Родину.

10 лет ФМШ МИИТа

Первого апреля 1979 года физико-математической школе при МИИТе исполнилось десять лет. Некоторая информация о ФМШ в «Кванте» уже публиковалась (1972, № 1 и 1974, № 8). Напомним, что школа возникла по инициативе Кировского РК КПСС, в связи с которой математический кружок при районном Доме пионеров, руководимый В. И. Коровиным, при активном участии В. И. Малахова был преобразован в вечернюю физико-математическую школу.

ФМШ работает на общественных началах. Общая учебная нагрузка школы достигает 5 тыс. часов в год, что потребовало бы 7 штатных единиц. Занятия проводятся дважды в неделю по 4 часа в 20—22 группах, по 15—25 человек в группе. Школу ежегодно заканчивают 70—100 человек, примерно 80% из них поступают в МИИТ. Работой школы руководит Совет ФМШ во главе с председателем Совета проректором МИИТа по учебной работе профессором А. М. Макарочкиным. Совет ФМШ работает в контакте с комитетом ВЛКСМ института, при котором имеется инструктор по вопросам ФМШ.

Основными задачами школы являются поиск и привлечение к занятиям наукой наиболее способных школьников, повышение уровня их математической культуры, привитие им навыков математического мышления, расширение их общего кругозора, оказание помощи абитуриентам при подготовке к конкурсным экзаменам в вузы (в частности, в МИИТ), привлечение к организационной и преподавательской работе студентов и аспирантов института. Формы обучения в ФМШ разнообразны: они включают лекции, практические занятия, дополняемые текущими домашними заданиями, специальные задания по некоторым разделам курса (рассчитанные на длительный срок), самостоятельную работу учащихся, факультативные семинары.

Для учащихся 8—10 классов читаются обзорные лекции, в которых рассказывается о различных факультетах и специальностях МИИТа. В числе лекторов профессора Е. С. Вентцель, А. Д. Мышкис, А. А. Юшкевич, доценты Т. А. Шульман, Э. Б. Кикодзе, Э. З. Шувалова, М. Н. Аршинов, З. С. Липкина, А. С. Дробот, В. Д. Козлов, ассистенты А. Белов, М. Штильман и другие. Школа работает в тесном контакте с кафедрой прикладной математики и опирается на коллектив студентов факультета «Автоматика и вычислительная техника». ФМШ МИИТа принимает активное участие в подготовке и проведении институтских олимпиад для школьников по математике и физике (в 1979 году проводилась 13-я олимпиада), а также в проведении Московских городских математических олимпиад и предолимпиадных консультаций. В 1979 году в МИИТе проводилась 42-я Московская математическая олимпиада для 9 классов. Жюри этой олимпиады отмечает, что МИИТ превратился в один из основных центров работы со школьниками в Москве.

Десятилетие ФМШ было отмечено днем математических развлечений, организованным для учеников ФМШ активом студентов—преподавателей школы и кафедрой прикладной математики. Импровизированную «торжественную часть» вели бывшие студенты МИИТа В. Каплун и А. Садовский. С краткими первоапрельскими речами выступили лекторы ФМШ Е. С. Вентцель, Л. Е. Садовский, Э. З. Шувалова, В. Д. Козлов и гости — зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский, представитель комитета ВЛКСМ МИИТа Е. Зябрев, вручивший студентам — активистам школы грамоты комитета, представители ФМШ других вузов, бывшие воспитанники школы. Преподавателям ФМШ были вручены изготовленные к юбилею значки школы. В фойе Дома культуры МИИТа работало «патентное бюро», принимающее заявки на новые проекты вечного двигателя, столы, за которыми предлагались старинные задачи, головоломки, представлялась возможность сыг-

Лекцию по физике читает А. Белов.

ШУМ — школьный универсальный магазин.

Сеанс одновременной игры проводит мастер спорта А. Моисеев.

рать в различные игры, в том числе в шашки с мастером спорта — студентом А. Моисеевым (в сеансе одновременной игры). С эстрады зрительного зала предлагались занятные задачи на сообразительность, была организована математическая эстафета. Каждый успех награждался «мудриками», на которые в ШУМе («школьном универсальном магазине») можно было приобрести математическую литературу с автографами авторов. Среди участников юбилейного дня было много бывших учеников ФМШ, ставших в последующем студентами МИИТа и преподавателями школы, а в настоящее время — ассистентами, научными работниками, инженерами различных учреждений. До сих пор они помнят о ФМШ МИИТа, любимой ими особенно потому, что работа в ней, как сказал один из ветеранов, «была делом, которые мы вели самостоятельно, с полной ответственностью и без препятствий к проявлению нашего энтузиазма».

Л. Садовский

Энциклопедия микромира

В первом квартале 1980 г. издательство «Советская энциклопедия» выпустит в свет книгу «Физика микромира». Эта книга — маленькая энциклопедия, посвященная основам квантовой физики. Книга охватывает обширный материал — от фундаментальных законов природы, управляющих движением и взаимодействием микрообъектов (элементарных частиц, атомов и т. д.) до законов поведения макроскопических тел, свойства которых определяются квантовым характером поведения слагающих их частиц.

Три большие статьи в начале книги — «Квантовая механика», «Квантовая статистика» и «Квантовая теория поля» — знакомят читателя с общей картиной физических законов микромира. Далее следуют в алфавитном порядке около трехсот статей, рассказывающих об отдельных понятиях, явлениях, физических объектах, о некоторых направлениях развития квантовой теории. Книга дополнена статьями «Ускорители», «Детекторы», «Спектроскопия», в которых описываются экспериментальные методы получения частиц высоких энергий, их регистрации, определения некоторых характеристик.

Книга написана популярно, но достаточно строго в научном отношении. В ее составлении принимали участие известные физики — популяризаторы науки.

«Физика микромира» рассчитана на широкий круг читателей — студентов, учителей средней школы и ПТУ, преподавателей техникумов и вузов. Многие статьи этой энциклопедии с большой пользой для себя прочтут учащиеся старших классов, интересующиеся физикой.

Г. Мякишев

Олимпиада в Омске

В апреле 1979 года состоялось заседание математической секции Омского городского научного общества учащихся. На заседании были подведены итоги II командной олимпиады школ города. Олимпиады такого типа проводятся в Омске с 1978 года силами студенческого научного общества Омского политехнического института и университета*). Командная форма ее проведения способствует развитию навыков коллективного творческого труда.

В нынешней олимпиаде участвовало 123 команды (по 5 учащихся 9—10 классов) из 95 школ города, а также гости из Братска и Ангарска. Жюри учитывало трудность задачи, законченность и количество способов решения, а также количество команд, решивших задачу, поэтому задача, решенная полностью, давала команде больше очков, чем несколько задач, в решениях которых были пробелы.

Лучшая работа оказалась у команды школы г. Ангарска; ненамного отстала первая команда школы № 88 г. Омска.

Приглашаем всех желающих на III командную олимпиаду, которая состоится в 1980 году.

Задачи олимпиады

1. Найти сумму первых ста чисел, встречающихся в обеих арифметических прогрессиях 17, 21, 25, ... и 16, 21, 26, ... (3 очка).

2. Решить уравнение $x=1-5(1-5x^2)^2$ (2 очка).

3. Дан квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$. Найти все значения a, b, c, при которых если $x=a$, то $y=a$, если $x=b$, то $y=b$, и если $x=c$, то $y=c$ (3 очка).

4. На плоскости заданы 4 точки. Все они соединены отрезками прямых. Доказать, что отношение длины наибольшего отрезка к длине наименьшего отрезка не меньше $\sqrt{2}$ (6 очков).

5. Даны последовательности

$$a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}},$$

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},$$

где $a_0>0$, $b_0>0$. Доказать, что они имеют общий предел, равный $\sqrt{a_0b_0}$ (4 очка).

6. Найти все тройки различных целых положительных чисел, сумма любых двух из которых делится на третье (6 очков).

7. Доказать, что если хотя бы одна из координат центра окружности иррациональна, то на этой окружности найдется не более двух точек, обе координаты которых рациональны (5 очков).

8. Двое пишут 20-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать? (5 очков).

9. При каких четных n существует многогранник, имеющий ровно n ребер? (2 очка). Тот же вопрос для нечетных n (4 очка).

10. Из цифр 1, 2, ..., 9 выбираются 4 цифры и из них составляются два наиболее близких друг к другу двузначных числа. Какое наибольшее значение может иметь модуль их разности? (6 очков).

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены наружу квадраты ABB_1A_1 и CBB_2C_2. Найти длину отрезка B_1B_2, если длина медианы BE равна m (3 очка).

12. Известен один из углов треугольника и длина высоты, выходящей из вершины этого угла. Как провести третью сторону, чтобы площадь треугольника была наименьшей? (3 очка).

13. Доказать, что уравнение $a^x+b^x=c^x+\alpha$, где числа a, b, c положительны и не равны единице, имеет не более трех различных решений (5 очков).

14. Решить уравнение $\sin^3 x\cdot\cos x-\cos^3 x\times\sin x={}^1/_4$ (1 очко).

15. В треугольнике ABC дано: $|AC|=b$, $|AB|=c$, $\hat{A}=2\hat{B}$. Найти $|BC|$ (2 очка).

А. Криворучко.
М. Немиченицер

---

*) См. «Квант», 1978, № 11, с. 60.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(Начало см. на с. 36)

ковской обл.) **51, 52**; *А. Строшинский* (Донецк) **56**; *А. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **53, 56**; *С. Суров* (Оренбург) **51**; *А. Тагаев* (Новосибирск) **51**; *М. Томашпольский* (Москва) **56**; *О. Трушин* (Кострома) **51**; *Л. Уткин* (Вологда) **51, 56**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **49—51, 56**; *А. Фарбер* (Баку) **56**; *Н. Федин* (Омск) **50, 51, 56**; *А. Федюкович* (Пинск) **49**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **51, 52**; *О. Хоружий* (Череповец) **51**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **51**; *В. Целиков* (Череповец) **49, 56, 57**; *А. Черныш* (ст. Лысогорская Ставропольского кр.) **53, 56, 57**; *А. Чечель* (Москва) **56**; *И. Швец* (Желтые Воды) **49, 56**; *А. Шершнев* (Краснодар) **56, 57**; *П. Шибаев* (Москва) **49, 52**; *А. Ширяев* (с. Рожествено МордАССР) **51**; *С. Шичанин* (Невинномысск) **50, 51**; *С. Шишков* (Москва) **56, 57**; *А. Шостаченко* (Кишинев) **56**; *Н. Штрешень* (Москва) **50**; *А. Эзериньш* (п. Кузьмолово Ленинградской обл.) **57**; *М. Эфроимский* (Ленинград) **49, 51, 57**; *В. Яровой* (Ленинград) **49, 51, 57**.

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются учащиеся седьмых классов и ПТУ. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их ближайших пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1980 г. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года. Все, успешно выполнившие задания, получают удостоверения об окончании ВЗМШ.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 1 февраля 1980 г. После проверки работ (примерно в июле 1980 г.) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительная работа обратно не высылается, рецензия на нее не выдается.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с полным почтовым адресом (этот листок будет наклеен на конверт с извещением Приемной комиссии ВЗМШ о результатах проверки вступительной работы).

На обложку тетради надо наклеить листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе работа проверяться не будет):

Область	Московская
Фамилия, имя	Иванов Петр
Год рождения	1966 г.
Класс, школа	7 класс «А» школы № 2 гор. Клина
Фамилия, имя, отчество учителя математики	Никаноров Владимир Алексеевич
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 1 Мать — домашняя хозяйка
Полный почтовый адрес	123456, Клин Московской обл., ул. Ленина 1, кв. 1.

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
									а)	б)

На территории СССР расположено 37 филиалов ВЗМШ. Учащиеся, проживающие на территории филиалов, должны присылать свои работы в соответствующие университеты или пединституты (адреса см. в «Кванте», 1979, № 2, с. 59).

Остальные школьники должны присылать работы по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, на конкурс.

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ».

«Коллективный ученик ВЗМШ» — это школьный математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ. Прием в группы проводится до 20 сентября 1980 года на два потока: для тех, кто с сентября 1980 года будет обучаться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в ВЗМШ без контрольной работы. Для организации группы достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся, заверенного директором школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, зав. сектором групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1980 году

1. В кружке, где Аня изучает математику, занимается более 94 % мальчиков. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

2. Можно ли из цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 составить десятизначное число так, чтобы все его цифры были различны и чтобы оно делилось на 1980?

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

4. Найдите три числа, если каждое из них равно квадрату суммы двух других.

5. В каждой вершине правильного восьмиугольника и в его центре поставлено одно из девяти чисел 1, 2, 3, ..., 9 так, что все эти числа использованы. Обозначим через c наибольший общий делитель четырех сумм троек чисел, поставленных по каждой из четырех диагоналей, проходящих через центр. Укажите все значения, которые может принимать c.

6. Можно ли расположить на плоскости пять кругов одинакового радиуса K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 так, что пересечения $K_1 \cap K_5$, $K_2 \cap K_5$ и $K_1 \cap K_4$ пусты, а все прочие попарные пересечения этих кругов непусты и конгруэнтны между собой?

7. Существует ли тысяча различных целых положительных чисел таких, что каждые два из них имеют общий делитель, больший единицы, а все числа в совокупности не имеют общего делителя, отличного от единицы?

8. На стороне AD квадрата $ABCD$ взята произвольная точка M и проведена биссектриса угла MBC до пересечения со стороной CD в точке K. Докажите, что разность длин отрезков MB и AM равна длине отрезка CK.

9. Существуют ли такие десять положительных чисел, что сумма квадратов этих чисел равна 1, а сумма всех их попарных произведений меньше, чем 0,01?

10. а) Пара чисел $(n_1; n_2)$, где $n_1 \leqslant n_2$, называется *осуществимой*, если квадрат можно разрезать прямой, проходящей через его внутреннюю точку, на n_1-угольник и n_2-угольник. Сколько таких пар?

б) Четверка чисел $(n_1; n_2; n_3; n_4)$, где $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$, называется *осуществимой*, если квадрат можно разрезать парой прямых, проходящих через его внутреннюю точку, на n_1-угольник, n_2-угольник, n_3-угольник и n_4-угольник. Сколько таких четверок?

Ж. Раббот

Новый прием на малый мехмат

Для учеников седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР (за исключением северных областей) и Белоруссии, объявляется прием на малый механико-математический факультет (МММФ) — заочную математическую школу при механико-математическом факультете МГУ, являющуюся отделением ВЗМШ.

Программа МММФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и учитывающая особенности вступительных экзаменов по математике на механико-математический факультет МГУ и в другие вузы, составлена под руководством профессоров факультета.

Занятия начнутся с 1 сентября 1980 года. Обучение на малом мехмате бесплатное. Срок обучения — 3 года.

Желающие поступить на малый мехмат должны выслать решение вступительной контрольной работы ВЗМШ не позднее 1 марта 1980 г. по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мех.-мат. ф-т, МММФ. Требования к оформлению работы не отличаются от требований ВЗМШ.

Участники областных олимпиад по математике могут быть приняты на малый мехмат на основании заявления и документа, подтверждающего участие в олимпиаде.

Для московских школьников работают Вечерняя математическая (7—9 кл.) и Воскресная подготовительная (10 кл.) школы. Справки о них по тел. 139-35-29.

И. Сергеев

Напечатано в 1979 году

Обращение в защиту мира 3 3
Алексей Иванович Маркушевич (некролог) 8 2
Праздник твоего учителя 10 2

* * *

Иванов Ю. Школа творчества 2 4
Смолянский М. Международные космические экипажи 4 2

Статьи по математике

Балк Г., Балк М., Болтянский В. Метод малых шевелений 4 4
Берколайко С. Интеграл помогает доказать неравенство Коши 8 26
Блехер П., Кельберт М. Алгоритмы классификации 6 2
Вирский А., Звонкин А. Овал, восьмерка, два овала ... 8 21
Голубов Б. Что такое ряд Тейлора? 5 2
Земляков А. Биллиарды и поверхности 9 2
Кириллов А., Климова И., Сосинский А. Сюрреальные числа 11 2
Кузьмин Е., Ширшов А. О числе *e* 8 3
Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов 2 9
Садовский Л., Аршинов М. Двоичное кодирование 7 14
Сорокин Г. Вычислим число *e* 8 8
Фукс Д. Лента Мёбиуса. Вариации на старую тему 1 2
Цаленко М. Комбинаторные задачи информационного поиска 12 6
Ширшов А., Никитин А. Обобщенная сумма углов многогранника 10 4

Статьи по физике

Белкин И. О Ньютоновских законах движения
  Масса 2 15
  Сила 4 10
Винокур Р. Домовой, колдун и ... резонатор Гельмгольца 8 18
Дагаев М. Исчезновение кольца Сатурна 9 15
Коткин Г. Почему плохо кричать против ветра? 2 5
Левашов А. Опыты Франка и Герца 6 9
Лешковцев В., Прошин М. На пути к энергетике будущего 10 15
Мандельштам Л. Почему физика нужна инженеру? 7 9
Мигдал А. Вычисления без вычислений 8 9
Михайлов А. Когда наступает полдень? 9 10
Новожилов Б. Тепловой взрыв 11 10
Смородинский Я. Альберт Эйнштейн (1879—1979) 3 4
Смородинский Я. Планеты движутся по эллипсам 12 13
Соколовский Ю. Сожжем энергию! 1 10
Тарасов Л. Открытие нейтрона 5 8
Урусовский И. Бег, ходьба и физика 10 8
Фабрикант В. Исаак Ньютон и яблоко 1 62
Фабрикант В. Леонид Исаакович Мандельштам 7 2
Черногор Т. После захода Солнца 5 15
Эйнштейн А. Автобиографические заметки 3 13
Эйнштейн А. $E=mc^2$: настоятельная проблема нашего времени 3 19
Эйнштейн глазами современников 3 16
Эйнштейн писал 3 21
Первая научная работа Максвелла 12 2

Лаборатория «Кванта»

Грабовский М. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний 2 23
Кабардин О., Шефер Н. Зонные пластинки 1 16
Кабардин О., Шефер Н. Самодельные дифракционные решетки 4 17
Майер В. Опыты с ложкой бульона 8 27
Майер В. Модели смерча 9 17
Шабанов С., Шубин В. О вихревых кольцах 11 17
Олимпиада дома 10 20

Математический кружок

Агеев С. Регулярное полимино 11 22
Ащеулов С., Барышев В. Погоня, столкновение, поимка 1 20
Беккер Б., Востоков С., Ионин Ю. 2-адические числа 2 26
Вагутен Н. Арифметические препятствия 3 22
Лопшиц А. Векторное решение аффинных задач 8 30
Поздняков С. «Теория вероятностей» без теории 6 14
Севрюк М. Вариации на тему классических неравенств 5 18
Шестопал Г. Как обнаружить фальшивую монету 10 21
Ширшов А. Об одной комбинаторной задаче 9 19
Янтаров И. Коммутирующие многочлены 4 19

Искусство программирования

Представляем новый раздел 9 44
Ершов А., Звенигородский Г. Зачем надо уметь программировать? 9 47
Виленкина Л., Звенигородский Г. IV Всесоюзная летняя школа юных программистов 12 37
Звенигородский Г. Заочная школа программирования
Урок 1 9 52
Урок 2 9 55
Урок 3 10 54
Урок 4 11 44

Задачник «Кванта»

Задачи
M541—M600; Ф553—Ф612 1—12
Решения задач
M420, M455, M494, M496—M519, M521—M531, M533, M534, M536—M544; Ф502, Ф504, Ф508—Ф545, Ф547—Ф557 1—12

* * *

Курдюмов Г. Консервативность бесконечного строя 7 33

* * *

Фамилии решивших 4,7,10,12
Победители конкурса «Кванта» 3 31
Премии «Кванта» 9 21

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—12

* * *

Гиндикин С. Арифметика на клетчатой бумаге 4 38
Михайлова Н. Емкости 9 34
Оре О. Простые числа Ферма 12 31
Савин А. Кое-что о выпуклости 1 42
Савин А. Число — буква — число 3 43
Савин А. Веселая викторина 8 50
Животные на ... плоскости 6 28
Новые картинки к калейдоскопу 8 52

* * *

Дозоров А. Шарик, который не сдувается 5 33
Дозоров А. Можно ли носить воду в решете? 10 40
Канаев П. Опыты с водой на морозе 11 37
Майер В. Электричество и ... температура 2 46
Тихонов В. Опыты с воздушными шариками 5 32

Наша обложка

Березин В. Филлотаксис и последовательность Фибоначчи 5 53
Березин В. Окружность девяти точек 8 36
Гамаюнов В. Пересекающиеся додекаэдры 5 54
Дубровский В. Не только игрушка 7 21
Колейчук В. Как построить дом? 5 54
Колейчук В. Трансформируемый куб 10 60
Медяник А. Модель многогранника Конелли 7 39
Тихонов В. Пятиконечная звезда 12 48
Однополостный гиперболоид 1 26
Сложный многогранник 1 27
Невозможные объекты 2 8
Постройте многогранник 3 50
Памятник нулю 8 37
Как разбить квадрат? 11 21

По страницам школьных учебников

Балк М., Ломакин Ю. Доказательство неравенств с помощью производной 10 36
Вавилов В. Сечения многогранников 1 36
Григоренко В. Когда критических точек слишком много 6 24
Гутенмахер В. Неравенства с фиксированной суммой 9 29
Дубровский В. Площадь поверхности по Минковскому 4 33
Земляков А. Проверь себя 7 37
Рыжик В. Как быть? 2 22
Рыжик В. Где ошибка? 3 41
Чернявский М. Задачи на геометрический смысл производной 2 40

Практикум абитуриента

Бевз Г. Задачи можно решать проще 11 41
Габович И. Векторы помогают на экзамене 1 45
Иванов В. Преобразование решений тригонометрического уравнения 12 34
Крайзман М. Заменим фигуру 5 34
Овчинников С. Если промежуток не замкнут ... 10 44
Овчинников С., Шарыгин И. Решение неравенств с модулем 2 48
Овчинников С., Шарыгин И. Нестандартные задачи по стереометрии 6 33
Розов Н. Читатели советуют 4 48
Сефибеков С. Доказательство геометрических неравенств 3 51
Суконник Я., Горнштейн П. Геометрические решения геометрических задач 9 38

* * *

Асламазов Л. Работа и мощность электрического тока 3 45
Асламазов Л. Закон сохранения импульса. Реактивная сила 10 49
Баканина Л. КПД тепловых и холодильных машин 1 50
Берюлева Н. Построение изображений в линзах и сферических зеркалах 5 39
Зайчиков Ю. Сила Лоренца и ее работа 2 52
Кузнецов Е. Глаз на вступительных экзаменах 6 30
Меледин Г. Можно ли проверить ответ? 7 41
Можаев В. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях 4 43

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Дальневосточный государственный университет (физический факультет)	4	54
Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева	6	53
Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина	4	52
Ленинградское высшее ордена Ленина Краснознаменное училище железнодорожных войск и военных сообщений им. М. В. Фрунзе	7	51
Ленинградский гидрометеорологический институт	7	52
Ленинградский кораблестроительный институт	7	54
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена	6	52
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина	7	55
Ленинградский институт точной механики и оптики	7	53
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова	3	54
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)	7	57
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе	6	43
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского	6	46
Московский автомобильно-дорожный институт	7	44
Московский архитектурный институт	4	55
Московский геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе	6	47
Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева	7	45
Московский инженерно-физический институт	1	53
Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии	6	48
Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской	6	50
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (математический факультет)	6	49
Московский институт стали и сплавов	5 6	49 39
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	5	44
Московский физико-технический институт	2	56
Московский институт химического машиностроения	7	46
Московский экономико-статистический институт	7	49
Московский институт электронного машиностроения	7	47
Московский институт электронной техники	6	41
Московский энергетический институт	6	45
Новосибирский государственный университет	5	47
Саратовский политехнический институт	7	57
Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники	6	54
Ярославский государственный университет	4	53
Спрашивайте — отвечаем	5 12	51 45

Рецензии, библиография

Болтянский В., Смолянский М. По страницам новой книги	8	54
Левитан Е. Путеводитель по звездным лабиринтам	8	58
Лешковцев В. У истоков атомной энергетики	4	59
Луканкин Г., Смолянский М. Подарок учителю и школьнику	5	55
Петраков И. Прекрасное собрание первоисточников по математике	9	63
Розов Н. С учетом специальности	8	53
Слободецкий И. Новая научно-популярная серия издательства «Наука» — Библиотечка «Квант»	9	62

* * *

Новые книги	4,6,9,12

Информация

VI Всероссийский слет юных рационализаторов и конструкторов	2	61

* * *

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу	1 2 12	58 59 58
Приглашаем на малый мехмат	2	58
Новый прием на малый мехмат	12	59
Заочная физико-техническая школа	1	59
Заочная школа при НГУ	8	62
Вечерняя физическая школа	8	62
Заочная физическая школа	9	58

* * *

ФМШ при МГУ — 15 лет	1	55
10 лет ФМШ МИИТа	12	55

* * *

Большаков В. Старейший технический вуз страны	8	59
Вашакмадзе С. У истоков олимпиадного движения	11	61
Встреча с читателями «Кванта»	6	38

* * *

Дагаев М. Полное лунное затмение 6 сентября 1979 года	8	35

Хроника НОУ

15 лет Челябинскому НОУ 3 56

Олимпиады

Международные олимпиады

XXI олимпиада по математике 12 53
XI олимпиада по физике 12 49

XIII Всесоюзная олимпиада

Олимпиада по математике 11 48
Олимпиада по физике 11 54
Призеры олимпиады 11 59

* * *

Всероссийская олимпиада школьников 10 58
Задачи республиканских олимпиад 10 61
Олимпиада в Омске 12 57

Смесь

Винокур Р. Дешевый ящик 5 21
Дмитриев Н., Ивлев В. Электрическая цепь извлекает квадратные корни 9 16
Епифанов А. Многоугольники и точки 8 37
Колмыков В. Где ошибка? 8 37
Митрофанов А. Построим овал 12 5
Михайленко Н. ... и фокус не удался 2 47
Михайленко Н. Где ошибка? 5 38
Мочалов Л. Домино-пасьянс 8 37
Мочалов Л. Ожерелье для шариков 8 37
Мочалов Л., Толкач П. Домино-пасьянс 4 56
Савин А. Геометрическое доказательство тождества $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 3 55
Сефибеков С. Где ошибка? 4 16
Слукин Л. Знаю ли я неравенства? 5 43
Еще одно доказательство теоремы о средних 5 21
Про светопровод 6 26
Заполним плоскость кривыми 9 43
Есть еще решения! 9 36
Энциклопедия микромира 12 56
Советуем купить! 4, 7, 9

Ответы, указания, решения

Преобразование решений тригонометрического уравнения

1. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{5}{4}\pi + 2\pi l\ (k, l \in Z)$.

2. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}l\ (k, l \in Z)$. 3. $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $x_2 = \frac{17}{12}\pi + 2\pi l\ (k, l \in Z)$.

4. $x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k\ (k \in Z)$. 5. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (k, l \in Z)$.

Построим овал

1. На отрезке AB (рис. 1) между фокусами найдите точку C, для которой $|AC| : |CB| = m : n$ (для этого сначала поделите $[AB]$ на $n+m$ равных частей). Пусть для определенности $n > m$. На отрезке CB возьмите произвольную точку M и постройте N так, чтобы $|CM| : |CN| = m : n$. Точки пересечения D и D' окружностей с центрами A, B и радиусами $|AM|$, $|BM|$ должны находиться на овале Декарта типа $m : n$. Меняя M, можно получить любое число точек на нем. Этот способ построения принадлежит Декарту.

2. Метод построения показан на рис. 2.

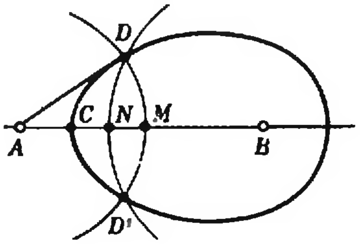


Рис. 1.

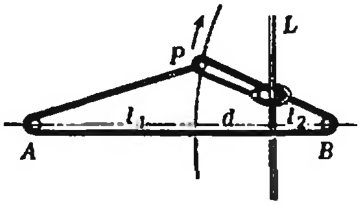


Рис. 2.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Данный прямоугольник можно разрезать двумя способами (красные линии на рисунках 3, *а* и 4, *а*; на рисунках 3, *б* и 4, *б* показано, как этими двумя частями оклеивается поверхность единичного куба).

3. В первой кучке было 15, во второй — 17, в остальных кучках — по 16 спичек.

4. Длины сторон треугольника обратно пропорциональны длинам опущенных на них высот (поскольку $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$); следовательно, в искомом треугольнике длины сторон равны a, $a/2$ и $a/3$ при некотором a. Однако $a/2 + a/3 = 5a/6$, что меньше a. Значит, искомого треугольника не существует.

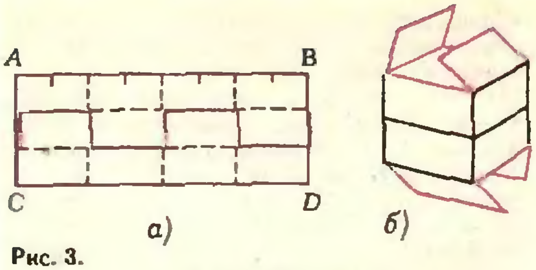


Рис. 3.

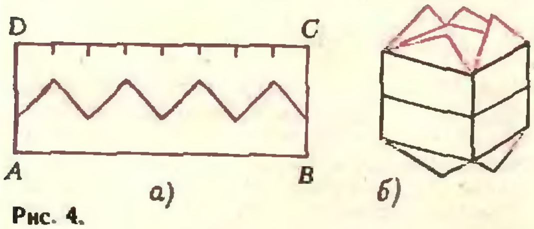


Рис. 4.

5. Сначала турист должен положить в кипящую воду четыре яйца. Через минуту вынуть два яйца и заменить их оставшимися двумя. Спустя еще три минуты вынуть два яйца, сваренных вкрутую ($1+3=4$), а на их место положить яйца, вынутые в первый раз, и варить еще минуту ($3+1=4$, $1+1=2$). Всего пять минут.

«Квант» для младших школьников

(см. с. 30)

1. а) $\begin{array}{r} +\,726\,951 \\ 531\,954 \\ \hline 1\,258\,905 \end{array}$; б) $\begin{array}{r} +\,239\,153 \\ 239\,153 \\ \hline 478\,306 \end{array}$.

2. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$12x+5y=100,$$

где x — число двухкопеечных марок, а y — пятикопеечных. Отсюда

$$y=20-\frac{12}{5}x,$$

то есть $x=5$, а $y=8$.

Таким образом, мальчик купил 50 однокопеечных, 5 двухкопеечных и 8 пятикопеечных марок.

3. Обозначим радиус окружности с центром в точке O через R, а радиусы окружностей с центрами в точках A, B и C через r_1, r_2 и r_3 (рис. 5). Тогда $|AO|=R-r_1$, $|AC|=r_1+r_3$, $|OC|=R-r_3$. Отсюда $|AO|+|AC|+|OC|=R-r_1+r_1+r_3+R-r_3=2R$.

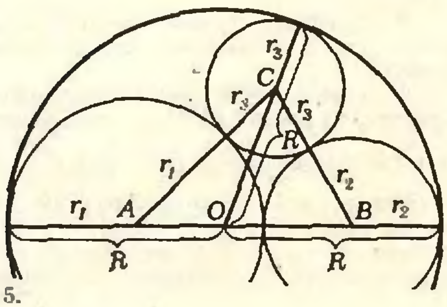


Рис. 5.

4. Оба утверждения Пети Иванова неверны, поскольку:

а) число 27 делится на 27, а сумма его цифр не делится;

б) числа 9972 и 9981 не могут одновременно делиться на 27, хотя сумма их цифр равна 27 (проверьте, что они оба на 27 не делятся).

Электровоз перегоняет вагоны

(см. «Квант» № 11, 3-ю с. обложки)

Электровоз Э загоняет Т в тупик, Ц — на место вагона Т и, пройдя мост, подходит к Ц с другой стороны. Вновь подцепив Ц, а затем и Т, электровоз выводит Т из тупика и ставит его на свое место, а Ц загоняет в тупик. Отцепив Ц и, пройдя через мост, Э подцепляет вначале Т, а затем и Ц. Оказавшись между Ц и Т, электровоз ставит вагоны на заданные места и возвращается в исходное положение.

Номер готовили
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шихановнч

Номер оформили
Л. Денисенко, М. Дубах, Э. Назаров,
И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

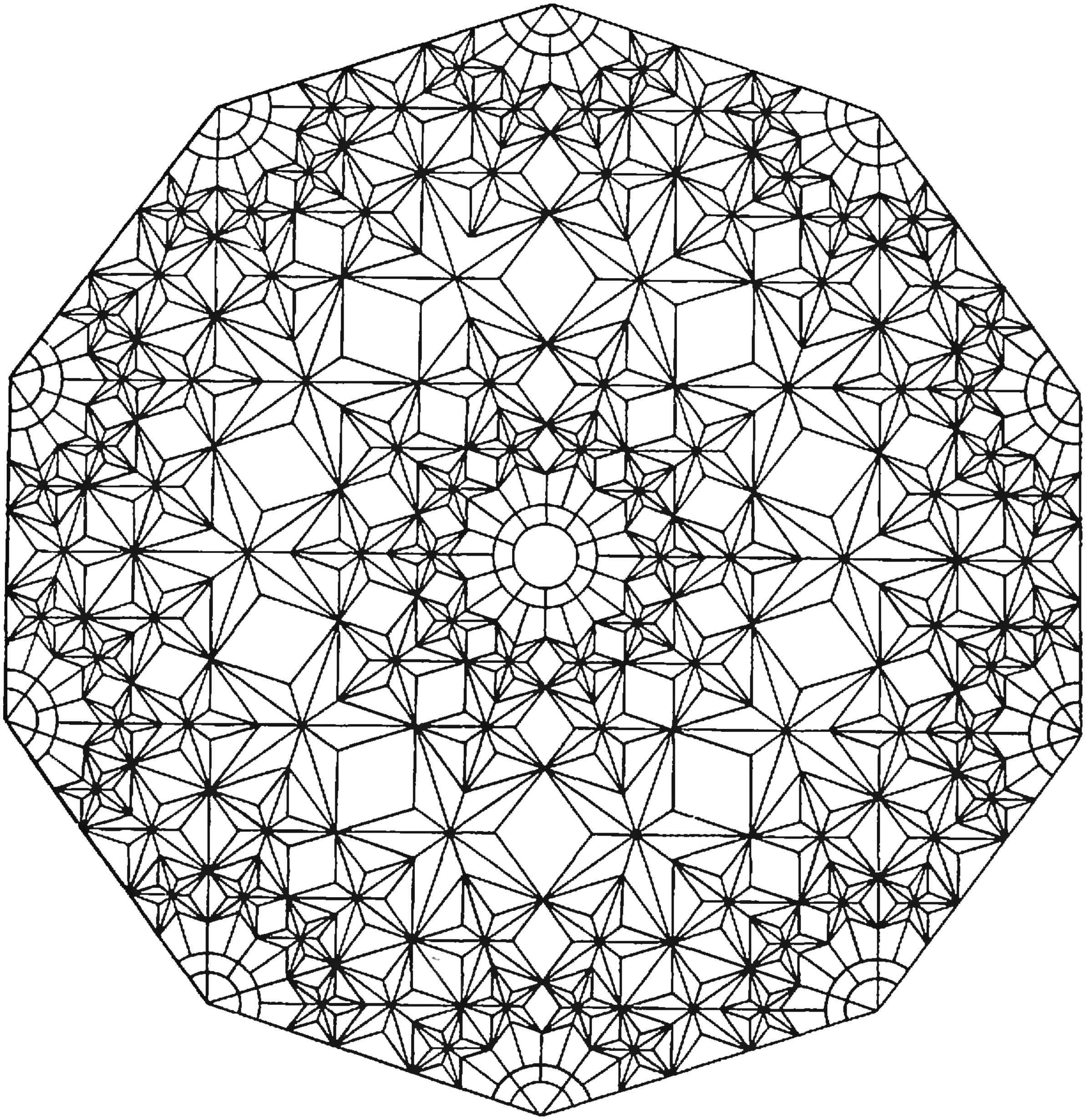
Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 2. 10. 79.
Подписано в печать 28. 11. 79.
Бумага 70 × 108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,7 Т-21506.
Цена 30 коп. Заказ 2285 Тираж 279 359 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли

г. Чехов Московской области

BeatriceGloria_personal library



Фигура на этой странице обложки составлена из ста пятиконечных звезд. О том, как построить пятиконечную звезду циркулем и линейкой, рассказывается на с. 48.

1.(доклад+оклад+клад+
+лад+ад+д):1977=бал.

2. доклад
+ оклад
клад
лад
ад
д

сумма „к"

3. полкан
полка +
полк
пол
по
п

сумма „н"

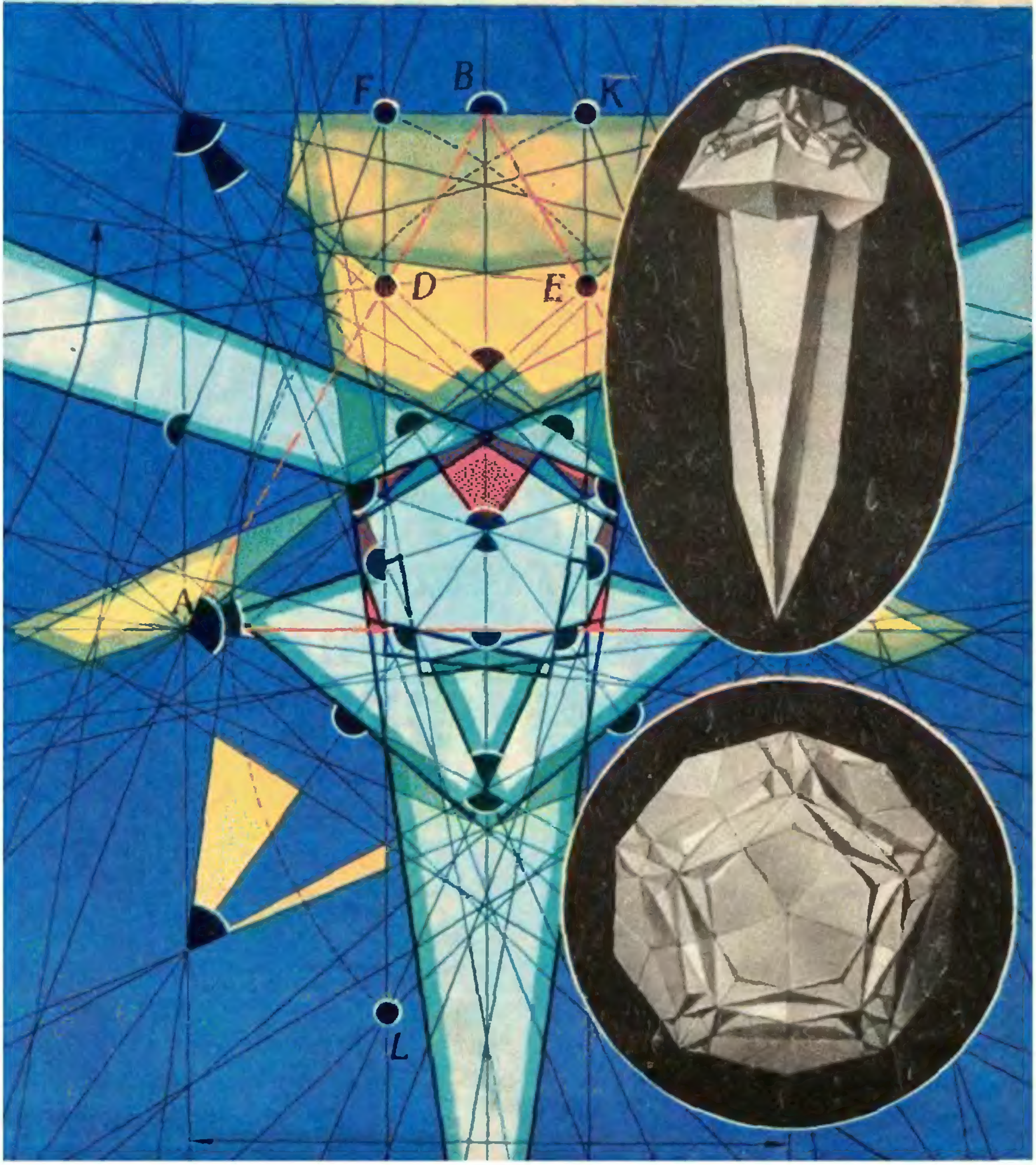
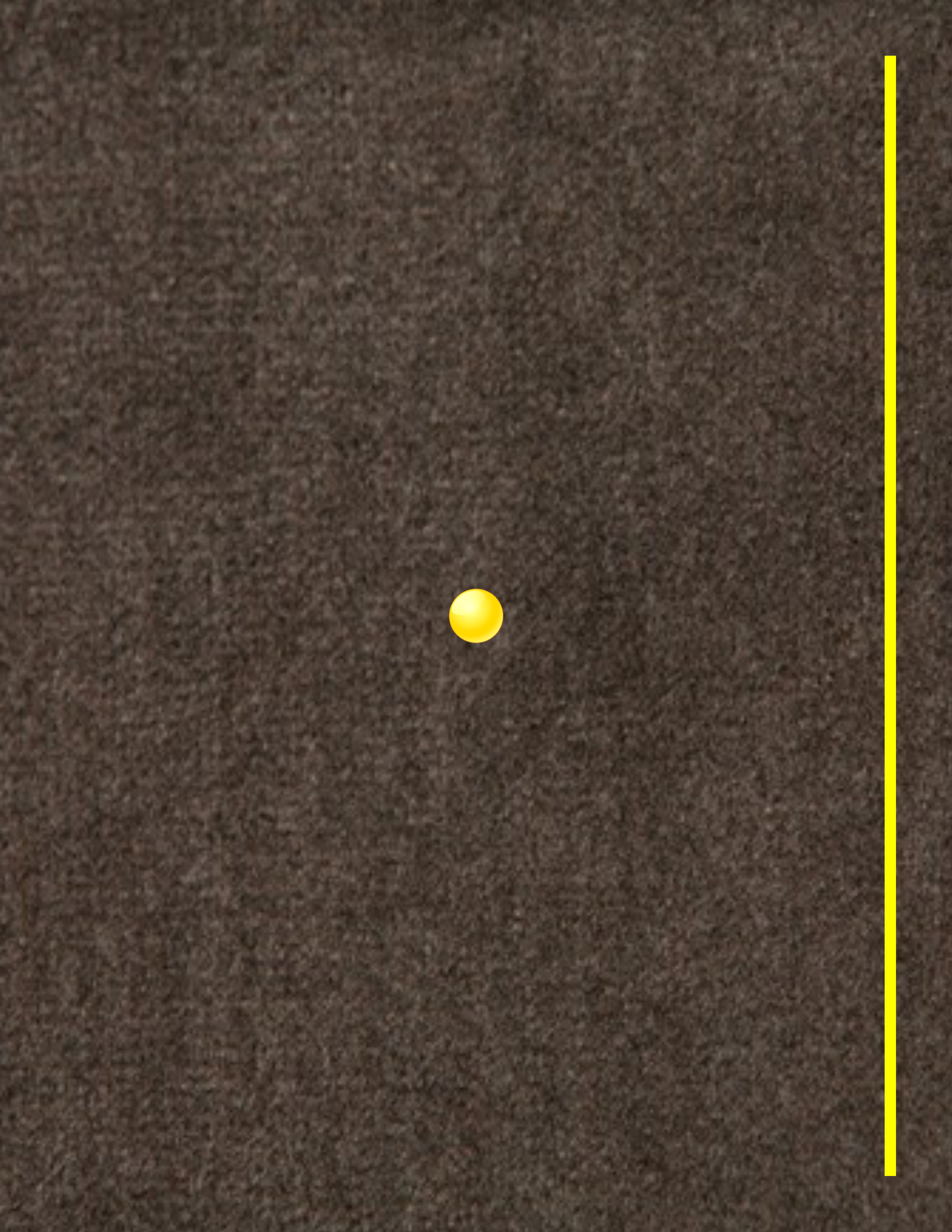
Здесь зашифрованы три арифметических примера, в каждом из которых разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые. Определите, каким числам соответствует слово ДОКЛАД в первых двух примерах, и расшифруйте третий пример.

А. Аленков, Н. Нестеренко

Индекс 70465
Цена 30 коп.

КОНСТРУИРОВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПО ЭПЮРЕ

На этой странице обложки показана эпюра, которую можно легко построить по «красному» правильному треугольнику. Дальнейшие построения отмечены штриховыми линиями. Используя отмеченные на эпюре дужками полюса, по ранее описанной методике (см. «Квант» № 3) можно приступить к конструированию разнообразных многогранников. Один из них — «Спутник» показан на 1-ой странице обложки. Его грани на эпюре покрашены в зеленый цвет (верхняя часть модели) и в желтый цвет (низ модели). Голубым цветом покрашены грани для многогранника «Факел» (верхняя модель), красным цветом — грани для звездчатого многогранника (нижняя модель).

В. Гамаюков